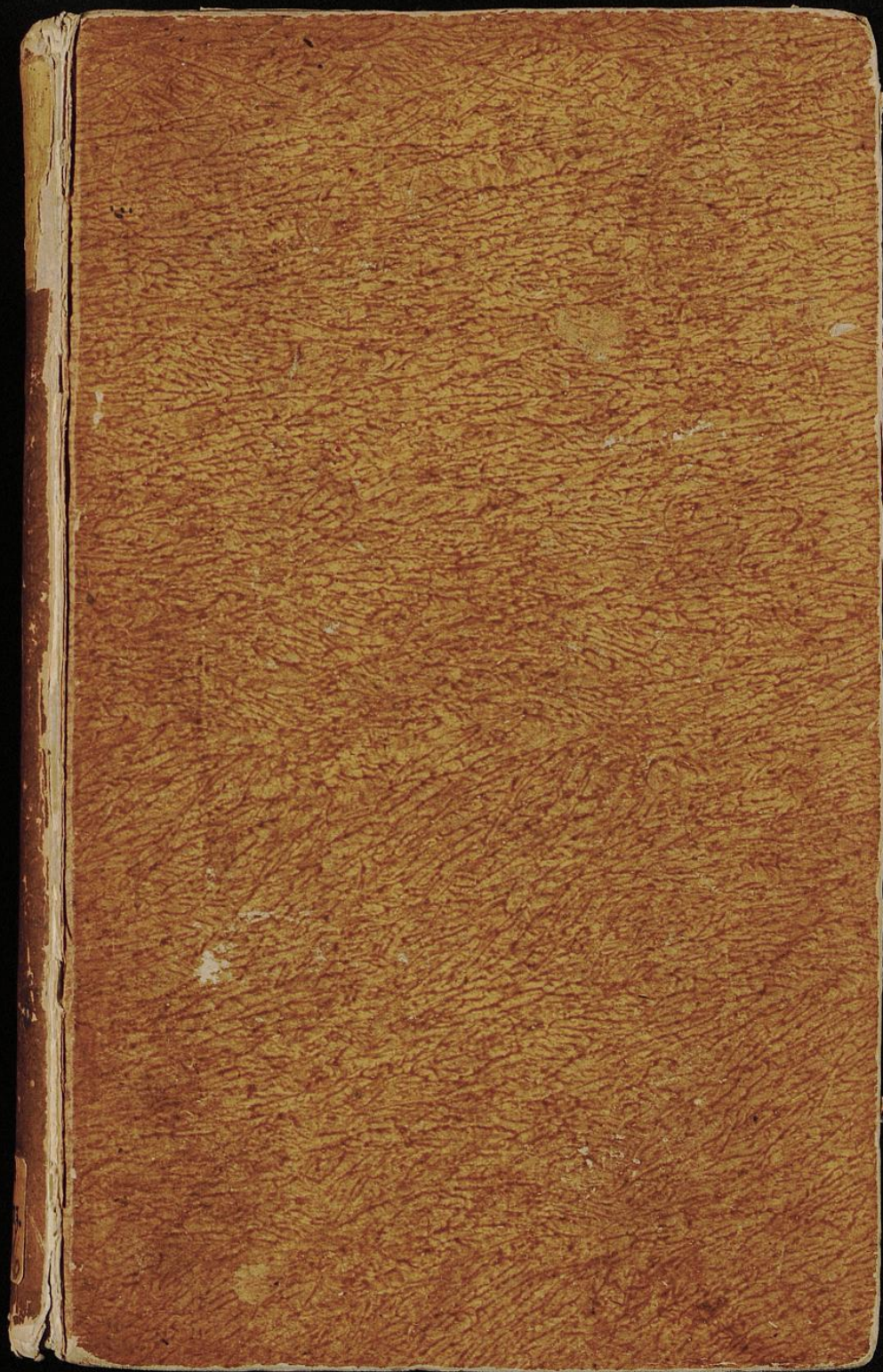




rad. 30.6.33 G

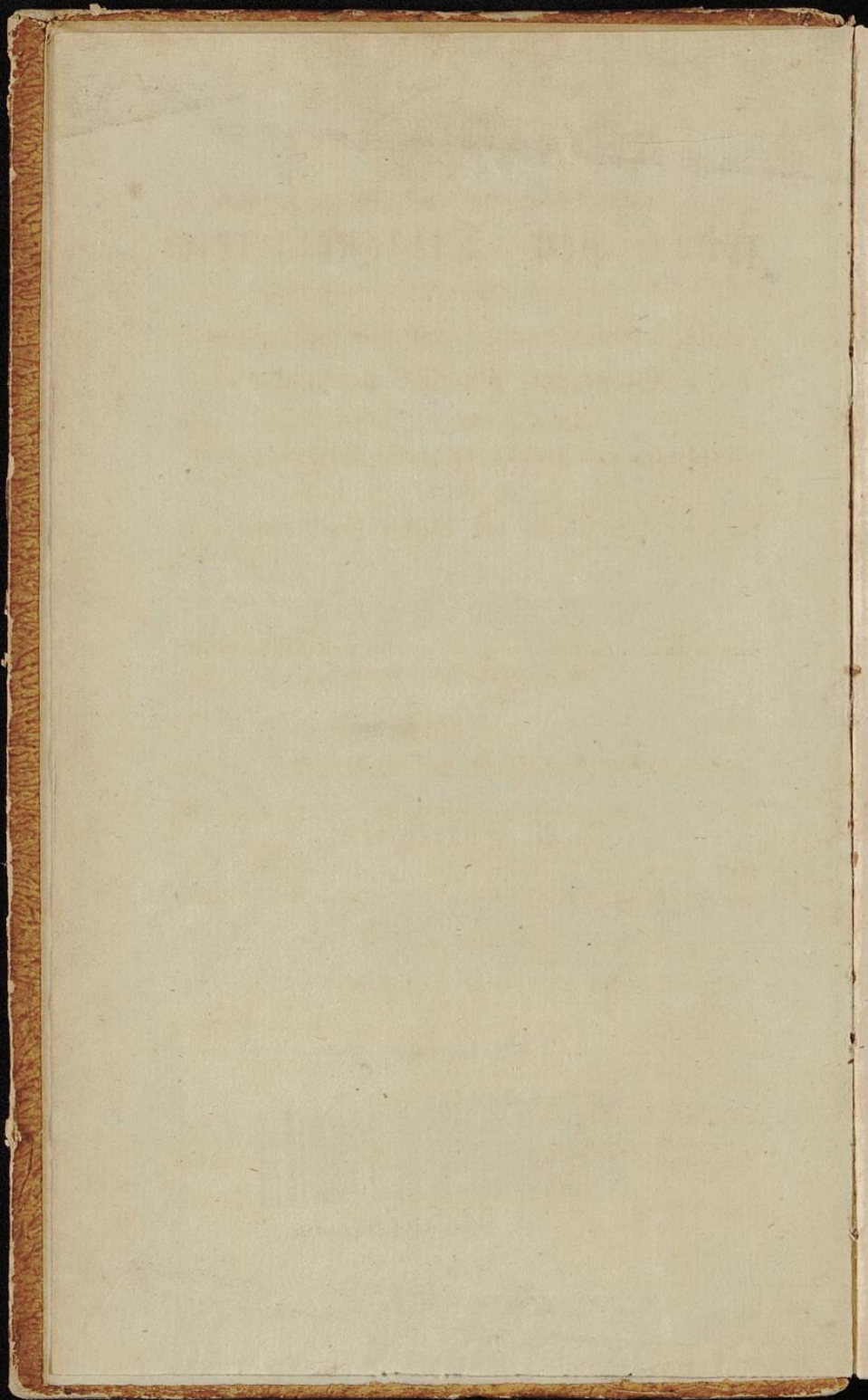
ULB Düsseldorf



+3080 286 01



Leuznau
1216



einigen Anwendungen auf die Astronomie,
Geographie und Feldmefskunst
für
Anfänger und Liebhaber diefer Wiſſenſchaften
beſonders
für die höhern Claſſen des Werderſchen Gymnaſiums

Mit
einer Vorrede
von

Zweite durchaus umgearbeitete Auflage.

Berlin, 1810.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Benk 1216



Berlin 1810

V o r r e d e.

Die mathematischen Wissenschaften, so weit sie zur Grundlage in dem weiten Gebiete der Ausübung nöthig sind, erfordern keinen geringen Aufwand von Zeit und Anstrengung, wenn man bei ihrer Anwendung nicht deshalb oft in Verlegenheit gerathen soll, um dasjenige für unauflösbar zu halten, was der geübte Mathematiker leicht bewerkstelliget. Hiernach wäre zu wünschen, daß die Mathematik als Hülfswissenschaft betrachtet, so vollständig wie möglich vorgetragen und erlernt würde, weil hierdurch übrigens gebildete Geschäftsleute die vorzüglichsten Mittel erhielten, in ihrem Wirkungskreise, so weit es bei dem jetzigen Zustande

der Künste und Wissenschaften möglich ist, einen Theil von derjenigen Bestimmtheit über zu tragen, welche eine Eigenheit der Mathematik ist. Die Neigung zur Erlernung der mathematischen Wissenschaften ist aber noch nicht so allgemein, daß denjenigen, welche sich auf Schulen bilden, mehr als die Anfangsgründe derselben vorgetragen werden könnten; es wird daher auch immer noch Bedürfnis bleiben, einzelne Theile derselben nach den verschiedenen vorgesezten Endzwecken zu bearbeiten.

Die sphärische Trigonometrie, welche bei der höhern Feldmeßkunst, der mathematischen Geographie und der Astronomie unentbehrlich ist, auch selbst wenn man sich nur eine gründliche Uebersicht verschaffen will, bleibt daher ein Erfordernis für jeden vollständigen Schulunterricht, weil es dem gebildeten Menschen Bedürfnis sein muß, mit der Einrichtung des Weltgebäudes vertraut zu werden, wenn er auch gleich nicht auf die eigentliche Kenntnisse des Astronomen Anspruch machen will.

Die erlangten mathematischen Vorkenntnisse haben noch das Angenehme, daß sie sich bei der Anwendung auf Naturkunde überhaupt, durch die Bekanntschaft mit den unwandelbaren Gesetzen der

Schöpfung und besonders bei einer nähern Vertraulichkeit mit der Einrichtung des Weltgebäudes in Entzücken auflösen; und wenn uns äussere Verhältnisse alle Freuden rauben könnten, so würden doch diese unser unzertrennliches Eigenthum bleiben, wenn wir so weit gelangen, um mit dem Dichter zu erkennen:

Wie verbreitet! wie ineinander gewickelt!
welche Heere von wimmelnden Welten! — sie lachen
der Erde!
unermesslich groß! in unermesslichen Sphären
eine von der andern entfernt! Wie mehr noch ein
Wunder
jener Raum, durch welchen sie gehen? Ein völliger
Abgrund!

Und in nichts, so viel wir auch sehen, herrscht wilde
Verwirrung.
Durch dies ganze Chaos des Himmels, den glänzenden
Schauplatz
sieht man alles mit Schönheit vertheilt; in heiligster
Ordnung
unverleßlich wandelt ein Stern nach der Vorschrift die
Laufbahn
und beschämt ein vernünftig Geschlecht, das irret und
ausschweift.
Stets sich schneidende Kreise von Welten, und keine der
andern

je im Wege; jetzt Knoten schürzt, bald wieder gelöst,
und Planeten, die, wie es scheint, sich verbanden, in
Freiheit!

Ewig irrend, und ewig ohne Irrthum irrende Körper;
eine Verwirrung, wo nichts sich verwirrt! — Kein klei-
neres Wunder;

diese Tumulte sind ohne Tumult; und alles im Fluge!
Alles bewegt sich! und doch dabei die tiefste Ruhe!
Wie mit Eifer im Werk, und kein Getöse! in Stille
ehverbietig, vor der gegenwärtigen Gottheit. —

Berlin, am 1. Mai 1800.

Eyrelwein.

V o r e r i n n e r u n g .

Diese kleine Schrift ist für Liebhaber der Astronomie, besonders aber für die Mitglieder der höhern Classen des Friedrich-Werderschen Gymnasiums bestimmt. Für Liebhaber der Astronomie, welche an Einsichten der Jugend nicht nachstehen, welche sich in den Stunden der Erholung bei den größern oder geringern Aufwande ihrer Kräfte für das Geschäftsleben Vorkenntnisse sammeln wollen, um sich mit den Bewegungen der Himmelskörper, mit den davon abhängigen Erscheinungen, und dem innern Zusammenhange des Weltalls einiger Massen bekannt zu machen. Für die Zöglinge des Gymnasiums, welche den Unterricht der Mathe-

matik so weit benutzt haben, daß sie die ersten Früchte ihres Fleißes dadurch genießen, daß sie nun einsehen lernen, wie diese Lehren zur nähern Kenntniß der erhabensten Gegenstände der Natur und zur Entwicklung ihrer mit so vieler Sorgfalt verborgenen Gesetze führen.

Indessen können auch Freunde dieser Wissenschaft anders keinen Nutzen von der Lectüre dieser Schrift erwarten, als wenn man bei ihnen voraus setzen darf, daß sie sich mit den ersten Gründen der Geometrie und Buchstabenrechnung bekannt gemacht haben und wenigstens so viel davon mitbringen, als in dem Auszuge aus den Anfangsgründen der mathematischen Wissenschaften des Herrn Hofrath Karsten enthalten ist. Da nun dieser Auszug unfehlbar in den Händen derer ist, die sich mit der Erlernung der Geometrie beschäftigen; so habe ich an Stellen, wo man auf die Grundsätze der Geometrie zurückkommen muß und selbige nachzuschlagen nöthig hat, auf diesen Auszug gewiesen. Solche Ziffern also, die mit beigefügtem Paragraphzeichen, als §. 114., in dieser Schrift vorkommen, zeigen an, daß man den zum Beweise u. angeführten Satz, in dem gedachten Auszuge nach der zweiten

Auflage von dem Jahre 1785 nachzusehen hat; diejenigen Ziffern aber, bei welchen zum Unterschiede von den vorigen, die Paragraphzeichen fehlen, als (115.) beziehen sich unmittelbar auf die in dieser Schrift befindlichen Paragraphen selbst.

Meine Hauptabsicht bei Ausarbeitung dieser Schrift, war, einen Theil der Schwierigkeiten, welche Anfänger bei dem Studio der sphärischen Trigonometrie finden, aus dem Wege zu räumen. Zur Erreichung dieses Zweckes habe ich sie in Verbindung mit einigen Lehren der Geometrie und der ebenen Trigonometrie vorgetragen. Aus der Geometrie sind die Betrachtungen der Kugel und deren verschiedenen Schnitte entlehnt, weil selbige unmittelbar zur Entwicklung der Eigenschaften sphärischer Dreiecke führen; und die Hauptlehren der ebenen Trigonometrie sind um deswillen hier aufgenommen, weil selbige bei der sphärischen Trigonometrie zum Grunde liegen und beide Wissenschaften mit einander in der engsten Verbindung stehen, so daß diese ohne jene nicht vollkommen verstanden werden kann. Nimmt man z. B. in der ebenen Trigonometrie die Formeln rechtwinkliger geradliniger Dreiecke; so kann man selbige auch für sphä-

rische Dreiecke brauchen, wenn man darin anstatt der Seiten zc. die Sinus derselben schreibt, und so wird man bei einer aufmerksamen Betrachtung zwischen den genannten Wissenschaften überall eine sehr große Aehnlichkeit und genaue Verschwisterung entdecken.

Da aber bei den Constructionen der in der sphärischen Trigonometrie vorkommenden Begriffe, die Lage der durcheinander laufenden Linien und einander schneidenden Ebenen, nicht ohne große Anstrengung der Phantasie, vermittelt der Zeichnungen allein, die nöthige Deutlichkeit erhalten; sondern häufig Verwirrung veranlassen, die Aufmerksamkeit des Lesers schwächen, und ihn ohne Noth ermüden; so sind zur Erleichterung der ersten Vorstellungen und Versinnlichung dieser Gegenstände Modelle aus Pappe angefertigt, an welchen alle Theile der, bei den Hauptbeweisen der sphärischen Trigonometrie vorkommenden Figuren, ausgebildet und dargestellt sind. Ich habe mich ihrer bereits bei dem mündlichen Vortrage dieser Wissenschaft mit dem besten Erfolge bedient, und wage daher wenigstens nach meiner Erfahrung, selbige als ein sehr gutes Hülfsmittel Anfängern die Sache be-

greiflich zu machen, ohne Anmaßung zu empfehlen. Es sind deren neun, drei davon beziehen sich auf die in den §§. 108, 109 und 112 2c. vorgetragenen Lehren, und die sechs übrigen kommen im fünften 2c. Abschnitte vor, sie sind der Folge nach, durch die am Rande stehenden römischen Ziffern No. I., No. II. 2c. bezeichnet, und müssen bei dem Gebrauche dieser Schrift allemahl zur Hand genommen und mit den Sätzen und den Zeichnungen gehörig verglichen werden. So kann man sich z. B. bei der Erklärung des Kugelausschnittes S. 6. §. 2. zur Erläuterung der (Fig. 1.) auf der ersten Kupfertafel auch des ersten Modelles (No. I.) bedienen. Diese sechs Modelle kann jeder bei dem Ankaufe dieser Schrift sogleich erhalten; wer aber auch die drei übrigen verlangt, der wird gebeten, sich durch eine besondere Bestellung, deshalb an den Herrn Verleger zu wenden.

Auch wird der Leser dieser Schrift die Lehren der Trigonometrie, wie ich es bereits auf dem Titel angezeigt, mit einigen Gegenständen der Astronomie durchflochten finden. Dieses ist nicht aus Geringschätzung der mathematischen Methode geschehen; ich kenne die Strenge derselben, ich ehre

und schätze sie. Ich habe daher seit mehreren Jahren bei dem Vortrage der Geometrie, die Elemente des Euklides, nach der Uebersetzung des Herrn Professor Lorenz, die in einer reinen und verständlichen Sprache abgefaßt ist, zum Grunde gelegt. Allein es hält gewöhnlich schwer, Anfänger in ein neues Gebiet abstracter Wahrheiten zu führen, ohne sie auf ein Beispiel, ohne sie auf Anwendungen weisen zu dürfen, welche nicht nur die Sache erläutern, sondern sich auf alltägliche Erscheinungen in der Natur beziehen. Auch gewährt es einem Anfänger nicht nur Vergnügen, sondern es flößt ihm auch ein gewisses Zutrauen zur Mathematik überhaupt ein, wenn ihm zur Uebung solche Aufgaben vorgelegt werden, die in astronomischen Tabellen aufgelöst sind, und er sich durch das Resultat seiner Berechnung überzeugt, daß alles auf Minuten, und, wenn man will, auf Sekunden u. übereinstimmt. Hierzu kommt noch, daß, wegen des Lehrplanes im Gymnasium, der Unterricht der eigentlichen Astronomie, worin sich die Gegenstände so sehr vermännigfaltigen, auf eine sehr kurze Zeit eingeschränkt ist, und daß ich also in dieser Hinsicht die sphärische Trigonometrie als eine

Vorbereitung zum Studio der Astronomie mit ansehen muß. Daher habe ich kein Bedenken getragen, von jenen strengen Forderungen einiger Maßen abzugehen und die Grundsätze der Trigonometrie auf die Größe, Lage &c. der Weltkörper anzuwenden; zumahl da dieses bereits vor mir, von mehreren Schriftstellern geschehen ist. Damit aber die Einheit der Methode für diejenigen, welche ihr schlechterdings nichts vergeben wollen, nicht zum Nachtheil der Wissenschaft, unterbrochen würde; so habe ich die Anwendungen in besondern Abschnitten vortragen, welche demnach des Ganzen unbeschadet, leicht können übergangen werden. Jedoch muß man nicht glauben, die sphärische Trigonometrie lasse sich auf Gegenstände der Astronomie allein anwenden. Ihre Lehren haben auf alle übrige Theile der Mathematik großen Einfluß, und sind so allgemein, daß sie überall können angewandt werden, wo man die Lage verschiedener Ebenen gegen einander in Betrachtung zieht.

Es ist überflüssig zu erwähnen, daß ich bei Ausarbeitung dieser Schrift, die Werke eines Karsten, Klügel, Bürga &c. benutzt habe; allein Plan und Einrichtung nöthigten mich oft, von den schätzbaren

Vorarbeiten dieser großen Männer abzuweichen und einen andern Weg einzuschlagen. Glückliche, wenn es mir auf diesem durch meine Absicht mir vorgezeichneten Wege nur gelänge, hier und da die Wißbegierde eines Jünglings zu reizen, der seinen Geist im Umgange mit den Wissenschaften zu bilden wünscht und so manche Abendstunde den einsamen Betrachtungen der Schönheiten der Natur, des mit Sternen gezierten Himmels zum Opfer bringt, wo der Genius eines Kepplers oder Newtons seine Seele zu reiner Freude und hoher Begeisterung erhebt.

Der Verfasser.

Nachricht zur zweiten Auflage.

Wenn diejenigen Gegenstände der Mathematik besonders zum ersten Unterrichte der Jugend, geeignet sind, welche ohne große Anstrengung mit Klarheit und Deutlichkeit erkannt werden, welche die Aufmerksamkeit durch das Interesse reizt, welche das Nachdenken üben und schärfen, die Seelenkräfte in Wirksamkeit setzen und überall mannigfaltigen Stoff zu neuen Untersuchungen und Anwendungen darbieten; so hat die sphärische Trigonometrie, welche allen jenen Forderungen eine Genüge leistet, einen entschiedenen Einfluß auf die Ausbildung und Veredlung des menschlichen Geistes. Als ein Zweig der mathematischen Wissenschaften trägt sie überall das Gepräge der Wahrheit und Vollkommenheit an

sich, durch die Simplicität und Faßlichkeit ihrer inhaltvollen Lehren beschäftigt sie den menschlichen Verstand auf eine leichte und lehrreiche Art, und außer diesem höhern auf Geistesbildung hinwirken: den Zwecke, gewährt sie gleichsam an ihrem Eingange, ohne daß ihre Tiefen ganz durchschauet worden sind, der Wißbegierde derjenigen, welche überall die Verbindung zwischen der Theorie und ihrer Anwendung aufzusuchen bemühet sind, eine völlige Befriedigung. Auf sie gründen sich die wichtigsten Aufgaben der practischen Feldmeßkunst *), der Geographie, Marktscheidkunst und viele andere theils physicalische, theils in die verschiedenen Geschäfte des gesellschaftlichen Lebens eingreifenden Untersuchungen. Sie ist das beste Vorbereitungsmittel zur Astronomie, wenn man einiger Maßen in die Geheimnisse dieser Wissenschaft eindringen **) und sich nicht bloß mit den historischen Nachrichten, von den wirklichen Bewegungen der Weltkörper, die wie der Feuerstoff im Wassertropfen nur dem Auge des Verstandes sichtbar sind, begnügen will.

Diese Umstände haben mich bewogen, diesen
Zweig

*) Man vergl. z. B. die Aufg. S. 172, S. 110. S. 183, S. 112. S. 110, S. 29. S. 332, S. 54 u. a. m. a. Stellen.

**) Man sehe S. 32 — 34, S. 22.

Zweig der mathematischen Wissenschaften nach dem angegebenen Gesichtspuncte für angehende Feldmesser, Geographen und überhaupt für diejenigen von neuem zu bearbeiten, welche sich mit der Elementargeometrie und den ersten Gründen der Algebra bekannt gemacht haben. Mir scheint dieses Unternehmen um so zweckmäßiger, da die meisten Schriftsteller die sphärische Trigonometrie zu unvollständig oder gar zu weitläufig abgehandelt und dadurch wenig beigetragen haben, die Schwierigkeiten, welche Anfänger bei dem Studio dieser Wissenschaft zu finden pflegen, aus dem Wege zu räumen *), indem ihr Vortrag in jenem Falle unverständlich und in diesem zu ermüdend werden mußte. Selbst die vorzüglichsten Schriftsteller Deutschlands, Kästner in seinen Anfangsgründen der Geometrie, Karsten in seinem oben gedachten Auszuge, scheinen die deutliche Auseinandersetzung dieser Lehren unfehlbar andern Zwecken aufgeopfert zu haben, und das was Karsten in seinen Lehrbegriff aufgenommen hat, weicht von der angeführten Bestimmung gänzlich ab. Häfeler aber ist in seiner sphärischen Trigonometrie, die voller Druckfehler ist, zu weitläufig und das Ganze ist beinahe wörtlich aus Karstens Lehrbegriff der Mathematik abgeschrieben.

*) Man s. S. 3 — 5, §. 1.

In wie weit es mir gelungen ist, die gedachten Fehler zu vermeiden, diesen Gegenstand für den Unterricht der Jugend auf Schulen und Gymnasien zweckmäßig bearbeitet zu haben, den Geographen und practischen Feldmessern in ihren oft so wichtigen Operationen zu leiten, sie vor falschen und fehlsamen Anwendungen sicher zu stellen und überhaupt zur Erweiterung und Verbreitung dieser Wissenschaft etwas beizutragen, das bleibt allein der Einsicht und Beurtheilung des Kenners und Kunstrichters überlassen. Zu dem Ende habe ich im Verfolge des Vortrages da, wo ich Veranlassung fand, andere Schriftsteller, außer den im Vorberichte zur ersten Auflage genannten, zu benützen, überall namentlich angeführt.

Die wichtigsten Veränderungen, welche bei dieser zweiten Auflage gemacht worden sind, und welche sowohl die Anordnung des Ganzen, als der einzelnen Theile betreffen, sind folgende: 1) Die ebene Trigonometrie ist von der sphärischen ganz getrennt und nur in einem Auszuge als eine besondere Abhandlung dem Ganzen beigelegt worden. Weil man in der sphärischen Trigonometrie so oft genöthigt wird, auf die Ausdrücke der ebenen zurückzugehen; so muß man sich dieselben geläufig und genau bekann machen, damit man nicht bei jedem einzelnen Gedanken stehen bleiben und erst mit vielem Zeitver-

luste, die sich darauf beziehenden Sätze nachschlagen darf. Daher habe ich bei denjenigen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie, welche nach den Grundsätzen der ebenen bestimmt worden sind, wegen des häufigen Gebrauchs derselben Sätze, keine Citata angeführt. Um aber diese Schrift gemeinnütziger zu machen, so sind vermittelt der ebenen Trigonometrie diejenigen Aufgaben aus der practischen Feldmesskunst aufgelöst, welche in der Ausübung am häufigsten vorkommen und die sich auf die Messung unzugänglicher Entfernungen und auf die Höhenmessung beziehen.

Bei der Höhenmessung zeigen sich oft da unerwartete Schwierigkeiten, wo der Anblick des Terrains sie nicht vermuthen läßt und da wo man unübersteigliche Hindernisse zu finden glaubt, öffnen sich uns Wege und Zugänge zu den Gegenden, auf welche unser Augenmerk gerichtet war. Denn im Gebirge verändern sich die Scenen beinahe mit jedem Schritte. Gegenstände von unermesslicher Größe, die uns so nahe waren, scheinen sich plötzlich zu verlieren und andere, gleich erhaben und bewundernswürdig, von neuem hervorzutreten und fast überall stellt sich unserm Auge das Gemälde aller Jahreszeiten dar. Als ich im Jahr 1802 den Sommer in Schlesien zubrachte; so habe ich diese Gelegenheit benützt, verschiedene Höhen vom Riesengebirge geometrisch zu messen. Die Resultate davon werde

ich zu einer andern Zeit dem Publicum vorlegen. Hier bemerke ich nur, daß ich in dem für die Höhenmessung bestimmten Abschnitte, nicht nur die gewöhnlichen Fälle durchgegangen bin, sondern, daß ich durch die eingeschalteten practischen Erläuterungen und Anmerkungen diejenigen, welche sich mit diesen Gegenständen beschäftigen wollen, auf die, bei solchen Operationen vorkommenden Umstände aufmerksam gemacht und sie in den Stand gesetzt habe, Geschäfte dieser Art gehörig beurtheilen und erforderlichen Falles, unternehmen zu können.

2) Diejenigen Sätze und Aufgaben, welche für Anfänger nicht die nöthige Deutlichkeit haben dürften, sind durch Erläuterungen, welche den Beweisen und Auflösungen vorangehen, oder durch beigelegte Anmerkungen näher bestimmt und ins Licht gesetzt worden.

3) Nicht alle, durch die Auflösungen gefundenen Ausdrücke, lassen sich ohne Unterschied auf alle Fälle anwenden. Es kommen Umstände vor, um derentwillen man der einen vor der andern, den Vorzug gibt. Daher sind von einigen Aufgaben mehrere Auflösungen vorgetragen, ihr Gebrauch und ihre Anwendung gezeigt worden. — Im Texte aber ist in der Regel die geometrische und die leichteste gewählt, damit diejenigen, welche diese Wissenschaft entweder durch eigenen Unterricht, oder durch

fremde Anleitung zum ersten Male durchgehen, sich in kurzer Zeit einen Ueberblick vom Ganzen verschaffen können.

4) Die Beweise und Auflösungen der hierin vorkommenden Aufgaben und Lehrsätze sind durchaus umgearbeitet. Von mehreren kann ich ohne Anmaßung sagen, daß sie mir zugehören *), und überall bin ich bemüht gewesen, den Zusammenhang der Gründe, aus welchen die Richtigkeit des Verfahrens oder die Nothwendigkeit der Behauptung hervorgeht, durch Kürze und Deutlichkeit darzustellen. Die meisten Veränderungen beruhen auf den einfachsten und leichtesten arithmetischen und algebraischen Operationen, und selbst bei einigen etwas ausführlicheren Auflösungen, die in den Anmerkungen vorkommen, habe ich mich zur Umformung der Gleichungen, bloß der Substitutionen bedient.

5) Die Alten lernten die Eigenschaften der sogenannten platonischen Körper auf einem sehr mühsamen Wege kennen. Mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie aber lassen sich dieselben auf eine sehr einfache und einleuchtende Art entwickeln. Zum Beweise dieser Behauptung habe ich, vermittelst ihrer, die Theorie der regulären Körper **) aus den Eigen-

*) Man s. S. 271, 281, 291 u. a. m. D.

**) Man s. S. 192 von S. 114 — 129.

schaften der gleichseitigen Pyramide hergeleitet und dadurch gezeigt, daß sich die sphärische Trigonometrie auf alle Gegenstände anwenden läßt, bei welchen die Lage der Ebenen in Betrachtung gezogen wird.

6) Habe ich noch einmahl das Ganze sorgfältig durchgesehen und die Druckfehler, die ich aufgefunden habe, und den Sinn entstellen könnten, hinten angemerkt. Ich bin von der Nothwendigkeit dieser Revision um so mehr überzeugt, da ein Buch, welches mit für den Unterricht der Jugend bestimmt ist, aus Mangel an Correctheit allein unbrauchbar wird.

Der Verfasser.

Inhalt der sphärischen Trigonometrie.

Die ganze Abhandlung zerfällt, außer der ebenen Trigonometrie, in sieben Abschnitte, deren specieller Inhalt durch folgendes Verzeichniß angegeben werden kann:

	Seite.
Erster Abschnitt. Von den Kugelschnitten	2 — 31 1 — 21
Von der Bestimmung sphärischer Dreiecke und ihrem Unterschiede von den ebenen geradlinigen	1 — 5 1 — 7
Von der Entstehung, dem Gebrauch der Kugel in der sphärischen Trigonometrie	6 — 8 2 — 5
Von den vornehmsten Eigenschaften der Kugelschnitte in Bezug auf die Pole, Are, den Mittelpunct der Kugel und der Kreise und ihre Lage	9 — 27 3 — 17
Von den sphärischen Winkeln, deren Größe, Bestimmung ic.	27 — 31 17 — 21
Zweiter Abschnitt. Von den Kreisen, Linien, Puncten an der Himmels- und Erdkugel.	
Von den drei durch den Standpunct des Beobachters bestimmten Kreisen, dem Horizont, Aequator und Meridian	31 — 40 21 — 29
Von der Bestimmung der Polhöhe, der Sternzeit ic.	40 30
Von der Abweichung, geraden Aufst. ic.	41 — 45 31 — 36
Von der Sonnenbahn, dem Thierreise astr. Länge und Breite ic., der künstlichen Himmelskugel, der Ringkugel	46 — 55 36 — 45
Von der Bestimmung dieser Kreise bei der Erdkugel	55 — 62 46 — 50
Dritter Abschnitt. Von den sphär. Dreiecken überhaupt	63 — 82 51 — 65
Von der Verbindung sphärischer Dreiecke mit dem körperlichen Dreiecke	63 51
Von den Haupteigenschaften der sphär. Dreiecke	65 — 77 52 — 60
Vom Supplementardreiecke	77 — 80 61 — 65
Von der Berechnung des Flächeninhaltes sphärischer Dreiecke	89 — 82 65

	Seite.	S.
Vierter Abschnitt. Von den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken . . .	83	66
Geometrischer Lehrsatz . . .	83 — 84	66
Hauptsatz der sphärischen Trigonometrie, welcher mit dem für die ebene Trigonometrie übereinstimmt, wenn man hier anstatt der Seiten, die Sinus der Seiten nimmt . . .	85	67
Von den Regeln zur Auflösung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke . . .	87 — 91	68 — 72
Verzeichniß der sechs Hauptgleichungen zwischen den Seiten und Winkeln rechtwinkliger Dreiecke . . .	92	73
Von der Neper'schen Regel . . .	93	73
Betrachtung der zufälligen Bedingungen, welche mit den zur Berechnung einer Aufgabe gegebenen Stücken verbunden sind . . .	93 — 94	74
Wie die Seiten und Winkel eines solchen Dreiecks ihrer Gattung nach, bestimmt werden . . .	95 — 99	75 — 77
Tabellarische Uebersicht der bei einem rechtwinkligen Dreiecke vorkommenden gegebenen und gesuchten Stücke nebst den dazu gehörigen Bestimmungen . . .	100	78
Fünfter Abschnitt. Anwendung obiger Regeln auf die Lage der Weltkörper . . .	101 — 125	79 — 84
Verzeichniß der geogr. Länge und Breite einiger Völker auf der Erde . . .	105	81
Aufgaben zur Berechnung der geraden Aufsteigung, Abweichung, Länge und Breite der Weltkörper . . .	106 — 125	82 — 84
Sechster Abschnitt. Von der Auflösung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke . . .	125	85
Von der Lage des aus der Spitze eines sphärischen Dreiecks auf die entgegen gesetzte Seite herabgelassenen Perpendikels . . .	125	85
Von der Anwendung des Hauptsatzes in (67.) auf sphär. Dreiecke überhaupt . . .	126	86
Von der Vergleichung zweier sphärischer rechth. Dreiecke mit einer gemeinschaftlichen Seite . . .	127 — 129	87 — 88
Von der Berechnung der Seiten aus den Winkeln und dieser aus jenen . . .	129 — 136	89 — 92
Aus (86.) hergeleitete Auflösungen zweier Aufgaben . . .	137 — 138	93 — 94
Drei Auflösungen der zur Berechnung der dritten Seite, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines sphärischen Dreiecks . . .	138 — 141	95
Bemerkungen über die Resultate dieser		

Auflösungen nebst einer kurzen Auseinander- setzung, eines durch Logar. bequem zu berechnenden Ausdrucks . . .	141	
Drei Auflösungen der Aufgaben, nach welchen man aus den obigen Datis einen der beiden Winkel berechnen kann	142 — 143	96
Berücksichtigung der Vortheile der drit- ten Aufl. nebst der daraus entspringen- den Beschränkung der zweifelhaften Fälle . . .	145	
Drei Auflösungen der Aufg. nach welcher aus einer Seite und den beiden anlie- genden Winkeln eines sphär. Dreieckes eine der beiden obigen berechnet wer- den soll . . .	145 — 149	97
Auflösung der übrigen Aufgaben . . .	151 — 153	99 — 102
Bemerkungen über sphärische Dreiecke, deren eine Seite = 90° ist . . .	153	
Bemerkungen über das sphär. gleichschen- kelige Dreieck . . .	154	
Uebersicht der Aufg. sphär. schiefwinkl. ger Dreiecke . . .	155 — 158	103 — 104
Tabellarisches Verzeichniß der analyti- schen Formeln zur Auflösung sphäris- cher Dreiecke . . .	158 — 161	105
Siebenter Abschnitt. Anwend. schief-		
winkliger sphärischer Dreiecke auf die Astronomie ic. . .	162	106
Von der Berechnung der Weite zweier Sterne und der Differenz ihrer Rectas- cension, aus ihren Abweichungen . . .	162 — 164	106
Von der Reduction der Winkel ic. . .	164 — 166	107
Von der Bestimmung der Zeit durch die Sonnenhöhe und umgekehrt . . .	166 — 172	108 — 109
Aus der geogr. Länge und Breite zweier Orter auf der Erde, ihre Weite von einander zu berechnen . . .	172 — 176	110
Von der Berechnung der astron. Länge und Breite eines Sterns, aus der Schiefe der Ekliptik ic. . .	176 — 183	111
Von der Berechnung der dritten Seite eines Dreieckes, aus zweien Seiten und dem eingeschlossenen Winkel nach den Grundsätzen der ebenen und sphärischen Trigonometrie . . .	183 — 186	112
Von der Dauer der Morgen- und Abend- dämmerung ic. . .	186 — 192	113
Von den Eigenschaften der gleichseitigen Pyramide . . .	193 — 201	114 — 118
Von der Berechnung der regulären Körper . . .	201 — 233	119 — 129

Inhalt der ebenen Trigonometrie.

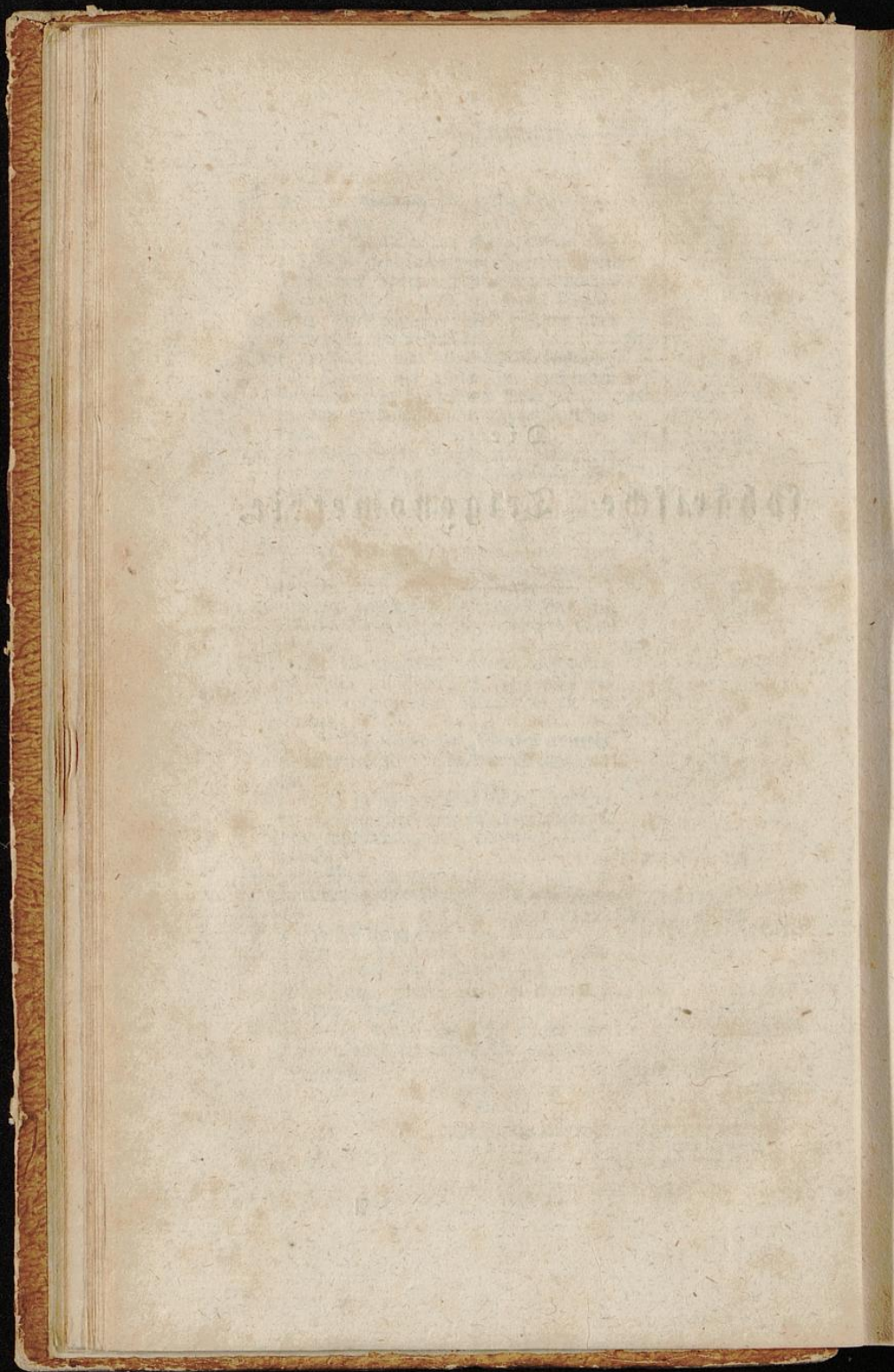
	Seite.	S.
Erste Abtheilung. Von den trigonometrischen Linien	241 — 260	1 — 10
Uebersicht des Inhalts dieser Abhandlung und Vorzug der Berechnung geradliniger Dreiecke vor deren Verzeichnung	241 — 243	1
Erklärung der trigonometrischen Linien	243	2
Von dem Ursprunge, dem Wachstume, dem Maximo, der Abnahme und dem Verschwinden der Sinus	244	3
Der Sinus als die halbe Sehne des doppelten Bogens oder als die halbe Seite regulärer, in den Kreis gezeichneter Polygone, betrachtet	246	4
Von den Vorzeichen desselben.	249	5
Einrichtung der Sinustafeln	253	9
Erklärung der übrigen trigonom. Linien.		
Von den Veränderungen der Sinus und Cosinus, welche sie in den vier Quadranten des Kreises erleiden	255	10 — 18
Zweite Abtheilung. Von der Berechnung der trigonom. Linien und deren Erläuterung durch Beispiele	260	11
Aus dem Cosinus eines Bogens den Sinus seiner Hälfte zu berechnen	271	15
Bemerkungen über diesen Satz, nebst dessen Erläuterung durch Beispiele	272 — 273	
Von der Berechnung der Sinus und Cosinus der Summe und Differenz zweier Bögen, aus den gleichnamigen Linien der einzelnen Bogen	274	17
Einige merkwürdige Folgerungen daraus	276	
Dritte Abtheilung. Von der Auflös.		
der Aufg. geradliniger Dreiecke	278	19
Hauptsatz der ebenen Trigonometrie	279	20
Von der Berechnung rechtwinkl. Dreiecke	280	
Von der Berechnung gleichschenkl. Dreiecke	282	
Daraus hergeleitete Methode, Winkel auf dem Papier zu messen, und auf dem Felde gemessene Winkel, aufzutragen	283 — 300	24

Von der Auflösung schiefer Dreiecke. Er- läuterung der bei (§. 22.) vorkommen- den Zweideutigkeit	286	22
Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die beiden übrigen Winkel und die dritte Seite; oder die dritte Seite und dann die beiden übrigen Winkel zu berechnen; oder wenn anstatt der Seiten nur ihr Verhältniß durch Logar- ithmen gegeben ist	289 — 296	23
Von der Berechnung der Winkel aus den drei Seiten	296 — 300	24
Anwendung der ebenen Trigonometrie	301	25
I. Auf die Höhenmessung.		
Vorläufige Bemerkungen	301	25
Die Höhe eines Gegenstandes zu berechnen, wenn der Fuß desselben und die Standli- nie auf einer Horizontalsfläche liegen und sonst keine Hindernisse vorkommen	302	
Auflös. dieser Aufg. vermittelst der Son- nenhöhe und des Schattens ic.	302	
Aufl. der vorigen Aufg. wenn man nicht die Standlinie bis an das Object fort- setzen kann	303	
Einige practische Bemerkungen zu der obigen Aufgabe	304	
Aufl. der vorigen Aufg. wenn die Stand- linie nicht in der Verticalebene durch die Höhe des zu bestimmenden Gegen- standes liegt	306	27
Bemerkungen über die Aufl. dieser Aufg.	308	
Die Höhe eines Gegenstandes zu berech- nen, dessen Fuß durch andere Gegen- stände als Mauern, Gebüsch ic. ver- deckt wird	308	28
Die Höhe eines Berges zu messen, mit Rücksicht auf die dabei vorkommende Projection, auf die Erhebung über die Meeresfläche, auf die Refraction, auf die Krümmung der Erde ic.	310	29
Einige Erinnerungen wegen der auszu- streckenden Signale	312	
Erläuterung aller dieser Umstände durch ein Beispiel	314	
Formel zur Berechnung der Refraction	316	
Formel zur Berechnung der Krümmung der Erde	317	
Ausdruck, welcher beide Bestimmungen in sich faßt	318	
Nöthige Vorsicht wegen der Refraction der Lichtstrahlen und deren Berechnung	319	

II. Auf die Messung unzugänglicher Entfernungen.		
Von der Messung der Grundlinien und den dazu gebräuchlichen Instrumenten.		
Von den durch Maupertuis veranlaßten Fehlern, von der durch Swanberg wiederholten Gradmessung am nördlichen Polarkreise u.	319	
Welche Fehler man von der Krümmung der Erde, bei einer zu messenden Grundlinie zu befürchten habe	320	
Von der Messung einer unzugänglichen Linie	322	30
Anwendung dieses Satzes zur Aufnahme der um die Standlinie ringsumher liegenden Objecte	323	
Auflösung der vorigen Aufg. aus einem Standpuncte.	323	
Von der Messung unzugänglicher Entfernungen, zwischen Gegenständen, zu welchen man nicht kommen kann.	324	32
Aus einem gegebenen Puncte a) eine Parallellinie mit der unzugänglichen Linie zu ziehen	326	
b) einen Perpendikel auf die unzugängliche Linie zu fallen und die Größe der daraus entstandenen Abschnitte zu berechnen.	326	
Von der Reduction der Winkel mittelst der Grundsätze der ebenen Trigonometrie	327	
Von einer bekannten Höhe über der Horizontalfläche verschiedener Gegenstände, deren Entfernung von einander zu berechnen	327	33
Zu drei Puncten von bekannter Lage und Entfernung den vierten a) durch Rechnung	328	34
b) durch Zeichnung zu bestimmen	331	
Die Entfernung zweier weit entlegenen Gegenstände, die sich doch aber übersehen lassen, durch eine Verbindung mehrerer Dreiecke zu berechnen	332	35
Erläuterung dieser Aufgabe durch ein Beispiel nebst einigen dahin gehörigen Bemerkungen	333 — 335	

0 2.
 0 12
 0 12

Die
sphärische Trigonometrie.



Erster Abschnitt.

Von den Kugelschnitten.

§. 1.

Alle Zweige der mathematischen Wissenschaften sind zu einem solchen Grade der Vollkommenheit ausgebildet, daß man sie im Gebiete des menschlichen Wissens sonst nirgends zu erreichen vermag. Dahin gehört auch die sphärische Trigonometrie. Ihr Gegenstand ist das auf der Kugel liegende Dreieck, dessen Seiten zu größten Kreisen gehören. Daher lassen sich die Lehren dieser Wissenschaft auf eine sehr einfache Art aus den Eigenschaften der Kugel entwickeln, und es wird keine große Anstrengung erfordert, sich von ihren Wahrheiten zu überzeugen, wenn man sich nur von der eigentlichen Beschaffenheit sphärischer Dreiecke vermittlest der Kugelschnitte, welche die Grundlage der sphärischen Trigonometrie und Astronomie ausmachen, eine deutliche Vorstellung verschafft hat. Denn dadurch wird man in der Folge desto leichter in den Stand gesetzt, das Ganze mit einem Blicke zu umfassen, die vorkommenden mög-

lichen Fälle aufzuzählen, ihre Natur und zufälligen Bedingungen, die sich an gewisse Aufgaben knüpfen, bestimmt anzugeben und Forderungen eine Genüge zu leisten, welche über die Grenzen des menschlichen Verstandes hinaus zu gehen scheinen. Ein großer Theil der Schwierigkeiten, welche Anfänger bei dem Vortrage dieser Wissenschaft finden, rühret vornehmlich davon her, daß man sphärische Dreiecke wie ebene geradlinige betrachten will, und daß man die Kreise auf der Oberfläche der Kugel und deren Verbindung zu früh aus dem Auge verliert, da man doch alles was bei Dreiecken dieser Art vorkommt, auf die Kugel zurückführen sollte. Der kürzeste Weg zwischen zwei Puncten auf der Oberfläche der Kugel gezogen, ist ganz was anderes, als wenn man denselben zwischen zwei Puncten auf einer Ebene verzeichnet. Der Winkel, welchen zwei Seiten eines sphärischen Dreieckes einschließen, läßt sich nicht auf dieselbe Art, wie bei einem geradlinigen Dreiecke beurtheilen. Denn die Größe des sphärischen Winkels, wird entweder durch den geradlinigen ausgedruckt, welchen zwei Tangenten einschließen, deren jede den Scheitelpunct des gegebenen Winkels berührt und mit dem Kreisbogen als dem Schenkel desselben in einerlei Ebene liegt; oder durch den Neigungswinkel zweier, in dem Mittelpuncte der Kugel zusammenstoßenden Ebenen, wovon die Bogen des sphärischen Winkels die Grenzlinien sind und auf der Kugelfläche liegen; oder durch den Bogen eines größten Kreises, dessen Pol der Scheitelpunct ist; oder durch den Bogen eines kleinern Kreises, wozu der Scheitelpunct als Pol gehört. Dieses wird in der Folge weiter ausgeführt, und ich bemerke nur noch,

daß es allemahl seinen guten Nutzen haben wird, wenn sich Anfänger daran gewöhnen, jedes gegebene sphärische Dreieck in Gedanken auf eine Kugel aufzutragen, die Seiten desselben als Kreisbogen auf deren Oberfläche zu verzeichnen, aus den Scheitelpuncten gerade Linien nach dem Mittelpuncte der Kugel zu ziehen, und aus der Gestalt eines solchen Dreieckes sich den Kugelausschnitt, als einen pyramidenförmigen Körper vorzustellen, dessen gekrümmte Grundfläche ein Stück der Kugeloberfläche ist. Bei Vergleichung der von drei Seiten eingeschlossenen Figuren, wird man zwar in manchen Fällen zwischen ebenen und sphärischen Dreiecken eine gewisse Ähnlichkeit und Uebereinstimmung finden; dessen ungeachtet aber muß man sich sehr hüten, Eigenschaften jener Dreiecke unbedingt und unerwiesen auf diese überzutragen. In der Geometrie wird bewiesen, daß in einem geradlinigen Dreiecke alle Winkel so groß als zwei Rechte sind; wie sehr würde man aber irren, wenn man dasselbe auch von den Winkeln eines sphärischen Dreieckes behaupten wollte.

Auch ist hier nicht, wie bei den Aufgaben der ebenen Trigonometrie nöthig, daß unter den drei bekannten Stücken allemahl eine Seite befindlich sei, sondern die Aufgabe kann bestehen, wenn lauter Winkel oder lauter Seiten, oder theils Seiten, theils Winkel gegeben sind. Im Grunde sind alle Theile des Kugeldreieckes als Winkel zu betrachten. Damit man aber den Zusammenhang und die innere Verbindung der Lehren in der sphärischen Trigonometrie desto leichter übersehen könne; so sind in diesem Abschnitte die wichtigsten Sätze von den Kugelschnitten kürzlich vorgetragen.

§. 2.

Erklärung. Wenn man (Fig. 1.) den Quadranten eines Kreises um den Halbmesser AC als um eine feste Linie so lange herum bewegt, bis er wieder in die vorige Lage kommt; so heißt der Körper, der auf diese Art beschrieben worden ist, eine Halbkugel. Sie wird von einer Kreisfläche und von einer krummen Oberfläche begrenzt; jene entsteht durch den Halbmesser CB und diese durch den Bogen AB. Erreicht aber der Quadrant dieselbe Lage nicht, so entsteht ein Ausschnitt der Halbkugel. Drehet man aber einen Halbkreis eben so um seinen Durchmesser, wie vorher den Quadranten um AC, so entsteht durch die Umdrehung dieses Halbkreises im ersten Falle eine Kugel, und im andern ein Ausschnitt derselben.

Zusatz 1. Halbkugeln, welche mit gleichen Quadranten beschrieben werden, sind daher von gleicher Größe. Eben dieses gilt auch von Kugeln, welche durch die Umdrehung gleicher Halbkreise entstanden sind.

Zusatz 2. Alle Punkte des Halbkreises bleiben während der Bewegung desselben um den Durchmesser, von dem Mittelpunkte gleichweit entfernt. Diesen Abstand behalten daher auch alle Punkte auf der Oberfläche der Kugel, weil man sich dieselben als zurückgelassene Spuren aller Punkte des gedachten Halbkreises vorstellen kann. Daher sind die geraden Linien, welche aus der Mitte der Kugel nach der Oberfläche gezogen und Halbmesser der Kugel genannt werden, einander gleich. Alle übrige gerade Linien, welche von dem Mittelpunkte der Kugel ausgehen, können entweder ihre

Oberfläche nicht erreichen wie CN (Fig. 2.), oder gehen über die Grenzen derselben hinaus wie CM; in jenem Falle sind sie kleiner, und in diesem größer als der Halbmesser CL.

Zusatz 3. Liegen zwei Halbmesser der Kugel nach entgegen gesetzter Richtung in einer geraden Linie, so machen sie einen Durchmesser aus. Daher sind auch alle Durchmesser einer Kugel einander gleich.

§. 3.

Auf Kugeln, welche den Himmel oder die Erde nach ihrer kugelförmigen Gestalt vorstellen, wird man gewöhnlich verschiedene Punkte und Kreise, letztere nach verschiedenen Lagen und Richtungen beschrieben, antreffen. Man muß sich daher ähnliche Kreise am Himmel und auf der Erde denken, wovon die vorhin erwähnten bloße Abbildungen sind. Die Betrachtung der Kreise auf der Oberfläche einer Kugel überhaupt aber, nach ihrer Entstehung, Größe, Lage, nach ihrem Verhältniß gegen einander, macht uns mit den merkwürdigen Eigenschaften bekannt, wodurch der Lauf der Planeten, die Bahn der Sonne, ihre Stellungen gegen die Erde, der Abstand der Gestirne u. nach der Art und Weise, wie diese Erscheinungen in die Sinne fallen, bestimmt werden. Dieses ist auch der Zweck, warum man sich dieselben auf künstlichen Kugeln entwirft, und ihre Kenntniß ist daher für die sphärische Trigonometrie und Astronomie von vieler Wichtigkeit. Bekanntlich wird die Kugel als ein geometrischer Körper durch eine Ebene geschnitten und dieser schneidenden Ebene kann man in Hinsicht auf die Kugel jede willkürliche Lage geben.

Geht nun eine an sich unbegrenzte Ebene durch die Kugel durch; so kann man

- 1) auf denjenigen Theil sehen, welchen sie mit der Kugel gemein hat und der in derselben enthalten ist;
- 2) auf denjenigen, der ganz außerhalb der Kugel liegt;
- 3) auf die Grenzlinie, wodurch beide Größen, die Ebene und die Kugel von einander getrennt werden. Diese gemeinschaftliche Grenze muß eine Linie sein, weil die Kugel von einer Fläche begrenzt wird und die Ebene nicht eher die Kugel verlassen kann, als bis sie aus deren Grenze hinausgegangen ist, außerhalb welcher sie nichts mit einander gemein haben. Dasjenige Stück der Ebene aber, welches von dieser Grenze auf der Kugelfläche eingeschlossen ist, haben die schneidende Ebene und die geschnittene Kugel mit einander gemein. Betrachtet man nun die, durch die schneidende Ebene von einander getrennten Kugelfstücke auf den Seiten, wo die Theilung geschehen ist; so nennt man die Figur, welche sich aus dieser Betrachtung ergibt, einen Kugelschnitt.

§. 4.

Jeder Kugelschnitt gibt einen Kreis, die schneidende Ebene mag durch den Mittelpunkt gehen oder nicht.

- I. Gehet die schneidende Ebene (Fig. 2.) durch den Mittelpunkt C, so ziehe man aus C die geraden Linien CA, CB, CD. Diese Linien laufen von dem Mittelpuncte aus, liegen alle in der Kugel und in

der schneidenden Ebene, und endigen sich in der Umfangslinie der Durchschnichtsfigur und zugleich in der Oberfläche der Kugel. Daher müssen sie einander gleich, die Umfangslinie muß ein Kreis und die Durchschnichtsfläche, eine Kreisfläche sein.

- II. Gehet die schneidende Ebene EFHE nicht durch den Mittelpunct C, so fälle man aus demselben auf die Ebene den Perpendikel CG. Nun ziehe man aus C nach der Umfangslinie, als nach der gemeinschaftlichen Grenze der schneidenden Ebene und der Kugel, die geraden Linien CE, CF, CH u. nach Willkühr; so sind selbige einander gleich (S. 2. Zus. 2.), die Dreiecke CGE, CGF, CGH rechtwinklig und daher ist

$$\begin{array}{l} CE^2 = CG^2 + GE^2 \\ CF^2 = CG^2 + GF^2 \end{array} \quad (\text{S. 125.})$$

$$\begin{array}{l} GE^2 = CE^2 - CG^2 \\ GF^2 = CF^2 - CG^2 \end{array} \quad (\text{S. 126.})$$

$$\begin{array}{r} CE^2 - CG^2 = CF^2 - CG^2 \\ \hline GE^2 = GF^2 \end{array}$$

GE = GF und aus eben den Gründen ist GF = GH, und so ließ es sich von allen Puncten beweisen, daß ihre Entfernungen von C gleich sind, folglich die Umfangslinie der Durchschnichtsfigur ein Kreis ist.

Zusatz 1. Man kann sich nun von jedem Kreise auf der Kugelfläche nach (3.) die Vorstellung machen, als wäre er durch eine die Kugel durchschneidende Ebene entstanden. Wäre nun diese nicht durch den Mittelpunct C der Kugel gegangen; so kann man von demselben auf die Ebene, wie z. B. auf EFH, einen Perpendikel herablassen, und dieser wird allemahl durch

den Mittelpunkt des gedachten Kreises gehen. Man nehme in dem Kreise einen beliebigen Punct F, so ist dessen Entfernung, an welcher Stelle des Kreises er auch angenommen sein mag, von dem Mittelpuncte überall gleich groß, d. h. es ist $GF = \sqrt{CF^2 - CG^2}$. Diese unter dem Wurzelzeichen enthaltene Differenz, bleibt für jeden Punct F von gleicher Größe. Denn für CF kommt nur ein anderer Halbmesser derselben Kugel und CG bleibt beständig einerlei.

Zusatz 2. Jeder Perpendikel, welcher in der Mitte G einer Kreisfläche, wie GC, errichtet und gehörig verlängert wird, geht allemahl durch den Mittelpunkt der Kugel. Denn würde dieser Perpendikel nicht den Mittelpunkt der Kugel treffen; so würde er eine andere Lage etwa wie GK haben. Nun aber kann man auch aus C eine senkrechte Linie nach der Kreisfläche EFHE ziehen, welcher ihren Mittelpunkt trifft (Zus. 1.). Alsdann aber könnten durch einen Punct G dieser Ebene EFHE zwei lothrechte Linien GK und GC gezogen werden, welches aber nicht möglich ist.

Zusatz 3. Verbindet man demnach die Mittelpunkte C und G der Kugel und des Kreises EFHE durch eine gerade Linie GC, so stehet sie auf der Ebene dieses Kreises senkrecht. Denn stände GC auf der Ebene EFHE nicht in G senkrecht; so fälle man auf selbige aus C einen Perpendikel. Dieser geht, nach (Zus. 1.) durch den Mittelpunkt G des Kreises EFHE. Zwischen zwei Puncten ist nur eine gerade Linie möglich, folglich muß diese mit der vorigen zusammenfallen und die Verbindungslinie CG auf der Ebene EFHE senkrecht stehen.

§. 5.

Erklärung. Kreise, welche auf der Oberfläche der Kugel abgebildet werden, indem die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt derselben gehet, heißen größte Kreise; die andern aber, deren Durchschnittebene nicht durch die Mitte der Kugel gehet, werden kleinere Kreise genannt.

Zusatz 1. Alle größte Kreise einer Kugel sind einander gleich; denn sie haben mit der Kugel einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt und einen gemeinschaftlichen Halbmesser.

Zusatz 2. Die Grundfläche einer Halbkugel gehet allemahl durch den Mittelpunkt der Kugel, folglich ist der Umfang derselben ein größter Kreis.

§. 6.

Jeder größte Kreis theilt die Kugel in zwei gleiche Theile.

Es sey ABDEA (Fig. 5.) ein größter Kreis der Kugel ANDMA und NM einer ihrer Durchmesser, wozu der aus den beiden gleichen Quadranten NCD und MCD bestehende Halbkreis gehört; so kann man sich die Entstehung der Kugel durch die Umdrehung des Halbkreises NDM um NM begreiflich machen. Diese Kugel aber würde auch entstanden seyn, wenn die beiden gleichen vermittelst des Halbmessers CD zusammenhangenden Quadranten NCD und MCD, welche den gedachten Halbkreis ausmachen, sich auf die in (2.) erklärte Art, zugleich um NC und MC gedrehet hätten. Allein jeder Quadrant für sich genom-

men, hat eine Halbkugel und der gemeinschaftliche Halbmesser CD , die den beiden Halbkugeln gemeinschaftliche Grundfläche $ABDEA$ beschrieben. Beide Quadranten aber, mithin auch beide Halbkugeln sind einander gleich, und der Umfang ihrer gemeinschaftlichen Grundfläche ist ein größter Kreis. Also wird die Kugel durch denselben in zwei gleiche Theile getheilt.

§. 7.

Zwei verschiedene Kreise auf der Oberfläche der Kugel gehören allemahl zu zwei verschiedenen, die Kugel durchschneidenden Ebenen. Schneiden sich nun diese beiden Kreise einander auf der Oberfläche der Kugel; so müssen sich auch die von den gedachten Kreisen begrenzten Ebenen einander schneiden. Ihr Durchschnitt ist eine gerade Linie, welche in der Kugel liegt, weil die Ebenen sich darin schneiden, die Stellen aber, worin die Kreise als Linien einander schneiden, sind Punkte. Nun liegen die Durchschnittspunkte in beiden verschiedenen Kreisen, diese in den verschiedenen Ebenen, diese aber haben nur eine gerade Linie mit einander gemein, also müssen in ihr die Durchschnittspunkte liegen. Die übrigen hierher gehörigen Bestimmungen werden folgende Sätze erläutern und deutlich machen.

§. 8.

Jede gerade Linie, welche durch einen Punkt innerhalb der Kugel gezogen und gehörig verlängert wird, trifft ihre Oberfläche nicht in mehr als zwei Punkten.

Es sei F (Fig. 4.) ein beliebiger Punkt in der durch

ihre Oberfläche begrenzten Kugel. Durch F gehe eine gerade Linie, welche nöthigen Falles nach beiden Seiten verlängert, die Kugelfläche an zweien Stellen M und N durchschneidet. Durch diese Linie AB und den Mittelpunkt der Kugel C lege man eine Ebene, so liegen a) alle Punkte der geraden Linie AB und deren Verlängerung in der schneidenden Ebene und b) alle Punkte, die diese mit der Kugelfläche gemein hat, in einem Kreise, den sie, ehe sie die Kugel verläßt, auf ihrer Oberfläche abbildet. Sollte demnach die Kugel-
fläche von der geraden Linie an drei Stellen geschnitten werden; so kann dieses nicht anders geschehen, als wenn drei Punkte der geraden Linie mit drei Punkten des Kreises zusammenfallen. Dieses ist aber unmöglich, folglich auch jenes. Daher schneidet eine gerade Linie die Kugelfläche in nicht mehr als zwei Punkten.

Zusatz 1. Zwei auf der Oberfläche der Kugel einander schneidende Kreise AFBGA und EFDGE (Fig. 6.) haben nur eine gerade Linie mit einander gemein, diese aber kann nur an zweien Stellen durch die Kugelfläche gehen, folglich müssen diese die Durchschnittpunkte der Kreise sein, welche sich also auch nur in zwei Punkten schneiden können.

Zusatz 2. Zwei Kreise, welche auf der Oberfläche der Kugel einander schneiden, nicht aber halbiren, können beide kleinere, aber nicht beide größte Kreise sein. Denn wären beide größte Kreise, so lägen in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie, außer den beiden Durchschnittpunkten, auch der Mittelpunkt der Kugel. Dieser wäre alsdann der gemeinschaftliche Durchmesser beider Kreise und beide würden dadurch halbirt.

§. 9.

Wenn eine Kugel in gleichen Entfernungen von dem Mittelpuncte geschnitten wird; so sind die Kreise der Durchschnittenfiguren einander gleich. Die andern Kreise aber werden immer kleiner, je weiter die schneidende Ebene von dem Mittelpuncte entfernt ist.

I. Man lasse aus dem Mittelpuncte der Kugel E (Fig. 5.) auf AMBA und CNDC, die beiden Linien EH und EK lothrecht herab; so sind diese einander gleich und jede derselben trifft den Mittelpunct des Kreises, EH den Punct H, und EK den Punct K. Nun ziehe man aus E nach B und D ein Paar Hülfslinien EB und ED; so sind sie als Halbmesser der Kugel auch einander gleich. Nun sind bei H und K rechte Winkel, folglich

$$\begin{array}{l} EB^2 = EH^2 + HB^2 \\ ED^2 = EK^2 + KD^2 \end{array} \quad (\S. 125.)$$

$$\begin{array}{l} HB^2 = EB^2 - EH^2 \\ KD^2 = ED^2 - EK^2 \end{array} \quad (\S. 126.)$$

$$HB = \sqrt{EB^2 - EH^2}$$

$$KD = \sqrt{ED^2 - EK^2}$$

$$\sqrt{EB^2 - EH^2} = \sqrt{ED^2 - EK^2}$$

HB = KD. Dieses sind aber die gleichen Halbmesser der Kreise AMBA und CNDC, folglich sind diese Kreise auch einander gleich.

II. Aus der Betrachtung der Ausdrücke $HB = \sqrt{EB^2 - EH^2}$, $KD = \sqrt{ED^2 - EK^2}$ erhellet zugleich, daß HB immer größer werden muß, je kleiner EH wird,

d. h. je kleiner die Entfernung des Kreises AMBA von E ist; und daß HB immer kleiner werden muß, je mehr EH zunimmt, d. h. je weiter der Kreis von dem Mittelpuncte der Kugel entfernt ist, indem EB oder ED als Halbmesser immer dieselbe Größe behält.

Zusatz 1. Ist nun der Kreis von dem Mittelpuncte der Kugel gar nicht entfernt, so wird $EH = 0$ und $HB = \sqrt{(EB^2 - 0^2)} = \sqrt{EB^2} = EB$, d. h. der Kreis geht durch den Mittelpunct der Kugel, und sein Umfang ist ein größter Kreis. Ist aber EH dem Halbmesser gleich, so wird $HB = \sqrt{(EB^2 - EH^2)} = \sqrt{(EB^2 - EB^2)} = 0$, d. h. es gibt auf der Oberfläche der Kugel gar keinen Kreis mehr, der um den Halbmesser EB von dem Mittelpuncte entfernt wäre.

Zusatz 2. Sind auf der Oberfläche der Kugel zwei kleinere Kreise einander gleich; so sind sie auch von dem Mittelpuncte der Kugel gleich weit entfernt. Ist aber der eine größer als der andere, so liegt jener dem Mittelpuncte der Kugel näher als dieser. Die beiden gleichen Kreise AB und CD sind von dem Mittelpuncte der Kugel gleich weit entfernt, wenn die lothrechten Linien EH und EK einander gleich sind. Dieses aber sieht man daraus, weil

$$EB^2 = EH^2 + HB^2$$

$$ED^2 = EK^2 + KD^2$$

$$HE = \sqrt{(EB^2 - HB^2)}$$

$$EK = \sqrt{(ED^2 - KD^2)}$$

$$\sqrt{(EB^2 - HB^2)} = \sqrt{(ED^2 - KD^2)}$$

$$HE = EK.$$

Der Kreis FG aber ist weiter von C entfernt als der Kreis AB, wenn $EL > EH$ ist. Dieses aber folgt daraus, daß in dem Ausdrucke $EL = \sqrt{(EG^2 - LG^2)}$, LG kleiner ist als HB in dem Ausdrucke $EH = \sqrt{(EB^2 - HB^2)}$, indem FG und EB als Halbmesser der Kugel dieselbe Größe behalten.

§. 10.

Zwei größte Kreise einer Kugel schneiden und halbiren einander, und Kreise, welche auf der Kugelfläche einander halbiren, sind größte Kreise.

I. Wenn AGBFA und DGEFD (Fig. 6.) zwei größte Kreise vorstellen; so gehen beider Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel C. Verschiedene Ebenen aber, die durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, müssen auch durch einander gehen, d. h. sie müssen einander schneiden.

Weil nun die Ebenen beider Kreise, welche durch den Mittelpunkt gehen, außer dem Durchschnitte keinen Punct mit einander gemein haben, so muß der Mittelpunkt der Kugel im Durchschnitte liegen und dieser ein gemeinschaftlicher Durchmesser beider Kreise und seine Endpuncte ihre Durchschnittpuncte sein. Alsdann aber sind die Kreisbogen zu beiden Seiten der Durchschnittpuncte einander gleich. Denn es sind die zu demselben Durchmesser gehörenden gleichen Halbkreise.

II. Die Ebenen der einander halbirenden Kreise, schneiden sich in einer geraden Linie, welche ihr gemeinschaftlicher Durchmesser ist. Dieser aber muß auch

zu

zugleich ein Durchmesser der Kugel sein. Denn sonst könnte man aus ihrem Mittelpuncte C auf die einander schneidenden Kreisflächen einen Perpendikel fallen, der durch beider Mittelpunct geht. Folglich würde der Perpendikel auf beiden Kugelschnitten senkrecht stehen, welches unmöglich ist (§. 255.).

Zusatz. Zwei Kreise einer Kugel, welche einander schneiden, nicht aber halbiren, können beide kleinere aber nicht beide größte Kreise sein. Denn in diesem Falle müßten sie einander halbiren. Durch die letzte Bestimmung dieses Satzes ist die Behauptung nicht ausgeschlossen, daß einer der einander schneidenden Kreise, nicht ein größter sein könnte.

§. 11.

Erklärung. Wenn man sich den Halbkreis vorstellt, durch dessen Umdrehung um den Durchmesser die Kugel entstanden ist; so nennt man diesen Durchmesser die Aze, und ihre Endpuncte die Pole der Kugel.

Parallel-Kreise einer Kugel nennt man diejenigen, deren Ebenen mit einander parallel laufen.

§. 12.

Erklärung. Die obigen Benennungen der Pole und der Aze finden auch bei jedem Kreise EF (Fig. 7.) Statt, der so beschaffen ist, daß alle Theile seines Umfanges von einem gewissen Puncte P auf der Kugel- fläche gleichweit entfernt sind. Dieser Punct heißt der Pol des Kreises. Eine gerade Linie aber, welche von dem Pole durch den Mittelpunct des Kreises geht, wird die Aze dieses Kreises genannt.

§. 15.

Die Aye eines Kreises steht auf seiner Ebene senkrecht, geht durch den Mittelpunkt der Kugel und erreicht, gehörig verlängert, auf der andern Seite des Kreises, den andern Pol.

I. Es sei (Fig. 8.) AEBDFA ein Kreis, dessen Aye PG ist, so geht diese (nach 12.) von dem Pole P durch dessen Mittelpunkt G. Nun nehme man in dem Umfange des Kreises zwei beliebige Punkte A, D an, ziehe aus A und D die Durchmesser AGB und DGE und aus P die geraden Linien PA, PB, PD, PE; so sind die beiden Dreiecke APG und BPG wegen der Gleichheit ihrer Seiten einander gleich und es ist der W. $\angle PGA = \angle PGB = R$. Aus demselben Grunde sind die Dreiecke DPG und EPG desgleichen die W. $\angle PGD$ und $\angle PGE$ einander gleich und jeder $= R$. Also steht PG auf dem Durchschnittspunct der beiden geraden Linien AB, DE, folglich auf der Ebene des Kreises AEBDFA senkrecht.

II. Geht durch den Mittelpunkt eines Kreises eine gerade Linie der Ebene senkrecht durch, so trifft sie verlängert den Mittelpunkt der Kugel (4. Zus. 2.). Jene Eigenschaft kommt nach (I.) der Aye zu, also auch diese.

III. Verlängert man die Aye PG auf der andern Seite des Kreises, bis sie die Kugelfläche in p erreicht; so ist dieser Punct der andere Pol des Kreises, weil die Entfernung pD oder pE, wo man den Punct D oder E im Umfange des Kreises auch annimmt, überall von gleicher Größe bleibt.

Zusatz 1. Es gibt aber auf der Kugelfläche zu jeder Seite des Kreises nur einen Pol. Denn gäbe es deren zwei, so könnte man aus jedem eine gerade Linie durch den Mittelpunkt des dazu gehörigen Kreises ziehen, jede würde eine Axc (12.) und auf der Kreisebene senkrecht sein, welches nicht möglich ist (252.).

Zusatz 2. Eine Axc P (Fig. 7.) hingegen kann zu mehreren Kreisen EB, FG, einer Kugel gehören und diese steht alsdann auf ihren Ebenen senkrecht.

Zusatz 3. Also laufen die Ebenen aller zu einerlei Axc gehörigen Kreise EB, FG etc., mit einander parallel, weil die Axc auf allen senkrecht steht (2.).

Zusatz 4. Unter den parallellaufenden Kreisen kann nur einer GH ein größter sein. Denn gäbe es deren zwei, so müßten sie sich schneiden und alsdann würde die Axc auf zwei einander schneidenden Ebenen senkrecht stehen.

Zusatz 5. Sind P und p die Pole eines Kreises AEBDFA (Fig. 8.), so ist die gerade Linie zwischen denselben, dessen Axc, und hat die vorhin angeführten Eigenschaften. Denn zwischen zwei Puncten ist nur eine gerade Linie möglich.

Zusatz 6. Wenn man demnach durch den Mittelpunkt G (Fig. 8.) eines Kreises AEBDFA eine gerade Linie GP senkrecht zieht und bis an die Kugelfläche verlängert, so ist diese gerade Linie die Axc und ihre Durchschnittpuncte sind die Pole des Kreises AEBDFA. Denn hätte dieser Kreis eine andere Axc, so würde man aus seinem Mittelpuncte zwei gerade Linien ziehen können, die auf seiner Ebene senkrecht ständen, welches nicht möglich ist.

Zusatz 7. Wenn aus dem Pole P (Fig. 8.) eines Kreises, auf seine Ebene ein Perpendikel herabgelassen wird; so trifft er den Mittelpunkt G desselben und ist also dessen Arc. Denn nimmt man im Kreise einen beliebigen Punct D an und bezeichnet G den Punct, durch welchen der Perpendikel durch die Kreisebene geht, so ist $DG = \sqrt{PD^2 - PG^2}$. Diese Entfernung behält überall einerlei Größe, an welcher Stelle des Umkreises der Punct D auch angenommen werden mag. Denn sie wird durch die Quadratwurzel der Differenz der beiden Quadrate von PD und PG ausgedrückt, wovon jene allemahl, weil P der Pol ist von gleicher Länge, diese die unveränderliche Linie PG ist.

Anmerkung. Die Lehren der vorhergehenden §. §. beziehen sich vornehmlich auf folgende Stücke:

- 1) auf die Pole eines Kreises,
- 2) auf seine Arc,
- 3) auf seinen Mittelpunkt,
- 4) auf die mit ihm parallellaufenden Kreise, worunter auch ein größter sein kann,
- 5) auf den Mittelpunkt der Kugel.

Diese sechs Stücke (die beiden Pole eines Kreises sind als zwei verschiedene Puncte anzusehen) stehen mit einander in einer solchen Verbindung, daß aus zwei derselben, die vier übrigen allemahl bestimmt werden können. Kennt man z. B. den Mittelpunkt der Kugel und eines gegebenen kleinern Kreises, so weiß man daß die Verbindungslinie auf seiner Ebene senkrecht steht, daß sie, gehörig verlängert die Pole trifft, daß sie also die Arc ist, daß sie auf allen mit den gegebenen parallellaufenden Kreisen, worunter der, welcher durch den Mittelpunkt der Kugel geht, der größte ist, senkrecht steht.

§. 14.

Ein Kreis, welcher auf der Kugelfläche durch die Pole eines andern Kreises geht, steht auf ihm senkrecht, halbiret ihn und ist ein größter Kreis.

Gehet ein Kreis (Fig. 8.) $ApBPA$ durch die Pole P, p eines andern, so liegt die Ase PCp dieses, in der Ebene jenes Kreises. Nun steht die Ase Pp auf der Ebene des Kreises $ABDFA$ senkrecht, folglich auch die Ebene des andern Kreises. Die Ase geht durch den Mittelpunkt G des Kreises $ABDFA$, folglich auch die Ebene des andern Kreises, also geht auch ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt AB durch diesen Punkt und er ist daher ein Durchmesser des Kreises $AFDBEA$. Er wird daher durch AB in zwei gleiche Theile getheilt. Endlich geht die Ase durch den Mittelpunkt der Kugel, folglich auch die Ebene des andern Kreises, welcher daher ein größter ist.

Zusatz. Die Bogen PA, PF zweier größten Kreise, welche zwischen dem Pole P in dem Umfange eines andern Kreises $AEBDFA$ enthalten sind, sind einander gleich, d. h. es ist der Bogen $PA = PF$. Man ziehe die geraden Linien PA und PF , so sind dieses zwei gleichnamige Seiten der beiden congruenten Dreiecke APG und FBG , folglich einander gleich. Von den Bogen PA und PF sind sie also die gleichen Sehnen; zu gleichen Sehnen aber gehören gleiche Bogen. Also ist der Bogen $PA = PF$. Auch ist $pA = pF$. Denn es ist der Bogen $pAP = pFB$ und der Bogen $PA = PF$, diese von jenen abgezogen lassen die gleichen Kreisbogen pA und pF .

§. 15.

Ein größter Kreis, der auf einem andern (nicht größten also kleinern) senkrecht steht, theilet ihn in zwei gleiche Theile, geht durch dessen Pole und seine Ebene durch dessen Axe.

Es sei (Fig. 8.) $APBpA$ ein größter Kreis, der auf einem andern wie $AEBDFA$ senkrecht stehe; und aus dem Mittelpuncte C des größten Kreises, der zugleich der Mittelpunct der Kugel ist, lasse man einen Perpendikel auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt beider Kreise herab; so geht derselbe durch den Mittelpunct des andern Kreises $AEBDA$ (4. Zus. 1.), der Durchschnitt AB ist also ein Durchmesser desselben und theilt den andern Kreis in zwei gleiche Theile.

Dieser Perpendikel CG aber ist auch die Axe des kleinern Kreises, welcher, gehörig verlängert, auf der Kugelfläche zwei überall von dem Kreise gleich weit abstehende Puncte (die Pole P, p desselben) trifft.

Läßt man nun aus einem beliebigen Puncte C der einen Ebene, auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt AB der andern auf der vorigen senkrecht stehenden Ebene, einen Perpendikel CG herab; so liegt dieser, da er die Axe ist, ganz in der Ebene des größten Kreises $APBpA$ und also die Pole des Kreises $AEBDA$ in p und P in jenes Umfange.

Zusatz 1. Bewegt man die schneidende Ebene des Kreises $AEBDA$ in paralleler Lage so weit herab, bis G mit C wie in (Fig. 9.) zusammenfällt; so bleibt die Lage beider Kreise senkrecht, auch bleiben die Axe und Pole in ihrer Lage ungeändert; allein der andere Kreis

ist nun auch ein größter Kreis und er hat nun eben dieselbe Stellung und Lage gegen den vorigen, als dieser gegen jenen, d. h. er läuft durch die Pole Π , π des Kreises APBP und dessen Axe liegt in seiner Ebene.

Zusatz 2. Da nun aus (15.) der Kreis APBP_A den andern, und nach (Zusatz 1.) dieser jenen halbt, so sind die Bogen zwischen ihren wechselseitigen Durchschnittspuncten, Quadranten und diese sind alle einander gleich, weil sie zu gleichen Kreisen gehören.

§. 16.

Zwei größte Kreise, deren jeder durch die Pole des andern geht, stehen auf einander senkrecht.

Die größten Kreise sind APBP_A und ABDA. Da nun jener durch die Pole P, p des Kreises ABDA und dieser durch die Pole Π , π des Kreises APBP_A geht; so geht jedes Kreises Ebene durch die Axe des andern Kreises, folglich stehen diese Ebenen, also auch ihre Kreise auf einander senkrecht.

Zusatz 1. Wenn zwei oder mehrere größte Kreise durch die Pole eines andern größten Kreises geführt werden; so liegen die Pole jener Kreise sämtlich in dem Umfange dieses Kreises. Ist APEpA (Fig. 10.) durch die Pole P, p des Kreises AEGA geführt; so liegen auch die Pole des Kreises APEpA in dem Umfange AEGA. Geht der Kreis PDpP auch durch die Pole P, p; so liegen die Pole des Kreises ebenfalls in dem Umfange des Kreises AEGA. Dieses findet aber allemahl Statt, man mag durch die Punkte P, p so viel Kreise führen, als man will.

Zusatz 2. Die Pole mehrerer größten Kreise einer Kugel, welche sich in einem gemeinschaftlichen Durchmesser schneiden und auf einem andern größten Kreise senkrecht stehen, liegen sämmtlich in dem Umfange dieses letztern Kreises.

§. 17.

Die Bogen zweier Parallelkreise, welche zwischen zwei größten, durch deren Pole gehenden Kreisen enthalten sind, gehören zu gleichen Winkeln und sind einander ähnlich.

Es mögen nun ED und HG (Fig. 11.) die Bogen zweier Parallelkreise, PDp und PEp die größten durch die Pole der vorigen gehenden Kreise vorstellen; so ist zu beweisen, daß die Winkel DCE und GFH einander gleich, folglich die Bogen GH und DE einander ähnlich sind.

Die Punkte P und p, durch welche die größten Kreise PDp und PEp geführt sind, sind die Pole der Parallelkreise; die gerade Linie Pp, also ihre Aye und zugleich der Durchschnitt der größten Kreise PDp und PEp. Als Aye steht sie auf den Ebenen der Parallelkreise senkrecht, also stehen auf ihnen auch die Ebenen der größten Kreise senkrecht, welche durch Pp gehen. Diese schneiden aber die Parallelkreise in geraden Linien und zwar PDp in CD und FG, und PEp in CE und FH. Gene sowohl als diese treffen die Punkte C und F, durch welche die Aye geht. Daher ist im Kreise PDp der W. PCD = PFG und im Kreise PEp der

W. $PCE = PFH$. Folglich $CD \# FG$ und $CE \# FH$;
also der W. $DCE = GFH$ und der Bogen $DE \# GH$.

Zusatz 1. Theilt man jeden Parallelskreis in seine
360 Grade ein; so bekommen ähnliche Bogen ED , HG
ungleicher Parallelskreise eine gleiche Anzahl von Gra-
den. Daher ist der Bogen ED und jeder andere HG ,
welcher diesem ähnlich ist, das Maß des von den bei-
den größten Kreisen PEP und PDP eingeschlossenen
Flächenwinkels.

Zusatz 2. Man kann aber allemahl einen der
Parallelskreise durch den Mittelpunkt der Kugel legen.
Dieser wird ein größter Kreis und der Bogen ED das
Maß des von den beiden größten Kreisen PEP und
 PDP eingeschlossenen Flächenwinkels an der Aze Pp
sein. Diesen Bogen wählt man zur gedachten Absicht
am meisten, weil er mit der Kugel einen gemeinschaft-
lichen Halbmesser hat.

Zusatz 3. Jeder dieser Winkel DCE , HFG be-
stimmt die Neigung der beiden Halbkreise PDP und
 PEP gegen einander und aus ihrer gleichförmigen Aus-
dehnung erhellet, daß ihre Neigung überall gleich sein
muß. Es ist daher die Neigung derselben an dem
Puncte P eben so groß als an p , oder der Bogen DP
schließt mit EP einen Winkel ein, der so groß ist als
der Winkel, der an p durch Dp und Ep gebildet wird.
Will man nun die Neigung der beiden Kreise PDP
und PEP gegen einander angeben; so geschiehet dieses
dadurch, daß man die Anzahl der Grade, Minuten *ic.*
angibt, welche im Bogen DE des größten Kreises ent-
halten sind.

Zusatz 4. Wenn man die Endpuncte D und E zweier Quadranten größter Kreise durch einen Bogen verbindet, dessen Ebene durch den Mittelpunct der Kugel C geht; so stehen die Quadranten PD und PE auf dem Bogen DE senkrecht und dieser geht durch ihre Pole. Man ziehe aus dem Mittelpuncte der Kugel C nach den Endpuncten der Quadranten P , D und E die geraden Linien CP , CD und CE ; so liegen die letztern in der Ebene des Bogens DE und die Ebenen der Quadranten PD und PE gehen durch die Puncte P , C , D und P , C , E . Die Linien CP und CD sind einander gleich, der Bogen PD ein Quadrant und zugleich das Maß des Winkels PCD , folglich ist der $\mathcal{W}$. $PCD = R$. Aus gleichem Grunde ist der $\mathcal{W}$. $PCE = R$. Folglich schließt PC , wodurch die Ebenen der Quadranten gehen, mit CD und CE rechte Winkel ein. Also stehen sie auf dem Bogen DE senkrecht; folglich steht auch der zu DE gehörige Kreis auf den beiden andern senkrecht und geht durch ihre Pole.

Zusatz 5. Wenn man also zwei größte Kreise PAP und PKP (Fig. 15.) auf einen dritten $AKQA$ senkrecht setzt, so sind ihre Durchschnittspuncte P, p des dritten größten Kreises Pole. Um also überhaupt eines größten Kreises $AKQA$ Pol P auf der Kugelſtäche zu bestimmen, so darf man nur einen andern größten Kreis PKP auf ihn senkrecht setzen, auf diesem von K bis P 90° abzählen, wo alsdann P der verlangte Pol sein wird.

Zusatz 6. Will man nun auf der Kugelſtäche einen größten Kreis $AKQA$ so beschreiben, daß er durch die Pole zweier andern größten Kreise läuft, so darf man nur eine Ebene auf ihren gemeinschaftlichen

Durchschnitt PP durch den Mittelpunkt der Kugel C senkrecht setzen, diese bildet auf der Kugel einen größten Kreis ab , worin die Pole der gegebenen Kreise PAp und PKp liegen.

§. 18.

Erklärung. Unter einem sphärischen Winkel versteht man allemahl denjenigen, welchen zwei Bogen größter Kreise an ihrem Durchschnittspuncte einschließen. Dieser heißt der Scheitelpunct und die von ihm anfangenden Bogen, die Schenkel des sphärischen Winkels. In (Fig. 11.) ist der Winkel EPD , welchen die Bogen PE und PD größter Kreise an der Spitze P einschließen, ein sphärischer Winkel, P sein Scheitelpunct und PD und PE seine Schenkel.

§. 19.

Jeder sphärische Winkel ist so groß als der geradlinige, welchen die Tangenten der Schenkel an dem Scheitelpuncte des sphärischen Winkels mit einander einschließen.

Wenn man in jeder der erweiterten Ebenen PEp und PDp , worin die Schenkel des sphärischen Winkels liegen, die geraden Linien PT und tP so ziehet, daß sie die Kreise in ihrem Durchschnittspuncte P berühren; so kommt an dieser Stelle P die Lage und Richtung der Tangenten mit der Lage und Richtung der Kreisbogen überein, d. h. PT mit PH und Pt mit PG . Daher haben auch die Tangenten TP und tP eben die Lage gegen einander, welche die Bogen gegen einander

haben. Diese aber sind die Schenkel des sphärischen Winkels, folglich ist derselbe mit dem geradlinigen Winkel TPt einerlei. Dieser von den Tangenten gebildete geradlinige Winkel aber ist eben so groß als der Neigungswinkel ECD , weil $TPP = R = PCE$ (§. 136.) und auch $tPp = R = PCD$, folglich $TP \parallel EC$ und $tP \parallel DC$, folglich der W. $TPt = ECD$ ist (§. 259.). Also ist auch der sphärische Winkel EPD der beiden Ebenen PEp und PDp , worin seine Schenkel liegen, so groß wie der geradlinige, welchen die Tangenten PT und Pt am Scheitelpuncte des sphärischen Winkels mit einander einschließen.

Zusatz. Ist nun (Fig. 11.) GPH ein sphärischer Winkel, P sein Scheitelpunct und verlängert man seine Schenkel PG und PH , bis sie Halbkreise werden, und zwischen sich also den Flächenraum $PDpEP$ einschließen; so verhält sich die eingeschlossene Fläche zur ganzen Kugelgröße, wie der sphärische (durch Grade ausgedruckte) Winkel zu vier Rechten oder 360° . Setzt man nun den Halbmesser der Kugel $= r$, die Anzahl der Grade des sphärischen Winkels $= a$ und bezeichnet π die Länge des Halbkreises aus dem Halbmesser 1; so läßt sich die gedachte Proportion auf folgende Art bezeichnen: Es ist die eingeschlossene Oberfläche: $4r^2\pi = a : 360^\circ$, also ist der Flächeninhalt zwischen den beiden Halbkreisen

$$= \frac{4ar^2\pi}{360^\circ} = \frac{2ar^2\pi}{180} = \frac{a}{180} \cdot 2r^2\pi.$$

Es sei z. B. $a = 24^\circ$, der Kugel Halbmesser $r = 6$, $\pi = 3,14159 \dots$ und F der Flächeninhalt; so ist der gedachte Flächeninhalt $F = \frac{a}{180} 2r^2\pi = \frac{24}{180} \cdot 2 \cdot 36$.

$$3,14159 = \frac{4}{30} \cdot 2 \cdot 36 \cdot 3,14159 = \frac{4 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 3,14159}{10}$$

$$= 30,1592 \text{ N. S.}$$

Anmerkung. Man kann sich zur bequemern Berechnung der gleichen zwischen zwei größten Kreisen enthaltener Flächenräume, der XXIII. Tabelle der Zusätze zu den Log. und Trig. Tabellen zur Erleichterung und Abkürzung der bei Anwendung der Math. vorkommenden Berechnungen von Lambert, bedienen. Man findet sie S. 146 bis 149 und sie enthält die von Grad zu Grad u. fort schreitenden Bogen durch's Längenmaß aus dem Halbmesser 1 ausgedruckt. Gehören zu dem Bogen Minuten und Secunden, so erhält man dessen Länge aus der angeführten Tabelle durch eine leichte Addition. Es sei z. B. $a = 56^\circ 24' 16''$ und setze $\frac{a}{180} 2r^2 \pi = \frac{a \pi}{180} \cdot 2r^2$, so findet man $\frac{a \pi}{180}$ in der gedachten Tabelle. Es ist nemlich der Bogen von

56°	$=$	1,012290
$20'$	$=$	5817
$4'$	$=$	1163
$10''$	$=$	48
$6''$	$=$	29

Also $56^\circ 24' 16'' = 1,019347$. Diese Zahl mit $2r^2$ multiplicirt gibt für $r=6$, den Flächeninhalt $F = 73,392984$ N. S.

§. 20.

Sphärische Scheitelwinkel sind einander, und sphärische Nebenwinkel zwei Rechten gleich.

I. APB und CPD sind (Fig. 12.) die sphärischen Scheitelwinkel; APB und BPD die sphärischen Nebenwinkel. Nun ziehe man die Tangenten MPN

und QPR durch den Scheitelpunct der sphärischen Winkel, so ist der Winkel MPQ einerlei mit dem Winkel APB (19.), der Winkel NPR einerlei mit dem Winkel CPD (19.); MPQ aber ist so groß als NPR (§. 20.), folglich auch der Winkel $APB = CPD$.

II. MPQ ist einerlei mit APB, und BPD einerlei mit QPN; allein die Winkel $MPQ + QPN$ sind so groß wie $2R$ (§. 17.), folglich sind $APB + BPD$ auch so groß als $2R$.

§. 21.

Wenn zwei größte Kreise einer Kugel einander schneiden, so bilden sie sphärische Winkel, welche dem von ihren Arcen eingeschlossenen geradlinigen Winkel gleich sind.

Die einander auf der Kugel schneidenden Kreise mögen (Fig. 13.) AGBFA und DGEFD, ihre Arcen Pp und $\pi\pi$, ihre Pole P und p , π und π sein; so sind die Winkel AGD, BGE, AFD, BFE, unter welchen sie sich schneiden, einander gleich und jeder derselben so groß, als der Winkel $PC\pi$ oder $pC\pi$, unter welchen sich die Arcen schneiden. Denn man nehme $FB = 90^\circ = FE$ und lege durch B und E einen größten Kreis, so steht derselbe auf beiden Kreisen AGBFA und DGEFD senkrecht (17. Zus. 4.); folglich ist jenes Ebene und Umfang durch dieser Kreise Arcen Pp , $\pi\pi$, und Pole P , p , π , π geführt (17.). Der Bogen $BE + EP$ aber ist $= 90^\circ$ und so ist auch $PE + P\pi = 90^\circ$, folglich $BE + EP = EP + P\pi$, also $BE = P\pi$. BE aber ist

das Maß des sphärischen Winkels BFE und $P\pi$ das Maß des Winkels, welcher die Arcen Pp und $\pi\pi$ beider Kreise $AGBFA$ und $DGEFD$ einschließen, folglich ist der $W. EFB = PC\pi$.

Erklärung. Unter dem Abstände oder der Entfernung zweier Punkte auf der Kugelfläche, versteht man den kleinsten Bogen eines größten Kreises zwischen den gedachten Punkten auf der Oberfläche der Kugel gezogen. Beide Punkte π und P aber lassen sich durch zwei verschiedene Bogen eines und eben desselben größten Kreises mit einander verbinden; nemlich durch den Bogen πP und $\pi p P$. Der kleinste Bogen aber liegt auf demjenigen Kugelfstücke, in welchem nicht der Mittelpunkt der Kugel befindlich ist. Diesen muß man allemahl verstehen, wenn von dem kleinsten, zwischen zwei Punkten auf der Kugelfläche gezogenen Bogen die Rede ist.

Zusatz. Die Entfernung der Pole πP der beiden größten Kreise auf der Oberfläche der Kugel genommen, ist daher eben so groß, als das Maß des sphärischen Winkels EFB , unter welchem die gedachten Kreise einander schneiden.

Zweiter Abschnitt.

Erklärungen einiger Kreise, Linien und Puncte an der Himmels-
und der Erdougel.

§. 22.

Wenn in des Jahres kürzern Tagen der Himmel von feinen Wolken getrübt wird und die letzten Strahlen der untergehenden Sonne aus dem Gesichte verschwinden; so eröffnet sich unserm Auge eine neue Aussicht in den unendlichen Weltraum. Das majestätische Bild der Schöpfung tritt mit seiner ganzen Pracht hervor, der Himmel erscheint uns in der Gestalt einer oben etwas eingedrückten Kugel, an deren innerer Fläche die Dunkelheit der Nacht das unzählbare Heer der Sterne über unsern Scheitel führt. Einige derselben kündigen sich bei dem ersten Anblick durch ihren Glanz und ihre Klarheit als Sterne erster Größe an. Ihr Licht gewinnt unter dem Vergrößerungsglase eine solche Stärke, daß es das Auge kaum zu ertragen vermag. Andere sind von diesen wenig verschieden, aber ihr Glanz ist milder und nicht ganz so durchdringend als bei den vorigen und diese nennt man Sterne der zweiten

ten Ordnung. So gehet man in dieser Abstufung fort und ein etwas geübtes Auge, unterscheidet den Glanz und die Lichtstärke der Sterne der neunten, zehnten u. Ordnung, bis endlich nicht nur einzelne Sterne, sondern auch ganze Sterngruppen so unkenntlich werden, daß sie unsere Aufmerksamkeit fast gar nicht zu reizen und in ein unbedeutendes Nebelwölkchen zusammen zu fließen scheinen. Vielleicht aber giebt es für den denkenden und fühlenden Menschen in dem unendlichen Reiche der Schöpfung, keine so überraschende, keine so hinreißende Scene, als die Betrachtung eines solchen Nebelwölkchens durch ein gutes Fernrohr. Dieses löset die Nebelschimmer in einzelne von einander durch merkliche Zwischenräume getrennte und hellstrahlende Sterne auf, ein neuer, nie gesehener Himmel scheint auf einmal aus diesem dunkeln Grunde hervorzutreten, so, daß man in einem Raume, den der Mond am Himmel zu bedecken scheint, viele tausend hellfunkelnde Sterne findet. Der Verstand trauet den Sinnen nicht, man wähnt sich getäuscht und mit Begierde sucht das bloße Auge diese Stelle unter den übrigen Sternen am Himmel auf; aber es ist Wahrheit, Wahrheit wie sie die Natur zu geben und der Verstand zu fassen vermag, und man empfindet es in seinem ganzen Umfange, was Kästner so schön sagt: „einen einzigen neblichten Stern verwandelt das Fernglas in einen Himmel voll Sonnen.“ Denn alle diese Sterne vom Sirius bis zum kleinsten schwächsten Punkte hin, welchen das Auge des Sterblichen nur zu erreichen vermag, sind Sonnen, die nach aller Wahrscheinlichkeit andern unzählbaren Weltkörpern Licht und Wärme erteilen,

Sonnen, von der Natur wie die unsrige ist, von welcher man nur alsdann eine ihrer Größe angemessene und würdige Vorstellung hat, wenn man mit einem Halbmesser, der zweimahl so groß als der Mond von uns entfernt ist, d. h. mit einem Halbmesser von mehr als 103200 Meilen*) einen Kreis beschreibt und in diesen Raum die Sonnenkugel setzt. Auf diese Art erweitert die Sternkunde unsere Einsichten und berichtigt unsere Begriffe über die Gegenstände der Natur. Selbst der kühnste Flug der Phantasie würde es nicht gewagt haben, jene kaum sichtbaren Punkte des Firmaments zu Weltkörpern von so erstaunlicher und unermesslicher Größe umzuschaffen, wenn wir uns nicht davon durch unleugbare Gründe der Vernunft überzeugen könnten. Diese wenigen Bemerkungen zeigen zur Genüge, wie schön und erhaben diese Wissenschaft in ihrem Innern sei, wie reich an Wahrheit, wie befriedigend für Geist und Herz.

Die vollständige Entwicklung dieser Lehren gehört in das eigentliche Gebiet der Astronomie, deren erstes Geschäft es ist, die Bewegung und den Abstand der Sterne, nach der Lage und Richtung gewisser Kreise am Himmel mit Hülfe einiger wenigen leicht zu machenden Beobachtungen zu bestimmen. Da nun die Kenntniß derselben, selbst den wenigen, in der Folge hier vorkommenden Anwendungen der sphärischen Trigonometrie zum Grunde liegt; so ist dieser Abschnitt den Betrachtungen der Kreise, Linien und Punkte an der Himmelskugel gewidmet.

*) Genauer beträgt der Halbmesser der Sonne, wie in der Folge gezeigt werden soll, gegen 112 Erdradien.

§. 23.

Wenn man auf der Oberfläche der Erde einen Ort für die Beobachtungen der sich am Himmel zeigenden Erscheinungen fest gesetzt hat, so giebt es drei größte Kreise, welche in ihrer Lage gegen einander unverändert bleiben. Diese sind der Horizont, der Aequator und der Meridian. Wählt man sich nun zu seinem Standpuncte eine Anhöhe oder einen solchen Ort, von welchem aus man rings umher eine freie, durch keine Gegenstände oder andere Hindernisse unterbrochene Aussicht hat; so heißt die äußerste Grenze HR (Fig. 14.) an der Himmelskugel, über welche man nicht weiter hinaus sehen kann und durch welche also die über uns befindliche sichtbare Halbkugel, von der unter uns liegenden unsichtbaren abgesondert wird, der wahre oder astronomische Horizont (Gesichtskreis). Seine Ebene geht durch den Mittelpunct der Erde und heißt die Ebene des wahren Horizonts. Denkt man sich nun durch den Standpunct des Beobachters eine mit der vorigen parallellaufende, bis an die Himmelskugel erweiterte Ebene, so, daß diese von der vorigen um den Halbmesser der Erde absteht; so heißt dieser Kreis der scheinbare Horizont.

Der Auf- und Untergang, die Morgen- und Abends-
weite, die Höhen u. der Gestirne, beziehen sich vornehmlich auf den Horizont. Alle mit dem Horizonte parallellaufende Kreise, wie BSG, nennt man daher Almucantharats- oder Höhenkreise.

§. 24.

Zieheth man nun eine gerade Linie ZN (Fig. 14.)

durch den Mittelpunkt des Horizonts auf seiner Ebene senkrecht und verlängert diese zu beiden Seiten bis an die Himmelskugel; so ist sie die Axe des Horizonts und heißt die Verticals oder Scheitellinie und ihre Endpuncte sind die Pole des Horizonts, deren einer Z über dem Horizont der Scheitelpunct oder das Zenith, der andere N, der Fußpunct oder das Nadir genannt wird.

Anmerkung. Diese fremden Ausdrücke sind arabischen Ursprungs und schreiben sich aus einem Zeitalter her, in welchem die Araber die einzige Nation waren, die bei ihren weit ausgedehnten Eroberungen in Griechenland, Geschmack an Wissenschaften, vorzüglich an der Astronomie fanden und von der Zeit an, die gedachte Wissenschaft auf ihren einheimischen Boden zu verpflanzen suchten, wo sie sich lange, doch ohne beträchtliche Erweiterungen erhalten hat. Die Benennung Horizont aber kommt aus dem Griechischen von $\sigma\epsilon\iota\zeta\omega$ ich begrenze, her und $\sigma\epsilon\iota\zeta\omega$ heißt ein begrenzender (Kreis). So lange hier von dem Horizonte an sich die Rede ist, wird allemahl der astronomische verstanden, in den Stellen, wo von dem andern die Rede ist, soll dessen Benennung beigelegt werden.

§. 25.

Ein größter Kreis der Himmelskugel wie ZSV oder ZSH (Fig. 14.), welcher durch den Scheitelpunct und durch einen beliebigen Punct des Himmels geführt wird, heißt ein Verticals oder Scheitelskreis. Man zieht gewöhnlich nur den vierten Theil dieser Kreise, vom Scheitelpuncte bis an den Horizont, aus. Ein solcher Quadrant hat eine doppelte Bestimmung. Ein Theil desselben nemlich der Bogen SH zwischen dem Sterne und dem Horizonte, mißt die Höhe des Sterns S, und

der andere Theil desselben d. i. der Bogen SZ zwischen dem Sterne und dem Zenith, bezeichnet den Abstand des Sternes vom Scheitelpuncte. Alle Ebenen dieser Kreise gehen durch die Scheitellinie, und stehen also auf dem Horizonte senkrecht.

§. 26.

Alle Theile der Himmelssugel sind in einer beständigen Bewegung, nur zwei Puncte P, p, (Fig. 14.) die Pole genannt, bleiben fest und unbeweglich, so, daß alle übrige Himmelskörper sich in der Oberfläche der Kugel, nach ihren verschiedenen Entfernungen von den beiden unbeweglichen Puncten, in größern und kleinern Kreisen um selbige zu bewegen scheinen. Einer dieser Pole P ist in unsern Gegenden dem Auge des Beobachters sichtbar, er ist nicht weit vom Polarstern entfernt und heißt der Nordpol; der andere ist diesem gerade entgegen gesetzt, uns unsichtbar und heißt der Südpol. Diese beiden Puncte werden allemahl verstanden, wenn von Polen, überhaupt ohne Beifügung des ihnen zugehörigen Kreises die Rede ist; man nennt sie auch die Welt- oder Himmelspole. Eine gerade Linie, welche von dem einen Pole P nach dem andern p gezogen wird, heißt die Weltaxe.

Anmerkung. Die Bewegung, vermöge welcher sämtliche Sterne nach derselben Richtung hin, von Morgen gegen Abend innerhalb vier und zwanzig Stunden einmahl ihren Umlauf um die Erde vollenden, ist scheinbar und heißt die gemeine oder tägliche Bewegung der Sterne.

§. 27.

Derjenige größte Kreis am Himmel AQ (Fig. 15.),

welcher in allen seinen Puncten von den Weltpolen P, p gleich weit entfernt ist, heißt der Aequator oder Aequinoctialkreis. Die Ebene dieses Kreises theilt die Himmelskugel in die nördliche und südliche Hälfte ab, die Weltpole sind die ihm zugehörigen Pole, die Weltaxe steht auf ihm senkrecht. Daher schneiden ihn alle Kreise, die durch seine Pole gehen, unter rechten Winkeln und alle am Himmel von den Sternen in ihrer Bewegung beschriebenen Kreise, laufen mit ihm parallel.

Anmerkung. Man macht bei dem Aequator, um die Länge gewisser Bogen auf ihm, oder die Entfernungen der Weltkörper von ihm, zu bestimmen und anzugeben, einen gewissen Punct zum Anfangspunct. Dieser ist eine von den beiden Stellen, an welcher er von einem nachher noch näher zu beschreibenden größten Kreise geschnitten wird. Gibt man nun die Abstände gewisser Puncte durch einen Theil des Aequators an, so zählt man seine Grade von Abend gegen Morgen ununterbrochen bis 360 fort; bezeichnet man aber die Entfernung anderer Kreise und Puncte vom Aequator, so gehen die Kreisbogen vom Aequator nach Norden oder Süden 90 Grade fort.

§. 28.

Ein größter Kreis der Himmelskugel, welcher wie (Fig. 14.) $HZPRNpH$ durch einen der Pole P oder p , durch das Zenith Z und Nadir N geführt wird, heißt der Meridian oder Mittagskreis; die durch diesen Kreis begrenzte Fläche, die Mittagsfläche. Dieser Kreis steht auf dem Horizonte und dem Aequator senkrecht (14.), und die gerade Linie HR , worin seine Fläche die Horizontalebene schneidet, heißt die Mittagslinie. Ihre Endpuncte liegen in dem Horizonte und

bestimmen darin zwei Puncte, der eine, den Mitternachtspunct R oder Norden, der andere den Mittagspunct S oder Süden. Zählet man auf beiden Seiten des Mittags- oder Mitternachtspunctes 90° auf dem Horizonte ab, so wird dadurch auf der einen Seite der Morgenpunct O oder Osten, und auf der andern der Abendpunct W oder Westen bestimmt. Eine gerade Linie, welche diese beiden Puncte mit einander verbindet, schneidet die Mittagslinie unter rechten Winkeln und durch beide gerade Linien HR und OW wird der Horizont in vier gleiche Theile oder Quadranten getheilt. Die Mittagsfläche aber theilet die ganze Himmelskugel in die östliche und westliche Hälfte ab.

§. 29.

Alle Sterne, die sich über den Horizont erheben, gehen in der Mitte ihres Weges durch den Meridian, haben daselbst ihren höchsten Standpunct und sinken auf der andern Seite des Meridians wieder unter den Horizont herab. Bei jener ersten Erscheinung, wenn Sterne auf der einen Seite des Horizontes sichtbar werden, sagt man, sie gehen auf; wenn sie durch den Meridian gehen, sie culminiren; und wenn sie auf der andern Seite des Horizontes unter denselben hinab sinken und verschwinden, sie gehen unter. Alle Kreisbogen, welche die Sterne von ihrem Aufgange bis zu ihrem Untergange über dem Horizonte beschreiben, heißen Tagekreise oder Tagebogen. Sie laufen alle mit einander parallel, werden von dem Meridian sämtlich halbirt, und der größte Bogen wird von demjenigen Gestirn beschrieben, welches genau im

Distpuncte aufgeht. Nahe am Nordpole beschreiben einige Sterne in ihrer scheinbaren Laufbahn Kreise, in welchen sie so wohl in ihrer größten als kleinsten Höhe über dem Horizonte, sichtbar bleiben. Daher gehen diese Sterne nie auf oder unter. Denn sie erheben sich nie über den Horizont und sinken nie unter denselben herab. Auf der andern Seite der Himmelskugel in der Nähe des Südpols findet das Gegentheil Statt.

Anmerkung. Dieser Sterne kann man sich zur Bestimmung der Polhöhe, welche für die Geographie und Astronomie sehr wichtig ist, bedienen. Man mißt in langen Winternächten die größte und kleinste Höhe GR und gR (Fig. 14.) eines der gedachten Sterne G. Zieht die letztere gR von der ersten GR ab, nimmt von der Differenz Gg ihre Hälfte und setzt sie zur kleinsten Höhe gR. Die Summe dieser beiden Bogen $\frac{1}{2}Gg + gR$ giebt die gesuchte Polhöhe PR an; nur muß die Angabe der Höhe wegen der Brechung der Lichtstrahlen noch allemahl berichtigt werden. Kästner führt in f. N. S. 26. S. 64. folgendes Beispiel des I. N. De l'isle vom J. 1728 für die Polhöhe von Petersburg an: Die scheinbare größte Höhe des Polarsterns war $62^{\circ} 5' 55''$ wegen der Brechung der Lichtstrahlen aber stand

er zu hoch um	31''
daher ist die wahre größte Höhe	$62^{\circ} 5' 4''$
die scheinbare kleinste Höhe des Polarsterns war	$57^{\circ} 48' 0''$
wegen der Strahlenbrechung stand er zu hoch um	37''
daher die wahre kleinste Höhe	$57^{\circ} 47' 23''$
die Differenz beider Höhen	$4^{\circ} 17' 41''$
ihre Hälfte	$2^{\circ} 8' 50''$
die kleinste Höhe	$57^{\circ} 47' 23''$
Also die Polhöhe	$59^{\circ} 56' 13''$

§. 30.

Der Abstand eines Sterns * B von dem Mittags-

kreise wie HV (Fig. 14.) auf dem Horizonte gemessen, heißt das Azimuth oder der Bogen des Azimuthwinkels, d. h. desjenigen Winkels, welchen der Scheitelfreis des Sterns * B mit dem Mittagskreise einschließt.

§. 31.

Die Bewegung aller Sterne geschieht mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Daher gehen in gleichen Zeiten, gleich große Theile des mit der ganzen Himmelskugel bewegten Aequators durch den Meridian, folglich der ganze Aequator oder 360 Grade in 24 Stunden; also in einer Stunde oder in 60 Minuten der vier und zwanzigste Theil, d. i. 15 Grade des Aequators. Daher braucht ein Grad 4 Minuten und eine Minute des Aequators 4 Secunden Zeit. Sind daher z. B. in einer gewissen Zeit 6 Grade des Aequators durch den Meridian gegangen, so gibt die Regel de Tri, die während dieser Bewegung verflossene Zeit, indem man schließt: $1^\circ : 6^\circ = 4 \text{ Minuten} : 24 \text{ Minuten Zeit}$. Dieses ist die gesuchte Sternzeit, welche man auch die Zeit der ersten Bewegung nennt. Eben so leicht kann man auch umgekehrt aus der Zeit, die Grade, Minuten u. des Aequators bestimmen, welche während derselben durch den Meridian gehen. Dieses Verfahren nennt man Sternzeit in Bogen des Aequators, und Bogen des Aequators in Sternzeit verwandeln.

§. 32.

Jeder größte Kreis, welcher durch die Pole und durch irgend einen Punct oder Stern an der Himmels-

kugel geführt wird, heißt ein Declinations- oder Abweichungskreis. Ein solcher Kreis ist PSKp (Fig. 15.). Er steht auf dem Aequator senkrecht und theilt ihn in zwei gleiche Theile (14.). Der Bogen desselben SK zwischen dem gedachten Punkte S und dem Aequator heißt die Declination oder Abweichung. Diese ist entweder südlich oder nördlich, je nachdem der Stern in der nördlichen oder südlichen Halbkugel befindlich ist. Die Abweichung übersteigt nie die Größe eines Quadranten.

§. 33.

Theilet man nun den Aequator AGE nach (Fig. 10.) in 24 gleiche Theile, so erhält die östliche Hälfte der Himmelskugel, die hier die Figur vorstellen mag, deren 12. Zieheth man nun durch die Pole und jeden Theilungspunct des Aequators, die vorhin beschriebenen Abweichungskreise; so nennt man diese hier Stundenkreise, wenn sie in ihrer Lage fest und unveränderlich bleiben. So sind also die Kreise durch PFp, PGp, PHp 1c. Stundenkreise. Die Winkel APF, APG 1c. aber, welche von jedem dieser Kreise PF mit dem Meridian AP am Pole gebildet wird, heißt der Stundenwinkel.

Unter den oben angeführten Zwölf- Stundenkreisen ist der Meridian der letzte. Wegen der gleichförmigen Bewegung der Sterne (31.) braucht jeder derselben den 24sten Theil seiner Umlaufszeit, um aus einem Stundenkreise in den andern zu kommen. Dieses gibt die Sternzeit. Der Bogen des Aequators (Zeitbogen), der zwischen den Schenkeln des Stundenwinkels enthalten ist, ist das Maß desselben. Verwandelt man

diesen Bogen in Zeit, so weiß man wie lange es noch dauert, bis der Stern von dem angenommenen Stundenkreise, in seiner Bewegung den Meridian erreicht. Die scheinbare Bewegung der Sonne ist zwar gleichförmig, aber etwas langsamer als bei den Sternen. Dieses rührt von der ihr eigenen Bewegung her. Im bürgerlichen Leben richtet man sich nach der Sonnenzeit. Auch sie braucht den 24sten Theil ihrer Umlaufszeit, um aus einem Stundenkreis in den andern zu kommen. Tritt ihr Mittelpunkt in den 12ten über dem Horizont, so ist dann der wahre Mittag. Auf die Art kann man die Stundenkreise sich so vorstellen, daß die Sonne von 12 Uhr Mitternacht, mit jeder folgenden Stunde in den folgenden Stundenkreis nach den dabei geschriebenen Zahlen tritt.

§. 54.

Nimmt man den Bogen des Aequators EC (Fig. 16.) zwischen seinem Anfangspuncte E , d. i. demjenigen, in welchen die Sonne mit der Rückkehr des Frühlings tritt, und dem Durchschnittspuncte C des Declinationskreises und des Aequators von Abend gegen Morgen zu; so heißt derselbe die gerade Aufsteigung oder Rectascension des Gestirnes B .

Demerkt man nun in dem Augenblicke, wo ein Stern B in den Horizont tritt und aufgeht, diejenige Stelle a desselben, wo er vom Aequator geschnitten wird; so heißt der Theil des Aequators Ea , welcher zwischen diesem Puncte a und seinem Anfangspuncte E enthalten ist, von Abend gegen Morgen gerechnet, die schiefe Aufsteigung des Sterns B .

Nimmt man nun den Bogen des Aequators, welcher die schiefe Aufsteigung Ez ausdrückt und zieht man diesen von demjenigen EC ab, welcher die gerade Aufsteigung bezeichnet; so bleibt der Bogen zC übrig. Diesen Bogen nennt man die Ascensionaldifferenz.

Anmerkung 1. Liegt ein Stern b in der südlichen Halbkugel; so ist die Abweichung eb negativ. Diese bestimmt bei der Berechnung auch die Lage der Ascensionaldifferenz. Aus der Betrachtung der drei Bogen EC , Ez und zC des Aequators ergibt sich, daß $Ez = EC - zC$, d. h. die schiefe Aufsteigung ergibt sich aus der geraden und der Ascensionaldifferenz. Würde aber diese negativ werden, so müßte sie in dem angegebenen Ausdruck das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten und es würde $Ez = EC + zC$ werden, welches auch vollkommen mit den Begriffen der allgemeinen Subtraction übereinstimmt.

Anmerkung 2. Der Horizont theilt den Aequator in zwei gleiche Theile ein. Die eine Hälfte desselben liegt also über, die andere unter dem Horizonte. Der Meridian aber geht durch beider Pole, steht auf beiden Kreisen dem Horizonte und Aequator senkrecht und A ist von z um 90° entfernt, d. h. es ist $Az = 90^\circ$. Zur Zeit des Aufganges des Sternes B steht A im Meridian und C ist derjenige Punkt, der mit dem Sterne B zugleich culminirt. Während der Zeit aber, daß der Stern aus B in den Meridian tritt, bewegt sich der Bogen des Aequators $AC = 90^\circ + zC$, d. h. ein Bogen von 90° nebst der Ascensionaldifferenz durch den Meridian. Verwandelt man diesen Bogen in Zeit, so ergibt sich aus dieser Zeit, doppelt genommen, weil der Stern so viel Zeit von seinem Aufgange bis zur Culmination, als von dieser bis zu seinem Untergange braucht, wie lange derselbe sich über dem Horizonte verweilt.

§. 55.

Außer der gemeinen oder täglichen Bewegung der Sonne, womit sie, wie alle übrige Sterne, einen Umlauf an dem Himmel in 24 Stunden zu vollenden scheint, entdeckt man noch eine andere, welche die ihr eigene oder ihre jährliche Bewegung genannt wird. Auch diese Bewegung, von welcher die Verschiedenheit der Jahreszeiten, die Länge und Kürze der Tage *ic.* abhängt, ist eigentlich nur scheinbar; allein hier betrachtet man die Gegenstände nur so, wie sie uns in die Sinne fallen. Vermitteltst weniger Erfahrungen aber kann man sich von der eigenen Bewegung der Sonne leicht überzeugen. Man darf nur die Stellung derjenigen Sterne am Himmel bemerken, welche einige Zeit nach Sonnenuntergang sichtbar sind. Setzt man nun diese Beobachtungen einige Tage hinter einander fort, so wird man finden, daß sich die Sonne diesen Sternen von Tage zu Tage nähert, bis sie durch die Sonnenstrahlen ganz bedeckt werden und verschwinden, d. h. Sterne, welche vorher später untergingen, als die Sonne, gehen nun mit ihr zugleich und in der Folge früher, als sie, unter. Eben diese Erscheinungen finden auch bei denjenigen Sternen Statt, welche vorher von der Sonne weiter nach Morgen entfernt waren. Und so geht die Sonne nach einer Richtung, welche der täglichen Bewegung von Morgen gegen Abend entgegen gesetzt ist, durch alle Sterne hindurch, bis man sie etwa nach Verlauf einer Zeit von 365 Tagen wieder zwischen den Fixsternen findet, wo man sie zuerst erblickt hatte, und dieses ist die jährliche Bewegung der Sonne. Zu gleicher Zeit wird man aber auch bemerken, daß sich nicht die Sterne

der Sonne nähern, sondern daß sich diese den Sternen näherte. Denn diese behalten immer denselben Abstand von einander, gehen täglich bei einerlei Punkten des Horizontes auf und unter, und treten an jedem Tage beinahe um vier Minuten früher über den Gesichtskreis, als an dem nächstvorhergehenden. Die Sonne aber geht täglich an andern Stellen des Horizontes auf und unter, verändert auch ihren Abstand von den Fixsternen. Die Zeit zwischen zwei nächsten Durchgängen der Sonne durch den Mittagskreis heißt ein Tag. Die Zeit der Umdrehung des Himmels oder ein Sterntag beträgt 23 Stunden, 56 Minuten und 4 Secunden.

§. 36.

Die Bahn der jährlichen Bewegung der Sonne ist ein Kreis, welcher in den frühesten Zeiten für die Sternkundigen den Gegenstand ihrer sorgfältigsten Beobachtungen ausmachte. Auf Babylons weiten Ebenen, wo die Höhe des Aequators ungefähr 54 Grade betrug, wurde diese Bahn zuerst bestimmt, weil daselbst mancherlei Veränderungen am meisten in die Augen fallen. Hätte nun die Sonne mit dem Aequator beständig dieselbe Lage gegen den Horizont, so würde sie daselbst täglich zur Mittagszeit 54° hoch erschienen sein. Allein die Sonne erreicht nicht wie die andern Sterne täglich denselben Punct zur Mittagszeit im Meridian. Die ältesten Beobachter nahmen daher wahr, daß die Sonne in den längern Tagen des Sommers in der Gegend bei E (Fig. 17.) und am längsten Tage in E stand und sich 24° über den Aequator erhoben hatte. Hierauf

nahm ihre Höhe nach und nach ab, so daß sie ungefähr nach sechs Monaten, d. i. im Herbst bei A durch den Mittagskreis ging. Nach dieser Zeit senkte sie sich immer tiefer hinab, bis sie endlich in den kürzern Tagen des Winters in der Gegend bei K und am kürzesten Tage in K 24° unter dem Aequator stand, und also so weit von Q entfernt war, als der höchste Punct E im Sommer von A, so daß ihre Höhe des Mittags im Sommer 78° , im Winter aber nur 30° betrug. Alsdann aber stieg die Sonne wieder allmählig in die Höhe, bis sie den Punct E erreicht hatte, ging wie vorher weiter fort, und alle Erscheinungen kehrten mit den gedachten Abwechselungen von Zeit zu Zeit zurück. Hieraus folgerte man nun, daß die Sonnenbahn ein Kreis sei und daß dieser Kreis den Aequator jährlich in zwei entgegen gesetzten Puncten schneiden müsse, weil man zweimahl im Jahre bemerkt hatte, daß die Höhe des Aequators und die Mittagshöhe der Sonne genau mit einander übereinstimmten und 54° betrugen.

§. 37.

Die Bahn, welche die Sonne jährlich von Abend gegen Morgen am Himmel so zu beschreiben scheint, daß sie unter, über und in dem Aequator ihre Lage erhält, heißt die Sonnenbahn oder Ekliptik. Eine gerade Linie $\pi\pi$, welche auf der Ebene dieses Kreises lothrecht durch den Mittelpunkt gezogen und bis an die Fläche der Himmelskugel verlängert wird, ist ihre Axe, und die Endpunkte π, π sind die Pole der Ekliptik. Die Puncte L, M, worin beide Kreise, die Ekliptik und der Aequator, einander schneiden, heißen die Aequi-

noctialpuncte oder die Puncte der Nachtgleichen. Diese Benennung schreibt sich daher, weil auf der Erde überall der Tag so lang ist wie die Nacht, wenn die Sonne in diesen Puncten steht. In einen derselben L tritt sie mit dem Anfange des Frühlings und in den andern M mit dem Anfange des Herbstes. Jener wird der Punct der Frühlingsnachtgleiche, und dieser der Punct der Herbstnachtgleiche genannt. Von dort steigt sie täglich über den Aequator hinauf; von hier senkt sie sich täglich unter denselben herab. Ziehet man nun einen Kreis LPMpL durch die Weltpole und durch die Aequinoctialpuncte, so nennt man selbigen den Colurus der Nachtgleichen.

§. 38.

Von der Zeit an, wo die Sonne von dem Frühlingspuncte sich täglich in dem Mittagskreise zu einer größern Höhe erhebt, beschreibt sie auch vermöge der täglichen Bewegung größere Kreisbogen über dem Horizonte, welche sämmtlich mit dem Aequator parallel laufen. Die Tage nehmen immer mehr zu und derjenige wird am längsten, an welchem sie die größte Höhe (Fig. 17.) E im Meridian erreicht hat. Dieser Punct heißt der Sommerstillstandspunct, weil es scheint als wenn die Sonne ohne merkliche Veränderung eine Zeit lang in dieser Gegend stehen bliebe. In der Folge werden die Kreise wieder kleiner, die Sonne entfernt sich von E, sie verweilet nicht mehr so lange über dem Horizonte als vorher, doch betragen die Bogen über demselben noch immer mehr als die Hälfte, bis sie in ihrer Laufbahn den Aequator im Herbstpuncte durchschneidet und

Tag

Tag und Nacht gleich sind. Alsdann aber werden die Bogen kleiner als ein Halbkreis, die Sonne bleibt nicht so lange über dem Horizonte mehr, die Tage werden demnach kürzer, und derjenige ist am kürzesten, an welchem die Sonne durch den tiefsten Punct K des Meridians geht. Dieser Punct heißt der Winterstillstandspunct. Diese beiden Puncte, im Sommer und Winter, welche die größte und kleinste Höhe der Sonne des Mittags im Meridiane bezeichnen, heißen gemeinschaftlich Solstitial- oder Stillstandspuncte oder auch die Puncte der Sonnenwende. Denn die Sonne scheint sich gleichsam an diesen Stellen umzukehren und ihre Laufbahn von neuem anzutreten. Zieheth man nun durch die Stillstandspuncte mit dem Aequator Parallellkreise EL und MK, so werden diese die Wendekreise genannt, und zwar EL der Wendekreis des Krebses und MK der Wendekreis des Steinbockes. Beide Bilder bezeichnen auf eine sehr zweckmäßige Art den jedesmahligen scheinbaren Lauf der Sonne. Zieheth man nun durch die Solstitialpuncte und die Weltpole einen Kreis PEPK, so wird dieser der Colurus der Stillstandspuncte genannt.

Anmerkung. Man nimmet zwar an, daß die Sonne lauter mit dem Aequator parallel laufende Kreise während der Umdrehung des Himmels beschreibet; allein bei einer genauern Prüfung dieser Sache findet man, daß die Sonne ihre Stellung gegen den Aequator vielmehr in jedem Augenblicke verändert und daß also keine Parallellkreise entstehen, sondern daß ihre Laufbahn eigentlich die Gestalt einer Schraubentlinie vorstellt. Allein da es für den Erfolg gleichgültig ist, ob die Sonne sich nach und nach in jedem Tage weiter bewege, oder ob diese Bewegung mit einem

Mahle geschehe; so kann man bei den gegenwärtigen Untersuchungen, wo nur die scheinbare Bewegung erwogen wird, diesen Umstand noch ganz aus der Acht lassen.

§. 39.

Den sphärischen Winkel AME (Fig. 17.), unter welchem die Sonnenbahn den Aequator durchschneidet, nennt man die Schiefe der Ekliptik. Das Maß dieses Winkels ist der Bogen AE eines größten Kreises, der 90° von dem Scheitel M durch die Schenkel MA und ME läuft. Der Scheitelpunct M dieses Winkels aber ist einer der Aequinoctialpuncte. Nimmt man nun ME auf der Ekliptik 90° von M , so ist E der Solstitialpunct, der in AP am weitesten vom Aequator entfernt ist. Zieht man nun durch die Pole des Aequators und den Punct E einen größten Kreis; so erhält man den Colurus der Solstitialpuncte als einen Abweichungskreis. Mißt man nun zur Zeit der Sonnenwende, wo die Sonne in E steht, ihre Abweichung, so gibt diese die Schiefe der Ekliptik an. Als eine Mittelzahl kann man diesen Bogen $23^\circ 28'$ setzen.

Die Pole π, π der Ekliptik (Fig. 18.) beschreiben bei der täglichen Umdrehung des Himmels um die Pole P, p des Aequators die Polarkreise $S\pi$ und πR . Der Winkel $PC\pi$, welchen die Axen der Ekliptik und des Aequators einschließen, ist so groß als derjenige, durch welchen die Neigung der Ebenen des Aequators und der Ekliptik bestimmt wird.

Anmerkung. Die Schiefe der Ekliptik ist Veränderungen unterworfen, die zum Theil von der schwankenden Bewegung der Erdaxe herrühren. Für das Jahr 1810 ist die scheinbare Schiefe der Ekliptik vom 1ten Januar bis zum

1sten April $23^{\circ} 27' 51''$, dazu kommen wegen der gedach-
ten periodischen Bewegung $9''$; vom 1sten April bis zum
1sten Juli $23^{\circ} 27' 50,7''$, wozu $9,2''$ kommen; vom 1sten
Juli bis zum 1sten October $23^{\circ} 27' 50,5''$, wozu noch $9,3''$
kommen; vom 1sten Oct. bis zu Ende d. J. $23^{\circ} 27' 50,5''$,
wozu noch $9,4''$ kommen.

§. 40.

Ein größter Kreis, welcher durch die Pole π (Fig. 19.) der Ekliptik und durch einen beliebigen Stern S am Himmel gezogen wird, heißt ein Breitenkreis. Der Bogen dieses Kreises GS von der Ekliptik G bis an den Stern S , heißt seine Breite. Sie ist nördlich oder südlich, je nachdem der Stern in der nördlichen oder südlichen Hälfte der Himmelskugel, von der Ekliptik gerechnet, liegt und kann nie größer als 90° werden. Der Breitenkreis steht auf der Ekliptik allemahl senkrecht (14.).

Anmerkung. Der Mittelpunkt der Sonne ist beständig in der Ekliptik. Daher hat die Sonne nie eine Breite.

§. 41.

Man macht den Durchschnittspunct der Ekliptik und des Aequators, worin die Sonne im Frühlinge steht, zum Anfangspuncte beider Kreise, so, daß alle Abmessungen, welche vermittelst dieser Kreise geschehen, von diesem Puncte aus bestimmt werden. Auch auf der Ekliptik zählt man von Abend gegen Morgen, nach der Ordnung der Zeichen 360° ununterbrochen fort. Der Bogen VG aber, welcher von dem Frühlingspuncte V an, bis zu der Stelle G gerechnet wird, wo der Breitenkreis die Ekliptik durchschneidet, heißt die Länge des Sternes S .

§. 42.

Die Gegenden des Himmels, durch welche die Sonnenbahn als ein größter Kreis geführt werden muß, machen sich durch mancherlei Erscheinungen so merkwürdig, daß man auf jeder Seite derselben in einer Entfernung von zehn Graden Paralleltreise, gleichsam als gewisse Grenzlinien gezogen hat. Diesen Theil der Himmelsskugel haben bereits die ältesten Sternkundigen mit Bildern besetzt, welche so wohl auf die zu gewissen Zeiten des Jahres vorzunehmenden Beschäftigungen, als auch auf die Einrichtungen der Natur, eine nahe Beziehung hatten. Der Krebs stellt auf eine sehr sinnliche Art die Rückkehr der Sonne vor, die Wage theilt dem Tage und der Nacht eine gleiche Anzahl Stunden zu, der Schütze führet die Zeiten der Jagd herbei u. In diesen Bildern findet man wohl nun noch einige Spuren eines hohen Alterthumes, und wenn gleich die Griechen späterhin alles mit ihren Nationalgötzen und Helden vertauschten; so ist doch so viel wahrscheinlich, daß sie wenigstens einige Sternbilder dieser Gegend unverändert ließen, welche sich bis auf unsere Zeiten erhalten haben. Da nun die meisten dieser Sterne mit dem Rahmen gewisser Thiere belegt sind, so nennt man diese in die gedachten Schranken eingeschlossene Himmelszone, den Thierkreis, der aber mit der Ekliptik nicht verwechselt werden muß, indem diese auf der Himmelsskugel durch eine Kreislinie, hingegen der Thierkreis, ungeachtet seiner Benennung einen gewissen, durch die oben gedachten Paralleltreise, bestimmten Raum einschließt.

In diesem Raume stehen die zwölf Sternbilder, welche der Ordnung nach folgende sind:

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| 1. Der Widder γ | 7. Die Wage $\mathfrak{z}$ |
| 2. Der Stier γ | 8. Der Scorpion $\mathfrak{m}$ |
| 3. Die Zwillinge Π | 9. Der Schütze $\mathfrak{f}$ |
| 4. Der Krebs $\mathfrak{c}$ | 10. Der Steinbock $\mathfrak{z}$ |
| 5. Der Löwe $\mathfrak{q}$ | 11. Der Wassermann $\mathfrak{w}$ |
| 6. Die Jungfrau $\mathfrak{m}$ | 12. Die Fische $\mathfrak{x}$ |

Allein die Sonne hat zu unsern Zeiten nicht dieselbe Stellung gegen die Sterne, wie ehemals. Der Frühlingspunct lag damals genau in dem Anfangspuncte des Widders, jetzt aber liegt er in den Fischen. Es wird daher auch gegenwärtig der Thierkreis in zwölf Theile abgetheilt, deren jeder 30° enthält; allein diese Abtheilungen heißen Zeichen des Thierkreises und führen nur den Rahmen nach den Sternbildern, daher man jetzt Zeichen und Sternbilder sorgfältig zu unterscheiden hat. Man rechnet die Länge eines Sternes vom Frühlingspuncte an gewöhnlich nach der angegebenen Ordnung der Zeichen.

Anmerkung. Die bisher erklärten Kreise mit ihren Bogen und dazu gehörigen Linien und Puncten bestimmen die Lage, Richtung, scheinbare Bewegung und Entfernung der Weltkörper *per se* gegen einander. Dieses kann nun vermittelt derselben mit einer solchen Genauigkeit geschehen, daß nur ein einziger Punct an der ganzen Himmelskugel die jedesmalige Beziehung auf einen der gedachten Hauptkreise haben kann. So wird die Lage und Richtung eines Sterns gegen den Horizont, durch seine Höhe und sein Azimuth; gegen den Aequator durch die gerade Aufsteigung und Abweichung; und gegen die Ekliptik durch die Länge und

Breite so genau angegeben, daß, wie gesagt, keinem andern Puncte am ganzen Himmel gleiche Bestimmungen zukommen können.

§. 43.

Wenn man sich nun eine Kugel von einem beliebigen Durchmesser verfertigt, und alle Sterne des Himmels nach ihrer scheinbaren Größe, nach ihren verhältnißmäßigen Entfernungen von einander, nebst den dazu gehörigen, im vorigen erklärten Kreisen und Linien, auf dieselbe aufträgt, und das Ganze mit einigen mechanischen Vorrichtungen versehen; so stellt solche eine sogenannte künstliche Himmelkugel vor, welche man brauchen kann, sich mancherlei Erscheinungen im Kleinen deutlich, sich mit den Veränderungen und den verschiedenen Stellungen der Sterne bekannt zu machen, eine Menge nützlicher Aufgaben mechanisch aufzulösen und sich dazu zu ihren Berechnungen vorzubegeben.

Anmerkung. Die älteste künstliche Himmelkugel befindet sich im Bergianischen Museum zu Velturi. Unter den neuern künstlichen Himmelkugeln empfehlen sich die von Herrn Professor Bode veranstalteten Globi ganz vorzüglich durch genaue und sorgfältige Bearbeitung und durch Schönheit des Stiches. Man erhält sie seit dem Jahr 1792 in der Weigel's und Schneiderschen Buchhandlung zu Nürnberg.

§. 44.

Setzt man sich eine Maschine, die aus dem Horizont, Meridian und Aequator, aus den Coluren, Wendekreisen und Polarkreisen unter solchen Winkeln und Richtungen zusammen, welche zu den gedachten Kreisen an der Himmelkugel angenommen werden; so nennt man

diese Verbindung von Kreisen eine Ringkugel. Sie hat mit der vorigen eine gleiche Absicht, dort lassen sich freilich noch die Sterne auf der Oberfläche entwerfen; allein in dieser übersieht man den innern Zusammenhang genauer und die Alten haben sich ihrer zu wirklichen Beobachtungen bedient.

§. 45.

Da die Erde von allen Himmelskörpern gleich weit entfernt, und gleichsam in der Mitte zu sein scheint und man sie überdieß für eine Kugel halten kann; so kann man sich auch Kreise und Linien vorstellen, die auf ihrer Oberfläche von den Kreisen und Linien der Himmelskugel abgebildet und bestimmt werden.

Wenn man die Weltaxe durch den Mittelpunkt der Erde führt, so trifft sie die Erde (Fig. 7.) auf ihrer Oberfläche in zwei entgegengesetzten Punkten, die man die Erdpole nennt; einer derselben, der nach der nördlichen Seite des Himmels gerichtet ist, wird der Nordpol, der andere der Südpol genannt, und die gerade Linie zwischen den beiden Polen heißt die Erdaxe. Es ist hier völlig gleichgültig, ob man annimmt, daß die Erd- und Weltaxe mit einander parallel laufen, oder daß sie zusammen fallen.

§. 46.

Auch hier nennt man den Aequator denjenigen Kreis GH auf der Erde, welcher überall von den Polen gleich weit entfernt ist. Er theilt daher auch die Erde in die nördliche und südliche Halbkugel. Die mit dem Aequator auf der Erdkugel parallelen

laufenden kleinern Kreise, führen den Namen Parallelkreise.

Anmerkung. Dieser Kreis wird von den Schiffen gewöhnlich die Linie genannt. Auf der Erdoberfläche läuft er durch Africa, geht durch die Inseln Sumatra, Borneo und Celebes unter Asien weg, verbreitet sich über einen großen Theil der Südsee, geht alsdann an der Grenze von Terra firma, durch Südamerika und erreicht endlich, indem er noch durch das große Weltmeer geht, wieder Africa. Bei allen Einwohnern der genannten Gegenden ist zu allen Zeiten der Tag so lang wie die Nacht, woher dieser Kreis auch wohl seine Benennung haben mag. Die Sonne entfernt sich auf ihrer Bahn nicht weit von ihrem Scheitel; am weitesten steht sie von ihnen in den Wendekreisen, dann nähert sie sich ihnen wieder, bis sie zur Zeit der Nachtgleichen über ihrem Scheitel steht.

§. 47.

Ein größter Kreis, der durch die Pole P, p (Fig. 19.) und durch einen Ort R auf der Oberfläche der Erde geführt wird, heißt der Meridian oder Mittagskreis dieses Ortes. Der Aequator und die Mittagskreise der Erdoberfläche liegen mit den gleichnamigen Kreisen des Himmels in einerlei Ebene; allein die kleinern Kreise der Erde und des Himmels laufen nur mit einander parallel.

Anmerkung. Alle Punkte, die in der gedachten Hälfte des Mittagskreises liegen, haben zu gleicher Zeit Mittag und alle Punkte auf der andern Hälfte des Mittagskreises haben zwölf Stunden später Mittag. Die Mittagsfläche trifft erweitert, den Meridian am Himmel und die Culmination der Sonne bestimmt für die gedachten Orte den wahren Mittag; allein sie tritt zwölf Stunden später in

die andere Hälfte des Meridianes, daher in diesen Gegenden auch zwölf Stunden später Mittag ist.

§. 48.

Man pflegt auch die Erde in fünf Zonen oder Gürtel abzutheilen. Es sei daher (Fig. 20.) $APQpA$ ein Mittagskreis und AQ der Aequator, alsdann ziehe man in einer Entfernung von $23\frac{1}{2}$ Graden vom Aequator zwei Parallelskreise HI und KL , so sind solches die gleichnamigen Wendekreise, und der zwischen diesen beiden Kreisen befindliche Erdstrich wird die heiße Zone genannt. Diese umschließet einen beträchtlichen Theil der Erdoberfläche. Denn zu ihr gehört der südliche Theil von Asien, der mittlere Theil von Africa und America, ein Theil von Neuholland; auch viele Inseln des Südmeers, liegen in dieser Zone. Die Sonnenstrahlen fallen fast in senkrechter Richtung auf diesen Erdstrich; allein sie werden auch durch viele Umstände, z. B. durch die Länge der Nächte, durch die Lage und Höhe der Gebirge u. sehr gemäßigt und die Erzählungen der Alten von der Unbewohnbarkeit dieser Gegenden, von der alles verzehrenden Gluth der Sonne, sind fabelhaft. Zieheth man nun in einem Abstände von $66\frac{1}{2}$ Graden vom Aequator zwei andere Kreise DOE, FNG mit demselben parallel, so sind dieses die Polarkreise, der eine der arctische oder nördliche, der andere der antarctische oder südliche, durch beide werden die übrigen Zonen und zwar folgender Gestalt bestimmt: die beiden gemäßigten Zonen $HIED$ und $KLGF$ gehen von jedem Wendekreise bis an den auf derselben Seite des Aequators befindlichen Polarkreis. Jede Zone hat

daher eine Ausdehnung von 45° ; eine von dem Wendekreis des Krebses bis an den nördlichen Polarkreis, und die andere vom Wendekreis des Steinbocks bis an den südlichen Polarkreis. Diese Polarkreise schließen nun auch die kalten Zonen, in deren Mitte die Pole liegen, ein und zwar wieder, der eine, die nördliche und der andere, die südliche.

Wann nun die Sonne am Himmel ihren Stand im Aequator hat, so fallen ihre Strahlen in senkrechter Richtung auf die Derter des Erdaequators. Rückt sie aber weiter nach Norden fort und tritt sie endlich in den Wendekreis des Krebses, so steht sie daselbst den Einwohnern des Kreises HI zu Mittage senkrecht. Eben dieses geschieht auch mit den Einwohnern des Kreises KL, wenn sie den Wendekreis des Steinbocks erreicht hat. Eine dunkle Kugel kann von der Sonne oder einem andern ähnlichen Körper, allemahl nur halb erleuchtet werden. Stehet daher die Sonne senkrecht über dem Puncte I, so gehet auf der einen Seite die Erleuchtung bis an den Punct D, und auf der andern bis an den Punct G, folglich ist die Erde um ein ganzes Stück auf der nördlichen Seite über den Pol P hinaus erleuchtet; allein auf der andern Seite reichen die Sonnenstrahlen nur bis G, und die ganze südliche kalte Zone liegt in Dunkelheit gehüllt. Daher haben alsdann alle Gegenden um den Nordpol bis an den Kreis DOE während eines täglichen Umlaufes der Sonne Tag, hingegen um den Südpol bis an FNG Nacht. Wenn nun die Sonne wieder allmählig nach dem Aequator zurückkehrt, so heben sich die Gegenden um den Südpol nach und nach aus ihrer Dunkelheit,

und die Erleuchtung am Nordpol faßt daselbst nicht mehr einen so großen Raum als vorher. Stehet die Sonne aber über dem Aequator senkrecht, so ist der Tag überall auf der Erde eben so lang als die Nacht. Rückt sie nun weiter nach Süden fort; so erfolgen auf dieser Hälfte der Erdkugel, alle Erscheinungen eben so als vorher auf der andern. Das Licht verbreitet sich jetzt immer mehr über den Südpol, und die Gegend um den Nordpol liegt im Dunkeln.

Anmerkung 1. In der Natur sind solche genaue Grenzlinien, wie hier angenommen sind, nicht vorhanden. Der Uebergang der gemäßigten in die heiße und kalte Zone geschieht nach und nach und die zu der gemäßigten Zone gerechneten Theile an der kalten und heißen Zone, sind auf der einen Seite nach Beschaffenheit der Wärme und Witterung mehr zu den angrenzenden Zonen als den gemäßigten Erdsirichen zu rechnen. Diese Benennung käme physisch nur dem mittlern Theile derselben zu. Nach der gewöhnlichen Angabe ihrer Größe gehört dazu der größte Theil des festen Landes, nemlich zum nördlichen beinahe ganz Nordamerika, ganz Europa, ein ansehnlicher Theil von Asien, zum südlichen Erdsiriche aber ein Theil von Südamerika, der obere Theil von Africa, Neuseeland und mehrere Inseln des Südmeeres.

Anmerkung 2. Die kalten Zonen sind wenig bekannt. Sie sind besonders nach den Polen hin, mit Eis und Schnee bedeckt. Die Dauer der längsten Tage und Nächte beträgt beinahe ein halbes Jahr. In der nördlichen kalten Zone liegt beinahe ganz Grönland und die Nordküsten von Lappland und Sibirien. Von der kalten Zone am Nordpol sind von Reisenden bisher kaum die Grenzen berührt worden.

§. 49.

Unter der geographischen Breite eines Ortes RV versteht man den Abstand desselben vom Aequator, welcher durch den Bogen eines Mittagskreises gemessen wird. Die geographische Breite ist nördlich oder südlich, je nachdem der Ort selbst auf der nördlichen oder südlichen Halbkugel liegt. Sie kann nie größer als 90° werden. Alle Puncte, die im Aequator liegen, haben weder eine Breite noch eine Polhöhe, weil beide Pole im Horizonte liegen.

§. 50.

Zur Bestimmung der Längen wählt man irgend einen Meridian, als den ersten. Es ist zwar an sich völlig gleichgültig, durch welchen Punct des Aequators man denselben legen will; allein die meisten Geographen ziehen ihn zwischen der westlichen Küste der Insel Ferro und der Stadt derselben, so, daß er genau 20° weiter nach Westen liegt, als der, durch die Pariser Sternwarte gezogene Mittagskreis. So bald man die Lage des ersten Meridianes fest gesetzt hat, so bezeichnet man durch die Länge eines Ortes R den Bogen des Aequators AV, welcher zwischen zwei Mittagskreisen, nemlich den ersten APQpA, und dem Mittagskreise des Ortes PRp befindlich ist. Man zählt die Grade des Aequators von Abend gegen Morgen ununterbrochen fort; oder man zählt nur 180° auf der Morgen- oder Abendsseite von PAp, und unterscheidet dann die östliche und westliche Länge.

Anmerkung 1. Aus der Länge und Breite eines Ortes läßt sich die Lage desselben, wie in der Folge gezeigt werden

soß, mit mathematischer Genauigkeit angeben, und aus diesen Angaben lassen sich alsdann größere und kleinere Theile der Erdoberfläche mit den andern zu einer Gegend, oder zu einem Lande gehörigen Stücke, als Berge, Quellen, Flüsse &c. abbilden und zeichnen. Städte, deren Länge und Breite bekannt sind, geben z. B. die festen Punkte auf einer Landkarte ab.

Anmerkung 2. Diejenigen Bewohner der Erde, durch deren Gegenden derselbe Meridian geht, deren Breite aber entgegengesetzt ist, wie z. B. die Gegenden von H und K (Fig. 20.), haben zu gleicher Zeit Mittag, aber entgegengesetzte Jahreszeiten. Diejenigen aber, welche an entgegengesetzten Stellen desselben Mittagskreises unter einerlei Breite wohnen, haben einerlei Jahreszeiten, aber die Tageszeiten zählen sie 12 Stunden später. Auf zwei entgegengesetzten Stellen eines Erddurchmessers wohnen Antipoden.

Anmerkung 3. Der Aequator wird wie jeder andere Kreis in 360° getheilt. Macht man auf diesem Kreise außer dem noch 24 gleiche Abtheilungen, so erhält jede derselben 15 Grade. Zieht man nun durch alle Theilungspunkte des Aequators Mittagskreise, so tritt die Sonne während ihres täglichen scheinbaren Umlaufes um die Erde, in einen Meridian, der 15° weiter nach Westen liegt, als ein anderer, eine Stunde später als in diesen; in einen der 30° weiter liegt, zwei Stunden, in einen der 45° westlicher liegt, drei Stunden später und so früher oder später, je nachdem der Bogen des Aequators, der zwischen dem Meridian des Ortes und dem östlichen, von welchem man zu rechnen anfängt, größer oder kleiner ist. Ueberall, wo die Sonne in den Meridian tritt, ist Mittag. Man würde daher, wenn man 15° von Morgen gegen Abend in einer Richtung zurückgelegt hätte, in einem Orte, wo man ankommt, eine Stunde früher sein, als an dem, welchen man verlassen hat. Daher kommt es auch, daß Reisende, welche die Erde von

Morgen gegen Abend umschiffen, bei ihrer Zurückkunft einen ganzen Tag verlohren, und bei der entgegen gesetzten Richtung einen ganzen Tag gewinnen.

Ferdinand Magellan seegelte den 10ten August 1519 westwärts von Sevilien ab und kam nach seiner Meinung den 6ten September 1522, wo er zum ersten Male die Erde umschiffte hatte, wieder zurück; allein die Einwohner von Sevilien zählten nicht den 6ten, sondern 7ten September des gedachten Jahres. M. s. darüber die von Kästner in seiner Geogr. S. 39. angeführten Verfasser.

Dritter Abschnitt.

Allgemeine Betrachtungen über die sphärischen Dreiecke.

§. 51.

Erklärung. Man nehme auf der Oberfläche der Kugel drei Punkte A, B und C (Figur 21.) nach verschiedenen Richtungen in beliebiger Entfernung von einander an, und lege durch jede zwei und den Mittelpunkt der Kugel G eine Ebene: so schließen die drei Ebenen AGB, AGC und BGC an dem Mittelpunkte der Kugel G und die Kreisbogen dieser Ebenen auf ihrer Oberfläche einen gewissen Raum ein; an dem Mittelpunkte der Kugel auf eine ähnliche Art, wie die Schenkel eines Winkels an dessen Scheitelpunkt, auf der Kugelfläche wie die Seiten eines geradlinigen Triangels auf einer Ebene. Der an dem Mittelpunct der Kugel, auf die beschriebene Art, begrenzte Raum heißt ein körperliches Dreieck und die auf der Kugelfläche durch die Umkreise der Ebenen gebildete Figur, ein sphärisches Dreieck. In diesem nennt man die Kreisbogen AB, AC und BC oder c , b und a die Seiten und BAC, ABC und ACB oder A, B und C die Winkel

Bei dem körperlichen Dreiecke nennt man die Ebenen BGA , BGC und AGC seine Seitenflächen, die Durchschnittslinien GA , GB , GC dieser Ebenen, seine Seitenlinien und G die körperliche Ecke. Alles dieses wird sehr deutlich werden, wenn man die Zeichnung mit den körperlichen Figuren No. I. und II. vergleicht, indem bei diesem, wie bei jenen gleichliegende Theile durch einerlei Buchstaben ausgedruckt sind. Aus diesen Begriffen folgt nun:

1) daß die zur Verzeichnung des sphärischen Dreieckes auf der Kugelfläche gegebenen oder nach Willkühr angenommenen Punkte nicht in dem Umfange eines größten Kreises liegen können;

2) daß die Seiten des sphärischen Dreieckes allemahl Theile größter Kreise einer Kugel sind, weil ihre Ebenen durch deren Mittelpunkt gehen;

3) daß die Durchschnittslinien der Seitenflächen des körperlichen Dreieckes zugleich der Kugel Halbmesser sind;

4) daß der Neigungswinkel zweier Seitenflächen des körperlichen Dreieckes zugleich die Größe des dazu gehörigen Winkels im sphärischen Dreieck angebe;

5) daß jede Seite des sphärischen Dreieckes wie AB ein Kreisbogen ist, der den zugehörigen Winkel AGB der Seitenfläche des körperlichen Dreieckes mißt;

6) daß aus jedem Winkel AGB der Seitenfläche des körperlichen Dreieckes, allemahl die zugehörige Seite des sphärischen Dreieckes gegeben ist;

7) daß aus dem körperlichen Dreiecke das sphärische und aus diesem jenes bestimmt, und daß aus der Gleichheit zweier körperlichen Dreiecke auf die Gleichheit

heit

heit der sphärischen, wie auch umgekehrt von diesen auf jene geschlossen werden kann.

§. 52.

Erklärung. Die sphärischen Dreiecke theilt man wie die ebenen geradlinigen, sowohl in Absicht der Seiten, in gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige, als auch in Absicht der Winkel, in rechtwinklige, stumpfwinklige und spigwinklige ein. Nur von dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke kann man noch folgendes merken: dieses hat entweder drei oder zwei rechte Winkel, oder nur Einen. Hat es wie (Fig. 21.) ABC, lauter rechte Winkel, so macht jede Seite 90° und es ist daher in einem solchen Dreiecke alles bekannt. Sind in demselben zwei Winkel Rechte, so sind die gegenüber liegenden Seiten 90° und von der dritten Seite weiß man, daß sie das Maß des entgegengesetzten Winkels, und daß aus einem dieser beiden Stücke, welches gegeben werden muß, zugleich das andere bekannt ist. Also wird unter den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken nur dasjenige in Betrachtung gezogen, welches einen rechten Winkel hat. Bei diesem aber nennt man die dem rechten Winkel entgegengesetzte Seite, wie beim geradlinigen, die Hypothenuse und die diesen Winkel einschließenden Seiten, die Katheten oder Perpendicularär = oder die lothrechten Seiten.

Anmerkung. Bei der Betrachtung der sphärischen Dreiecke, welche mit einander verglichen werden, muß man sich erinnern, daß sie allemahl auf der Oberfläche einer und derselben Kugel oder auf der Oberfläche gleicher Kugeln verzeich-

net werden. Die Kennzeichen also, aus welchen man die Gleichheit oder Ungleichheit, oder andere Eigenschaften sphärischer Dreiecke herleitet, können, in so fern die gedachte Bestimmung zum Grunde liegt, von solchen sphärischen Dreiecken gelten, die auf Kugeln von gleichen Halbmessern beschrieben sind.

§. 53.

Wenn in einem sphärischen Dreiecke eine Seite kleiner oder größer ist, als ein Halbkreis; so ist in jenem Falle der gegenüber liegende Winkel kleiner, und in diesem größer als zwei rechte Winkel.

Es sei G der Mittelpunkt des Kreises $ACFA$ (Fig. 22.), CF dessen Durchmesser, und in G werde die gerade Linie $GB = GC$ nach einer beliebigen Richtung auf dieses Kreises Ebene gestellt. Ferner lege man durch die Punkte B, G, C eine Ebene, welche erweist durch den Punkt F geht und beschreibe aus G , als dem Mittelpunkte mit dem Halbmesser GC , einen Kreis, dessen Hälfte CBF ist. Endlich nehme man auf der ersten Kreisfläche AFC einen willkürlichen Ausschnitt CGA , der jedoch kleiner als der Halbkreis sein muß; so erhält man, wenn man anfänglich den Kreisabschnitt BGF in Gedanken wegläßt, die beiden sphärischen Dreiecke ABC und $AFCBA$, in jenem sind die Seiten AB, BC, CA , und in diesem AFC, CB, BA .

- I. Ist nun in dem Dreiecke ABC die Seite AC kleiner als ein Halbkreis, so muß auch der Winkel CBA kleiner als 2 R sein. Denn in welchen Punkt des

Halbkreis CBF der Endpunct B der geraden Linie GB auch fallen mag; so sind die Winkel $ABC + ABF = 2 R$ (23.), folglich muß ABC allein, kleiner als $2 R$ sein.

II. Nimmt man nun das andere Dreieck, welches die beiden Seiten AB und CB mit dem vorigen gemein, zur dritten Seite aber den Bogen AFC hat, welcher größer als ein Halbkreis ist; so ist auch der dieser Seite gegenüber liegende Winkel ABC ein erhabener und größer wie $2 R$. Denn dieser erhabene Winkel, und der vorige eben so bezeichnete hohle Winkel machen zusammen $4 R$ aus. Nun war aber dieser hohle Winkel kleiner wie $2 R$, folglich muß der andere größer als $2 R$ sein.

Zusatz 1. Aus gleichen Gründen läßt sich nun auch umgekehrt behaupten, daß, wenn ein Winkel in einem sphärischen Dreiecke kleiner oder größer als $2 R$ ist, alsdann auch die gegenüberstehende Seite kleiner oder größer als 180° sein muß.

Zusatz 2. Die ungleichen Seiten AC und AFC beider sphärischen Dreiecke sind so beschaffen, daß sie einander zu 360 Graden ergänzen. Denn beide zusammen genommen bilden auf der Kugel Fläche den Umfang eines größten Kreises.

Zusatz 3. Verzeichnet man nun wieder den anfänglich weggelassenen Kreisabschnitt BGF , indem man GB in der Ebene CBG so lange um den festen Punct G bewegt, bis B den Punct F erreicht hat; so erhält man wieder zwei sphärische Dreiecke ABC und ABF , an welchen man in Absicht der Seiten und Winkel folgende Eigenschaften entdecken wird. Die Seite

AB ist beiden Dreiecken gemein, die Seiten AC und AF wie auch BC und BF ergänzen einander zu 180° . Es ist demnach $AF = 180 - AC$ und $BF = 180^\circ - BC$; oder wenn der Halbkreis von 180° mit π bezeichnet wird, so ist $AF = \pi - AC$ und $BF = \pi - BC$. Die Winkel BFA und BCA sind in beiden Dreiecken gleich groß, die Winkel BAC und BAF aber, wie auch die Winkel ABC und ABF ergänzen einander zu zweien Rechten; oder es ist $BAC = 2R - BAF$ und $ABF = 2R - ABC$.

Zusatz 4. Kennt man daher eines der beiden (Zus. 1. und 2.) erklärten Dreiecke; so kann man sich daraus das andere verzeichnen, und man hat nicht einmal nöthig, Dreiecke, deren Seiten oder Winkel größer als $2R$ sind, in Betrachtung zu ziehen.

Zusatz 5. Vollendet man nun noch den zur Seite AB gehörigen Kreis, wie die beiden übrigen, welche zu AC und BC gehören; so erhält man durch diese drei einander schneidende größte Kreise, acht sphärische, wie auch acht körperliche Dreiecke, wovon man wieder je zwei und zwei, nemlich diejenigen, welche einander entgegengesetzt sind, mit einander vergleichen kann. Diese Dreiecke zeigen sich an dem hierher gehörigen Modell sehr deutlich.

Zusatz 6. Hat man also ein sphärisches Dreieck ABC (Fig. 23.), so erhält man nach (51. 3. 6. 7.) das dazu gehörige körperliche Dreieck ABCO. Verlängert man nun die Seitenlinien desselben von dem Mittelpunkt der Kugel O aus; nach entgegengesetzter Richtung, bis an ihre Oberfläche; so erhält man das entgegengesetzte körperliche Dreieck DEFO und auf der Kugelfläche ergibt

sich durch die erweiterten, sie durchschneidenden Neigungsebenen, ein zweites sphärisches Dreieck DEF, welches im folgenden Satze mit dem ersten verglichen werden soll.

§. 54.

Die Seiten und Winkel des auf die vorhin beschriebene Art auf der andern Halbkugel aus ABC entstandenen sphärischen Dreieckes DEF, welches durch die Bogen DF, DE und EF dreier größten Kreise begränzt wird, sind den Seiten und Winkeln des Dreieckes ABC gleich.

Die Winkel COA und FOD sind Verticalwinkel, folglich einander gleich. In Bezug auf die Kreisbogen AC und DF Winkel am Mittelpunct, daher sind die Bogen BC und EF und aus gleichen Gründen die Bogen AC und DF, wie auch AB und DE einander gleich. Diese Bogen aber sind die Seiten der sphärischen Dreiecke ABC und DEF. Die Winkel ABC und DEF, desgleichen ACB und DFE, und BAC und FDE sind die einander entgegengesetzten Flächenwinkel und in der angeführten Ordnung einander gleich.

§. 55.

In jedem sphärischen Dreiecke sind zwei Seiten zusammen genommen größer als die dritte, wenn jeder Winkel kleiner ist, als zwei Rechte.

Die Seiten sind entweder gleich oder nicht. Ist das erste, so ist der Satz für sich klar; im andern Falle aber ziehe man des Beweises wegen in dem Dreiecke ABF (Fig. 22.) die gerade Linie von B nach F, mache

den Winkel $FGL = FGA$. Die Linie $GK = GL$ und verbinde B und F mit K durch BK und FK; so sind in den gleichen Dreiecken FGK und FGL die Seiten FL und FK einander gleich, (§. 60.) und es ist

$$BK + KF > BF \text{ (§. 25.)}$$

$$KF = FL \text{ (nach der Verzeichnung)}$$

folglich $BK > BF - FL$ d. i.

$$BK > BL$$

folglich $\angle BGK > BGL$ (§. 71.) Nun ist

$$\angle FGK = FGL$$

also $\angle BGK + FGK > BGL + FGL$ d. i.

$$\angle BGK + FGK > BGF$$

folglich $AB + AF > BF$.

Zusatz. Auch ist begreiflich, daß die Summe aller Winkel an der Spitze eines körperlichen Dreieckes kleiner, als 4 R ist. Denn beschreibt man in einer Ebene (Fig. 22.) einen Kreis von beliebiger Größe und ziehet aus dem Mittelpuncte G die geraden Linien GA, GB, GF nach der Peripherie, so machen die drei Winkel $AGB + BGF + FGA = 360^\circ$. In dieser Lage aber ist es auch nicht möglich, daß die Kreisausschnitte gegen einander eine Neigung erhalten können. Sollte dieses aber geschehen, so muß wenigstens einer dieser Kreisausschnitte kleiner, folglich muß auch die Summe der gedachten Winkel kleiner, als 4 R sein.

§. 56.

Zwei sphärische Dreiecke decken einander 1) wenn sie einen gleichen Winkel haben, und die diesen Winkel einschließenden gleichnamigen Sei-

ten in dem einen so groß sind, als in dem andern; oder 2) wenn sie eine gleiche Seite haben und die an dieser Seite anliegenden gleichnamigen Winkel in beiden von gleicher Größe sind; oder 3) wenn alle drei Seiten des einen mit den drei gleichnamigen Seiten des andern von gleicher Größe sind.

I. Man lege (Fig. 24.) b auf B und ba auf BA , so fällt, weil $BA = ba$ ist, a in A und bc auf BC . Denn fiele bc nicht auf BC , so fällt bc entweder innerhalb oder außerhalb der Figur, und hätte die Lage Bd oder Be . In jenem Falle wäre der Winkel bei b kleiner und in diesem größer als bei B und beides ist der Voraussetzung entgegen, folglich fällt bc auf BC und c in C . Durch die drei Punkte A , C und den Mittelpunkt der Kugel, kann aber nur eine Ebene gelegt werden, deren Umfang ein größter Kreis ist, wovon ein Theil zwischen A und C und weil A mit a und C mit c zusammenfällt, auch zwischen a und c liegt, folglich ist der Kreisbogen AC als eine Seite zu betrachten, worin AC mit ac zusammenfällt. Folglich fallen alle Seiten beider Dreiecke zusammen, d. h. sie decken sich.

II. Man lege die gleiche Seite beider Dreiecke so auf einander, daß ac auf AC , a auf A und c auf C fällt; so wird weil $A = a$ und $C = c$, ba gegen ac eben die Lage haben, wie BA gegen AC und bc gegen ac eben die Lage als BC gegen AC , und weil ba und ca , wie auch BA und CA größte Kreise

einer Kugel sind, so wird unter den angeführten Umständen, da ac auf AC gelegt ist, ba auf BA und bc auf BC liegen, d. h. die Dreiecke werden einander decken.

III. Da die Seiten beider Dreiecke lauter Bogen größter Kreise einer Kugel sind, zwischen zwei Punkten aber nur allemahl ein größter Kreis möglich ist, deren Ebene der Lage nach dadurch, daß sie auch durch den Mittelpunkt der Kugel geht, völlig bestimmt ist, so müssen die Seiten dieser Dreiecke einander decken. Folglich schließen sie gleiche Flächenräume ein und haben bei A und a , B und b , C und c gleiche Winkel, welches auch von den vorigen Fällen gilt.

§. 57.

In zwei sphärischen Dreiecken sind zwei Seiten nebst einem Winkel oder zwei Winkel nebst einer Seite gegeben, doch so, daß in jenem Falle der Winkel einer der gegebenen Seiten, in diesem die Seiten einem der gegebenen Winkel gegenübersteht; nun ist die Frage, ob deshalb auch die übrigen Bestimmungsstücke in beiden Dreiecken von gleicher Größe sein müssen oder nicht?

Die Beantwortung dieser Fragen läßt sich aus folgenden Betrachtungen herleiten:

I. Es sei G (Fig. 25.) der Mittelpunkt einer Kugel, auf deren Oberfläche das Dreieck ABC verzeichnet ist. Nun werde durch G und B und einen Punkt D

des Bogens AC eine auf ACG lothrecht stehende Ebene GBD geführt (266.); so schneidet selbige die Ebene AGC in GD und bildet mit ihr die rechten Winkel $BDC = BDA = R$. Von D aus schneide man den Bogen DE ab, so, daß $DE = DC$ werde, und lege durch die Punkte B, G und E eine zweite Ebene BGE; so ist

$$BD = BD$$

$$DC = DE \text{ nach der Verzeichnung}$$

$$\text{und W. } BDE = BDC = R$$

folglich das Dreieck $BDE = BDC$. Nun vergleiche man die beiden Dreiecke BAC und BAE mit einander, so ist zwar

$$BA = BA,$$

$$\text{allein es ist } AC > AE$$

$$BC = BE \text{ und}$$

$$ABC > ABE \text{ und}$$

$$\angle BAC = BAE$$

$$\angle ACB \text{ un} = AEB.$$

Dieser beiden Winkel Ungleichheit erhellet daraus, weil $\angle BEA + BEC = 2R (23.) = BEA + BCE$. Da nun BE auf AC nicht lothrecht steht; so können diese beiden Winkel BEA und BCA nicht von gleicher Größe sein. Es lassen sich also aus zwei Seiten und dem Winkel, der einer der gegebenen Seiten gegenüber liegt, zwei verschiedene Dreiecke zeichnen und es sind also die gegebenen Stücke zur Bestimmung eines Dreieckes nicht hinreichend.

II. Man drehe (Fig. 26.) GA und GB um G, bis A und B den Punct F erreichen, GB in der Ebene CGB und GA in der Ebene CGA; so schließen die Bogen EF und AF eben den Winkel bei F ein, welchen BC und AC bei C mit einander machen, und es

ist also der Winkel $F = C$. Ferner werde durch A, G und einen Punkt des Bogens BE auf FBC eine lothrechte Ebene ADC gesetzt, und $DE = DB$ gemacht; so ist $\angle ADE = ADB = R$ und das Dreieck $ADB = ADE$. Folglich der Winkel $ABD = AED$. Nun ist auch $ABC = AEF$, weil jeder, von den beiden vorigen gleichen Winkeln, ein Nebenwinkel ist. Daher ist in den beiden Dreiecken ABC und AEF der Winkel $EFA = BCA$, $\angle AEF = ABC$ und die Seite $AE = AB$.

Da nun die beiden Seiten $FA + AC = 180^\circ$ sind; so können sie nur in dem Falle gleich groß sein, wenn jede einem Quadranten gleicht. Alsdann aber macht auch jede der Seiten FD und DC einen Quadranten aus. Zöge man nun DE und DB von DF und DC ab; so hätte man die gleichen Seiten FE und BC und die Dreiecke AEF und ABC beständen aus lauter gleichen Seiten und Winkeln. Ist aber AF kein Quadrant, so ist auch AC, folglich auch FD nicht 90° , also sind alsdann FD und DC, mithin auch FE und BC von ungleicher Größe.

§. 58.

In einem sphärischen gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Man schneide von den gleichen Schenkeln AB, CB (Fig. 27.) die gleichen Bogen BE und BD ab, und ziehe zwischen C und E, und A und D die Bogen der größten Kreise derjenigen Kugel, worauf das Dreieck ABC verzeichnet ist; so sind die Dreiecke ABD und

CBE, wie auch AEC und ADC einander gleich.
 Jene, weil

$$AB = CB$$

$$BE = DB \text{ und}$$

$$\angle EBC = DBA \text{ folglich}$$

$$\triangle ABD = CBE \text{ (56.)}$$

$$\text{also } AD = EC \text{ und}$$

$$\angle BCE = BAD. \text{ Diese, weil}$$

$$CE = AD$$

$$AE = CD \text{ indem } BA - BE = BC - BD$$

$$AC = AC$$

$$\text{folglich das } \triangle AEC = CDA \text{ (56.)}$$

$$\text{also } EAC = DCA$$

$$\text{oder } BAC = BCA.$$

Zusatz. Ist daher ein sphärisches Dreieck gleichseitig, so ist es auch gleichwinklig.

§. 59.

Sind in einem sphärischen Dreiecke die Winkel an der Grundlinie einander gleich, so sind auch die, diesen Winkeln gegenüber liegenden Seiten, einander gleich und das Dreieck ist gleichschenkelig.

Denn man mache $AE = CD$ und ziehe wie im vorigen §. die Kreisbogen AD und CE, so sind die Dreiecke AEC und CDA wie auch BEC und ADB einander gleich. Jene, weil der Winkel

$$EAC = DCA$$

$$AE = DC \text{ nach der Zeichnung}$$

$$AC = AC$$

folglich $\triangle AEC = CDA$ und

$\angle AEC = CDA$. Diese, weil

$\angle BEC = BDA$ als Nebenwinkel der vorigen

$EC = AD$ wegen der Gl. der vorigen $\triangle$

$EB = DB$ folglich

$\triangle BEC = BDA$ also

$BE = BD$ und da

$AE = DC$, so ist auch

$$BE + AE = BD + DC, \text{ d. i.}$$

$$BA = BC.$$

Zusatz. Also hat ein gleichwinkliges sphärisches Dreieck lauter gleiche Seiten.

§. 60.

Im sphärischen Dreiecke liegt dem größern Winkel die größere Seite, und der größern Seite der größere Winkel gegenüber.

I. Es sei (Fig. 28.) der Winkel $BCA > BAC$, so muß bewiesen werden, daß $BA > BC$ sei. Man führe eine Ebene durch GC und bringe sie alsdann in eine solche Lage, daß die Winkel DCA und DAC einander gleich werden; so wird das Dreieck ADC gleichschenkelig und $DC = DA$ sein. Setzt man nun zu beiden Schenkeln den Bogen BD ; so hat man $BD + AD = BD + DC$ d. i. $BA = BD + DC$. Nun ist aber $BD + DC > BC$ (55.), folglich auch $AB > BC$.

II. Ist nun die Seite $AB > BC$; so muß der Winkel $ACB > BAC$ sein. Denn wäre der Winkel ACB nicht größer als BAC , so müßte entweder $ACB = BAC$ oder $ACB < BAC$ sein. Aus jener Annahme würde gegen die Voraussetzung folgen, daß $CB = AB$ und aus dieser, daß $CB > AB$ sei, welches mit der Voraussetzung ebenfalls nicht bestehen kann.

§. 61.

Aufgabe. Auf der Oberfläche einer Kugel ist ein sphärisches Dreieck von bekannter Lage und Größe verzeichnet, man fragt, wie man auf eben dieselbe Fläche ein anderes auftragen könne, dessen Seiten die Winkel des gegebenen, und dessen Winkel die Seiten des gegebenen Dreieckes zu 180° ergänzen.

Es sei (Fig. 29.) ABC das gegebene Dreieck, so gebe man jeder der drei Seiten eine Länge von 90° , d. h. man mache aus AB , $Ad = 90^\circ$, aus AC , $Ae = 90^\circ$, aus BC , $Bf = 90^\circ$, aus BA , $Bg = 90^\circ$, aus CA , $Ch = 90^\circ$ und aus CB , $Ck = 90^\circ$. Legt man nun durch den Mittelpunct der Kugel und durch jede zwei Punkte d und e , f und g , h und k eine Ebene; so bilden diese drei Ebenen auf der Oberfläche der Kugel drei größte Kreise (5.), welche einander schneiden (10.) und das Dreieck abc mit den verlangten Eigenschaften darstellen.

I. Da nun die Kreisbogen ab und ac in a einander schneiden; so ist A von allen Punkten der de , folglich auch von a und aus gleichem Grunde B von

allen Punkten der fg , folglich auch von a gleich weit entfernt, d. h. es ist $aA = aB = 90^\circ$. Also ist a der Pol des durch AB laufenden Kreises. Aus gleichen Gründen sind die Durchschnittspuncte b und c Pole der Kreisbogen BC und AC . Daher ist $aB = ad = cC = ce = 90^\circ$, folglich $ad + ce = 180^\circ$. Es ist aber $ad + ce = ad + de + dc$ oder $= de + (dc + da) = de + ac$, folglich $de + ac = 180^\circ$. Es ist aber de das Maß des Winkels A und ac eine der Seiten des gesuchten Dreieckes, folglich kann man A für de setzen und es ist $A + ac = 180^\circ$. Eben dieses läßt sich auch von $B + ab$ und $C + bc$ beweisen, d. h. es ist $B + ab = 180^\circ$ und $C + bc = 180^\circ$. Also ergänzen die drei Seiten ac, ab, ca die drei Winkel A, B und C zu 180° .

II. Es ist der Kreisbogen $Ad = Bg = 90^\circ$, folglich $Ad + Bg = 180^\circ$, es ist aber $Ad + Bg = Ad + AB + Ag$ oder $= AB + Ad + Ag = AB + dg$. Allein dg ist das Maß des W. bac oder a , folglich ist $AB + a = 180^\circ$ und aus gleichen Gründen $BC + b = 180^\circ$ und $AC + c = 180^\circ$. Es ergänzen also die Seiten des gegebenen Dreieckes, die Winkel des gesuchten zu 180° .

§. 62.

Erklärung. Ein Dreieck wie DEF (Fig. 50.) wird in Hinsicht auf das Dreieck ABC ein Supplement oder Polardreieck genannt. Da aber auch das Dreieck DEF gegeben, und das andere gesucht werden kann; so heißt jenes in Hinsicht auf dieses ebenfalls das Supplementdreieck. Denn es sind die Seiten und

Winkel des Dreieckes ABC die Supplemente der Winkel und Seiten des Dreieckes DEF.

§. 63.

Die Summe aller Winkel eines sphärischen Dreieckes ist größer als zwei, und kleiner als sechs Rechte.

I. Man verzeichne (Fig. 30.) nach den Vorschriften der vorhergehenden Aufgabe das Dreieck DEF, zu dem gegebenen ABC; so ist $A = 2R - DE$, $B = 2R - EF$ und $C = 2R - DF$. Daher ist $A + B + C = 6R - (DE + EF + FD)$, folglich $A + B + C < 6R$.

II. Da die Seiten $DE + EF + FD < 4R$ sind, so müssen die Winkel $A + B + C > 2R$ sein.

§. 64.

Gleichwinklige sphärische Dreiecke sind einander gleich.

Wenn in den beiden Dreiecken (Fig. 30.) ABC und abc der Winkel $A = a$, $B = b$, $C = c$ ist, so muß auch die Seite $BC = bc$, $AC = ac$ und $AB = ab$ sein. Denn man verzeichne für ABC und abc nach den Vorschriften der Aufgabe (61.) die Dreiecke DEF und def; so ist die Seite $DE = 180^\circ - A = 180^\circ - a = de$, die Seite $EF = 180^\circ - B = 180^\circ - b = ef$ und die Seite $FD = 180^\circ - C = 180^\circ - c = fd$. Also sind die Seiten der Dreiecke DEF und def, folglich auch ihre Winkel gleich, d. i. $D = d$, $E = e$ und $F = f$. Nun ist aber $D + AC = 180^\circ = d + ac$, E

$+ AB = 180^\circ = e + ab$ und $F + BE = 180^\circ = f + be$; also sind die Seiten der Dreiecke ABC und abc auch einander gleich und beide von gleicher Größe.

§. 65.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines jeden sphärischen Dreieckes zu berechnen.

Es sei ABC (Fig. 31.) das gegebene Dreieck, dessen Inhalt F gefunden werden soll und A, B, C die Winkel desselben; so drucke man diese Winkel aus dem Halbmesser durch die Verhältnißzahlen in Bezug auf den durchs Längenmaß bestimmten halben Umfang $\pi = 3,14159\dots$ aus. Dann ziehe man π von der Summe der drei Winkel ab, und endlich multiplicire man diese Differenz mit dem Quadrate des Halbmessers der Kugel. Ist dieser $= r$, so ist $F = r^2 (A + B + C - \pi)$.

Die Figur (31.) stelle die beiden Hälften einer Kugel und $DECA$ und DEG den Kreis auf ihrer Oberfläche vor, wodurch sie von einander getrennt werden. Nun zeichne man sich zu dem Dreiecke ABC das damit zusammengehörige gleiche, aber auf der andern Seite liegende Dreieck DFE ; so sind DF und EF die verlängerten Schenkel von BD und BE , welche in B ihren Scheitelpunct haben und sich in F zum zweiten Male schneiden. Ist nun die Größe des $\angle ABC$ gegeben und r der Halbmesser der Kugel; so wird der zwischen den beiden Halbkreisen enthaltene Flächenraum nach (21.) gefunden. Auf dieselbe Art bestimmt man nun den Flächenraum zwischen $ABECA$ und $CADBC$. Bezeichnet man nun die Anzahl der Grade von den Winkeln

kehn BAC, BCA und ABC = DBE (19.) durch a, c und b die respectiven vorher bemerkten Flächenräume aber durch L, M und N und den gesuchten Flächeninhalt des $\triangle ABC$ durch F; so ist die getrennte Oberfläche = der ersten Halbfugel d. i.

$$\frac{1}{2} K = ABECA + CADBC - ABC + BDFEB - ABC \text{ d. i.}$$

$$= L + M - F + N - F$$

$$\frac{1}{2} K = L + M + N - 2F; \text{ oder}$$

$$2F = L + M + N - \frac{1}{2} K. \text{ Nun ist aber}$$

$$L = \frac{2ar^2\pi}{180}; M = \frac{2br^2\pi}{180}; N = \frac{2cr^2\pi}{180};$$

und die Oberfläche der Halbfugel, d. i. $\frac{1}{2} K = 2r^2\pi$.
Setzt man nun diese Ausdrücke für einander, so erhält man

$$2F = \frac{2ar^2\pi}{180} + \frac{2br^2\pi}{180} + \frac{2cr^2\pi}{180} - 2r^2\pi \text{ oder}$$

$$2F = 2r^2 \left(\frac{a\pi}{180} + \frac{b\pi}{180} + \frac{c\pi}{180} - \pi \right) \text{ oder}$$

$$F = r^2 \left(\frac{a\pi}{180} + \frac{b\pi}{180} + \frac{c\pi}{180} - \pi \right) \text{ oder}$$

$F = r^2 (A + B + C - \pi)$; wenn man nemlich die Winkel in der obigen Bedeutung nimmt.

Es sei z. B. ABC ein sphärisches Dreieck auf der Erdfugel und $a = 81^\circ 12'$, $b = 120^\circ 20'$ und $c = 79^\circ 51'$, so ist

$$\frac{a\pi}{180} = \frac{81^\circ 12' \cdot 3,14159}{180^\circ} = \frac{4872' \cdot 3,14 \cdot \cdot}{10800'}$$

$$= \frac{203 \cdot 3,14 \cdot \cdot}{450} = 1,417206. \text{ Bedient man}$$

sich dazu der Lamb. S. 29 angeführten Tabelle, so

$$\begin{array}{rcl} \text{find} & 120^\circ & = 2,094395 \\ & 20' & = 5817 \end{array}$$

$$\text{also } \frac{b\pi}{180} = \frac{120^\circ 20' \pi}{180} = 2,100212 \text{ und}$$

$$\begin{array}{rcl} & 97^\circ & = 1,692969 \\ & 50' & = 14514 \\ & 1' & = 290 \end{array}$$

$$\text{also } \frac{c\pi}{180} = \frac{97^\circ 51' \pi}{180} = 1,707803$$

$$\begin{aligned} \text{Folglich } F &= (1,417206 + 2,100212 + 1,707803 \\ &\quad - \pi) 860^2 \\ &= (5,225221 - \pi) 860^2 \\ &= (5,225221 - 3,14\dots) 860^2 \\ &= 2,08362 \cdot 860^2 = 1541045,352. \end{aligned}$$

Anmerkung. In der zweiten Abtheilung des Mönnichschen Lehrbuches der Mathematik finden sich in dem S. 112 angeführten Beispiele verschiedene Fehler. Die Differenz zwischen 4,538 und 3,142 ist nicht 1,395, sondern 1,396. Nimmt man aber auf diesen Tausendtheil keine Rücksicht; so ist doch das Product (unfehlbar durch einen Druckfehler) entstellt und es muß 10317420 anstatt 10217420 stehen. Endlich ist auch die Abtheilung unrichtig angegeben, das Einheitszeichen muß nicht nach der 7 und 10317,420 sondern nach der 2 und also 1031742,0 geschrieben werden.

Vierter Abschnitt.

Von den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken.

§. 66.

L e h n s a t z.

Wenn man von einem beliebigen Puncte (Fig. 32.) B, über einer Ebene CL zwei gerade Linien BD und BE zieht, deren jene BD auf der gedachten Ebene, diese BE auf einer in dieser Ebene gezogenen geraden Linie GA senkrecht steht und man alsdann die beiden Puncte D und E durch DE zusammenziehet; so steht diese Verbindungslinie auf GA senkrecht.

Gesetzt DE stände nicht senkrecht auf GA, so kann man durch E eine andere gerade Linie etwa wie EF auf AG senkrecht ziehen. Nun lasse man aus B den Perpendikel BF auf EF herab; so steht diese BF und der Annahme gemäß auch BD auf der Ebene CL senkrecht. Beide aber sind aus demselben Puncte

§ 2

auf CL herabgelassen; dieses aber ist unmöglich (S. 251. Zus. 3.); folglich kann auch EF auf AG nicht senkrecht stehen.

Zusatz 1. Legt man nun durch BD (Fig. 35.) eine Ebene BGC, welche die andere AGC in GC durchschneidet; so steht jene auf dieser senkrecht (S. 261.). Beschreibt man nun mit dem Halbmesser $GA = GC$, die beiden Kreisbogen AC und BC, so pflegt man auch zu sagen, diese beiden Bogen schließen bei C einen rechten Winkel mit einander ein, welches also eigentlich nichts anders heißt, als die durch diese Bogen und den Punct G gelegten Ebenen stehen auf einander senkrecht.

Zusatz 2. Legt man nun durch A, B, G eine Ebene und beschreibt alsdann mit dem Halbmesser AG den Kreisbogen AB; so erhält man dadurch das (51.) beschriebene körperliche Dreieck AGBC, welches mit dem rechtwinkligen sphärischen ABC zusammengehört, dessen Seiten und Winkel sich wie eines jeden sphärischen Dreiecks überhaupt in Graden, Minuten &c. angeben lassen.

Zusatz 3. Stehen aber die beiden Ebenen AGC und BGC auf einander senkrecht und läßt man alsdann aus einem beliebigen Puncte B einen Perpendikel auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt GC beider Ebenen herab; so liegt dieser Perpendikel BD ganz in der Ebene BGC. Der Endpunct D des Perpendikels BD liegt im Durchschnitte GC, dieser in der Ebene BGC, worin der Punct B liegt und die zwischen den beiden Puncten B und D gezogene gerade Linie, liegt ganz in der Ebene BGC.

§. 67.

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, verhalten sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der diesen Seiten gegenüber liegenden Winkel.

Man ziehe aus den Scheitelpuncten der Winkel (Fig. 33.) A, B, C nach G dem Mittelpuncte der Kugel, auf deren Oberfläche man sich das rechtwinklige Dreieck ABC verzeichnet hat, die geraden Linien GA, GB, GC ; so sind selbige Halbmesser der Kugel und zugleich Durchschnittslinien der durch die Winkelpuncte A, B, C und den Mittelpunct G , gelegten Ebenen. In GA schneiden sich die Ebenen BGA und CGA , in GB die Ebenen AGB und CGB und in GC die auf einander lothrecht stehenden Ebenen AGC und BGC . Alle drei Ebenen aber bilden am Mittelpunkte der Kugel G , das zu ABC gehörige körperliche Dreieck $BGA C$.
No. IV.

Nun lasse man aus dem Puncte B zwei gerade Linien BD und BE , jene auf die Ebene CGA , diese auf der in dieser Ebene befindlichen Durchschnittslinie GA der beiden Ebenen BGA und CGA lothrecht herab; so trifft jene, weil beide Ebenen auf einander senkrecht stehen, auch den Durchschnitt GC der Ebenen BGC und CGA in D ; folglich ist BED der Neigungswinkel der beiden Ebenen BGA und CGA , welcher die Größe des sphärischen Winkels BAC ausdrückt. Ferner ziehe man DE , so ist DE senkrecht auf GA und BE , BD und DE schließen ein ebenes, geradliniges, rechtwinkliges Dreieck BDE ein.

Endlich ist BD der Sinus des $\angle$ BGD im rechtwinkligen Dreiecke BDG oder des Bogens BC, durch welchen der gedachte Centriwinkel gemessen wird, d. h. es ist $BD = \sin BGC = \sin BC = \sin a$ und aus gleichem Grunde $BE = \sin BGE = \sin BA = \sin c$. Im rechtwinkligen $\triangle$ BED aber verhält sich

$BE : BD = r : \sin BED$ oder nach obiger Bezeichnung
 $\sin c : \sin a = r : \sin A$, weil $\angle BED = BAC = A$; oder
 $\sin c : r = \sin a : \sin A$. (§. 91.) oder

$r : \sin c = \sin A : \sin a$. Aus diesen Gründen ist auch
 $r : \sin c = \sin B : \sin b$ und daraus

$\sin A : \sin a = \sin B : \sin b$.

Anmerkung 1. Bei dem rechtwinkligen $\triangle ABC$ ist A der Winkel an der Grundlinie, welcher von der Hypothenuse c und der Grundlinie b eingeschlossen wird. Diesem Winkel steht die lothrechte Seite a gegenüber.

Anmerkung 2. Nimmt man in dem rechtwinkligen sphärischen $\triangle ABC$ den (schiefen, nicht aber den rechten) Winkel an der Grundlinie A und die gegenüber stehende Seite a, oder den $\angle$ B und die gegenüberliegende Seite b und vergleicht damit in beiden Fällen die Hypothenuse c; so lassen sich die drei Stücke a, A und c oder b, B und c so mit einander verbinden, daß aus zwei derselben, allemahl das dritte gefunden werden kann. Unterscheiden wir also die gegebenen Stücke von dem gesuchten: nehmen sich aus

a, c wird gesucht A;	oder aus b, c wird gesucht B
A, c — — a	B, c — — b
A, a — — c	B, b — — c

so ergeben sich folgende Proportionen

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\sin c : \sin a = r : \sin A$. | 4) $\sin c : \sin b = r : \sin B$ |
| 2) $r : \sin a = \sin c : \sin A$. | 5) $r : \sin B = \sin c : \sin b$ |
| 3) $\sin A : \sin a = r : \sin c$. | 6) $\sin b : \sin B = r : \sin c$. |

§. 68.

Im rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, verhält sich der Halbmesser *) zum Sinus der einen lothrechten Seite, wie die Tangente des an dieser Seite anliegenden schiefen Winkels, zur Tangente der andern lothrechten Seite.

Denn im $\triangle BDG$ (Fig. 35.) ist $BD = GD \cdot \text{tang } BGD$
und im $\triangle BED$ ist $BD = DE \cdot \text{tang } DEB$

$$\text{Folglich } GD \cdot \text{tang } BGD = DE \cdot \text{tang } DEB.$$

$$\text{Also } GD : DE = \text{tang } DEB : \text{tang } BGD.$$

Allein es verhält sich auch $GD : DE = r : \sin DGE$

$$\text{folglich auch } r : \sin DGE = \text{tang } DEB : \text{tang } BGD$$

oder $r : \sin b = \text{tang } A : \text{tang } a$. Nach der angenommenen Bezeichnung

Zusatz. Nimmt man anstatt b die andere lothrechte Seite a und anstatt des Winkels A den andern schiefen Winkel B , so läßt sich aus denselben Gründen folgende Proportion beweisen. Es verhält sich $r : \sin a = \text{tang } B : \text{tang } b$.

Anmerkung. Auch hier stehen, wie schon im vorigen §. bemerkt worden ist, die drei Stücke a, b, A oder a, b, B in einer solchen Verbindung, daß man aus zweien allemahl das dritte finden kann. Man bestimmt daher aus

a und b die Größe A ; desgl. aus a und b die Größe B	
a und A — — b ;	a und B — — b
A und b — — a ;	B und b — — a

*) Der Halbmesser steht hier und in den folgenden Sätzen, der Kürze wegen für den Halbmesser der Tafeln oder Sinustorus.

nach den Proportionen:

- | | |
|---|---|
| 1) $\sin b : r = \operatorname{tg} a : \operatorname{tg} A$ | 4) $\sin a : r = \operatorname{tg} b : \operatorname{tg} B$ |
| 2) $\operatorname{tg} A : \operatorname{tg} a = r : \sin b$ | 5) $r : \sin a = \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} b$ |
| 3) $r : \sin b = \operatorname{tg} A : \operatorname{tg} a$ | 6) $\operatorname{tg} B : \operatorname{tg} b = r : \sin a$ |

§. 69.

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, verhält sich der Halbmesser, zu dem Cosinus einer lothrechten Seite, wie der Cosinus der andern, zu dem Cosinus der Hypothenuse.

Man wird sich sehr leicht von der Wahrheit dieses Satzes überzeugen können, wenn man das mit No. V. bezeichnete Modell bei dem Beweise zu Hülfe nimmt und die, durch gleiche Buchstaben ausgedruckten Kreisbogen und Winkel der Figur, und des Modelles mit einander vergleicht.

Man verzeichne das rechtwinklige sphärische Dreieck ABC (Fig. 54.) und verlängere dessen beide Seiten AB und AC so weit, bis jede derselben einem Quadranten gleich, d. h. AB bis E, AC bis D, so daß $AE = AD = 90^\circ$; so bildet der durch D und E geführte größte Kreis mit den Quadranten AD und AE rechte Winkel (17. Zus. 4.). Die Bogen BC und DE, welche auf AD senkrecht stehen, schneiden sich in dem Pole des Kreises AD (17. Zus. 5.). Folglich ist auch $DF = 90^\circ$.

Die Kreisbogen BE, BF und EF bilden ebenfalls ein sphärisches Dreieck, worin die Seiten BE und EF einen rechten Winkel einschließen. In einem rechtwinkligen Dreiecke aber verhält sich

$$\sin BF : \sin BE = r : \sin F \text{ (67). } \text{Nun ist}$$

BF die Ergänzung des Bogens BC zu 90°

BE die Ergänzung der Hypothenuse AB zu 90°

F oder CD die Ergänzung des Bogens AC zu 90° .

Also ist

$$\sin BF = \cos BC = \cos a,$$

$$\sin BE = \cos AB = \cos c,$$

$\sin F = \cos AC = \cos b$. Drückt man nun die Glieder der obigen Proportion durch diese Cosinus aus; so erhält man Statt ihrer:

$$\cos a : \cos c = r : \cos b \quad \text{oder}$$

$$r : \cos b = \cos a : \cos c \quad \text{oder}$$

$$r : \cos a = \cos b : \cos c.$$

Anmerkung. Man sieht aus dem geführten Beweise leicht ein, daß wenn von den drei Stücken a, b und c zwei gegeben sind, das dritte durch eine bloße Versetzung der Glieder der obigen Proportion gefunden werden kann.

§. 70.

In einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, verhält sich der Halbmesser, zum Cosinus einer lothrechten Seite, wie der Sinus des anliegenden Winkels, zum Cosinus des entgegengesetzten Winkels.

Das Dreieck EBF ist rechtwinklig, daher verhält sich in demselben $r : \sin BF = \sin EBF : \sin EF$.

Es ist aber $EBF = ABC = B$

$$\sin BF = \cos BC = \cos a \quad \text{und}$$

$$\sin FE = \cos ED = \cos A. \quad \text{Folglich ist}$$

$$r : \cos a = \sin B : \cos A.$$

Zusatz. Die Richtigkeit dieses Satzes erhellet aus eben den Gründen, wenn man anstatt a die Seite b nimmt, nur muß man alsdann auch B für A und A für B schreiben, und die Proportion auf folgende Art ordnen: $r : \cos b = \sin A : \cos B$. Hieraus lassen sich eben so wie vorher noch $\sin A$ und $\cos b$ aus den übrigen Gliedern der Proportion bestimmen.

Anmerkung. Es läßt sich leicht einsehen, daß sich aus diesem Satze, auf eine ähnliche Art wie in (69.) mit gehöriger Verwechselung der beiden lothrechten Seiten und anliegenden schiefen Winkeln, sich ähnliche Proportionalsätze zur Auflösung derjenigen Aufgaben herleiten lassen, in welchen aus zwei gegebenen das dritte Stück gefunden werden soll. Ein Gleiches gilt von den beiden folgenden Sätzen, welche ich hier anführe, um das Gesagte nicht noch einmahl zu wiederholen.

§. 71.

In einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke verhält sich der Halbmesser, zur Cotangente eines der schiefen Winkel, wie die Cotangente des andern, zum Cosinus der Hypothenuse.

Es sei ABC (Fig. 34.) das rechtwinklige sphärische Dreieck, dessen Hülfslinien eben so wie vorher ausgezogen sind; so verhält sich in dem Dreiecke BFE nach (68.) $r : \sin BE = \tan EBF : \tan EF$.

Nun ist aber $\sin BE = \cos AB = \cos c$
 $\tan EBF = \tan ABC = \tan B$ und
 $\tan EF = \cot ED = \cot A$ folglich

verhält sich $r : \cos c = \tan B : \cot A$ oder
 $r : \tan B = \cos c : \cot A$ (§. 166.)

allein es verhält sich $r : \tan B = \cot B : r$

folglich $\cot B : r = \cos c : \cot A$ oder

$$r : \cot B = \cot A : \cos c \text{ oder}$$

$$r : \cot A = \cot B : \cos c.$$

§. 72.

Im rechtwinkligen sphärischen Dreiecke verhält sich
 der Halbmesser, zum Cosinus des einen schiefen
 Winkels, wie die Cotangente der anliegenden
 lothrechten Seite, zur Cotangente der Hypo-
 thenuse.

Denn in dem rechtwinkligen Dreiecke FBE ver-
 hält sich

$$r : \sin EF = \tan F : \tan BE \text{ (68.)}$$

Es sind aber $\sin EF = \cos ED = \cos A$

$$\tan F = \tan CD = \cot AC = \cot b$$

$$\tan BE = \cot AB = \cot c. \text{ Folglich}$$

$$\text{verhält sich } r : \cos A = \cot b : \cot c.$$

Zusatz. Man kann in diesen Proportionen auch
 überall B für A und a für b schreiben, so daß $r : \cos B$
 $= \cot a : \cot c$. Die Cotangenten aber verhalten sich
 umgekehrt wie die Tangenten, daher läßt sich dieser
 Satz auch so ausdrücken:

$r : \cos A = \tan c : \tan b$. Auf dieselbe Art kann
 man auch die andern Proportionalsätze verändern.

§. 75.

Zur leichtern Uebersicht der vorgelegten Sätze rechtwinkliger sphärischer Dreiecke, kann man jede Proportion in eine Gleichung verwandeln. Man erhält daher eben so viel Gleichungen als man Proportionsätze hat. Indessen kann man selbige auf sechs Hauptgleichungen bringen, die sich in eine einfache Regel zusammen fassen und so dem Gedächtnisse leicht einprägen lassen.

Die sechs Hauptgleichungen, die sich aus den gefundenen Proportionen herleiten lassen, sind folgende:

I) $\sin a = \sin A. \sin c : r$ (67.)

II) $\cos B = \sin A. \cos b : r$ (70.)

III) $\cos c = \cos a. \cos b : r$ (69.)

IV) $\cos A = \tan b. \cot c : r$ (72.)

V) $\sin b = \tan a. \cot A : r$ (68.)

VI) $\cos c = \cot A. \cot B : r$ (71.)

Setzt man nun den Halbmesser $r = 1$ und nimmt man anstatt der lothrechten Seiten, ihre Ergänzungen zu 90° ; so ergeben sich daraus folgende Gleichungen:

1) $\cos (90^\circ - a) = \sin A. \sin c.$

2) $\cos B = \sin A. \sin (90^\circ - b).$

3) $\cos c = \sin (90^\circ - a) \sin (90^\circ - b).$

4) $\cos A = \cot (90^\circ - b) \cot c.$

5) $\cos (90^\circ - b) = \cot (90^\circ - a). \cot A.$

6) $\cos c = \cot A \cot B.$

In diesen sechs Gleichungen hat man dadurch, daß man von den lothrechten Seiten ihre Ergänzungen genommen hat, den Vortheil erreicht, daß die gesuchten Größen durch lauter Cosinus und die gegebenen in den

drei ersten Gleichungen durch lauter Sinus und in den übrigen, durch lauter Cotangenten ausgedruckt werden. Unterscheidet man nun die Theile des rechtwinkligen Dreieckes mit Weglassung des rechten Winkels bei C so von einander, daß man die gegebenen Stücke, welche nicht unmittelbar an den gesuchten Stücken liegen, indem zwischen jenen und diesen noch eine Seite oder ein Winkel befindlich ist, durch den Ausdruck getrennte Größen; diejenigen gegebenen Stücke aber, welche unmittelbar an dem gesuchten liegen, ohne daß zwischen jenen und diesem ein Winkel oder eine Seite befindlich ist, durch den Ausdruck anliegende Größen und nennt man alsdann das gesuchte Stück selbst die mittlere Größe; so ergibt sich für alle Gleichungen rechtwinkliger sphärischer Dreiecke folgende Hauptregel: Der Cosinus der mittlern Größe ist dem Producte aus den Sinus der getrennten Größen und dem Producte aus den Cotangenten der anliegenden Größen gleich. Diese Regel wird von ihrem Erfinder die Neper'sche Regel genannt.

§. 74.

Da nun die Regeln zur Auflösung rechtwinkliger Dreiecke vorgetragen sind; so muß man nun noch auf den Umstand Rücksicht nehmen, daß zu ungleichen Winkeln dieser Dreiecke nicht selten gleiche trigonometrische Linien gehören, wenn gleich überall die Voraussetzung zum Grunde liegt, daß die Winkel nicht größer als zwei Rechte sein dürfen. Nach den Vorschriften der Auflösungen aber erhält man bei allen Dreiecken einen

Proportionalatz, in welchem die drei ersten Glieder völlig bekannt sind. Daher muß man an die gegebenen Stücke zugleich die zufälligen Bedingungen ihre Lage und Beschaffenheit knüpfen, selbige durch die vorgesezten Vorzeichen $+$ oder $-$ ausdrücken und daraus das Vorzeichen des vierten Gliedes bestimmen. Auf diese Art wird die Zweideutigkeit in den meisten Fällen glücklich gehoben, nur in einem Falle ist es noch ungewiß, wie der Bogen beschaffen sein muß und dieser findet alsdann Statt, wenn das vierte Glied ein Sinus und zwar der Sinus der Hypothenuse ist und diese aus zwei gegenüber liegenden Stücken, den rechten Winkel nicht mitgerechnet, und der in den folgenden Untersuchungen immer aus der Acht gelassen werden soll, zu bestimmen ist. Der Grund davon ist der, weil der in (S. 57.) angeführte Satz — nach welchem, aus zwei Winkeln und einer Seite, zwei und nicht ein Dreieck bestimmt werden kann, wenn nemlich die Seite, dem einen der gegebenen Winkel, gegenüber liegt — auch, auf das rechtwinklige Dreieck ausgedehnt ist. Zu mehrerer Deutlichkeit darf man nur noch die beiden rechtwinkligen sphärischen Dreiecke (Fig. 40.) PBD und pBD betrachten. In beiden ist $\angle P = p$, $\angle BDP = BDP = R$ und $BD = BD$ welche den Winkeln P und p gegenüberliegt, aber darum sind die beiden $\triangle$ sehr verschieden, wenn $pD \neq PD$ ist.

Um nun zunächst die vorigen Fälle leichter zu bestimmen, muß man diejenigen Umstände erwägen, durch welche man einen gewissen Zusammenhang zwischen den Seiten und Winkeln sphärischer rechtwinkliger Dreiecke in Hinsicht ihrer gegenseitigen durch, die trigonometri-

schen Linien herzuleitenden Lage und Beziehungen, zu entdecken im Stande ist.

§. 75.

Aus den oben angeführten Eigenschaften der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, läßt sich zwischen den lothrechten Seiten und den ihnen gegenüber liegenden Winkeln eine solche Verbindung entdecken, daß sie in Hinsicht ihrer Art durch einander bestimmt werden, so, daß in einem solchen Dreiecke die beiden lothrechten Seiten, mit den ihnen gegenüberliegenden Winkeln, allemahl von gleicher Gattung sind.

Erläuterung. Die lothrechten Seiten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks sind mit den ihnen gegenüber liegenden Winkeln von gleicher Gattung, heißt nicht, daß sie einander gleich, sondern daß die beiden mit einander zu vergleichenden Stücke $>$ oder $<$ oder $= 90^\circ$ sind. Ist aber das eine der beiden gedachten Stücke $> 90^\circ$ und das andre $< 90^\circ$ oder umgekehrt, so nennt man solche Theile des $\triangle$, Winkel oder Seiten von ungleicher Gattung. Ist z. B. (Fig. 34.) $a = 35$ und $b = 76^\circ$ oder $a = 97^\circ$ und $b = 112^\circ$, so sind es Seiten von gleicher Gattung; ist aber $a = 76^\circ$ und $b = 118^\circ$, so nennt man sie Seiten von ungleicher Gattung.

Der angeführte Satz heißt demnach so viel: ist (Fig. 34.) die Seite $a < 90^\circ$ oder $a > 90^\circ$; so ist auch der $\angle A > 90^\circ$ oder $\angle A < 90^\circ$. Dasselbe gilt von b und B. Aus (§. 68.) erhellet noch die Richtigkeit folgender Proportion; $1 : \sin b = \tan A : \tan a$. Hier

aus folgt, daß $r : \tan a = \sin b : \tan A$. Zur völligen Gleichheit der Producte wird nun auch erfordert, daß sie gleiche Vorzeichen haben. Hierbei erwäge man nun, daß die trigonometrischen Linien allemahl zu Bogen gehören, die nicht größer als 180° sind, daß so wohl die Seiten als Winkel eines sphärischen Dreieckes durch Grade angegeben werden können und daß alle trigonometrische Linien im ersten Quadranten, folglich auch der Sinus totus positiv sind.

Nun ist zu beweisen, daß $A < 90^\circ$ ist, wenn $a < 90^\circ$ oder daß $A > 90^\circ$, wenn $a > 90^\circ$ ist. Nun betrachte man die beiden gleichen Producte $r \cdot \tan a$ und $\sin b : \tan A$. Ist nun $a < 90^\circ$, so ist auch $\tan a$ folglich auch $r \cdot \tan a$ weil r immer das Vorzeichen $+$ hat, positiv. Also muß, das Product $\sin b \tan A$ und da der $\sin b$ in den beiden ersten Quadranten positiv bleibt, auch $\tan A$ positiv sein. Ist die Tangente eines Bogens, der nicht größer als 180° ist, positiv, so muß der zu dieser Tangente gehörige Bogen kleiner, als 90° sein.

Ist aber $a > 90^\circ$, so ist $r \tan a$ negativ. Also muß auch $\sin b \tan A$ negativ sein. Allein $\sin b$ ist positiv, folglich muß $\tan A$ und daher das Product negativ, folglich $A > 90^\circ$ sein. Dieselbe Verbindung findet auch zwischen b und B Statt. Daher man nur denselben Beweis mit Vertauschung dieser Größen zu wiederholen hat. Folglich ist jeder Winkel mit der entgegengesetzten Seite von gleicher Gattung.

Zusatz 1. Ist nun $a = 90^\circ$, so ist $r \tan a = \infty$, folglich muß auch $\sin b \tan A = \infty$ sein und da der Bogen immer < 180 ist, so muß $\tan A = \infty$, folglich $A = 90^\circ$. Ist nun auch $b = 90^\circ$, so muß auch $B = 90^\circ$, folglich

folglich das rechtwinklige $\triangle$ gleichschenkelig sein. Von den beiden übrigen Stücken weiß man nur daß sie einander gleich sind.

Zusatz 2. Diesen Satz kann man aus gleichen Gründen auch umkehren und man kann sagen, die Winkel stehen mit ihren respectiven entgegengesetzten Seiten in einer solchen Verbindung, daß jene mit diesen allemal von gleicher Gattung sind. Sucht man also a, b, A oder B aus A und b ; a und B ; a und b ; oder a und b , so kann in Ansehung der gleichen Gattung keine Zweideutigkeit entstehen.

Zusatz 3. Soll aber die Prop. $\text{tg } A : \text{tg } a = r : \sin b$ angewandt werden, um zu untersuchen ob $b >$ oder $< 90^\circ$ ist; so läßt sich dieses aus den gegebenen Stücken a und A nicht bestimmen. Beide sind in der Figur einander entgegen gesetzt, also haben sie gleiche Vorzeichen und sind allemahl von gleicher Gattung. Daher reichen diese Data nicht zu, daraus zu schließen, ob $b >$ oder $< 90^\circ$ sei. Diese Zweideutigkeit rührt davon her, daß sich aus zwei Winkeln und einer Seite, welche einem der gegebenen Winkel gegenüber steht, nicht ein Dreieck bestimmen läßt.

§. 76.

In einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, stehen die lothrechten Seiten mit der Hypothenuse in einer solchen Verbindung, daß die Hypothenuse kleiner oder größer als 90° ist, je nachdem die Seiten von gleicher oder ungleicher Art sind.

Denn aus der Proportion $r : \cos a = \cos b : \cos c$ folgt, $\cos a \cdot \cos b = r \cdot \cos c$. Sind a und b von gleicher

Gattung, so haben $\cos a$ und $\cos b$ beide das Vorzeichen $+$, weil $+\cos a \times +\cos b = +\cos a \cos b$ und $-\cos a \times -\cos b = +\cos a \cos b$, also muß alsdann auch $r \cos c$ positiv, folglich $\cos c$ positiv und also c d. i. die Hypothenuse $< 90^\circ$ sein. Sind a und b von ungleicher Gattung, so ist ihr Product $\cos a \cos b$ folglich auch $r \cos c$ also $\cos c$ negativ. Alsdann aber ist $c > 90^\circ$.

Zusatz 1. Ist der Bogen a oder b einem Quadranten gleich, so ist der zugehörige Cosinus $= 0$ und hieraus folgt, daß auch $\cos c = 0$, also daß $c = 90^\circ$ sei.

Zusatz 2. Untersucht man aber die Beschaffenheit des vierten Proportionalgliedes, wenn $\cos a : r = \cos A : \sin B$ oder wenn $\cos b : r = \cos B : \sin A$; so bleibt es in beiden Proportionen unausgemacht, ob der Sinus zu einem spitzen oder stumpfen A ; oder zu einem spitzen oder stumpfen B gehöre (74. Zus. 5.).

Zusatz 3. Aus den eben angeführten Proportionen erhellet auch, daß die lothrechten Seiten von gleicher oder ungleicher Gattung sind, je nachdem die Hypothenuse kleiner oder größer als 90° ist.

§. 77.

In einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, steht die Hypothenuse mit den an ihr anliegenden Winkeln in einer solchen Verbindung, daß wenn beide gleicher oder ungleicher Art sind, sie im ersten Falle kleiner, im andern aber größer, als 90° ist.

Denn es verhält sich $r : \cot A = \cot B : \cos c$. (73. Nr. 6.) Aus dieser Proportion folgt, daß $\cot A \cot B = r \cos c$.

Sind die Winkel A und B von gleicher Gattung, so haben sie beide das Vorzeichen + oder —, in beiden Fällen wird das Product $\cot A \cot B$, folglich auch $r \cos c$ daher auch $\cos c$ positiv, also $c < 90^\circ$.

Zusatz 1. Ist einer, der an der Hypothenuse anliegenden Winkel 90° , so ist die Hypothenuse selbst auch 90° . Denn ist A oder $B = 90^\circ$, so sind deren Cotangenten $= 0$ und $\cos c = 0$, ein Bogen dessen Cosinus $= 0$ ist, beträgt, wegen obiger Einschränkung $= 90^\circ$, also ist $c = 90^\circ$.

Zusatz 2. Aus der angeführten Proportion aber folgt auch, daß die beiden an der Hypothenuse anliegenden Winkel, von gleicher oder ungleicher Gattung sind, je nachdem die Hypothenuse kleiner oder größer, als 90° ist. Denn es ist $r : \cot A = \cot B : \cos c$, folglich $r \cos c = \cot A \cot B$. Ist also das Product $r \cos c$ folglich $\cos c$ positiv, so muß auch das Product $\cot A \cot B$ positiv, folglich A und B von gleicher Gattung sein. Ist aber $\cos c$ negativ, so ist auch das Product $\cot A \cdot \cot B$ folglich einer der beiden Cotangenten positiv, der andere negativ und also auch einer der beiden Winkel $>$ der andere $< 90^\circ$, folglich beide von ungleicher Gattung.

Zusatz 3. Ist die Hypothenuse $c = 90^\circ$, so ist $r \cos c = 0$, also auch $\cot A \cot B = 0$, folglich muß A oder $B = 90^\circ$ sein.

Man siehet also hieraus, daß sich in allen übrigen Fällen das gesuchte Stück aus den gegebenen, der Art nach leicht bestimmen läßt, nur der Fall ist der Zweideutigkeit unterworfen, wo das gesuchte Stück ein Sinus, und dieser aus zwei einander gegenüber liegenden Stücken im rechtwinkligen Dreiecke herzuleiten ist.

§. 78.

Es folgt nun eine Uebersicht der Aufgaben rechtwinkliger sphärischer Dreiecke mit Rücksicht auf die Bestimmungen, nach welchen das gesuchte Stück entweder kleiner oder größer, als 90° ist. Zur Auflösung einer jeden Aufgabe werden, den rechten Winkel mit eingeschlossen drei Stücke gegeben, und drei gesucht. In nachstehendem Verzeichnisse enthält der erste Spalt, die gegebenen, der zweite, die gesuchten Stücke. In dem dritten Spalt ist der Cosinus des gesuchten Stückes nach Beschaffenheit der gegebenen entweder durch das Product der Sinus oder der Cotangenten ausgedruckt, je nachdem die Factoren dieses Products, von der gesuchten Größe im Dreiecke getrennt sind oder an derselben anliegen. Im vierten ist die vorige Gleichung nach sehr einfachen arithmetrischen Veränderungen zur bequemen Berechnung eingerichtet. In dem fünften wird bestimmt, ob das gefundene Stück, es sei eine Seite oder ein Winkel, kleiner oder größer als 90° ist, oder ob der vorliegende Fall unbestimmt bleibt. Ueberall bezeichnet R den rechten Winkel im sphärischen Dreiecke und r den Halbmesser.

stücke vorkommen können.

Die ge. Stück gegebene Gleichung Stücke wenn	Das gesuchte Stück ist in jeder Gleichung $< 90^\circ$; wenn
A wenn c von gleich R ung sind.	$A > 90^\circ$ oder wenn A und c $> 90^\circ$ sind.
B wenn c von gleicher R Art sind.	$b > 90^\circ$ ist; oder wenn c und A von ungleicher Art sind.
c gleicher Art a oder wenn R . Art sind.	c und a von ungleicher Art sind $A > 90^\circ$ ist; oder wenn c und a von ungleicher Art sind.
c gleicher Art b R . Art sind.	b und c von ungleicher Art sind $b > 90^\circ$ ist b und c von ungleicher Art sind.
a oder wenn B der Art sind R	$a > 90^\circ$ ist a und B von ungleicher Art sind $c > 90^\circ$ ist.
A b . Art sind R	$A > 90^\circ$ ist A und b von ungleicher Art sind $b > 90^\circ$ ist.
a b R l. G. sind.	$a > 90^\circ$ ist $b > 90^\circ$ ist a und b von ungleicher Art sind.
A B R l. G. sind.	$A > 90^\circ$ ist $B > 90^\circ$ ist a und b von ungl. G. sind.
A a R	Fällen bleibt das gesuchte Stück unbe-
B b R	st.

Tabellarische Uebersicht

der gegebenen und gesuchten Stücke, welche bei einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke vorkommen können.

Die gegebenen Stücke	Die gesuchten Stücke	Verbindung der gegebenen und gesuchten Stücke nach der Neper'schen Regel	Einrichtung der vorigen Gleichungen zur Berechnung der gesuchten Stücke aus den gegebenen	Das gesuchte Stück ist in jeder Gleichung $< 90^\circ$, wenn	Das gesuchte Stück ist in jeder Gleichung $< 90^\circ$; wenn
A c R	a b B	$\cos(90^\circ - a) = \sin c \cdot \sin A : r$ $\cos A = \cot(90^\circ - b) \cdot \cot c : r$ $\cos c = \cot A \cdot \cot B : r$	$\sin a = \sin A \cdot \sin c : r$ $\tan b = \cos A \cdot \tan c : r$ $\cot B = \cos c \cdot \tan A : r$	$A < 90^\circ$ oder wenn A und c von gleicher Gattung sind.	$A > 90^\circ$ oder wenn A und c $> 90^\circ$ sind.
B c R	b a A	$\cos(90^\circ - b) = \sin B \cdot \sin c : r$ $\cos B = \cot c \cdot \cot(90^\circ - a)$ $\cos c = \cot A \cdot \cot B$	$\sin b = \sin B \cdot \sin c : r$ $\sin a = \cos B \cdot \tan c : r$ $\cot A = \cos c \cdot \tan B : r$	$B < 90^\circ$ oder wenn c und B von gleicher Art sind	$b > 90^\circ$ ist; oder wenn c und A von ungleicher Art sind.
c a R	b A B	$\cos c = \sin(90^\circ - a) \cdot \sin(90^\circ - b) : r$ $\cos(90^\circ - a) = \sin A \cdot \sin c : r$ $\cos B = \cot(90^\circ - a) \cdot \cot c : r$	$\cos b = r \cdot \cos c \cdot \cos a$ $\sin A = r \cdot \sin a : \sin c$ $\cos B = \tan a \cdot \cot c : r$	c u. a von gleicher Art $A < 90^\circ$ ist oder wenn c u. a von gl. Art sind.	c und a von ungleicher Art sind $A > 90^\circ$ ist; oder wenn c und a von ungleicher Art sind.
c b R	a A B	$\cos c = \cos(90^\circ - a) \cdot \cos(90^\circ - b) : r$ $\cos A = \cot(90^\circ - b) \cdot \cot c : r$ $\cos(90^\circ - b) = \sin B \cdot \sin c : r$	$\sin a = r \sin b : \cos c$ $\cos A = \tan b \cdot \cot c : r$ $\sin B = r \cdot \sin b : \sin c$	b u. c von gleicher Art $b < 90^\circ$ ist b u. c von gl. Art sind.	b und c von ungleicher Art sind $b > 90^\circ$ ist b und c von ungleicher Art sind.
a B R	A b c	$\cos A = \sin B \cdot \sin(90^\circ - a) : r$ $\cos(90^\circ - a) = \cot B \cdot \cot(90^\circ - b) : r$ $\cos B = \cot(90^\circ - a) \cdot \cot c : r$	$\cos A = \cos a \cdot \sin B : r$ $\tan b = \sin a \cdot \tan B : r$ $\cot c = \cos B \cdot \cot a : r$	$a < 90^\circ$ ist oder wenn a u. B gleicher Art sind $B < 90^\circ$ ist.	$a > 90^\circ$ ist a und B von ungleicher Art sind $c > 90^\circ$ ist.
A b R	a c B	$\cos(90^\circ - b) = \cot A \cdot \cot(90^\circ - a) : r$ $\cos A = \cot(90^\circ - b) \cdot \cot c : r$ $\cos B = \sin A \cdot \sin(90^\circ - b) : r$	$\tan a = \sin b \cdot \tan A : r$ $\cot c = \cos A \cdot \cot b : r$ $\cos B = \sin A \cdot \cos b : r$	$A < 90^\circ$ ist A u. b von gl. Art sind $b < 90^\circ$ ist	$A > 90^\circ$ ist A und b von ungleicher Art sind $b > 90^\circ$ ist.
a b R	A B c	$\cos(90^\circ - b) = \cot A \cdot \cot(90^\circ - a) : r$ $\cos(90^\circ - a) = \cot(90^\circ - b) \cdot \cot B : r$ $\cos(90^\circ - c) = \sin(90^\circ - a) \cdot \sin(90^\circ - b) : r$	$\cot A = \sin b \cdot \cot a : r$ $\cot B = \sin a \cdot \cot b : r$ $\cos c = \cos a \cdot \cos b : r$	$a < 90^\circ$ ist $b < 90^\circ$ ist a u. b von gl. G. sind.	$a > 90^\circ$ ist $b > 90^\circ$ ist a und b von ungleicher Art sind.
A B R	a b c	$\cos A = \sin B \cdot \sin(90^\circ - a) : r$ $\cos B = \sin A \cdot \sin(90^\circ - b) : r$ $\cos c = \cot A \cdot \cot B : r$	$\sin a = r \cdot \cos A : \sin B$ $\cos b = r \cdot \cos B : \sin A$ $\cos c = \cot A \cdot \cot B : r$	$A < 90^\circ$ ist $B < 90^\circ$ ist A u. B von gl. G. sind.	$A > 90^\circ$ ist $B > 90^\circ$ ist a und b von ungl. G. sind.
A a R	B b c	$\cos A = \sin B \cdot \sin(90^\circ - a) : r$ $\cos(90^\circ - b) = \cot A \cdot \cot(90^\circ - a) : r$ $\cos(90^\circ - a) = \sin A \cdot \sin c : r$	$\sin A = r \cdot \cos B : \cos a$ $\sin b = \tan a \cdot \cot A : r$ $\sin c = r \cdot \sin a : \sin A$	In diesen Fällen bleibt das gesuchte Stück unbe- stimmt.	
B b R	A a c	$\cos(90^\circ - b) = \sin B \cdot \sin c : r$ $\cos(90^\circ - a) = \cot(90^\circ - b) \cdot \cot B : r$ $\cos(90^\circ - b) = \sin B \cdot \sin c$	$\sin b = \sin B \cdot \cos a : r$ $\sin a = \tan b \cdot \cot B : r$ $\sin c = r \cdot \sin b : \sin B$		

Fünfter Abschnitt.

Einige Anwendungen der rechwinkligen sphärischen Dreiecke
auf die Lage der Weltkörper.

§. 79.

Die Polhöhe macht an jedem Orte auf der Erde
mit der Höhe des Aequators 90° .

Denn es stelle (Fig. 14.) HZPRNH einen Mittags-
kreis, HR den Horizont, Z dessen Pol oder das Ze-
nith, A Q den Aequator, P den Westpol vor; so ist
 $AP = 90^\circ$, PR die Polhöhe, AH die Höhe des Aequa-
tors und diese macht mit der Polhöhe zusammen 90° ,
das ist

$$AH + PR = 90^\circ. \text{ Denn es ist}$$

$$AH + AP + PR = 180^\circ$$

$$\quad \quad \quad AP \quad \quad = 90^\circ$$

folglich $AH + AP - AP + PR = 180^\circ - 90^\circ$ oder

$$AH + PR = 90^\circ.$$

Zusatz 1. Ist also in einer Aufgabe die Polhöhe
gegeben, so kennt man auch an diesem Orte die Höhe

des Aequators, und umgekehrt läßt sich aus dieser wieder die Polhöhe bestimmen. Ist z. B. die Polhöhe von Berlin $52^{\circ} 31' 44''$, so ist die Höhe des Aequators $= 89^{\circ} 59' 60'' - 52^{\circ} 31' 44'' = 47^{\circ} 28' 16''$.

Zusatz 2. Das Zenith Z ist vom Horizont überall 90° entfernt, folglich ist $RZ = 90^{\circ}$; allein AP ist auch $= 90^{\circ}$, folglich ist $RZ = AP$; zieht man nun von beiden das Stück PZ ab, so bleibt $AZ = PR$. Jener Bogen AZ drückt den Abstand des Punctes Z vom Aequator durch einen Theil des größten Kreises aus, welchen man die Breite nennt; dieser PR, ist die Polhöhe. Also ist die Polhöhe so groß, als die Breite eines Ortes, und man kann die eine für die andere setzen.

§. 80.

Aufgabe. Aus der Mittagshöhe der Sonne und ihrer Abweichung, die Polhöhe eines Orts auf der Erde zu finden.

Man ziehe von der durch Beobachtung gefundenen Mittagshöhe der Sonne HE (Fig. 35.) die gegebene Declination ME ab, so erhält man aus dieser Differenz die Höhe des Aequators durch den Bogen MH, welche von 90° abgezogen die Polhöhe PR gibt.

Anmerkung 1. Bei Beobachtung der Mittagshöhe der Sonne, muß der Abstand ihres obern und untern Rands bemerkt und der Halbmesser dazu addirt, oder davon abgezogen werden; auch muß man dabei auf die Strahlenbrechung Rücksicht nehmen, wodurch die Sterne etwas mehr oder weniger erhöht werden, je nachdem sie dem Horizonte näher oder von demselben entfernt sind. Statt

der Sonne kann man auch Sterne nehmen. — Eine andere Auflösung dieser Aufgabe ist schon in der Anmerkung des (29.) vorgekommen.

Anmerkung 2. Für südliche Sterne müssen die Abweichungen als negativ angesehen und zur Höhe des Aequators addirt werden. Es sei z. B. die Mittagshöhe des obern

$$\begin{array}{r} \text{Sonnenrades} = 42^{\circ} \ 1' \ 57'' \\ \text{Strahlenbrechung} = \quad \quad 55'' \end{array}$$

$$= 42^{\circ} \ 1' \ 2''$$

$$\text{Abziehender Halbmesser der Sonne} = \quad \quad 15' \ 59''$$

$$\text{Scheinb. Höhe des Mittelp. der Sonne} = 41^{\circ} \ 45' \ 3''$$

$$\text{Nördl. Abw.} = \quad \quad 3^{\circ} \ 17' \ 19''$$

$$\text{Höhe des Aequators} = 38^{\circ} \ 27' \ 44''$$

$$\text{Also die Polhöhe} = 51^{\circ} \ 32' \ 16''$$

Durch wiederholentliche Beobachtungen aber wurde diese Polhöhe von Göttingen, durch Herrn Professor Mayer in der Folge berichtigt und auf $51^{\circ} \ 31' \ 54''$ gesetzt. Man sehe Kästner's Anfangsgründe der Astronomie, 4te Aufl. Göttingen 1792. S. 68. T. 28.

Zusatz. Es ist leicht einzusehen, daß sich aus der Polhöhe eines Orts und der Abweichung der Sonne, ihre Mittagshöhe finden läßt, wenn man zu der Aequatorhöhe die Abweichung der Sonne addirt. Es sei z. B. die nördliche Abweichung der Sonne im ersten Quadranten $= 19^{\circ} \ 14' \ 6''$ und die Polhöhe eines Ortes

$$52^{\circ} \ 31' \ 44'', \text{ so nehme}$$

$$\text{man } 89^{\circ} \ 59' \ 60''$$

$$\text{Polhöhe} = 52^{\circ} \ 31' \ 44''$$

$$\text{Höhe des Aequators} = 37^{\circ} \ 28' \ 16''$$

$$\text{Abweichung} = 19^{\circ} \ 14' \ 6''$$

$$\text{Mittagshöhe der Sonne} = 56^{\circ} \ 42' \ 22''.$$

§. 81.

Ehe ich zu den weitem Anwendungen der bisherigen Lehren der sphärischen Trigonometrie übergehe, werde ich zu dieser Absicht noch die Längen und Breiten einiger Derter auf der Oberfläche der Erde anführen. Man kann diese Angaben zur Beantwortung verschiedener geographischen Fragen und zur Auflösung mancherlei Aufgaben benutzen. Will man zum Beispiel wissen, um wie viel an einem Orte, etwa in Paris, früher oder später, Mittag ist als in Petersburg, so darf man nur die Differenz ihrer Längen in Zeit verwandeln. Die Länge von Paris ist 20° , von Petersburg $47^{\circ} 59' 30''$, die Differenz ist also $27^{\circ} 59' 30''$, welche in Zeit verwandelt 1 St. 23 M. 28 Sec. gibt. Das hier folgende Verzeichniß der Längen und Breiten ist größtentheils aus Herrn Prof. Bode's Anleitung zur allgemeinen Kenntniß der Erdkugel hergenommen.

Die Länge der hier angeführten Derter ist mit den Franzosen und den meisten Geographen von der Insel Ferro, der westlichsten unter den Canarischen Inseln, von einem Meridian, der genau um 20° westlicher liegt, als der von der Pariser Sternwarte, gerechnet.

N a m e der O r t e r.	L ä n g e.	B r e i t e.	Bemerkungen.
Alexandrien .	47° 35' 30"	31° 15' 5 N.	
Amsterdam .	22 31 48	52 22 5	
Archangel .	56 39 15	64 33 30	
Astrachan .	65 42 30	46 21 12	
Barcelona .	19 50 25,5	41 22 38 N.	B. H. B. H. v. Humboldt
Bagdad . .	62 2 30	33 19 40	
Batavia . .	124 33 46	6 12 0 S.	
Berlin . . .	31 2 15	52 31 44 N.	
Boston . . .	306 41 0	42 21 11	
Buenos Ayres	319 8 45	34 35 26 S.	
Cadix . . .	11 22 30	36 32 0 N.	Vorgeb. d. g. Hoffnung.
Constantinopel	46 35 0	41 1 27	
St. Croix auf			
Teneriffa . .	1 26 55	v. H. 28 28 30	Nach Vorda.
Danzig . . .	36 17 45	54 21 5 N.	Sternwarte
Dronheim . .	28 2 0	63 26 2	
Dublin . . .	11 21 45	53 21 11	
Edinburg . .	14 22 30	55 36 42	
Genua . . .	26 38 0	44 23 48	
bei Gotha . .	28 23 45	50 36 17	Sternwarte
Göttingen . .	27 34 30	51 31 54	
Grönwich . .	17 39 45	51 28 40	
Hamburg . . .	27 33 45	53 34 8	
Japan . . .	69 30 0	32 24 34	
Kopenhagen .	30 15 30	55 51 4	
Leipzig . . .	30 1 30	51 19 14	Sternwarte
Lissabon . . .	8 31 18	38 42 50	
London . . .	17 34 14	51 30 49	Pauls. Kirche
Madrid . . .	13 57 40	40 25 18	
Malta . . .	32 10 30	35 53 41	
Manilla . . .	138 32 0	14 36 8	Sternwarte
Manheim . . .	26 7 30	49 28 39	
Marseille . .	23 1 45	43 17 49	
Mexico . . .	277 34 15	19 25 50	
Moskau . . .	55 12 45	55 45 45	
Rangasaki in Ja-			
pan . . .	147 35 0	32 45 0	berichtigt
Neapolis . . .	31 53 45	40 50 15	
Paris . . .	20 0 0	48 30 14	Nat. Sternw.
Pekin . . .	134 5 30	39 51 15	d. d. Sternw.
Petersburg . .	47 59 30	59 56 25	d. d. Sternw.
Peter u. Pauls-			
hagen . . .	176 28 15	53 1 20	in Kamt- schatka
Philadelphia .	302 25 45	39 56 55	
Pondichery . .	97 31 30	11 55 41	

N a m e der O r t e r.	L ä n g e.	B r e i t e.	Bemerkungen.
Port Jackson	168° 59' 30"	33° 52' 30" S.	Neuholland
Prag . . .	32 4 50	50 5 18,1 N.	Von H. A. David
Quito . . .	299 45 0	0 13 17 S.	
Riga . . .	41 40 30	56 57 5,1 N.	Vom H. Fr. Sandt
Rom . . .	30 7 40	41 53 54 N.	St. Peter in Californien
San Joseph .	267 57 30	23 3 42	
Simyrna . .	44 55 38	38 28 7	
Stockholm .	35 43 45	59 20 31	
Tabago . .	317 12 30	10 20 13 N.	Nach Herrn v. Humboldt
Tahiti . . .	228 9 30	17 29 17 S.	Venusspitze
Teneriffa . .	1 0 0	28 17 0 N.	
Tornea . . .	41 52 0	65 50 50	
Turin . . .	25 20 0	45 4 14	
Upsal . . .	35 18 15	59 51 50	
Venedig . .	30 0 45	45 25 35	
Warschau . .	38 40 45	52 12 28	
Wien . . .	34 2 30	48 12 36	d. d. Sternw.

Anmerkung. Durch die Bestimmung der Länge und Breite eines Ortes, erhält man eine deutliche Vorstellung von dessen Lage auf der Erde. Man hat verschiedene Methoden, zur Kenntniß der Längen zu gelangen, die aber alle mehr oder weniger unsicher sind. Hätte man eine vollkommenere Uhr, deren Gang durch keine Erschütterungen noch auf irgend eine andere Art gestört würde; so wäre diese ein sehr brauchbares Werkzeug, die Länge der verschiedenen Oerter auf der Erde anzugeben. Gesezt diese Uhr zeigt im Augenblicke wo zu Berlin Mittag ist, auf 12, so wird dieses an jedem andern Tage auch geschehen. Ist man nun an einem andern Ort, wo diese Uhr zur Mittagszeit auf 1 weist; so schließt man daraus, daß der Unterschied der Zeit zwischen diesem Ort und Berlin eine Stunde und der Unterschied ihrer Meridiane 15° betrage, folglich daß die Länge des gedachten Ortes 16° 2' 15" sei, weil die Länge von Berlin 31° 2' 15" ist. Vorzüglich wichtig ist die Kenntniß der Länge und Breite zur See.

Daher haben der König Philipp IV. in Spanien, die niederländische Republik, der Herzog von Orleans, Regent von Frankreich, auf die Auflösung dieser Aufgabe ansehnliche Belohnungen gesetzt. England aber setzte einen dreifachen Preis darauf, nemlich 10000, 15000 und 20000 Pfund Sterling, wenn der Irrthum in Bestimmung der Länge nicht über einen Grad, oder 40 oder 30 Minuten betrage. Einen Theil dieses Preises erhielt Joh. Harrison, der zu Barrow in Lincoln wohnte, wegen der von ihm verfertigten Uhr, deren Anordnung und Zusammenfügung de la Lande in seiner Astronomie Art. 1921 beschreibt. Man sehe hierüber die Abhandl. der Königl. Schwed. Akad. der Wiss. 1765, übersetzt von K., von S. 1 bis 18. Andere Methoden zur Bestimmung der Längen, gründen sich auf die Beobachtung der Mondfinsternisse, der Finsternisse des Jupiters Trabanten, des Mondes und der Bedeckungen der Fixsterne, auf die Einrichtung der Magnetnadel ic.

§. 82.

Aufgabe. Aus der Schiefe der Ekliptik und der Länge der Sonne, ihre Abweichung, gerade Aufsteigung und die Größe des Winkels zu bestimmen, der von der Sonnenbahn und dem Abweichungskreise auf der Himmelskugel gebildet wird.

Man stelle sich vor MQ (Fig. 36.) sei der Halbkreis des Aequators, EK die Hälfte der Ekliptik auf der Himmelskugel, A der erste Durchschnittspunct (der Frühlingspunct) der beiden gedachten Kreise und ziehe alsdann einen Abweichungskreis PBp durch B, welcher den Aequator senkrecht durchschneidet; so erhält man dadurch das rechtwinklige Dreieck ABC, dessen Theile

mit den gleichnamigen Theilen des sphärischen rechtwinkligen Dreiecks (Fig. 33.) genau übereinstimmen. In dem $\triangle ABC$ (Fig. 36.) bezeichnet nun $AB = c$ die Länge der Sonne, der $\angle BAC$ die Schiefe der Ekliptik; hieraus soll nun 1) die Abweichung $BC = a$, 2) die gerade Aufsteigung $AC = b$ und 3) der Winkel ABC gefunden werden, welchen der Bogen BC mit dem Bogen AB als der Länge der Sonne einschließt.

Beispiel 1. Es sei z. B. die Länge der Sonne $AB = c = 2 \text{ Z. } 6^\circ 34'$ oder $66^\circ 34'$, die Schiefe der Ekliptik BAC oder $A = 23^\circ 28'$; so erhält man 1) ihre Abweichung, d. i. die gesuchte Seite $BC = a$ nach (67.) aus der Prop. $r : \sin c = \sin A : \sin a$, folglich $\sin a = \frac{\sin A \cdot \sin c}{r}$. Hiervon ist die logarithmische Gleichung

$\log \sin a = \log \sin A + \log \sin c - 10$, weil 10 der Logarithmus des Sinus totus in den Tabellen ist. Es ist aber

$$\log \sin A = \log \sin 23^\circ 28' = 9,6001181$$

$$\log \sin c = \log \sin 66^\circ 34' = 9,9626172$$

$$19,5627353$$

$$\log \sin \text{tot} = 10,0000000$$

$$\log \sin a = 9,5627353.$$

Zu diesem Logarithmus gehört zunächst die Zahl $21^\circ 25'$ welches die Länge des Bogens BC als der gesuchten Seite, für die Abweichung der Sonne ist.

2) Soll aus den obigen Angaben dem $\angle A$ und der Seite $AB = c$, die gerade Aufsteigung d. i. $AC = b$ gefunden werden. Diese erhält man nach der Rep. Regel aus der Gleichung $\cos A = \cot (90 - b) \cdot \cot c$ (74. No. 4.)

oder $\cos A = \tan b \cdot \cot c$, folglich $\tan b = \cos A \cdot \tan c$.

$\tan b = \frac{\cos A \cdot \tan c}{r}$. Hiervon ist die logar. Gleichung

$\log \tan b = \log \cos A + \log \tan c - 10$. Es ist aber

$$\log \cos A = \log \cos 23^\circ 28' = 9,9625076$$

$$\log \tan c = \log \tan 66^\circ 34' = 10,5630815$$

$$\underline{20,5255891}$$

$$\log \sin \text{ tot} = 10,0000000$$

$$\log \tan b = 10,5255891.$$

Zu diesem Logarithmus gehört zunächst die Zahl $64^\circ 42'$ für die Länge der Seite b , welche die gerade Aufsteigung der Sonne ist.

3) Findet man aus dem $\angle A$ und der Seite $AB = c$, den $\mathcal{W}$. ABC oder B nach der Neper'schen Regel aus der Gleichung $\cos c = \cot A \cdot \cot B$ (75. No. 6.) oder

$$\cot B = \frac{\cos c}{\cot A} = \cos c \cdot \tan A \text{ oder } \cot B = \frac{\cos c \cdot \tan A}{r}.$$

Hiervon ist die logarithmische Gleichung $\log \cot B = \log \cos c + \log \tan A - 10$. Es ist aber

$$\log \cos c = \log \cos 66^\circ 34' = 9,5995357$$

$$\log \tan A = \log \tan 23^\circ 28' = 9,6376106$$

$$\underline{19,2371463}$$

$$\log \sin \text{ tot} = 10,0000000$$

$$\log \cot B = 9,2371463.$$

Zu diesem Logarithmus gehört die Zahl von $80^\circ 12'$, welche die Größe des gesuchten Winkels B angibt.

Beispiel 2. Es sei nun nach den Berliner Ephemeriden, am 9ten Jan. 1810 die Länge der Sonne $AB = c = 2^\circ Z$, $17^\circ 52' 47''$ in den II. d. h. $77^\circ 52' 47''$

und die Schiefe der Ekliptik $A = 23^\circ 27' 51''$; so erhält man 1) die Abweichung aus der Proportion

$$r : \sin c = \sin A : \sin a \quad (66.)$$

$$\sin a = \frac{\sin A \cdot \sin c}{r}. \quad \text{Hiervon ist die log. Gleichung}$$

$$\log \sin a = \log \sin A + \log \sin c - 10. \quad \text{Es ist aber}$$

$$\log \sin A = \log \sin 23^\circ 27' 51'' = 9,6000744$$

$$\log \sin c = \log \sin 77^\circ 52' 47'' = 9,9902096$$

$$\hline 19,5902840$$

$$\log \sin \text{tot} = 10,0000000$$

$$\log \sin a = 9,5902840.$$

Dazu gehört die Zahl von $22^\circ 54' 39''$, welche die verlangte Abweichung der Sonne ist.

2) Aus den eben gegebenen Stücken soll nun auch die gerade Aufsteigung d. i. der Bogen des Aequators $AC = b$ vom Frühlingspuncte A an, bis zum Abweichungskreise gerechnet, angegeben werden. Es sind also A und c gegeben und b wird gesucht. Nach der Nep. Regel wird

$$\cos A = \cot c \cdot \cot (90 - b) \quad (74. \text{ No. 4.}) \text{ gefunden, oder}$$

$$\cos A = \cot c \cdot \tan b$$

$$\tan b = \frac{\cos A}{\cot c} = \cos A \cdot \tan c. \quad \text{Logarithmisch ausgedrückt, ist}$$

$$\log \tan b = \log \cos A + \log \tan c + 10.$$

$$\log \cos A = \log \cos 23^\circ 27' 51'' = 9,9625158$$

$$\log \tan c = \log \tan 77^\circ 52' 47'' = 10,6680636$$

$$\hline 20,6305794$$

$$\log \sin \text{tot} = 10,0000000$$

$$\log \tan b = 10,6305794, \text{ folglich}$$

$$b = 76^\circ 49' 25''.$$

3) Soll aus den obigen Datis auch die Größe des Winkels ABC bestimmt werden, welcher von den Bogen $AB=c$ und $BC=a$ der Sonnenbahn und des Abweichungskreises auf der Himmelskugel abgebildet wird. Es sind also A und c gegeben und B wird gesucht. Es ist aber nach der Rep. Regel (73. No. 6.)

$$\cos c = \cot A \cdot \cot B \text{ oder}$$

$$\cot B = \cos c \cdot \tan A \text{ oder}$$

$$\cot B = \frac{\cos c \cdot \tan A}{r}, \text{ oder logarithmisch ausgedr}$$

druckt ist

$$\log \cot B = \log \cos c + \log \tan A - 10. \text{ Es ist aber}$$

$$\log \cos c = \log \cos 77^\circ 52' 47'' = 9,3221460$$

$$\log \tan A = \log \tan 23^\circ 27' 51'' = 9,6375587$$

$$18,9597047$$

$$\log \cot B = 10,0000000$$

$$8,9597047,$$

folglich $B = 84^\circ 48' 33''$.

Zusatz 1. Wenn man die Theile des rechtwinkligen Dreieckes mit einander vergleicht, so wird man bald bemerken, daß die Seiten und Winkel folgende Stücke bezeichnen können: die Schiefe der Ekliptik, die Länge, die Abweichung, die gerade Aufsteigung der Sonne und den Winkel, welchen die Sonnenbahn mit dem Abweichungskreise einschließt und daß diese fünf Stücke in einer solchen Verbindung mit einander stehen, daß aus zweien derselben, allemahl eines von den beiden übrigen berechnet werden kann.

Zusatz 2. Zieheth man durch den Sonnenstillstandspunct einen größten Kreis senkrecht auf den Aequator; so wird der Abstand beider Kreise, nemlich des Aequa-

tors und der Ekliptik von demselben gemessen und dieser Bogen drückt die Abweichung der Sonne aus, wenn sie sich im Sommerpuncte befindet. Er ist also zugleich das Maß für die Schiefe der Ekliptik.

Zusatz 3. Man muß bei dieser Aufgabe noch allemal auf die Stellung der Sonne Rücksicht nehmen und bemerken, zwischen welchen Parallelfreisen sie sich befindet, ob zwischen dem Aequator und dem Wendekreise des Krebses oder des Steinbockes. In jenem Falle ist ihre Abweichung nördlich und in diesem südlich. Beträgt die gegebene Länge mehr als 90° , so zieht man die Zahl von 180° und sucht den Logarithmen der trigonometrischen Linie des übrig gebliebenen Bogens und daraus die zugehörige Zahl.

Zusatz 4. Gehet die Länge der Sonne über die Frühlingszeichen hinaus und soll alsdann aus ihr und der Schiefe der Ekliptik die gerade Aufsteigung gefunden werden; so muß man anstatt des gegebenen Bogens, dessen Ergänzung zu 180° nehmen. Aus diesem Grunde muß man daher auch die für die gerade Aufsteigung gefundene Zahl von 180° abziehen. Die Länge der Sonne ist am 18ten August 1811 nach den Berliner Ephemeriden 4 Z. $24^\circ 33'$ oder $144^\circ 33'$, wie groß ist ihre gerade Aufsteigung? — Man darf nur die obige Gleichung zur Beantwortung dieser Frage gebrauchen und nach geschעהner Auflösung, nach der in diesem Zusatze gemachten Bemerkung verfahren. Es ist nemlich $180^\circ - 144^\circ 33' = 35^\circ 27'$. Folglich ist

$$\text{tang } b = \frac{\cos A \cdot \text{tang } c}{r}, \text{ d. i. durch Log. } \log \text{ tang } b = \log \cos A + \log c - 10.$$

Es

$$\text{Es ist aber } \cos A = \cos 23^\circ 28' = 9,9625076$$

$$\text{tang } c = \text{tang } 35^\circ 27' = 9,8524661$$

$$19,8149737$$

$$\log \sin \text{ tot} = 10,0000000$$

$$\log \text{ tang } b = 9,8149737$$

Diese Tangente gehört zu einem Bogen von etwa $33^\circ 8'$.
Zieheth man diese Zahl von 180° ab, so erhält man für
die gerade Aufsteigung $146^\circ 52'$.

Zusatz 5. Auf eine ähnliche Art verfährt man
auch, wenn die Sonne sich im dritten oder vierten
Quadranten der Ekliptik befindet, und also in den
Herbst- oder Winterzeichen steht. In jenem Falle
nimmt man von der gegebenen Länge denjenigen Theil,
der über 180° hinausgeheth oder den Bogen von 180°
bis zu dem Standpuncte der Sonne, welcher gefunden
wird, wenn man von der ganzen Länge 180° abziehet.
In diesem Falle hingegen, wo die Sonne sich auf ihrer
Bahn in den Winterzeichen verweilet, darf man nur
die ganze Länge von 360° abziehen, oder mit Weglas-
sung der sechs ersten Zeichen, von der Wage an ge-
rechnet, die Ergänzung zu 180° nehmen.

Es sei z. B. die Schiefe der Ekliptik $23^\circ 28'$, die
Sonne im $25^\circ 41'$ des Schützen, man soll ihre gerade
Aufsteigung am 18ten December 1811, wo sie die ge-
dachte Länge hat, berechnen. Die Länge c ist hier $8 Z$
 $25^\circ 41'$ d. i. $2 Z 25^\circ 41'$ über 180° oder $85^\circ 41'$. Es ist

$$\text{auch hier } \text{tang } b = \frac{\cos A \cdot \text{tang } c}{r} \text{ oder durch Logarithmen}$$

$$\log \text{ tang } b = \log \cos A + \log \text{ tang } c - 10.$$

$$\log \cos A = \log \cos 23^\circ 28' = 9,9625076$$

$$\log \tan c = \log \tan 85^\circ 41' = 10,1221513$$

$$20,0846589$$

$$10,0000000$$

$$\log \tan b = 11,0846589$$

Dieser Logar. gehört zur Tangente von etwa $85^\circ 18'$. Daher ist die gerade Aufsteigung $180^\circ + 85^\circ 18' = 265^\circ 18'$.

Beträgt die Schiefe der Ekliptik $23^\circ 28'$ und macht die Länge der Sonne 10 Z. $23^\circ 55'$ d. i. $323^\circ 55'$ oder mit Weglassung der 6 ersten Zeichen 4 Z. $23^\circ 55'$ d. i. $143^\circ 55'$ und also die Ergänzung dieses Bogens zu 180° , $= 36^\circ 5'$; so findet man die gerade Aufsteigung wieder aus der Gleichung $\tan b = \frac{\cos A \cdot \tan c}{r}$ oder durch

Logarithmen ausgedrückt $\log \tan b = \cos A + \log \tan c - 10$. Nun ist aber

$$\log \cos A = \log \cos 23^\circ 28' = 9,9625076$$

$$\log \tan c = \log \tan 36^\circ 51' = 9,8625887$$

$$19,8250963$$

$$10,0000000$$

$$\log \tan c = 9,8250963$$

Dieser Logarithmus gehört zu einer Tangente von $33^\circ 45'$. Zieht man nun diese Zahl von 360° ab; so erhält man für die gerade Aufsteigung am 15ten Februar 1811 die gedachte Differenz von $346^\circ 14'$.

Anmerkung 1. Die Abweichung der Sonne ist in unsern Gegenden vom Fröhlinge bis zum Herbst auf der nördlichen, vom Herbst bis zum Fröhlinge auf der südlichen Halbkugel des Himmels. Aus der oben angeführten Formel für die Abweichung aus der Länge der Sonne und

Schiefe der Ekliptik, kann man Tafeln berechnen, welche die Abweichungen der Sonne für jeden Punct in ihrer Bahn das ganze Jahr hindurch, darstellen. Man findet sie unter andern im ersten Bande der Berliner Sammlung astronomischer Tafeln, unter der Aufschrift: Die Abweichung der Sonne für die Schiefe der Ekliptik ic.

Anmerkung 2. Aus der Schiefe der Ekliptik und der Länge der Sonne läßt sich ihre gerade Aufsteigung berechnen. Die Differenz zwischen dieser und der Länge der Sonne, wird die Reduction der Ekliptik auf den Aequator genannt. Setzt man diese zur Länge der Sonne, so findet man ihre gerade Aufsteigung. Es findet sich in dem, Anm. 1. angeführten Werke auch eine Tafel für die gedachte Reduction und zwar im ersten Bande S. 268.

Anmerkung 3. Die gerade Aufsteigung der Sonne läßt sich auch aus ihrer Abweichung und der Schiefe der Ekliptik, also aus der Gleichung $\sin b = \cot A \cdot \tan a$ (73. No. 5.) $= \frac{\tan a}{\tan A}$ berechnen. Die größte Abweichung der Sonne beträgt $23^{\circ} 27' 51''$. Diese kann das ganze Jahr hindurch nur zweimahl Statt finden. Jede andere z. B. $a = 18^{\circ} 12'$ ist kleiner und kann also vier, oder doch wenigstens, wenn man die südliche von der nördlichen unterscheidet, zweimahl vorkommen. Daher muß bei der Abweichung noch bemerkt werden, in welchem Quadranten sie sei.

§. 83.

Aufgabe. Aus der durch Beobachtung gefundenen Abweichung und geraden Aufsteigung der Sonne, die Schiefe der Ekliptik zu berechnen.

Es sei an der Himmelskugel PKQpEM (Fig. 36.) MQ der Aequator, EK die Ekliptik, welche den Aequator in A, als im Frühlingspuncte, durchschneidet und

durch den Endpunct C der gegebenen geraden Aufsteigung, ziehe man den Bogen PBC des Abweichungskreisess; so ergibt sich hieraus das sphärische rechtwinklige Dreieck ABC. Die bekannten Stücke dieses Dreieckes sind, die gerade Aufsteigung der Sonne $AC = b$, ihre Abweichung $BC = a$ und überdies der rechte Winkel bei C; aus diesen wird die Schiefe der Ekliptik d. i. der Winkel BAC oder A gesucht. Nach der Neper'schen Regel (73. No. 5.) findet man aus den drei auf einander folgenden Stücken A, b und a, das mittlere b aus den beiden übrigen, vermittlest der trigonometrischen Linien, auf folgende Art:

$$\cos (90 - b) = \cot A \cdot \cot (90 - a) \text{ oder} \\ \sin b = \cot A \cdot \tan a \text{ oder}$$

$\cot A = \frac{\sin b}{\tan a}$ d. h. die Cotangente der Schiefe der Ekliptik A wird gefunden, wenn man den Sinus der geraden Aufsteigung b durch die Tangente der Abweichung dividirt. Man nehme z. B. aus den Berliner Ephemeriden, die Abweichung der Sonne am 9ten Juni 1810 nemlich $a = 22^\circ 54' 59''$ und ihre gerade Aufsteigung $76^\circ 49' 23''$; so erhält man $\cot A = \frac{\sin 76^\circ 49' 23''}{\tan 22^\circ 54' 59''}$ oder durch Logarithmen ausgedruckt, hat man $\log \cot A = 10 + \log \sin 76^\circ 49' 23'' - \log \tan 22^\circ 54' 59''$, wo 10 den Logarithmen des Sinus totus bezeichnet.

$$\log . \sin \text{ tot} + \log . \sin b = 19,9884121$$

$$\log . \tan a = 9,6259699$$

$$\log . \cot A = 10,3624422$$

Folglich $A = 23^\circ 27' 51''$. Diese Zahl gibt also die gesuchte Schiefe der Ekliptik an.

§. 84.

Aufgabe. Aus der Polhöhe eines Ortes und der Abweichung der Sonne, die Länge des Tages und der Nacht, die Morgen- und Abendweite, nebst dem Azimuth zu finden.

I. Es stelle (Fig. 16.) die Lage der Himmelkugel für den Zeitpunkt vor, wo der Stern B im Anfange begriffen sei und in den Horizont HR trete; so ist A der Punct des Aequators, der in diesem Augenblicke culminirt. Während dessen sich nun der Stern vom Horizont bis zum Meridian erhebt, geht bei der Umdrehung der Himmelkugel der Bogen des Aequators CA durch den Meridian. Dieser Bogen stellt den halben Tagbogen vor, dessen doppelte Länge die Dauer des ganzen Tages gibt. Man kann sich den Bogen CA aus $C\alpha$ und αA zusammengesetzt, vorstellen und die Größe beider Theile untersuchen.

Der Meridian geht durch die Weltpole, das Zenith und Nadir, d. h. durch die Pole des Aequators und des Horizonts, folglich gehen diese auch durch die Pole des Meridians und da sie größte Kreise und ihrer Lage nach verschieden sind, so müssen sie sich in zwei entgegen gesetzten Puncten, als den Polen des Meridians schneiden, deren einer durch α bezeichnet sein mag. Folglich durchschneidet dieser die beiden andern unter rechten Winkeln (34.). Also ist $\alpha A = \alpha H = 90^\circ$.

Man darf also nur noch die Länge des Bogens αC berechnen. Zu diesem Ende muß man aus dem $\triangle \alpha BC$ außer dem rechten $\angle C$, zwei Stücke ken-

nen. Daß eine ist der Winkel α , welcher durch die gegebene Höhe des Aequators AH , als das Maß des gedachten Winkels, bekannt ist; das andere ist die gegebene Abweichung $BC = a$. Hieraus findet man den Bogen $\alpha C = b$, welcher die Ascensionaldifferenz ist. Denn es ist $\sin b = \cot \alpha$

$$\cdot \cot (90^\circ - \alpha) (75. \text{ No. } 5.) = \cot \alpha \cdot \tan a = \frac{\tan a}{\tan \alpha}$$

Allein anstatt der Tangente von α , $= AH$ kann man auch die Cotangente der Polhöhe $PR = (90 - \alpha)$

$$\text{nehmen. Alsdann ist } \sin b = \frac{\tan a}{\cot (90 - \alpha)} = \tan a$$

$\cdot \tan (90 - \alpha)$ d. h. der Sinus der Ascensionaldifferenz b ist dem Producte aus der Tangente der Abweichung a in die Tangente der Polhöhe $(90 - \alpha)$ gleich. Diese

Gleichung vermittelt der Logarithmen berechnet, gibt

$$\log \sin b = \log \tan a + \log \tan (90 - \alpha) - 10.$$

Ist nun die Abweichung $BC = a = 23^\circ 27' 45''$ und

die Höhe des Aequators $\alpha = 37^\circ 28' 16''$, anstatt

deren man auch die Polhöhe, d. i. den Bogen von

$(90^\circ - \alpha) = (90^\circ - 37^\circ 28' 16'') = 52^\circ 31' 44''$ neh-

men kann; so ist $\log \tan 23^\circ 27' 45'' = 9,6575241$

$$\log \tan 52^\circ 31' 44'' = 10,1154730$$

$$19,7529971$$

$$10,0000000$$

$$\log \sin b = 9,7529971$$

Zu diesem Logarithmus gehört zunächst die Zahl von

$34^\circ 29' 17''$. Der Berechnung gemäß könnte der ge-

suchte Sinus auch zu dem stumpfen Winkel gehören,

welcher den gefundenen zu 180° ergänzt. Allein aus

den Umständen geht es deutlich hervor, daß hier der

spitze Winkel genommen werden muß. Setzt man diesen Bogen für αC mit dem Bogen $\alpha A = 90^\circ$ zusammen; so erhält man den halben Tagbogen $= 90^\circ + 34^\circ 29' 17'' = 124^\circ 29' 17''$. Um nun die Dauer des Tages zu bestimmen, muß dieser Bogen in Zeit verwandelt werden, und weil das Fortrücken der Sonne bei ihrer stets veränderlichen Abweichung beinahe völlig so viel ausmacht, als wenn die Sonne sich wie ein Stern bewegt hätte, so muß man die $124^\circ 29' 17''$ in Sternzeit verwandeln.

$$120^\circ = 8 \text{ St. } 0' \ 0'' \ 0'''$$

$$4^\circ = 16' \ 0'' \ 0'''$$

$$0^\circ 29' = 1' \ 56'' \ 0'''$$

$$0^\circ 0' 17'' = 1'' \ 8'''$$

$$124^\circ 29' 17'' = 8 \text{ St. } 17' \ 57'' \ 8'''$$

d. i. die halbe Taglänge in Sonnenzeit. Zieheth man diese Zahl, welche die Stunde des Sonnenunterganges bezeichnet, von 12 Stunden ab d. i.

$$11 \text{ St. } 59 \text{ Min. } 59 \text{ Sec. } 60 \text{ Tert.}$$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 17 \quad 57 \quad 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 42 \quad 2 \quad 52 \\ \hline \end{array}$$

so ist diese Differenz, welche zugleich den Aufgang der Sonne bezeichnet, die halbe Nachtlänge. Es ist demnach

$$\text{die Länge des ganzen Tages } 16 \text{ St. } 55' \ 57'' \ 8'''$$

$$\text{die Länge der ganzen Nacht } 7 \quad 24 \quad 5 \quad 44$$

$$\text{Sonnenaufgang } 3 \quad 42 \quad 2 \quad 52$$

$$\text{und Sonnenuntergang } 8 \quad 17 \quad 57 \quad 8.$$

II. Da nun die Figur die östliche Hälfte der Himmelskugel vorstellt, so ist der Durchschnittspunct α des Aequators mit dem Horizonte, der Ostpunct. Ist nun

die Sonne bei ihrem Aufgange in B; so bezeichnet der Bogen αB die Morgenweite. Dieser Bogen läßt sich aber aus den gegebenen Stücken, nemlich dem Winkel α und der Seite $BC = a$, durch folgende Proportion bestimmen: $r : \sin c = \sin \alpha : \sin a$ (68.) d. h. der Sinus totus, verhält sich zum Sinus der Morgenweite, wie der Sinus der Höhe des Aequators, zum Sinus der Abweichung der Sonne. Folglich ist $\sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha}$ d. h. logarithmisch $\log \sin c = 10 +$

$\log \sin a - \log \sin \alpha$. Behält man nun die obigen Angaben in Zahlen für a und α bei; so ist

$$\log \sin \text{tot} = 10,0000000$$

$$\log \sin a = 9,6000453$$

$$19,6000453$$

$$\log \sin \alpha = 9,7841616$$

$\log \sin c = 9,8159837$. Dieser Sinus gehört zu einem Bogen des Horizontes von $40^\circ 55' 8''$ oder zu dessen Ergänzung zu 180° . Es ist aber bekannt, daß die Morgenweite nie über 90° gehen kann. Daher muß hier der spitze Winkel genommen werden, nemlich von dem Ostpuncte an, nach Norden gerechnet, welcher also die gesuchte Morgenweite angibt. Aus demselben Ausdruck findet man auch die Abendweite. Da aber die Sonne bei ihrem Aufgange eine andere Abweichung hat, als bei ihrem Untergange; so müßte man eigentlich die Rechnung für die Abendweite mit dieser, während des Tages veränderten Abweichung, führen. Indes leidet die Sonne in ihrer angenommenen Stellung an den läng-

sten Tagen nur eine unmerkliche Aenderung. Daher kann man da, wo es nicht auf die höchste Genauigkeit ankommt, die für die Mittagszeit der Sonne gegebene Abweichung, zur Berechnung der Abendsweite beibehalten.

III. Das Azimuth (Zo.) ist in der Figur durch AC vorgestellt. Es wird daher durch eine leichte Addition des Bogens αC zu 90° oder im Falle das Gestirn südlich wäre, durch die bloße Subtraction des Bogens αc von 90° gefunden. Also ist das Azimuth hier $= 90^\circ + \alpha C$. Gewöhnlich ist mit dem astronomischen Mauerquadranten, noch ein Horizontalkreis verbunden, der so eingerichtet ist, daß man die Höhe und das Azimuth eines Sterns zugleich, durch eine Beobachtung finden kann.

Zusatz 1. Sollte nun noch der Winkel berechnet werden, welchen der Abweichungskreis mit dem Horizonte bei B einschließt; so kann man sich dazu der Gleichung $\cos \alpha = \sin B \cdot \cos a$ (75. No. 2.), also $\sin B = \frac{\cos \alpha}{\cos a}$ bedienen, aus welcher man ebenfalls nicht bestimmen kann, ob $B > 90^\circ$ oder $< 90^\circ$ sei. — Ueberhaupt

stehen die fünf Stücke: die Abweichung $BC = a$, die Morgenweite $\alpha B = c$, die Ascensionaldifferenz $\alpha C = b$, die Höhe des Aequators $AH = \alpha$ und der Winkel, welchen der Horizont mit dem Abweichungskreise an der Himmelstafel bildet, in einer solchen Verbindung mit einander, daß man aus zwei gegebenen Stücken allemahl die übrigen berechnen kann.

Zusatz 2. Auf eben die Art, wie sich in der obigen Aufgabe die Ascensionaldifferenz berechnen läßt,

kann man auch die Descensionaldifferenz d. h. die Differenz zwischen der geraden und schiefen Absteigung finden.

Zusatz 3. Geht die Sonne in ihrer Laufbahn durch die südlichen Zeichen, so wird die Berechnung für die Länge und Kürze der Tage ganz nach der Auflösung der obigen Aufgabe geführt; nur muß die Ascensionaldifferenz von dem Quadranten d. i. αC von 90° abgezogen, und der Ueberrest des Bogens in Zeit verwandelt werden. Es liegt z. B. Petersburg unter der Breite von $59^\circ 56'$, wie lang ist der kürzeste Tag und die längste Nacht, wenn die Abweichung $23^\circ 28'$ beträgt? Hier wird αc aus den gegebenen Stücken gesucht und es ist der Sinus der Ascensionalb. = Tang. der Abw. $\times$ Tang. der Polhöhe. Es ist aber

$$\begin{array}{rcl} \log \tan 23^\circ 28' & = & 9,6376106 \\ \log \tan 59^\circ 56' & = & 10,2373944 \\ & & \hline & & 19,8750050 \\ & & 10,0000000 \\ & & \hline & & 9,8750050. \end{array}$$

Dieser Sinus gehört zu einem Bogen von $48^\circ 35'$ beinahe, welcher von 90° abgezogen $41^\circ 25'$ beträgt. Diese in Zeit verwandelt, geben

$$\begin{array}{rcl} 41^\circ & = & 2 \text{ St. } 44 \text{ Min.} \\ 0 \quad 25' & = & 1 \text{ Min. } 40 \text{ Sec.} \end{array}$$

$41^\circ 25' = 2 \text{ St. } 45 \text{ Min. } 40 \text{ Sec.}$ für die halbe Länge des Tages. Zieht man diese Zahl von 12 Stunden ab; so erhält man die halbe Länge der Nacht nemlich 11 St. 59 Min. 60 Sec. — 2 St. 45 Min. 40 Sec. = 9 St. 14 Min. 20 Sec. Es ist also

die Dauer des ganzen Tages 5 St. 31 Min. 20 Sec.

die Dauer der ganzen Nacht 18 28 40

Sonnenaufgang 9 14 20

Sonnenuntergang 2 45 40

beinahe.

Berechnet man den längsten Tag und die kürzeste Nacht des gedachten Ortes, so findet man die Ascensionaldifferenz von gleicher Größe und man siehet daraus, daß überall der kürzeste Tag mit der kürzesten Nacht und der längste Tag mit der längsten Nacht übereinstimmt.

Anmerkung 1. Diese Aufgaben gehen nur bis auf $66^{\circ} 31'$ nördlicher und südlicher Breite d. i. bis an die Polarkreise. Denn die Sonne erleuchtet die Hälfte der Erdoberfläche und ihre Strahlen fallen ein halbes Jahr hindurch auf die eine oder die andere der kalten Zonen, je nachdem sich die Sonne dissiets oder jenseits des Aequators befindet (58.). Vergleicht man nun die Länge und Kürze der Tage und Nächte an verschiedenen Orten das ganze Jahr hindurch, so wird man finden, daß die Summe der Dauer der Tage und Nächte überall gleich groß ist und nicht bloß an den Polen, wo es an sich offenbar ist, sondern überall ein halbes Jahr beträgt.

Anmerkung 2. Es ist schon oben bemerkt worden, daß die Sonne bei ihrem Untergange eine andere Abweichung hat, als die gegebene, welche mit ihrer Culmination zusammen gehört. Es müßte also eigentlich die Declination der Sonne gegeben sein, welche sie bei ihrem Aufgange um 5 Uhr 42 Minuten 4 Secunden und bei ihrem Untergange um 8 Uhr 17 Minuten 5 Secunden hatte. Will man diese Veränderung auch in Rechnung bringen, so darf man nur erst die halbe Länge des Tages beiläufig suchen, sich mit der Abweichung, welche die Sonne an den beiden nächsten Durchgängen durch den Meridian des Mittages gehabt hatte, bekannt machen, welche man aus den Ephemeriden

leicht finden kann, und dann zu den drei Zahlen, nemlich zu 24 Stunden, zur gefundenen halben Länge des Tages, zu der in 24 Stunden veränderten Abweichung der Sonne, die vierte Proportionalzahl suchen, welche diejenige Abweichung ist, die noch zur gegebenen hinzugesetzt oder von derselben abgezogen werden muß, je nach dem die Abweichung der Sonne zu- oder abnimmt. Dann löset man die Aufgabe mit dieser nunmehr berichtigten Abweichung auf, wodurch man den halben Tagbogen viel genauer erhält. Nach diesem Verfahren findet man auch die andere Hälfte des Tagbogens. Dieses Verfahren kann man nun wiederholen und die Rechnung bis zu einer Genauigkeit ausführen, die selbst in der Astronomie nur selten verlangt wird. Zu einer beiläufigen Berechnung kann man sich, in Ermangelung anderer Hülfsmittel, die Abweichung nach den vorhergehenden Aufgaben, aus der geraden Aufsteigung und Schiefe der Ekliptik berechnen und dabei die mittlere Bewegung der Sonne, nemlich für jeden Tag im Durchschnitt $59' 8'' 20'''$ annehmen.

Anmerkung 3. Bei der Bestimmung der Länge und Kürze der Tage in der obigen Aufgabe, sind zwei Stücke aus der Acht gelassen, welche die Dauer des Tages beträchtlich verlängern und zwar 1) die Strahlenbrechung und 2) die Dämmerung. Jene beträgt im Ganzen ungefähr 8 Minuten und diese hängt von der Lage des Orts und der Stellung der Sonne gegen die Erde ab, und diese Umstände sollen noch in der Folge betrachtet werden. — Diese wenigen Aufgaben mögen hinreichend sein, den Nutzen der Formeln für die Berechnung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke zur Bestimmung der Lage und Stellung der Sonne gegen die Erde und der andern Weltkörper zu zeigen. Ausführlicher kann dieses vermittelt der Auflösung der schiefwinkligen Dreiecke geschehen. Daher wollen wir deren Lehren kürzlich auseinander setzen und ihre mannigfaltige Anwendung in einigen Beispielen zeigen.

Sechster Abschnitt.

Von der Auflösung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke.

S. 85.

In einem schiefwinkligen sphärischen Dreiecke (Figur 37.), fällt der aus der Spitze B auf die gegenüber liegende Seite lothrecht gezogene Bogen, innerhalb oder außerhalb des Dreieckes; je nach dem die an der Grundlinie AC anliegenden Winkel von gleicher oder verschiedener Gattung sind.

- I. Man nehme an, beide Winkel A und ABC wären spitzig, und also von gleicher Art, so ist der Nebwinkel von ABC d. i. der Winkel BCE größer als R (20.). Fiele nun der Perpendikel nicht innerhalb des Triangels, so fällt er außerhalb desselben, wie BE. Alsdann liegt BE dem spitzen Winkel A gegenüber und ist daher kleiner als 90° (75.); allein BE liegt auch dem stumpfen Winkel BCE gegenüber und ist daher größer als 90° . Beides aber kann mit einander nicht bestehen; folglich der Perpendikel nicht

ausserhalb des Triangels ABC fallen. Wäre jeder der beiden Winkel A und ACB grösser als 90° ; so ist der Winkel BCE spitzig und der Perpendikel BE muß wegen des Winkels bei A grösser, und wegen des Winkels BCE kleiner als 90° sein, welches ebenfalls nicht bestehen kann.

II. Man nehme an, beide Winkel A und ACB (Fig. 38.), wären ungleichartig, $A < 90^\circ$ und $ACB > 90^\circ$. Ziehe nun der lothrechte Bogen nicht ausserhalb des Triangels ABC; so müßte er innerhalb desselben, etwa wie BE fallen. Alsdann aber ist BE wegen des Winkels A, $< 90^\circ$, und wegen des Winkels ACB, $> 90^\circ$. Da dieses nicht möglich ist, so muß der Perpendikel ausserhalb des Triangels fallen.

§. 86.

In jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der diesen Seiten gegenüber liegenden Winkel.

Alle sphärische Dreiecke sind entweder rechtwinklig oder schiefwinklig. Von jenen ist der Satz bereits (67.) erwiesen worden; und von diesen läßt sich der Beweis auf folgende Art führen. Es sei (Fig. 39.) ABC ein schiefwinkliges Dreieck. Durch die Spitze B und den Mittelpunkt der Kugel, worauf ABC verzeichnet ist, werde eine Ebene geführt, welche auf der Ebene der Seite AC senkrecht ist; so wird das schiefwinklige Dreieck ABC in zwei rechtwinklige BDA und BDC, der Winkel bei B in zwei andere p und q und die diesem Winkel entgegengesetzte Seite AC, in zwei Ab-

schnitte $CD = f$ und $AD = g$ zerfällt. Nun verhält sich in dem Dreiecke ABD .

$$r : \sin AB = \sin A : \sin BD \quad (67) \text{ und}$$

$$r : \sin BC = \sin C : \sin BD \text{ folglich}$$

$$\sin AB : \sin BC = \sin C : \sin A \text{ oder}$$

$$\sin c : \sin a = \sin C : \sin A \text{ oder}$$

$$\sin c : \sin C = \sin a : \sin A.$$

Zusatz. Da man aus jeder Spitze auf die entgegenesetzte Seite einen lothrechten Bogen ziehen kann; so erhellet daraus die Richtigkeit der obigen Proportion auch für die Winkel A und B . Denn es verhält sich $\sin a : \sin A = \sin b : \sin B$, vorhin aber war

$$\sin a : \sin A = \sin c : \sin C. \text{ Hieraus folgt, daß}$$

$$\sin b : \sin B = \sin c : \sin C.$$

§. 87.

Wenn aus der Spitze eines schiefwinkligen Dreieckes ein Perpendikel auf die Grundlinie gefällt wird; so verhalten sich die Sinus der beiden Abschnitte der Grundlinie umgekehrt, wie die Tangenten der anliegenden Winkel; die Cosinus dieser Abschnitte aber, wie die Cosinus der anliegenden Seiten.

I. Es sei BD (Fig. 39.) der Perpendikel, f und g bezeichnen die Abschnitte; so ist erweislich, daß $\sin f : \sin g = \tan A : \tan C$. Denn es ist

$$1) \sin f = \cot C \cdot \tan BD \quad (73. \text{ No. } 5.)$$

$$2) \sin g = \cot A \cdot \tan BD$$

$$3) \sin f : \sin g = \cot C : \cot A \text{ oder}$$

$$4) \sin f : \sin g = \tan A : \tan C.$$

Die Prop. 1) sollte eigentlich nach der Rep. Regel, so ausgedrückt werden $\cos(90^\circ - f) = \cot C \cdot \cot(90^\circ - BD)$, welche aber gehörig verändert, die obige Proportion gibt. In 3) sind die Glieder des andern Verhältnisses durch BD dividirt. 4) entsteht aus 3), weil sich die Tangenten umgekehrt wie ihre Cotangenten verhalten.

II. Eben so läßt sich auch beweisen, daß $\cos f : \cos g = \cos a : \cos c$. Denn es ist

$$\cos a = \cos f \cdot \cos BD \quad (75. \text{No. 3.})$$

folglich $\cos BD = \frac{\cos a}{\cos f}$ und aus dens. Gr. im andern $\triangle$

$$\cos BD = \frac{\cos c}{\cos g}, \text{ folglich}$$

$$\frac{\cos a}{\cos f} = \frac{\cos c}{\cos g}. \text{ Daher ist}$$

$$\cos f : \cos a = \cos g : \cos c \text{ oder}$$

$$\cos f : \cos g = \cos a : \cos c.$$

§. 88.

Wenn aus der Spitze eines schiefwinkligen Dreieckes, auf die Grundlinie ein Perpendikel gefällt wird, so verhalten sich die Sinus der beiden Winkel an der Spitze, wie die Cosinus der Winkel an der Grundlinie; die Cosinus jener Winkel aber, umgekehrt, wie die Tangenten der anliegenden Seiten.

I. Es ist hier zu beweisen, daß $\sin p : \sin q = \cos C : \cos A$ sei. Denn es ist (Fig. 59.) $\cos B = \sin A$.

sin

$\sin (90 - b) \text{ (73. No. 2.)} = \sin A \cos b \text{ oder } \cos b$

$= \frac{\cos B}{\sin A}$. Eben so ist auch $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$ und die-

ses gibt, wenn wir die Theile der rechtwinkligen Dreiecke in (Fig. 39.) eben so vergleichen, $\cos BD$

$= \frac{\cos C}{\sin p}$ und aus eben dem Grunde ist auch im

andern Dreieck $\cos BD = \frac{\cos A}{\cos q}$, folglich $\frac{\cos C}{\sin p} =$

$\frac{\cos A}{\sin q}$ und hieraus folgt die Proportion $\sin p : \cos C$

$= \sin q : \cos A \text{ oder } \sin p : \sin q = \cos C : \cos A$.

II. Eben so läßt sich beweisen, daß $\cos p : \cos q =$
 $\text{tang } c : \text{tang } a$. Denn es ist (Fig. 39.)

$$\cos p = \cot a \cdot \text{tang } BD \text{ (73. No. 3.)}$$

$$\cos q = \cot c \cdot \text{tang } BD$$

$$\frac{\cos p}{\cos q} = \frac{\cot a}{\cot c} \text{ oder}$$

$$\cos p : \cos q = \text{tang } c : \text{tang } a.$$

Anmerkung. Diese Formeln sind zur Entwicklung der Eigenschaften aller sphärischen Dreiecke, in welchen aus einer Spitze auf die entgegengesetzte Seite ein Perpendikel gefällt wird, sehr geschickt und werden vorzüglich in den Fällen mit Vortheil gebraucht, wenn die Auflösung schiefwinkliger Dreiecke, vermittelst der Logarithmen geschehen soll.

§. 89.

Aufgabe. Die drei Seiten eines sphärischen Dreieckes sind ihrer Größe nach einzeln in Zahlen gegeben, man soll daraus die Größe der Winkel berechnen.

Auflösung. Man subtrahire (Fig. 39.) von dem Cosinus der, dem gesuchten Winkel gegenüber liegenden

Seite, das Product aus den Cosinus derjenigen Seiten, welche den gedachten Winkel einschließen und die Differenz dividire man durch das Product aus den Sinus dieser jetzt genannten Seiten, so ist dieser Quotient dem Cosinus des gesuchten Winkels gleich, d. h. es ist

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}.$$

Es ist hier nehmlich zu beweisen, daß

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}.$$

$$\cos c : \cos a = \cos g : \cos f \text{ (87. II.)}$$

$$= \cos g : \cos (b - g).$$

$$= \cos g : \cos b \cos g + \sin b \cdot \sin g$$

$$= 1 : \frac{\cos b \cos g + \sin b \cdot \sin g}{\cos g}.$$

$$= 1 : \cos b + \sin b \cdot \tan g$$

$$= 1 : \cos b + \sin b \cdot \tan c \cdot \cos A$$

$$\text{folglich } \cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \cos c \cdot \tan c \cdot \cos A$$

$$\cos a - \cos b \cdot \cos c = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\text{also } \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}.$$

Die dritte Proposition folgt in dem obigen Beweise aus der zweiten nach den Grundsätzen der ebenen Trigonometrie. In der vierten sind die beiden letzten Glieder durch $\cos g$ dividirt. In der fünften ist $\tan g$ anstatt $\frac{\sin g}{\cos g}$ gesetzt; in der sechsten ist $\cos A \cdot \tan c$ für $\tan g$ geschrieben, weil $\cos A = \cot c \cdot \cot (90 - g)$ (73. Nr. 6.)

$$= \cot c \cdot \tan g, \text{ folglich } \tan g = \frac{\cos A}{\cot c} = \cos A$$

tang c. Aus der sechsten Proposition entsteht die folgende Gleichung nach (S. 91.) und in der siebenten ist $\frac{\sin c}{\cos c}$ für tang c geschrieben.

Zusatz. Der für cos A gefundene Ausdruck läßt sich mit der nöthigen Beziehung auf die Seiten, auch unmittelbar auf cos B anwenden und es ist $\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$ und so ist auch $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$.

Anmerkung. So vorthailhaft und einfach dieser Ausdruck zur Bestimmung der Seiten eines sphärischen Dreiecks auch ist; so läßt sich derselbe doch nicht bequem durch Logarithmen berechnen. Daher wollen wir uns diese Aufgabe noch einmahl und zwar mit Rücksicht auf den gedachten Umstand vorlegen und der gefundenen Gleichung, eine zur Berechnung durch Log. bequemere Gestalt geben.

§. 90.

Aufgabe. Aus den drei nach (88.) gegebenen Seiten eines sphärischen Dreiecks, einen Winkel vermittlest der Logarithmen zu berechnen.

Ist ABC (Fig. 39.) das gegebene Dreieck, $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, die gegebenen Seiten, A der gesuchte Winkel; so erhält man den Sinus von $\frac{1}{2}A$ nach folgenden Regeln:

1) Man addire zu der, dem gesuchten Winkel A gegenüberstehenden Seite a, einen der beiden übrigen b und ziehe alsdann das dritte c von der Summe $a + b$ ab, d. i. man nehme $a + b - c$.

2) Man addire zu der, dem gesuchten Winkel A gegenüberstehenden Seite a, die andere der gegebenen Seiten c und ziehe von der Summe $a + c$ die noch übrig gebliebene b ab, d. i. man nehme $a + c - b$.

3) Von den Hälften dieser beiden Reste nehme man die Sinus und multiplicire sie in einander, d. i. $\sin \frac{1}{2}(a + b - c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a + c - b)$.

4) Dieses Product dividire man durch das Product der Sinus, der den gegebenen Winkel A einschließenden Seiten, d. i. durch $\sin b \cdot \sin c$.

5) Endlich ziehe man aus diesem Quotienten die Quadratwurzel aus, so ist

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

Beweis. Es ist $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(1 - \cos A)}{2}}$, oder

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} A = 1 - \cos A \text{ u. für } \cos A \text{ den Werth}$$

$$\begin{aligned} \text{aus (88.) gibt } 2 \sin^2 \frac{1}{2} A &= 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \right) \\ &= \frac{\sin b \cdot \sin c - \cos a + \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \\ &= \frac{(\cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c} \\ &= \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c}. \quad \text{Nun ist} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \beta - \cos \alpha &= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta). \quad \text{Setzt} \\ \text{man nun } \beta &= b - c \text{ und } \alpha = a; \text{ so ist } \cos(b - c) - \\ \cos a &= 2 \sin \frac{1}{2}(a + b - c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a - b + c). \quad \text{Nun} \\ \text{war } 2 \sin^2 \frac{1}{2} A &= \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c} \quad \text{d. i.} \end{aligned}$$

$$2 \sin \frac{1}{2} A^2 = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a+b-c) \cdot \sin \frac{1}{2} (a-b+c)}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\text{oder } \sin \frac{1}{2} A^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} (a+b-c) \cdot \sin \frac{1}{2} (a-b+c)}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\text{endlich } \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a+b-c) \cdot \sin \frac{1}{2} (a-b+c)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

Anmerkung. Der Sinus des Winkels $\frac{1}{2} A$ gehört sowohl zu einem spitzen als zu einem stumpfen Winkel; allein A ist allemahl kleiner als $2R$, folglich $\frac{1}{2} A$ kleiner als R . Daher muß, ungeachtet des zweideutigen Wurzelzeichens, allemahl der Sinus des spitzen Winkels genommen werden.

§. 91.

Aufgabe. Die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks sind ihrer Größe nach einzeln bekannt, man soll daraus die Größe der Seiten berechnen.

Auflösung. Man addire zu dem Cosinus des, der gesuchten Seite gegenüber liegenden Winkels, das Product aus den Cosinus der beiden übrigen Winkel und dividire die gefundene Summe durch das Product der Sinus der beiden gedachten Winkel d. h. es ist

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

Man lasse des Beweises wegen aus B einen Perpendikel BD auf die Grundlinie BC herab; so verhält sich $\cos C$; $\cos A = \sin p : \sin q$ (88. I.)

$$= \sin p : \sin (B-p)$$

$$= \sin p : \sin B \cdot \cos p - \cos B \cdot \sin p$$

$$= 1 : \sin B \cdot \cot p - \cos B$$

$$\cos C : \cos A = 1 : \sin B \cdot \tan C, \cos a - \cos B.$$

$$\cos A = \sin B \cdot \tan C \cdot \cos C \cdot \cos a - \cos B \cdot \cos C \quad (92.)$$

$$\cos A = \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a - \cos B \cdot \cos C$$

$$\sin B \cdot \sin C \cdot \cos a = \cos A + \cos B \cdot \cos C$$

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}. \text{ Eben so ist}$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C} \text{ und}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin C}.$$

Anmerkung. Man vergleiche diesen Satz mit dem (§. 548.) des 2ten Th. Abth. des Lehrb. von Karsten. Hier ist derselbe aus den Ergänzungstücken des Polardreiecks entwickelt.

§. 92.

Aufgabe. Aus den drei nach (91.) gegebenen Winkeln eines sphärischen Dreiecks, die Seiten vermittelst der Logarithmen zu berechnen.

Auflösung. Ist das Dreieck, wie vorher, bezeichnet und a die gesuchte Seite, so wie A, B und C die gegebenen Winkel; so findet man den Cosinus der halben Seite nach folgenden Regeln:

1) Man addire zu dem, der gesuchten Seite a , entgegengesetzten Winkel A , einen der beiden übrigen B und ziehe den dritten C von dieser Summe ab, das ist . . .
 $A + B - C.$

2) Man addire zu dem, der gesuchten Seite a , entgegengesetzten Winkel A den andern C der beiden übrigen Winkel und ziehe den vorigen B ab, das ist . . .
 $A + C - B.$

3) Von den Hälften dieser beiden Reste nehme man die Cosinus und multiplicire sie in einander d. i. $\cos \frac{1}{2}(A+B-C) \cdot \cos \frac{1}{2}(A+C-B)$.

4) Dieses Product dividire man durch das Product der Sinus der an der gesuchten Seite liegenden Winkel B und C d. i. $\sin B \cdot \sin C$.

5) Endlich ziehe man aus diesem Quotienten die Quadratwurzel aus; so ist

$$\cos \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B-C) \cdot \cos \frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B \cdot \sin C}}$$

Beweis. Es ist $\cos \frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos a}{2}\right)}$ oder

$$2 \cos^2 \frac{1}{2}a^2 = 1 + \cos a \text{ oder}$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2}a^2 = 1 + \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C} \text{ oder}$$

$$= \frac{\sin B \cdot \sin C + \cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$= \frac{(\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C) + \cos A}{\sin B \cdot \sin C} \text{ oder}$$

$$= \frac{\cos(B-C) + \cos A}{\sin B \cdot \sin C}$$

Nun bezeichne man $B-C$ mit einem Buchstaben $= \beta$, setze $A = \alpha$ und schreibe den Zähler des obigen Bruches mit diesen Buchstaben; so ist

$$\cos \beta + \cos \alpha = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Alsdann stelle man in derselben Gleichung die vorige Bezeichnung wieder her, so ist

$$\cos(B-C) + \cos A = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B-C) \cos \frac{1}{2}(A+C-B),$$

$$\text{folglich ist } 2 \cos^2 \frac{1}{2}a^2 = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(A+B-C) \cdot \cos \frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\text{oder } \cos \frac{1}{2} a^2 = \frac{\cos \frac{1}{2} (A+B-C) \cdot \cos \frac{1}{2} (A+C-B)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\text{folglich } \cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (A+B-C) \cdot \cos \frac{1}{2} (A+C-B)}{\sin B \cdot \sin C}}$$

Anmerkung. So wohl in Ansehung dieser als der vorhergehenden Aufgabe muß man bemerken, daß $\cos \frac{1}{2} a^2 = \frac{\cos \frac{1}{2} (A+B-C) \cdot \cos \frac{1}{2} (A+C-B)}{\sin B \cdot \sin C}$ für den Halbmesser 1

gilt. Die trig. Linien aber verhalten sich wie der Halbmesser. Bezeichnet man nun durch $\cos \text{tab } \frac{1}{2} a$ denjenigen Cosinus, der zum berechneten Halbmesser der gewöhnlichen Tafeln gehört und den man hier 1 nennen kann; so verhält sich $r : \cos \text{tab } \frac{1}{2} a = 1 : \cos \frac{1}{2} a$, also ist $\cos \frac{1}{2} a = \frac{\cos \text{tab } \frac{1}{2} a}{r}$. Folglich $\cos \frac{1}{2} a^2 = \frac{\cos \text{tab } \frac{1}{2} a^2}{rr}$.

Aus gleichen Gründen wird nach obiger Voraussetzung $\cos \frac{1}{2} (A+B-C) \cdot \cos \frac{1}{2} (A+C-B) = \frac{\cos \text{tab } \frac{1}{2} (A+B-C) \cdot \cos \text{tab } \frac{1}{2} (A+C-B)}{r}$ und endlich

$$\sin B \cdot \sin C = \frac{\sin \text{tab } B \cdot \sin \text{tab } C}{rr}, \text{ folglich } \frac{\cos \text{tab } \frac{1}{2} a^2}{rr} =$$

$$\frac{[\cos \text{tab } \frac{1}{2} (A+B-C) \cdot \cos \text{tab } \frac{1}{2} (A+C-B)] : rr}{(\sin \text{tab } B \cdot \sin \text{tab } C) : rr} \text{ oder}$$

$$\frac{\cos \text{tab } \frac{1}{2} a^2}{rr} = \frac{\cos \text{tab } \frac{1}{2} (A+B-C) \cdot \cos \text{tab } \frac{1}{2} (A+C-B)}{\sin \text{tab } B \cdot \sin \text{tab } C},$$

folglich

$$\cos \text{tab } \frac{1}{2} a^2 = \frac{r^2 \cos \text{tab } \frac{1}{2} (A+B-C) \cdot \cos \text{tab } \frac{1}{2} (A+C-B)}{\sin \text{tab } B \cdot \sin \text{tab } C}$$

oder

$$\cos \text{tab } \frac{1}{2} a = r \sqrt{\frac{\cos \text{tab } \frac{1}{2} (A+B-C) \cdot \cos \text{tab } \frac{1}{2} (A+C-B)}{\sin B \cdot \sin C}}$$

Nun könnte zwar wegen des doppelten Vorzeichens, a so wohl größer als kleiner denn 180° sein; allein da a nie $> 180^\circ$ werden kann; so muß auch $\frac{1}{2} a$ allemahl kleiner als 90° sein.

§. 95.

Aufgabe. Aus zwei Seiten und einem Winkel, welcher einer der gegebenen Seiten gegenüber liegt, den Winkel zu finden, welcher der andern gegenüber liegt.

Es mögen $AB = c$ und $BC = a$ die bekannten Seiten sein, A der, der Seite BC entgegen gesetzte gegebene, und C der gesuchte Winkel; so läßt sich C ohne Herablassung eines lothrechten Bogens unmittelbar aus der Proportion $\sin a : \sin A = \sin c : \sin C$ (86.) herleiten, und es ist $\sin C = \frac{\sin A \cdot \sin c}{\sin a}$.

Anmerkung 1. Das Resultat dieser Aufl. gehört, wie bei der ebenen Trig. zu den zweifelhaften Fällen, weil sich aus den gegebenen Stücken, zwei Dreiecke bestimmen lassen. Indes kann man die Anzahl dieser Fälle in der sphärischen Trig. durch folgende Regel sehr vermindern, nach welcher die, den gegebenen Seiten entgegen gesetzten Winkel, $>$ oder $<$ oder $= 180^\circ$ sind, je nach dem die Summe der gedachten Seiten $>$ oder $<$ oder $= 180^\circ$ ist. Der Grund dieser Vorschrift wird aus (95.) Anm. 3. erkannt.

Anmerkung 2. Auch wird in der Folge die obige Aufgabe sich nach Anm. 3. (95.) entscheiden und bestimmen lassen, wenn anstatt des bekannten Winkels, die Summe oder Differenz der beiden, den gegebenen Seiten entgegen gesetzten Winkel, bekannt sind.

§. 94.

Aufgabe. Aus zwei Winkeln und einer Seite, die einem dieser Winkel gegenüber liegt, die dem andern Winkel entgegen gesetzte Seite zu finden.

Die gegebenen Stücke dieser Aufgabe sind die beiden Winkel A und B, und die Seite $BC = a$ und hieraus soll die Seite $AC = b$ gefunden werden. Man kann aber diese vier Größen nach (86.) so ordnen, daß $\sin A : \sin a = \sin B : \sin b$. Folglich ist

$$\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin A}.$$

Zusatz. Zu eben solchen Verhältnissen lassen sich nach den Vorschriften der Aufgabe jede zwei Winkel und Seiten verbinden, so daß aus gleichgelegenen Theilen des Dreiecks jede Seite bestimmt werden kann. Nur läßt sich auch hier aus den gegebenen Stücken allein nicht beurtheilen, ob die Seite kleiner oder größer als 90° sei. — Ist die Summe der gegebenen Winkel $>$ oder $<$ oder $= 180^\circ$, so ist die Summe der den gedachten $\angle\angle$, entgegengesetzten Seiten auch $>$ oder $<$ oder $= 180^\circ$.

§. 95.

Aufgabe. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines sphärischen Dreiecks, die dritte Seite zu finden.

Die beiden gegebenen Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel mögen in (Fig. 39.) $AB = c$, $AC = b$ und der W. BAC sein; so ist $BC = a$, die gesuchte Seite. Nun lasse man aus der Spitze des Winkels B, auf die gegenüber liegende Seite AC einen Bogen lothrecht herab, und beobachte bei diesem Verfahren allemahl folgende Regel: Man ziehe den lothrechten Bogen so, daß eines von den beiden rechtwinkligen Dreiecken, in welche das schief-

winklige ABC dadurch zerfällt wird, zwei der gegebenen Stücke enthalte. In diesem Falle sind $AB = c$ und der W. BAC die bekannten Stücke.

Nun hat man im rechtwinkligen Dreiecke ABD drei Stücke, nemlich $AB = c$, den W. BAC und den rechten W. ADB. Vermittelt der Niperschen Regel findet man hieraus nun leicht entweder die gesuchte Seite unmittelbar oder ein solches Stück, woraus die gesuchte Größe durch Anwendung einer der vier Proportionalsätze (S. 86. 87.) hergeleitet wird.

Indem man aber den senkrechten Bogen ziehen will, so entsteht die Frage, ob derselbe innerhalb oder außerhalb des Dreieckes falle, d. h. ob er die Lage von BD nach (Fig. 57.) oder nach (Fig. 58.) erhält. Diese bestimmt sich durch folgende Betrachtung. In dem rechtwinkligen Dreiecke ABD (Fig. 59.) sind die beiden Stücke $AB = a$ und der W. BAD bekannt. Daher weiß man, ob sie beide von gleicher oder ungleicher Gattung sind (75.). In jenem Falle ist D von A um weniger, in diesem Falle aber um mehr als um 90° entfernt. Da nun die Seite AC auch bekannt ist; so läßt sich leicht beurtheilen, wo der Perpendikel hinfällt, wenn man den Abstand AD mit der gegebenen Seite AC vergleicht.

Nach diesen Bestimmungen berechne man AD in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC aus A und c; so ist nach der Niperschen Regel

$$\cos A = \cot c \cdot \cot (90 - g) \quad (73. \text{ Nr. 4.}) \text{ oder}$$

$$\cos A = \cot c \cdot \tan g \cdot g \text{ oder}$$

$$\tan g \cdot g = \frac{\cos A}{\cot c} = \cos A \cdot \tan c.$$

Hieraus erhält man nun $f = b - g$.

Ferner verhält sich $\cos g : \cos f = \cos c : \cos a$ (87.),

$$\text{folglich } \cos a = \frac{\cos c \cdot \cos f}{\cos g}$$

Endlich erwäge man noch, ob die gefundene Seite $a <$ oder $> 90^\circ$ sei. Jener Fall tritt ein, wenn die beiden lothrechten Seiten BD und DC im Dreiecke BDC von gleicher Art, dieser, wenn sie von ungleicher Art sind. Ob aber die lothrechte Seite $BD <$ oder $>$ als 90° ist, läßt sich aus dem gegebenen Winkel A nach (75.) beurtheilen.

Das ganze Verfahren dieser Auflösung beschränkt sich also auf folgende Stücke. Man berechne zuerst vermittlest der Neper'schen Regel, den einen Abschnitt derjenigen Seite, auf welche der Bogen BD senkrecht herabgelassen ist. 2) Man bestimme daraus den andern Abschnitt der gedachten Seite. 3) Durch gehörige Anwendung einer der (86. 87.) Proportionen leite man die gesuchte Seite her. 4) Endlich bestimme man aus der Vergleichung desselben mit dem aus (5.) gefundenen Abschnitt und dem gegebenen Winkel, ob sie größer oder kleiner als 90° sei.

Anmerkung 1. Zur Auflösung der obigen Aufgabe kann man sich auch des in (88.) gefundenen Ausdruckes bedienen. Es ist nemlich

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \text{ oder}$$

$$\sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \cos a - \cos b \cdot \cos c \text{ oder}$$

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cos A.$$

In Ansehung dieser beiden Auflösungen ist nur noch zu bemerken, daß man die gesuchte Seite vermittlest der Cosinus nicht mit der nöthigen Genauigkeit finden kann, wenn sie sehr klein ist. In diesem Falle bediene man sich folgender

Auflösung. Es ist

$$2 \sin \frac{1}{2} A^2 = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c} \quad (89. \text{ Gl. 5.}) \text{ oder}$$

$$2 \sin \frac{1}{2} A^2 \cdot \sin b \cdot \sin c = \cos(b-c) - \cos a$$

$$2 \sin \frac{1}{2} A^2 \cdot \sin b \cdot \sin c = 2 \sin \frac{1}{2} a - 2 (\sin \frac{1}{2} (b-c))^2 \text{ oder}$$

$$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{[(\sin \frac{1}{2} (b-c))^2 + \sin b \sin c \cdot \sin \frac{1}{2} A^2]} \text{ oder}$$

$$\sin \frac{1}{2} a = \sin \frac{1}{2} (b-c) \sqrt{1 + \frac{\sin b \cdot \sin c \cdot \sin \frac{1}{2} A^2}{\sin \frac{1}{2} (b-c)^2}}.$$

Anmerkung 2. In der dritten Auflösung entsteht die dritte Gleichung aus der zweiten, indem $1 - 2 \sin \frac{1}{2} a^2$ für $\cos a$ und $1 - 2 (\sin \frac{1}{2} (b-c))^2$ für $\cos(b-c)$ gesetzt und jene von dieser abgezogen worden ist. Zur größern Bequemlichkeit, den $\sin \frac{1}{2} a$ durch Logarithmen zu berechnen, theile man das, was auf der rechten Seite steht, in zwei Theile

$$\text{ab, so daß man } \operatorname{tg} a = \frac{\sin \frac{1}{2} A^2}{\sin \frac{1}{2} (b-c)} \sqrt{\sin b \cdot \sin c} \text{ und}$$

$$\text{also } \sin \frac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2} (b-c)}{\cos a} \text{ setzt.}$$

Anmerkung 3. Der Grund der gedachten Abtheilung beruht auf der log. Berechnung des Ausdruckes $x = \sqrt{m^2 + n^2}$

$$(m^2 + n^2) = \sqrt{(m^2 + g h k^2)} = m \sqrt{1 + \frac{g h k^2}{m^2}}.$$

$$\text{Setzt man nun } \frac{g h k^2}{m^2} = \operatorname{tg} \alpha^2, \text{ so ist } \operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{m} \sqrt{g h} \text{ und}$$

$$x = m \sqrt{1 + \operatorname{tg} \alpha^2} = m \sec \alpha = \frac{m}{\cos \alpha}. \text{ Setzt man nun}$$

$$x = \sin \frac{1}{2} a$$

$$g = \sin b$$

$$h = \sin c$$

$$k = \sin \frac{1}{2} A$$

$$m = \sin \frac{1}{2} (b-c); \text{ so erhält man } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} A \sqrt{\sin b \sin c}}{\sin \frac{1}{2} (b-c)}$$

$$\text{und } \sin \frac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2} (b-c)}{\cos \alpha}.$$

§. 96.

Aufgabe. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, einen der beiden übrigen Winkel zu finden.

1) Die bekannten Stücke dieser Aufgabe sind nach (Fig. 39.) $AB=c$, $AC=b$ und der $\angle BAC$, und der gesuchte Winkel sei ACB . Man lasse aus B wieder BD senkrecht auf AC herab; so ist in dem rechtwinkligen $\triangle ABD$ nach der Rep. Regel

$$\cos A = \cot c \cdot \cot (90^\circ - g) \quad (73. \text{ No. } 4.) \text{ oder}$$

$$\cos A = \cot c \cdot \tan g \text{ oder}$$

$$\tan g = \frac{\cos A}{\cot c} \text{ oder}$$

$$\tan g = \cos A \cdot \tan c.$$

2) Nun dienen die beiden gegebenen Stücke c und $\angle BAC$ zur Bestimmung des Abschnittes g , ob nemlich dessen Länge mehr oder weniger als 90° beträgt. Sind die gedachten Stücke von ungleicher Gattung, so ist $g > 90^\circ$, im entgegengesetzten Falle aber $< 90^\circ$ (77. Zus. 3.).

3) Fällt nun der Abschnitt g nach der in 2) angestellten Prüfung größer aus, wie b d. i. $g > b$; so ist $b - g = f$, und f ist negativ, und nun ergibt sich der $\angle ACB$ aus der Proportion $\sin f : \sin g = \tan BAC :$
 $\tan ACB$ oder es ist $\tan ACB = \frac{\sin g \cdot \tan BAC}{\sin f}$.

Es ist aber der $\angle ACB >$ oder $<$ als 90° , je nachdem $BD >$ oder $< 90^\circ$ ist und BD ist wieder $>$ oder $<$ als 90° , je nachdem der gegebene Winkel $BAC >$ oder $< 90^\circ$ (75.).

4) Auf diese Art hat man nun eigentlich den Winkel BCD (Fig. 39.) gefunden. Dieser aber macht mit dem gesuchten Winkel 180° , folglich darf man nur von dem gefundenen Winkel die Ergänzung zu 180° nehmen.

Zusatz. Wollte man nun auch den dritten $\angle$ ABC berechnen; so findet man denselben aus folgender Proportion. Es verhält sich nemlich $\sin c : \sin b = \sin C : \sin B$ (86.).

Anmerkung 1. Wollte man aber den Winkel B auf dem vorigen Wege suchen; so müßte man aus C einen Bogen senkrecht auf die Seite c herablassen und zu dessen Berechnung die obigen Vorschriften anwenden.

Anmerkung 2. Soll aus den, in der Aufgabe genannten Stücken, der Winkel C gefunden werden und man läßt aus dem dritten Winkel B die BD senkrecht herab; so verhält sich

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} C : \operatorname{tg} A &= \sin g : \sin f \text{ (87.)} \\ &= \sin g : \sin (b - g) \\ &= \sin g : \sin b \cdot \cos g - \cos b \cdot \sin g \\ &= 1 : \sin b \cdot \cot g - \cos b \\ &= 1 : \sin b \frac{\cot c}{\cos A} - \cos b \text{ (73. Nr. 4.)} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} A}{\frac{\sin b \cot c}{\cos A} - \cos b} = \frac{\sin A}{\sin b \cdot \cot c - \cos b \cdot \cos A}$$

Anmerkung 3. Neper hat diese Aufgabe auf folgende Art aufgelöst. Es verhält sich

1) $\sin c : \sin a = \sin C : \sin A$ (86.) hieraus

2) $\sin c + \sin a : \sin c - \sin a = \sin C + \sin A : \sin C - \sin A$

oder

3) $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(c + a) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(c - a) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(C + A) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(C - A)$

Es ist aber

$$4) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(C+A) = \frac{\cot \frac{1}{2} B \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(q-p)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-C)}$$

$$5) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(c+a) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(c-a) = \frac{\cot \frac{1}{2} B \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(q-p)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-C)} : \operatorname{tg}(C-A)$$

oder

$$6) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(c+a) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(c-a) = \cot \frac{1}{2} B \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(q-p) : (\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-A))^2$$

Es ist aber

$$7) \sin(c+a) : \sin(c-a) = \cot \frac{1}{2}(q+p) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(q-p) \text{ oder}$$

$$8) 2 \sin \frac{1}{2}(c+a) \cdot \cos \frac{1}{2}(c+a) : 2 \sin \frac{1}{2}(c-a) \cdot \cos \frac{1}{2}(c-a) = \cot \frac{1}{2} B : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(q-p)$$

$$9) \sin \frac{1}{2}(c+a) \cdot \cos \frac{1}{2}(c+a) : \sin \frac{1}{2}(c-a) \cos \frac{1}{2}(c-a) = \frac{\cot \frac{1}{2} B}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(q-p)} : 1$$

$$10) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c+a) \sin \frac{1}{2}(c+a) \cos \frac{1}{2}(c+a) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c-a) \sin \frac{1}{2}(c-a) \cos \frac{1}{2}(c-a) = \cot \frac{1}{2} B^2 : (\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-A))^2$$

$$11) (\sin \frac{1}{2}(c+a))^2 : (\sin \frac{1}{2}(c-a))^2 = \cot \frac{1}{2} B : (\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-A))^2$$

$$12) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-A) = \frac{\cot \frac{1}{2} B \cdot \sin \frac{1}{2}(c-a)}{\sin \frac{1}{2}(c+a)} \quad \text{Auf eine ähnliche}$$

Art ist auch

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C+A) = \frac{\cot \frac{1}{2} B \cdot \cos \frac{1}{2}(c-a)}{\sin \frac{1}{2}(c+a)}$$

In der obigen Auflösung erhält man 3) aus 2) weil

$$\frac{\sin c + \sin a}{\sin c - \sin a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(c+a)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(c-a)} \quad \text{Die Gl. bei 4) folgt, weil}$$

$\cos A = \sin q \cdot \cos BD$ (75. Nr. 2.) dgl. $\cos C = \sin p \cos BD$, daher $\cos A : \cos C = \sin q : \sin p$, daraus wieder $\cos A + \cos C : \cos A - \cos C = \sin q + \sin p : \sin q - \sin p$ oder...

$$\frac{\cos A + \cos C}{\cos A - \cos C} = \frac{\cot \frac{1}{2}(C+A)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-A)} \quad \text{und} \quad \frac{\sin q + \sin p}{\sin q - \sin p} =$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(q+p)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(q-p)}, \text{ folglich } \operatorname{tg} \frac{1}{2}(q+p) = \frac{\cot \frac{1}{2}(C+A) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(q-p)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-A)}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(q-p)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C+A) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-A)} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(C+A) =$$

cot

$$\frac{\cot \frac{1}{2}(q+p) \cdot \tan \frac{1}{2}(q-p)}{\tan \frac{1}{2}(C-A)} = \frac{\cot \frac{1}{2}B \cdot \tan \frac{1}{2}(q-p)}{\tan \frac{1}{2}(C-A)}.$$

Ferner 9) wird aus 8), indem das erste Verh. durch 2 und das andere durch $\tan \frac{1}{2}(q-p)$ dividirt wird. 10) entsteht aus 9) durch die Multiplication der 5) mit 9). In 11) sind die sich gegen einander aufhebenden Factoren der 10) weggelassen worden.

Die Vortheile dieser Ausdrücke fallen, wie auch Cagnoli bemerkt, deutlich in die Augen. Bei wirklicher Berechnung findet man vermittelst 7 Log. beide Winkel. Ferner sind sie sehr bequem, den dritten Winkel zu berechnen, wenn die beiden andern und die ihnen entgegengesetzten Seiten gegeben sind. Endlich folgt hieraus, daß in jedem sphärischen $\triangle$ die halbe Summe der beiden Seiten, mit der halben Summe der ihnen gegenüber liegenden Winkel von gleicher Gattung sind, weil $\tan \frac{1}{2}(A+C)$ und $\cos \frac{1}{2}(a+c)$ in dem gefundenen Sage immer dasselbe Vorzeichen haben, und die übrigen Stücke nie negativ werden können, wodurch die zweifelhaften Fälle sehr vermindert werden, wie in (§. 92.).

§. 97.

Aufgabe. Aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln eines sphärischen Dreieckes, eine der beiden übrigen Seiten zu finden.

Die gegebene Seite des sphär. $\triangle ABC$, ist $AB = c$ und die beiden anliegenden Winkel ABC und BAC , hieraus soll man die Seite $a = BC$ finden.

1) Setze man BD senkrecht auf AC , so erhält man nach der Rep. Regel

$$\cos c = \cot q \cdot \cot A \quad (73. \text{ Nr. 6.}) \text{ oder}$$

$$\cot q = \frac{\cos c}{\cot A} = \cos c \cdot \tan A.$$

℞

2) Dadurch erhält man $p = B - q$. Nun verhält sich $\cos p : \cos q = \tan g c : \tan g a$ (87.),

$$\text{folglich } \tan g a = \frac{\cos q \cdot \tan g c}{\cos p}.$$

Die gefundene Seite $a = BC$ ist $<$ oder $> 90^\circ$, je nach dem die Größen BC und DC , welche sich aus den beiden Winkeln BAD und DBC beurtheilen lassen, von gleicher oder ungleicher Gattung sind.

Zusatz 1. Ist die Seite a gefunden; so kann man mit der nöthigen Veränderung auch den Beweis für die dritte Seite b finden oder ihn aus (85.) herleiten und es verhält sich $\sin A : \sin a = \sin B : \sin b$.

Anmerkung 1. Man kann die Auflösung auch so einrichten. Es ist nemlich

$$\begin{aligned} \tan g a : \tan g c &= \cos q : \cos p \quad (88.) \\ &= \cos q : \cos (B - q) \\ &= \cos q : \cos B \cdot \cos q + \sin B \cdot \sin q \\ &= 1 : \cos B + \sin B \cdot \tan g q \\ &= 1 : \cos B + \frac{\sin B \cdot \cot A}{\cos c} \end{aligned}$$

$$\tan g a = \frac{\tan g c}{\cos B + \frac{\sin B \cdot \cot A}{\cos c}} = \frac{\sin c}{\cos B \cdot \cos c + \sin B \cdot \cot A}.$$

Wegen Bestimmung der dritten Seite s. m. Zuf. 1.

Anmerkung 2. Auflösung III. Es ist

$$1) \sin a : \sin c = \sin A : \sin C \quad (85.)$$

$$2) \frac{\sin a + \sin c}{\sin a - \sin c} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin A - \sin C} \quad \text{oder}$$

$$3) \tan \frac{1}{2}(a + c) : \tan \frac{1}{2}(a - c) = \tan \frac{1}{2}(A + C) : \tan \frac{1}{2}(A - C).$$

Es ist aber

$$4) \tan \frac{1}{2}(a + c) = \frac{\tan \frac{1}{2} b \cdot \tan \frac{1}{2}(g - f)}{\tan \frac{1}{2}(a - c)}$$

$$5) \operatorname{tg} \frac{1}{2} b \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} (g-f) : (\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-c))^2 = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A+C)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A-C)}.$$

Es ist aber

$$6) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (g-f) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} b \cdot \sin (A-C)}{\sin (A+C)} \\ = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} b \cdot \sin \frac{1}{2} (A-C) \cdot \cos \frac{1}{2} (A-C)}{\sin \frac{1}{2} (A+C) \cdot \cos \frac{1}{2} (A+C)}.$$

$$7) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-c)^2 : \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} b^2 \sin \frac{1}{2} (A-C) \cdot \cos \frac{1}{2} (A-C)}{\sin \frac{1}{2} (A+C) \cdot \cos \frac{1}{2} (A-C)} = \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A+C) : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A-C).$$

$$8) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-c)^2 = \\ \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} b^2 \cdot \sin \frac{1}{2} (A-C) \cdot \cos \frac{1}{2} (A-C) \cdot \sin \frac{1}{2} (A+C) \cdot \cos \frac{1}{2} (A-C)}{\sin \frac{1}{2} (A+C) \cdot \cos \frac{1}{2} (A+C) \cdot \cos \frac{1}{2} (A+C) \cdot \sin \frac{1}{2} (A-C)} \\ = \frac{\sin \frac{1}{2} b^2 \cdot (\cos \frac{1}{2} (A-C))^2}{\cos \frac{1}{2} (A+C)^2}.$$

$$9) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-c) = \frac{\sin \frac{1}{2} b \cdot \cos \frac{1}{2} (A-C)}{\cos \frac{1}{2} (A+C)}.$$

Es folgt 4) daraus, daß

$$\cos a : \cos c = \cos g : \cos f \quad (87.)$$

$$\frac{\cos a + \cos c}{\cos a - \cos c} = \frac{\cos g + \cos f}{\cos g - \cos f}$$

$$\frac{\cot \frac{1}{2} (a+c)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a-c)} = \frac{\cot \frac{1}{2} (g+f)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (g-f)}$$

$$\cot \frac{1}{2} (g+f) : \cot \frac{1}{2} (a+c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (g-f) : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-c) \text{ od.} \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} (a+c) : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (g+f) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (g-f) : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-c)$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a+c) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} b \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} (g-f)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a-c)}.$$

Auf eine ähnliche Art erhält man 6) aus
 $\sin g : \sin f = \operatorname{tang} A : \operatorname{tang} C \quad (86.)$ oder

$$\frac{\sin g + \sin f}{\sin g - \sin f} = \frac{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} C}{\operatorname{tang} A - \operatorname{tang} C}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (g+f) : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (g-f) = \sin (A+C) : \sin (A-C) \text{ oder}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (g-f) : \operatorname{tang} \frac{1}{2} b = \frac{\sin \frac{1}{2} (A+C) \cdot \cos \frac{1}{2} (A+C)}{\sin \frac{1}{2} (A-C) \cdot \cos \frac{1}{2} (A-C)}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(g-f) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} b \cdot \sin \frac{1}{2}(A+C) \cdot \cos \frac{1}{2}(A+C)}{\sin \frac{1}{2}(A-C) \cdot \cos \frac{1}{2}(A-C)}.$$

Zusatz. Aus der hier in 4) angeführten Proportion, nach welcher $\cot \frac{1}{2}(a+c) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-c) = \cot \frac{1}{2} b : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(g-f)$ ist, folgt die Gleichung $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(g-f) = \frac{\cot \frac{1}{2} b \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-c)}{\cot \frac{1}{2}(a+c)}$, kennt man nun die

Differenz dieser Abschnitte, so findet man auch jeden einzelnen. Ist nun der Abschnitt g bekannt; so kann man auch den $\angle A$ finden, weil $\cos A = \cot c \times \cot(90-g)$ (73. Nr. 5.) $= \cot c \cdot \operatorname{tang} g$. Dieser Aufsp. pflegt man sich auch zuweilen zu bedienen, um aus den drei Seiten einen Winkel zu berechnen.

§. 93.

Aufgabe. Aus einer Seite und den an dieser Seite anliegenden Winkeln, den dritten Winkel eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks zu finden.

Die gegebenen Stücke sind (nach Fig. 39.) die Seite $AB = c$ und die beiden an c anliegenden Winkel A und B . Um hieraus den dritten $W. C$ zu finden, so lasse man 1) aus der Spitze des $W. B$ den Bogen BD senkrecht auf AC herab und bestimme nach der Rep. Regel den $W. ABD = q$. Es ist aber

$$\cos c = \cot A \cdot \cot q \quad (73. \text{ Nr. 6.}), \text{ folglich}$$

$$\cot q = \frac{\cos c}{\cot A} \quad \text{oder}$$

$$\cot q = \cos c \cdot \operatorname{tang} A.$$

2) Hieraus ergibt sich nun $\angle p = B - q$.

Endlich erhält man 3) den Winkel C aus (87.)

$\sin q : \sin p = \cos A : \cos C$, also

$$\cos C = \frac{\sin p \cdot \cos A}{\sin q}.$$

Hier ist noch zu bemerken, daß die beiden Winkel C und A stets von gleicher Gattung sind, nur in dem Falle, wo $q > ABC$ ist, ist der W. $BCA = 180^\circ - BCD$.

Anmerkung 1. Auflösung II. Es ist

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B} \quad \text{oder}$$

$$\cos c \cdot \sin A \cdot \sin B = \cos C + \cos A \cdot \cos B$$

$$\cos C = \cos c \cdot \sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B.$$

Anmerkung 2. Beide Auflösungen geben die gesuchte Seite, wenn sie sehr klein ist, nicht mit der nöthigen Genauigkeit.

Für diesen Fall setze man:

$$2 \sin \frac{1}{2} c^2 = 1 - \cos c$$

$$= 1 - \left(\frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B} \right) (90.)$$

$$= \frac{\sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B - \cos C}{\sin A \cdot \sin B}$$

$$= \frac{-(\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B) - \cos C}{\sin A \cdot \sin B}$$

$$= \frac{-\cos(A+B) - \cos C}{\sin A \cdot \sin B}. \quad \text{Es ist aber}$$

$$\cos(A+B) = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B)^2 - 1 \quad \text{und}$$

$$\cos C = 2 \cos \frac{1}{2} C^2 - 1 = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} C^2.$$

$$\text{Also } 2 \sin \frac{1}{2} c^2 \sin A \cdot \sin B = 1 - 2(\cos \frac{1}{2}(A+B))^2 - 1 + 2 \sin \frac{1}{2} C^2,$$

$$\sin \frac{1}{2} c^2 \sin A \cdot \sin B = \sin \frac{1}{2} C^2 - (\cos \frac{1}{2}(A+B))^2$$

$$\sin \frac{1}{2} C = \sqrt{((\cos \frac{1}{2}(A+B))^2 + \sin A \cdot \sin B \cdot \sin \frac{1}{2} c^2)}$$

$$= \cos \frac{1}{2}(A+B) \sqrt{\left(1 + \frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin \frac{1}{2} c^2}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}\right)}.$$

Zur bequemern Berechnung dieses Ausdrucks mittelst der Logarithmen, zerfalle man ihn nach (95. Anmerk. 2.) in zwei andere Gleichungen:

$$1) \tan \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} (A+B)} \sqrt{\sin A \cdot \sin B} \text{ und}$$

$$2) \sin \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \alpha}.$$

§. 99.

Aufgabe. Aus zwei Seiten und einem Winkel, welcher einer dieser Seiten gegenüber liegt; den von den gegebenen Seiten eingeschlossenen Winkel eines sphärischen Dreiecks zu finden.

Die gegebenen Stücke sind in dem sphärischen $\triangle ABC$, die Seiten $AB=c$, $BC=a$ und der Winkel ACB . Hieraus wird der Winkel ABC gesucht.

Man setze 1) BD senkrecht auf AC , so ist nach der Nap. Regel

$$\cos a = \cot p \cdot \cot C \text{ (73. Nr. 6.) oder}$$

$$\cot p = \frac{\cos a}{\cot C} = \cos a \cdot \tan C.$$

$$2) \text{ Aus (87.) verhält sich } \cos q : \cos p = \tan a : \tan c \text{ oder es ist } \cos q = \frac{\cos p \cdot \tan a}{\tan c}.$$

3) Hieraus ergibt sich nun der W. $ABC = p \pm q$, je nach dem die Prop. innerhalb oder außerhalb des $\triangle$ fällt. Daher nimmt man die Summe, wenn die beiden andern $\angle$ von gleicher und die Differenz, wenn sie von ungleicher Gattung sind. Es tritt also hier derselbe Fall wie in (92.) ein.

Anmerkung. Oft kann man die Art des $\angle B$ mittelst folgender Regel, welche Cagnoli aus Boscovichs

sphär. Trigon. anführt, erkennen. Ist die Summe der Segmente $> 180^\circ$, so nimmt man die Differenz und ist diese negativ, so nimmt man die Summe.

§. 100.

Aufgabe. Aus zwei Seiten und einem Winkel, welcher einer der gegebenen Seiten entgegengesetzt ist, die dritte Seite eines schiefwinkligen sphärischen Dreieckes zu finden.

In dem Dreiecke ABC sind die beiden Seiten $AB=c$, $BC=a$ und der W. BAC gegeben und hiers aus soll die Seite $AC=b$ gefunden werden.

1) Man setze aus B den Bogen BD senkrecht auf die gesuchte Seite $AC=b$, so erhält man nach der Neper'schen Regel

$$\cos A = \cot c \cdot \cot (90 - g) \quad (73. \text{ Nr. 2.}) \text{ oder}$$

$$\cos A = \cot c \cdot \tan g \text{ oder}$$

$$\tan g = \frac{\cos A}{\cot c} = \cos A \cdot \tan c.$$

2) Verhält sich $\cos c : \cos a = \cos g : \cos f$ und es

$$\text{ist } \cos f = \frac{\cos a \cdot \cos g}{\cos c}.$$

Aus 1) erhielt man g , aus 2) f , folglich hat man dadurch die gesuchte Seite c gefunden. Ist nun $a < c$, so ist $f < g$ und es ist unbestimmt, ob die gesuchte Seite $b = g + f$ oder $= g - f$ sei. Ist aber $a > c$, so ist auch $f > g$ und es ist allemahl $b = f + g$.

§. 101.

Aufgabe. Aus zwei Winkeln nebst der Seite, welche einem dieser Winkel entgegengesetzt ist,

die zwischen den gegebenen Winkeln liegende Seite des sphärischen Dreieckes zu finden.

In dem $\triangle ABC$ sind die Winkel A und C nebst der Seite $BC = a$ gegeben und man sucht die zwischen A und C liegende Seite $b = AC$. In diesem Falle setze man 1) den Bogen BD senkrecht auf AC ; so erhält man nach der Neper'schen Regel

$$\cos A = \cot c \cdot \cot (90 - g) \quad (75, \text{Nr. 4.})$$

$$\cos A = \cot c \cdot \tan g \quad \text{oder}$$

$$\tan g = \frac{\cos A}{\cot c} = \cos A \cdot \tan c.$$

2) Verhält sich $\tan C : \tan A = \sin g : \sin f$ (86.),

$$\text{folglich } \sin f = \frac{\sin g \cdot \tan A}{\tan C}.$$

Nun ist $BC = AD \pm DC$, je nachdem die gegebenen Winkel von gleicher oder ungleicher Art sind.

§. 102.

Aufgabe. Aus einer Seite und zwei Winkeln, deren einer an der gegebenen Seite anliegt, der andere aber derselben entgegen gesetzt ist, den dritten Winkel eines sphärischen Dreieckes zu finden.

Die bekannten Stücke dieser Aufgabe sind (Fig. 59.) die beiden Winkel A und C und die Seite a ; der Winkel B aber wird gesucht. Nun lasse man 1) den Bogen BD aus der Spitze des gesuchten Winkels B auf die Seite AC lothrecht herab; so fällt der Perpendikel innerhalb oder außerhalb des $\triangle$, nachdem die gegebenen

$\angle A$ und C von gleicher oder ungleicher Gattung sind.

2) Im ersten Falle ist nun nach der Rep. Regel (73. Nr. 4.) $\cos a = \cot p \cdot \cot C$ oder

$$\cot p = \frac{\cos a}{\cot C} \text{ oder}$$

$$\cot p = \cos a \cdot \tan C.$$

3) Nun ist $\cos C : \cos A = \cos p : \cos q$ (87.). Auf diese Art erhält man also p und q und es ist $\angle B = p + q$.

4) Sind aber die Winkel A und C von ungleicher Gattung, so ist dieser Winkel $B = ABD - CBD$.

Anmerkung 1. Die gesuchte Größe wird, bei den obigen Aufgaben der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke allemahl aus den gegebenen Stücken, vermittelt der trigonometrischen Linien hergeleitet. Diese aber können, selbst bei der Einschränkung, daß die Bogen nicht über 180° gehen, mit Beibehaltung ihrer Größe, so wohl zu einem spitzen als zu einem stumpfen Winkel gehören. Daher muß zu dem gesuchten Stücke noch allemahl die Bestimmung dazu kommen, aus welcher man ersieht, ob der gefundene Winkel ein spitzer oder stumpfer, oder ob die gefundene Seite $>$ oder $<$ als 90° sei, oder ob die gesuchte Größe in dieser Hinsicht unbestimmt bleibe. Diese Angabe, welche bei den oben angeführten Aufgaben Statt finden muß, hat der Verfasser der Dr. Meßk. Johann Carl Schultze, Lehrer der Mathem. beim R. P. Feld. Artillerie Corps, im 2ten Hefte seines Taschenbuches, ganz aus dem Auge gelassen, welches um so mehr zu bewundern ist, da er diesen Gegenstand übrigens nicht ohne Gründlichkeit behandelt hat.

Anmerkung 2. Kommt unter den gegebenen Stücken eines schiefwinkligen Dreieckes eine Seite d. i. ein Bogen von 90° vor, so läßt sich dasselbe als ein rechtwinkliges $\triangle$ be-

trachten und die Auflösung desselben, kann nach den in (67 — 72) enthaltenen Vorschriften geschehen. Zur Erläuterung dieses Gegenstandes darf man nur die 37 und 38te Figur betrachten und in beiden $AB = 90^\circ$ setzen. Alsdann ist AC entweder $>$ oder $< 90^\circ$. Die 37te Figur stelle den Fall vor, in welchem $AC > 90^\circ$ wäre. Man mache $AD = 90^\circ$ und ziehe durch B und D einen Bogen, der zu einem größten Kreise der Kugel gehört, worauf das $\triangle ABC$ liegt; so wird $DC = AC - AD = AC - 90^\circ$ und $\angle CBD = ABC - ABD = ABC - 90^\circ$ sein und zwar aus dem Grunde, weil der Bogen $AD = 90^\circ$, von B um 90° entfernt und also das Maß des $\angle ABD$ ist (17. Zus. 4.). So ist auch BD das Maß des $\angle BAD$, weil $AB = AD = 90^\circ$ ist. In den Dreiecken ABC und ABD sind also die Seite $AB = 90^\circ$ und der $\angle ADB = R$ als bekannte Stücke anzusehen. Verbindet man nun die Angaben mit der bekannten Seite AB ; so wird man die Aufgabe nach den Regeln für rechtwinklige Dreiecke auflösen können.

Ist aber $AC < 90^\circ$ (Fig. 38.); so mache man $AD = 90^\circ$ und ziehe BD wie vorher. Alsdann ist $CD = AD - AC = 90^\circ - AC$; der W. $CBD = ABD - ABC = 90^\circ - ABC$, der Bogen BD ist das Maß des $\angle A$ und ADB ist $= R$. Es gilt also auch hier dasjenige, was vorhin vom ersten Falle bemerkt worden ist.

Wäre endlich $AC = AB = 90^\circ$; so ist $\angle B$, welcher von AC gemessen wird $= R$. Ueberdies ist auch BC das Maß des $\angle BAC$ und also der Triangel gleichschenkelig.

Anmerkung 3. Was das gleichschenkelige Dreieck ABC (Fig. 27.) betrifft, so kann man dasselbe mittelst eines aus der Spitze B auf die Grundlinie AC herabgelassenen Perpendikels BK , (der hier nicht ausgezogen ist) in zwei andere gleich- und rechtwinklige Dreiecke zerfallen und aus der Tabelle für die rechtwinkligen $\triangle$ zu S. 104 diejenigen Sätze, wodurch sich alle Fälle auflösen lassen, herleiten.

1) Der Sinus der einen Seite, verhält sich zum Sinus der halben Grundlinie, wie der Halbmesser zum halben Winkel an der Spitze.

2) Die Tangente der einen Seite, verhält sich zur Tangente der halben Grundlinie, wie der Halbmesser zum Cosinus eines Winkels an der Grundlinie.

3) Der Cosinus einer Seite, verhält sich zur Cotangente des halben Winkels an der Spitze, wie der Halbmesser zur Tangente eines Winkels an der Grundlinie.

4) Der Cosinus der halben Grundlinie, verhält sich zum Cosinus des halben Winkels an der Spitze, wie der Halbmesser zum Sinus eines Winkels an der Grundlinie.

Anmerkung 4. Die Absichten, welche ich mir bei der Bearbeitung dieser Schrift vorgeschrieben habe, verstatten mir nicht die Lehren der Differenzial- und Integralrechnung zu Hülfe zu nehmen, wodurch die Theorie der sphärischen Trigonometrie an Leichtigkeit, Simplicität und Vollkommenheit, wie die Anwendung an Umfang und Brauchbarkeit gewinnt. Wer sich über diesen Gegenstand weiter zu unterrichten wünscht, findet denselben im XIX—XXII. Abschn. der ebenen und sphärischen Trigonometrie von Cagnoli mit vieler Gründlichkeit behandelt. Auch Euler hat die sphärische Trigonometrie zum Gegenstande seiner Untersuchung gemacht und aus ihren Lehren, mit der ihm eigenen Kürze und Deutlichkeit aus einigen allgemeinen Vorstellungen, in einer Abhandlung, welche in den Actis Academiae scientiarum Petropolitanae vom J. 1779 steht, entwickelt. Fr. Lacroix hat sie bei der Bearbeitung seiner ebenen, sphärischen Trigonometrie und höhern Geometrie zum Grunde gelegt.

§. 103.

Die von 87. bis 102. vorgetragenen Aufgaben lassen sich ohne sie, wie Wolf in seinen Elementis Trig. Sphaer. gethan hat, unter eine allgemeine Regel

zusammen zu fassen, durch folgende Betrachtung leicht dem Gedächtnisse einprägen.

Aus dem Satze (95.) kann man 1) aus zwei Seiten und einem Winkel, welcher einer der gegebenen Seiten gegenüber liegt, den Winkel finden, welcher der andern der gedachten Seiten gegenüber liegt. Und 2) läßt sich aus zwei Winkeln und einer Seite, welche dem einen der gegebenen Winkel gegenüber steht, diejenige Seite finden, welche dem andern der gedachten Winkel gegenüber steht (94.). 3) Aus den drei Winkeln kann man nach (92.) die drei Seiten; und 4) aus den drei Seiten (89.) auf eine ähnliche Art die drei Winkel berechnen.

In den vier folgenden Aufgaben kommen allemahl zwei Seiten und ein Winkel vor und zwar so daß in (95. und 96.) der Winkel eingeschlossen ist, in der Aufg. (99. und 100.) aber nicht. Daher wird in der fünften Aufgabe, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte (95.) Seite und in (96.) aus denselben Datis, einer der beiden übrigen Winkel gefunden. In der siebenten sucht man aus zwei Seiten und einem Winkel, welcher einer der gegebenen Seiten gegenüber liegt, die dritte Seite (100.), oder wie in der Aufg. (99.) den eingeschlossenen Winkel.

In den vier letzten Aufgaben kommen allemahl zwei Winkel und eine Seite vor. Die beiden Winkel liegen entweder an der gegebenen Seite an; oder einer liegt an der gegebenen Seite an und der andere derselben gegenüber. Daher heißt die Aufgabe in (98.): aus einer Seite und den an dieser Seite anliegenden Winkeln, den dritten Winkel zu finden; oder in (97.):

aus denselben Datis eine der beiden übrigen Seiten zu finden. In der Aufg. (102.) aber: aus einer Seite und zwei Winkeln, deren einer an der gegebenen Seite anliegt, der andere derselben entgegen gesetzt ist, den dritten Winkel; oder nach der Aufg. (97.) eine der beiden übrigen Seiten zu finden.

§. 104.

Um aber gesammte Aufgaben nach einer systematischen Zusammenstellung zu übersehen; so darf man nur auf die Bestimmungsstücke dieser Dreiecke Rücksicht nehmen. Jedes schiefwinklige sphärische Dreieck besteht aus Winkeln und Seiten, daher sucht man aus drei gegebenen Stücken entweder

I. eine Seite oder

II. einen Winkel.

I. Die Seite wird

- 1) entweder aus drei Winkeln, oder
- 2) aus zwei Winkeln und einer Seite, oder
- 3) aus einem Winkel und zwei Seiten gefunden.

Sind nach (2.) zwei Winkel und eine Seite gegeben; so können diese beiden Winkel

- a) an der gegebenen Seite, oder
- b) an der gesuchten Seite, oder
- c) an der dritten Seite liegen.

Sind aber nach (3.) zwei Seiten und ein Winkel gegeben; so liegt dieser Winkel entweder

- a) zwischen den gegebenen Seiten, oder
- b) er liegt zwischen der gesuchten und einer der gegebenen Seiten.

II. Wird ein Winkel gesucht; so können

- 1) alle drei Seiten, oder
- 2) zwei Seiten und ein Winkel, oder
- 3) zwei Winkel und eine Seite gegeben sein.

Sind nach (2.) zwei Seiten und ein Winkel gegeben, so schließen entweder

- a) die Seiten den gegebenen Winkel ein, oder
- b) die Seiten schließen den gesuchten Winkel, oder
- c) die Seiten schließen den dritten Winkel ein.

Sind aber nach (3.) zwei Winkel und eine Seite gegeben, so liegt entweder

- a) die Seite zwischen den gegebenen Winkeln oder
- b) sie liegt zwischen dem gesuchten und einem gegebenen Winkel.

§. 105.

Nach diesen Bemerkungen werde ich hier im nachstehenden Verzeichniß die sogenannten analytischen Auflösungen, durch welche der vollständige Werth einer jeden trigonometrischen Linie aus den Theilen des sphärischen Dreiecks angegeben wird, aufstellen. Diese Werthe, welche sich bei analytischen Operationen sehr vortheilhaft gebrauchen lassen und oft zu sehr nützlichen Resultaten führen, sind aus den angeführten Lehrsätzen entweder unmittelbar oder vermittelst sehr einfacher Veränderungen hergeleitet worden.

$$1) \sin A = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin b} \quad (92.)$$

$$2) \sin A = \frac{\sin a \cdot \sin C}{\sin c} \quad (92.)$$

$$5) \sin B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin a} \quad (92.)$$

$$4) \sin B = \frac{\sin b \cdot \sin C}{\sin c} \quad (92.)$$

$$5) \sin C = \frac{\sin c \cdot \sin A}{\sin a} \quad (92.)$$

$$6) \sin C = \frac{\sin c \cdot \sin B}{\sin b} \quad (92.)$$

$$7) \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \quad (89.)$$

$$8) \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} \quad (89.)$$

$$9) \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} \quad (89.)$$

$$10) \cos A = \cos a \cdot \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C$$

$$11) \cos B = \cos b \cdot \cos A \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin C$$

$$12) \cos C = \cos c \cdot \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

$$13) \tan A = \frac{\sin B}{\sin c \cdot \cot a - \cos c \cdot \cos B} \quad (96. \text{ Anm. } 2.)$$

$$14) \tan A = \frac{\sin C}{\sin b \cdot \cot a - \cos b \cdot \cos C} \quad (96. \text{ Anm. } 2.)$$

$$15) \tan B = \frac{\sin A}{\sin a \cdot \cot b - \cos c \cdot \cos A} \quad (96. \text{ Anm. } 2.)$$

$$16) \tan B = \frac{\sin C}{\sin a \cdot \cot c - \cos c \cdot \cos C} \quad (96. \text{ Anm. } 2.)$$

$$17) \tan C = \frac{\sin A}{\sin b \cdot \cot c - \cos b \cdot \cos A} \quad (96. \text{ Anm. } 2.)$$

$$18) \tan C = \frac{\sin B}{\sin a \cdot \cot c - \cos a \cdot \cos B} \quad (96. \text{ Anm. } 2.)$$

$$19) \sin a = \frac{\sin A \cdot \sin b}{\sin B} \quad (95.)$$

$$20) \sin a = \frac{\sin A \cdot \sin c}{\sin C} \quad (95.)$$

$$21) \sin b = \frac{\sin B \cdot \sin a}{\sin A} \quad (95.)$$

$$22) \sin b = \frac{\sin B \cdot \sin c}{\sin C} \quad (95.)$$

$$23) \sin c = \frac{\sin C \cdot \sin a}{\sin A} \quad (95.)$$

$$24) \sin c = \frac{\sin C \cdot \sin b}{\sin B} \quad (95.)$$

$$25) \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C} \quad (90.)$$

$$26) \cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C} \quad (90.)$$

$$27) \cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B} \quad (90.)$$

$$28) \cos a = \cos A \cdot \sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c \quad (95. \text{ Ann. 1.})$$

$$29) \cos b = \cos B \cdot \sin a \cdot \sin c + \cos a \cdot \cos c \quad (95. \text{ Ann. 1.})$$

$$30) \cos c = \cos C \cdot \sin a \cdot \sin b + \cos a \cdot \cos b \quad (95. \text{ Ann. 1.})$$

$$31) \tan a = \frac{\sin b}{\sin C \cdot \cot A + \cos C \cdot \cos b} \quad (97. \text{ Ann. 1.})$$

$$32) \tan a = \frac{\sin c}{\sin B \cdot \cot A + \cos B \cdot \cos c} \quad (97. \text{ Ann. 1.})$$

$$33) \tan b = \frac{\sin a}{\sin C \cdot \cot B + \cos C \cdot \cos a} \quad (97. \text{ Ann. 1.})$$

$$34) \tan b$$

$$54) \operatorname{tang} b = \frac{\sin c}{\sin A \cdot \cot B + \cos A \cdot \cos c} \quad (97. \text{Ann. 1.})$$

$$55) \operatorname{tang} c = \frac{\sin a}{\sin A \cdot \cot C + \cos B \cdot \cos a} \quad (97. \text{Ann. 1.})$$

$$56) \operatorname{tang} c = \frac{\sin a}{\sin A \cdot \cot C + \cos A \cdot \cos a} \quad (97. \text{Ann. 1.})$$

Siebenter Abschnitt.

Einige Anwendungen schiefwinkliger sphärischer Dreiecke auf die
Lage der Weltkörper u.

§. 106.

Aufgabe. Aus den Abweichungen zweier Sterne und ihrer scheinbaren Weite von einander, die Differenz ihrer geraden Aufsteigungen zu berechnen.

Es mögen (Fig. 40.) A und B die Stellen zweier Sterne auf dem Theil der Himmelskugel bezeichnen, welche in der Figur durch PEQ abgebildet ist, ferner sei
P der Nordpol,

EQ der Aequator,

AB die scheinbare Weite beider Sterne,

AF die Abweichung des Sterns in A,

BG die Abweichung des Sterns in B; so ist, wenn man E als den Anfangspunct des Aequators betrachtet, FG die gesuchte Differenz der geraden Aufstei-

gungen beider Sterne. Dieser Bogen aber ist das Maß des Winkels APB oder P. Dieser Winkel kann nun aus den drei Seiten AP, BP und AB berechnet werden.

Es ist aber $AP = 90^\circ - AF$, $BP = 90^\circ - BG$ und AB ist die gegebene scheinbare Weite beider Sterne. Es sind demnach die drei Seiten bekannt, welche zur Berechnung des $\angle P$ dienen. Setzt man nun $AB = c$, $AP = b$ und $BP = a$; so ist $\cos P = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$ (89.)

$$\text{oder } \sin \frac{1}{2} P = \sqrt{\left(\frac{\sin \frac{1}{2}(c+a-b) \cdot \sin \frac{1}{2}(c+b-a)}{\sin a \cdot \sin b} \right)} \cdot (90).$$

Hat man auf diese Art die Größe des halben Winkels gefunden, so gibt das Doppelte davon den ganzen Winkel bei P, der in Graden, Minuten u. ausgedruckt, den verlangten Unterschied FG der geraden Aufsteigungen EF und EG ausmacht.

Es sei z. B. die scheinbare Weite zweier Fixsterne A und B von einander, $= 36^\circ 45'$, die nördliche Abweichung des einen in A, $= 9^\circ 15'$ und des andern in B, $= 40^\circ 21'$; so ist in der Figur, $AB = c = 36^\circ 45'$, $AP = b = 90^\circ - AF = 90^\circ - 9^\circ 15' = 80^\circ 45'$ und $BP = a = 90^\circ - GP = 90^\circ - 40^\circ 21' = 49^\circ 39'$. Nun setze man diese Zahlen an die Stelle der allgemeinen Größen in die vorhergehende Formel; so ist $\sin \frac{1}{2} P = \sqrt{\left(\frac{\sin \frac{1}{2}(36^\circ 45' + 49^\circ 39' - 80^\circ 45') \cdot \sin \frac{1}{2}(36^\circ 45' + 80^\circ 45' - 49^\circ 39')}{\sin 49^\circ 39' \cdot \sin 80^\circ 45'} \right)}$
 $= \sqrt{\left(\frac{r^2 (\sin 2^\circ 49' 30'' \cdot \sin 33^\circ 55' 30'')}{\sin 49^\circ 39' \cdot \sin 80^\circ 45'} \right)}$. Berechnet man diesen Ausdruck durch Logarithmen; so erhält man

$$\begin{aligned}
 \log r^2 &= 20,0000000 \\
 \log \sin 2^\circ 49' 30'' &= 8,6927198 \\
 \log \sin 55^\circ 55' 30'' &= 9,7467176 \\
 \log \text{ des Zählers } &= 38,4394374 \\
 \log \sin 49^\circ 59' &= 9,8820140 \\
 \log \sin 80^\circ 43' &= 9,9943156 \\
 \log \text{ des Nenners } &= 19,8763296 \\
 &2) 18,5631078 \\
 \log \sin \frac{1}{2} P &= 9,2815539.
 \end{aligned}$$

Dieser Logarithmus gehört zum Sinus eines Bogens von $11^\circ 1' 28''$. Folglich ist $P = 22^\circ 2' 54''$.

Zusatz. Wäre die Abweichung des einen Sterns nördlich, des andern südlich, so müßte man diese zu 90° addiren; wäre aber der eine Stern im Aequator, so würde die eine Seite des Dreiecks 90° sein und solches sich nach (73.) als ein rechtwinkliges berechnen lassen.

§. 107.

Aufgabe. Aus einem angenommenen Standpuncte G (Figur 21.) ist ein Winkel aufgenommen, dessen Schenkel durch Gegenstände D und E von verschiedener Höhe über dem Horizonte gehen; man fragt, um wie viel dieser von dem Horizontalwinkel AGC unterschieden sei.

Auflösung. Man nehme an, der Winkel DGE, dessen Schenkel durch die, in verschiedenen Höhen aufgesteckten Signale gehen, betrage $63^\circ 18' 12''$. Vermittelt eines Höheninstruments kann man nun auch leicht den Abstand der einvisirten Stellen vom Zenith B

finden und man setze $BD = 82^\circ 14' 18''$ und $BE = 79^\circ 16' 16''$; so ist der sphärische Winkel ABC der verlangte Horizontalwinkel, welcher den Bogen AC zum Maße hat und aus den drei Seiten $DE = \angle DGE$ (51. Nr. 5.), BD und BE berechnet werden kann. Es ist also hier

$$\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{r^2 \sin \frac{1}{2} (DE + BD - BE) \sin \frac{1}{2} (DE + BE - BD)}{\sin BD \cdot \sin BE}} \quad (90.)$$

daß ist nach den gegebenen Zahlen

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{r^2 \sin \frac{1}{2} (63^\circ 18' 12'' + 82^\circ 14' 18'' - 79^\circ 16' 16'')}{\sin 82^\circ 14' 18''}} \times \\ &\quad \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (63^\circ 18' 12'' + 79^\circ 16' 16'' - 82^\circ 14' 18'')}{\sin 79^\circ 16' 16''}} \\ &= \sqrt{\frac{r^2 \sin \frac{1}{2} (66^\circ 16' 14'') \sin \frac{1}{2} (60^\circ 20' 10'')}{\sin 82^\circ 14' 18'' \sin 79^\circ 16' 16''}}. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{array}{rcl} \log r^2 & = & 20,0000000 \\ \log \sin 53^\circ 8' 7'' & = & 9,7376836 \\ \log \sin 30^\circ 10' 5'' & = & 9,7011689 \\ & & \hline & & 39,4388525 \\ \log \sin 82^\circ 14' 18'' & = & 9,9960029 \\ \log \sin 79^\circ 16' 16'' & = & 9,9925410 \\ & & \hline & & 19,9885439 \\ & & \hline & & 2) 19,4505086 \end{array}$$

$$\log \sin \frac{1}{2} B = 9,7252545.$$

Der mit diesen Logarithmen zusammenhängende Sinus, stimmt mit einem Bogen von $\frac{1}{2} B = 32^\circ 5' 10''$, wovon das Doppelte $= 64^\circ 10' 21''$ ist, überein. Es betrüge demnach die Differenz zwischen dem durch Messung und dem hier auf den Horizont reducirten Winkel $52' 9''$.

Anmerkung. Wird mit Beibehaltung der andern Seiten, der durch unmittelbare Messung gefundene Winkel kleiner, so wird auch der Unterschied zwischen ihm und dem gesuchten Horizontalwinkel geringer. Beträgt jener 3. B

15°, so ist die gesuchte Differenz 6' 6'', indem der Horizontalwinkel $ABC = 14^{\circ} 55' 54''$ ist.

§. 108.

Aufgabe. Aus der gegebenen Abweichung der Sonne, ihrer Höhe über dem Horizonte und der Polhöhe, die Zeit des Tages zu finden, welche mit der gedachten Stellung der Sonne zusammen gehört.

Es sei (Fig. 41.) HBPQ der Meridian, HR der Horizont, EQ der Aequator dessen Nordpol P ist, und die Sonne habe ihren Standpunkt auf der Himmelskugel in A; so ist AF ihre Abweichung, AG ihre Höhe über dem Horizonte und PR die Polhöhe. Diese drei Stücke AF, AG und PR sind die ergänzenden Theile der drei Bogen AP, AB und BP, welche auf der Kugel ein sphärisches Dreieck bilden. Aus jenen gegebenen Stücken werden demnach auch diese bekannt. Denn es ist

$$AP = 90^{\circ} - AF,$$

$$AB = 90^{\circ} - AG \text{ und}$$

$BP = 90^{\circ} - PR$. Aus diesen drei Seiten AP, AB und BP kann man nun den W. BPA = P suchen und setzt man nun $AB = c$, $BP = a$ und $AP = b$; so ist

$$\sin \frac{1}{2} P = \sqrt{\left(\frac{r^2 \sin \frac{1}{2}(c+a-b) \cdot \sin \frac{1}{2}(c+b-a)}{\sin a \cdot \sin b} \right)} (90.)$$

Davon ist die logarithmische Gleichung $\log \sin \frac{1}{2} P = [(\log \sin \frac{1}{2}(c+a-b) + \log \frac{1}{2}(c+b-a) - (\log \sin a + \log \sin b)) : 2]$. Dieser Winkel P wird nun in Grad und Minuten etc. gefunden und muß dann in Zeit verwandelt werden.

Anmerkung 1. Soll die Abweichung der Sonne genau bekannt sein, so setzt diese Angabe die gesuchte Zeit schon voraus, weil man eigentlich diejenige Abweichung kennen muß, welche die Sonne nicht zur Mittagszeit, sondern im Augenblicke der anzustellenden Beobachtung hat. Daher nimmt man die Abweichung anfänglich nur beiläufig an, und sucht die fehlende Genauigkeit durch eine zu wiederholende Anwendung, der in der Auflösung gegebenen Vorschriften, zu berichtigen.

Es sei z. B. die Polhöhe von Berlin d. i. $PR = 52^{\circ} 31' 44''$, die Abweichung der Sonne, wie am 18. April 1811, zur Mittagszeit $AF = 10^{\circ} 35' 38''$, ihre Höhe $AG = 38^{\circ} 16' 32''$; man fragt, zu welcher Zeit die Sonne die gedachte Höhe an diesem Tage erreicht habe.

Die gegebenen Stücke sind, wie gesagt, die ergänzenden Theile der drei Seiten AB , AP und BP des Dreiecks ABP , zu 90° . Es ist also

$$AB = 90^{\circ} - AG = 90^{\circ} - 38^{\circ} 16' 32'' = 51^{\circ} 43' 28''$$

$$AP = 90^{\circ} - AF = 90^{\circ} - 10^{\circ} 35' 38'' = 79^{\circ} 24' 22'' \text{ und}$$

$$BP = 90^{\circ} - PR = 90^{\circ} - 52^{\circ} 31' 44'' = 37^{\circ} 28' 16''.$$

Es ist aber im Dreiecke ABP (nach 89.)

$$\cos APB = \frac{\cos AB - \cos BP \cdot \cos AP}{\sin BP \cdot \sin AP}; \text{ oder}$$

$$\sin \frac{1}{2} P = \sqrt{\left(\frac{\sin \frac{1}{2}(AB+BP-AP) \cdot \sin \frac{1}{2}(AB+AP-BP)}{\sin BP \cdot \sin AP} \right) (90.)};$$

oder in Zahlen mit Rücksicht auf den $\sin$. tot. tab. und weil dieses bloß zur vorläufigen Berechnung dienen soll, mit Weglassung der bei den angegebenen Zahlen, bemerkten Secunden, $\sin \frac{1}{2} P =$

$$\sqrt{\left(\frac{r^2 \sin \frac{1}{2}(51^{\circ} 43' + 37^{\circ} 28' - 79^{\circ} 24') \sin \frac{1}{2}(51^{\circ} 43' + 79^{\circ} 24')}{\sin 37^{\circ} 28' \sin 79^{\circ} 24'} \right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{r^2 (\sin 4^{\circ} 53' 30'' \cdot \sin 46^{\circ} 49' 30'')}{(\sin 37^{\circ} 28' \sin 79^{\circ} 24')} \right)}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
 \log r^2 &= 20, \\
 \log \sin 4^\circ 55' 30'' &= 8,9508065 \\
 \log \sin 46^\circ 49' 30'' &= 9,8628867 \\
 \text{Logar. des Zählers} &= 58,7956752 \\
 \log \sin 37^\circ 28' &= 9,7841177 \\
 \log \sin 79^\circ 24' &= 9,9925250 \\
 \text{Logar. des Nenners} &= 19,7766427 \\
 \log \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} P^2 &= 19,0170505 \\
 \log \frac{1}{2} \sin P &= 9,5085252 = \log \sin 18^\circ 49' \text{ beinahe, wovon das Doppelte d. i. } P, 37^\circ 58' \text{ beträgt.} \\
 \text{Verwandelt man diesen Bogen in Zeit; so erhält man} \\
 2 \text{ Stunden } 30 \text{ Minuten } 39 \text{ Sekunden.}
 \end{aligned}$$

Anmerkung 2. Durch dieses vorläufige Resultat wird man nun in den Stand gesetzt, die obige Aufgabe mit mehrerer Genauigkeit aufzulösen, indem man nur die Differenz der Abweichungen am gegebenen hier am 18ten und am vorhergehenden Tage, hier am 17ten April d. g. J. das heißt $10^\circ 35' 38'' - 10^\circ 14' 30'' = 21' 10''$ nimmt, zu 24 Stunden zur gefundenen Zeit und gedachten Differenz die vierte Proportionalzahl sucht, welche hier $2' 13''$ ist, diese von $10^\circ 35' 38''$ abzieht und dadurch die berichtigte Abweichung, nemlich $10^\circ 33' 25''$ erhält. Mit dieser Abweichung und den in der Aufgabe bis auf Sekunden gegebenen Stücken, stelle man noch einmahl die geführte Berechnung an; so erhält man den gesuchten Winkel und also die verlangte Zeit viel genauer. Diese Rechnung kommt mit den gedachten Abänderungen auf folgende Art zu stehen. Es ist

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{1}{2} P &= r \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (51^\circ 45' 28'' + 37^\circ 28' 16'' - 79^\circ 26' 55'')}{\sin 37^\circ 28' 16''} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (51^\circ 45' 28'' + 79^\circ 26' 55'' - 37^\circ 28' 16'')}{\sin 79^\circ 26' 55''}} \\
 &= \sqrt{\frac{r^2 (\sin 4^\circ 52' 34\frac{1}{2}'') \cdot (\sin 41^\circ 50' 58\frac{1}{2}'')}{\sin 37^\circ 28' 16'' \sin 79^\circ 26' 55''}}. \quad \text{Dieser} \\
 &\text{Ausdruck durch Logarithmen berechnet, gibt}
 \end{aligned}$$

$$\log r^2 = 20,$$

$$\log \sin 4^\circ 52' 54\frac{1}{2}'' = 8,9294389$$

$$\log \sin 46^\circ 50' 58\frac{1}{2}'' = 9,8630614$$

$$\text{Logar. des Zählers} = 38,7925003$$

$$\log \sin 37^\circ 28' 16'' = 9,7841616$$

$$\log \sin 79^\circ 26' 55'' = 9,9925859$$

$$\text{Logar. des Nenners} = 19,7767475$$

$$2) 19,0157528$$

$$\log \sin \frac{1}{2} P = 9,5078764 = \log \sin 80^\circ$$

47' 5". Nimmt man nun diesen Bogen doppelt, so erhält man einen Bogen von 37° 34' 10". Verwandelt man diesen Bogen in Zeit, so erhält man 2 St. 30 Min. 50 Sec. Ziehst man diese von der Mittagszeit, d. h. von 12 Uhr ab, so findet man die mit der Sonnenhöhe zusammengehörige Zeit und es steht daher die Sonne um 9 Uhr 20 Min. 10 Sec. in der gegebenen Höhe von 38° 16' 32" über dem Horizont.

Anmerkung 3. Es kann aber auch die Auflösung dieser Aufgabe aus der (97. Anm. 2. Auf.) angeführten Proportion hergeleitet werden, nach welcher, wenn man aus B den Bogen BD senkrecht auf AP setzt, sich in (Fig. 40.)

$$\cot \frac{1}{2} (BP + BA) : \tan \frac{1}{2} (BP - BA) = \cot \frac{1}{2} AP : \tan \frac{1}{2} (PD - AD) \text{ verhält, folglich ist}$$

$$\tan \frac{1}{2} (PD - AD) = \frac{\cot \frac{1}{2} AP \cdot \tan \frac{1}{2} (BP - BA)}{\cot \frac{1}{2} (BP + BA)}$$

Hieraus ergibt sich also die halbe Differenz der beiden Abschnitte PD und AD. Ihre Summe aber ist auch bekannt und durch die Seite AP gegeben. Aus der halben Summe und halben Differenz kann man nun die Abschnitte AD und PD selbst berechnen. Alsdann erhält man aus AD und AB in dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke

$$\cos A = \cot AP \cdot \cot (90^\circ - AD) \quad (73. \text{Nr. 5.}) =$$

$$\cot AB \tan AD = \frac{\tan AD}{\tan AB}.$$

§. 109.

Aufgabe. Aus der Abweichung der Sonne, der Zeit des Tages und der Polhöhe eines Ortes, die Sonnenhöhe über dem Horizont zu finden.

Es sei (Fig. 41.) in A die Sonne

der Aequator = EQ,

der Horizont = HR,

ein Scheitelfreis durch A, = BG,

der Abweichungskreis = PF; so ist die Abweichung der Sonne, = AF, die Polhöhe = PR, F der Punct des Aequators EQ, der mit dem Mittelpuncte der Sonne A zugleich culminirt, folglich EF der Zeitbogen, auf dem Aequator gerechnet, welcher das Maß des Winkels APB ist. Es kommt daher hier auf die Auflösung des sphärischen Dreiecks APB an, in welchem aus den beiden Seiten PA und PB nebst dem eingeschlossenen Winkel APB die dritte Seite AB berechnet werden soll, welche von 90° abgezogen, die verlangte Sonnenhöhe AG gibt, d. h. es ist $AG = 90^\circ - AB$.

Aus der gegebenen Polhöhe PR erhält man BP, weil $PB = 90^\circ - PR$ ist. So ist auch durch die Abweichung AF, der Bogen AP bekannt, indem $AP = 90^\circ - AF$ ist. Der Punct F aber durchläuft den Bogen des Aequators EF, während der Zeit, welche die Sonne nöthig hat, um aus dem Punct A in den Meridian HEPQH zu kommen. Verwandelt man die gegebene Zeit in Bogen des Aequators, so gibt derselbe die Größe des Winkels bei P an. Nun ziehe man aus der Spitze B auf AP einen Bogen lothrecht

herab; so wird man dessen Lage aus den Umständen leicht beurtheilen können. Es ist aber $\text{tang PD} = \text{tang BP} \cdot \cos P$ (73.) Aus PD läßt sich nun der andere Abschnitt bestimmen. Sind nun die Abschnitte bekannt; so ist $\cos AB = \frac{\cos BP \cdot \cos AD}{\cos PD}$. Zieh

man nun AB von 90° ab, so gibt der Rest die gesuchte Sonnenhöhe an.

Beispiel. Wie hoch steht die Sonne am 6ten August des Morgens um 9 Uhr über dem Horizonte, wenn die Polhöhe des Beobachtungsortes $52^\circ 31'$, und die nördliche Abweichung $16^\circ 49'$ beträgt?

Es ist demnach $AF = 16^\circ 49'$, folglich $AP = 90^\circ - 16^\circ 49' = 73^\circ 11'$. Die Polhöhe ist $52^\circ 31'$, folglich $PB = 90^\circ - 52^\circ 31' = 37^\circ 29'$. Da nun von 9 Uhr bis zur Mittagszeit, wenn die Sonne culminirt, drei Stunden verfließen; so machen diese, in Bogen des Aequators verwandelt 45° und dieser Bogen mißt den Winkel bei P.

Nun ist nach der obigen Formel die Tangente des einen Abschnittes, d. i. $\text{tang PD} = \text{tang BP} \cdot \cos P$, oder vermittelt der Logarithme

$$\log \text{tang BP} = \log \text{tang } 37^\circ 29' = 9,8847189$$

$$\log \cos P = \log \cos 45^\circ = 9,8494850$$

$$19,7341959$$

$$10,$$

$$\log \text{tang PD} = 9,7341959$$

Zu diesem Logar. gehört zunächst der Bogen von $28^\circ 25'$. Da nun PD bekannt ist; so ist dadurch auch der andere Abschnitt nemlich AD gefunden. Er ist $73^\circ 11'$ — $28^\circ 28' = 44^\circ 45'$.

Nun sind auch die zur Berechnung der zweiten Formel erforderlichen Stücke bekannt. BP ist die Ergänzung der Polhöhe zu 90° , folglich $= 37^\circ 29'$; AD ist durch PD bestimmt und beträgt $44^\circ 43'$ und PD macht nach der vorigen Formel $28^\circ 28'$. Hieraus kann man die Seite AB nach der Formel

$$\cos AB = \frac{\cos BP \cdot \cos AD}{\cos PD} \text{ vermittlest der Logarithmen}$$

auf folgende Art berechnen. Es ist

$$\log \cos BP = \log \cos 37^\circ 29' = 9,8995636$$

$$\log \cos AD = \log \cos 44^\circ 43' = 9,8516220$$

$$19,7511856$$

$$\log \cos PD = \log \cos 28^\circ 28' = 9,9440356$$

$$\log \cos AB = 9,8071500.$$

Hierzu gehört die Zahl $50^\circ 7'$. Zieht man nun diese Zahl von 90° ab, so erhält man $AD = 39^\circ 53'$, wodurch die Höhe der Sonne für die gegebene Zeit gefunden ist.

Anmerkung. Bei einer genauern Berechnung müßte man die Abweichung aus der Differenz der Abweichung am gegebenen und nächst vorhergehenden Tage zu bestimmen suchen. N. f. (108. Anm. 2.)

§. 110.

Aufgabe. Aus der gegebenen Länge und Breite zweier Orter auf der Oberfläche der Erde, ihre Entfernung von einander zu finden.

Es mögen (Fig. 42.) A und B zwei Orter auf der Oberfläche der Erde sein, EPQpE der erste Meridian, PBGP der Meridian des Ortes B und PAFp der Meridian des Ortes A, und EFGQ der Aequator;

so ist die Länge des Ortes A, = EF,

die Länge des Ortes B, = EG, folglich EG — EF = GF und GF das Maß des Winkels bei P.

Ferner ist die Breite des Ortes A, = AF und

die Breite des Ortes B, = BG.

Zieheth man nun sowohl AF als BG von 90° ab; so erhält man AP und BP, und da der Winkel bei P auch bekannt ist; so sind in dem Dreiecke ABP die Seiten BP und AP und der eingeschlossene Winkel bei P gegeben. Aus diesen Stücken aber läßt sich die Seite AB berechnen, welche die gesuchte Entfernung der beiden Orter A und B ist. Denn man fälle aus B einen Perpendikel auf AP, so ist $\cos P = \cot BP \cdot \tan PD$ (73. Nr. 6.) oder $\tan PD = \cos P \cdot \tan BP$. Ferner $AD = AP - PD$ und $\cos AB = \frac{\cos AD \cdot \cos BP}{\cos PD}$ (87. II.).

Beispiel 1. Die Länge und Breite von Berlin und Genua sind gegeben; man fragt, wie weit diese Stadt von jener entfernt sei.

Es sei die Länge von Berlin 51° 3'

die Länge von Genua 26° 16'

die Breite von Berlin 52° 31'

die Breite von Genua 44° 25';

so ist unter dieser Voraussetzung AF = 44° 25' und BG = 52° 31', folglich ist alsdann AP = PF — AF = 90° — 44° 25' = 45° 35'; BP = GP — BG = 90° — 52° 31' = 37° 29'. Der Winkel bei P wird durch den Bogen FG = EG — EF gemessen. Es ist aber EG = 51° 3' und EF = 26° 16', folglich EG — EF = 51° 3' — 26° 16' = FG = 4° 47' = P.

Setzt man nun diese Werthe in die erste Formel; so erhält man $\text{tang PD} = \cos 4^\circ 47' \cdot \text{tang } 37^\circ 29'$ und in Logarithmen

$$\begin{array}{r} \log \cos 4^\circ 47' = 9,9984848 \\ \log \text{tang } 37^\circ 29' = 9,8847189 \\ \hline 19,8852037 \\ 10, \\ \hline \log \text{tang PD} = 9,8852037. \end{array}$$

Hierzu gehört die Zahl $37^\circ 25'$.

Nun ist $AP = 45^\circ 35'$, $DP = 37^\circ 25'$, folglich $AP - DP = 45^\circ 35' - 37^\circ 25' = 8^\circ 10' = AD$.

Es ist aber $\cos AB = \frac{\cos 8^\circ 12' \cdot \cos 37^\circ 29'}{\cos 37^\circ 23'}$.

Dieses durch Logar. ausgedruckt, gibt

$$\begin{array}{r} \log \cos 8^\circ 12' = 9,9955370 \\ \log \cos 37^\circ 29' = 9,8995636 \\ \hline 19,8951006 \\ \log \cos 37^\circ 23' = 9,9001438 \\ \hline \log \cos AB = 9,9949568. \end{array}$$

Hierzu gehört zunächst die Zahl $8^\circ 45'$, welche die Entfernung der gegebenenörter ausdrückt und indem man 15 Meilen auf einen Grad rechnet, 131 Meilen beträgt.

Beispiel 2. Die Länge und Breite von Berlin und Moskau sind bekannt; wie weit ist dieser Ort von jenem entfernt?

Es sei die Länge von Berlin $= 31^\circ 2' 15''$

die Länge von Moskau $= 55^\circ 12' 45''$

die Breite von Berlin $= 52^\circ 31' 44''$

die Breite von Moskau $= 55^\circ 45' 45''$;

so ist in der Figur, wenn durch E der erste Meridian

PEPQP geht, und A und B die beiden Stellen für Berlin und Moskau bezeichnen, die Länge von Berlin $EF = 31^{\circ} 2' 15''$, die Breite dieses Ortes $AF = 52^{\circ} 31' 44''$, die Länge von Moskau $EG = 55^{\circ} 12' 45''$, die Breite dieses Ortes $GB = 55^{\circ} 45' 45''$. Folglich $GE - FE = FG$ d. i. $55^{\circ} 12' 45'' - 31^{\circ} 2' 15'' = 24^{\circ} 10' 30''$, welcher Bogen das Maß des sphärischen Winkels BPA ist.

Ferner ist die Seite $AP = 90^{\circ} - AF = 90^{\circ} - 52^{\circ} 31' 44'' = 37^{\circ} 28' 16''$ und endlich die Seite $BP = 90^{\circ} - BG = 90^{\circ} - 55^{\circ} 45' 45'' = 34^{\circ} 14' 15''$. Diese beiden Seiten schließen den vorhin gedachten Winkel bei P ein. Es kommt also hier auch auf die Auflösung des $\triangle APB$ aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel an (95.). Denn es ist nach der obigen Vorschrift $\tan PD = \cos 24^{\circ} 10' 30'' \cdot \tan 34^{\circ} 14' 15''$. Durch Logarithmen berechnet ist demnach

$$\log \cos 24^{\circ} 10' 30'' = 9,9601372$$

$$\log \tan 34^{\circ} 14' 15'' = 9,8528642$$

$$19,7930014$$

$$10,$$

$$\log \tan PD = 9,7930014 = \log$$

$\tan 31^{\circ} 50' 6''$. Folglich ist $AD = AP - PD =$

$37^{\circ} 28' 16'' - 31^{\circ} 50' 6'' = 5^{\circ} 38' 10''$. Nun ist

$$\cos AB = \frac{\cos 5^{\circ} 38' 10'' \cdot \cos 34^{\circ} 14' 15''}{\cos 31^{\circ} 50' 6''}. \text{ Dieser}$$

Ausdruck durch Logarithmen berechnet, wird auf folgende Art geordnet. Es ist $\log \cos 5^{\circ} 38' 10'' = 9,9978954$

$$\log \cos 34^{\circ} 14' 15'' = 9,9173545$$

$$19,9152499$$

$$\log \cos 31^{\circ} 50' 6'' = 9,9291995$$

$$\log \cos AB = 9,9860504$$

$= \log \cos 14^\circ 26' 39''$. Rechnet man nun 15 geogr. Meilen auf einen Grad; so erhält man für die gesuchte Weite 216,66 Meilen.

Zusatz. Liegen die gegebenen Derter unter demselben Mittagskreise; so darf man nur den Unterschied ihrer Breite in Meilen verwandeln, um die Entfernung derselben von einander anzugeben.

§. 111.

Aufgabe. Aus der Schiefe der Ekliptik, der Abweichung und geraden Aufsteigung eines Sterns, seine Länge und Breite zu finden.

Auflösung. Man entwerfe sich zuerst eine Figur, in welcher die gegebenen von den gesuchten Stücken deutlich von einander können unterschieden werden, und nehme anfänglich dabei an, daß die Sonne sich in der nördlichen Halbkugel des Himmels befinde. Besonders ist die Stellung der Sonne im ersten Quadranten sehr geschickt, doch nicht nothwendig, die vorgelegte Aufgabe in ihrer Allgemeinheit aufzulösen, weil man dadurch im Stande ist, die hier angenommenen Vorschriften auf jeden andern Fall anzuwenden, wenn man nur die nöthigen Veränderungen mit den trigonometrischen Linien vornimmt. Es sei daher (Fig. 43.)

die Stelle eines Sterns in A
 der Aequator = EQ und dessen Pol in P
 die Ekliptik = KL und deren Pol in B
 ein Breitenkreis durch A, = BF
 ein Declinationskreis durch A = PG und KBPQ
 stelle den Colurus der Sonnenstillstandspuncte vor,
 welcher

welcher durch die Endpunkte des ersten und dritten Quadranten des Aequators und der Ekliptik geht. Alsdann druckt WF, nach der Ordnung der Zeichen genommen, die gesuchte Länge und AF die verlangte Breite aus.

I. Es ist aber $BW = WP = 90^\circ$, folglich $\angle WBP = WPB = 90^\circ$. Der Bogen WG aber bezeichnet die gerade Aufsteigung und AG die Abweichung, folglich ist $\angle APB = WPB - WPG = 90^\circ - WPG = 90^\circ - WG$ d. i. $= 90^\circ -$ der geraden Aufsteigung und $PA = PG - AG = 90^\circ - AG = 90^\circ -$ der Abweichung. Es beruhet also die ganze Aufgabe auf der Auflösung des Dreiecks ABP. Da nun in diesem Dreiecke die beiden Seiten PA und PB und der eingeschlossene Winkel APB bekannt sind; so kann man daraus die dritte Seite BA berechnen, deren Ergänzung zu 90° die verlangte Breite AF ist. Zur Bestimmung dieser Seite gelangt man, wenn man von B auf AP einen Perpendikel BD herabläßt, durch folgende oben festgesetzte Gleichungen. Es ist nemlich 1) $\text{tang } PD = \cos APB \cdot \text{tang } PB$ (73. No. 6.). Folglich ist $AD = AP - PD$ und 2) $\cos AB = \frac{\cos BP \cdot \cos AD}{\cos DP}$ (82. II.), also $AF = 90^\circ - AB$

d. i. die gesuchte Breite.

II. Zur Bestimmung der Länge darf man nur die Größe des Bogens LF, von Abend gegen Morgen gerechnet, angeben. Dieser Bogen leidet mancherlei Abänderungen, je nachdem die Länge des Sterns im ersten oder zweiten, im dritten oder vierten Quadranten

M

ist, und sie kommt in ihrer Lage in Hinsicht des Quadranten mit der geraden Aufsteigung überein. Um aber den Bogen WF zu finden, berechne man aus der gefundenen Seite und den gegebenen Stückchen, den $\angle$ PBA des sphärischen $\triangle$ APB, nehme dessen Ergänzungswinkel FBL, dessen Maß der Bogen FL ist, durch den alsdann der Bogen WF, d. i. die Länge des Sterns angegeben wird. Es ist aber

$$1) \cot PBD = \cos PB \cdot \tan BPD \quad (75. \text{No. 6.})$$

$$2) \cos DBA = \frac{\cos DPB \cdot \tan BP}{\tan AB} \quad (88. \text{II.})$$

$$3) \angle ABP = ABD + DBP \text{ und}$$

$$4) \angle FBL = 180^\circ - ABP.$$

Beispiel. Die nördliche Abweichung eines Sterns betrage $58^\circ 56'$, seine gerade Aufsteigung $277^\circ 33'$ und die Schiefe der Ekliptik $23^\circ 28'$; man soll die Länge und Breite des Sterns in A, angeben. Zur Bestimmung der Breite, bediene man sich der Formeln bei I. und der Länge, der Formeln bei II.

Der $\angle$ APB wird durch GQ gemessen und es ist $GQ = 277^\circ 33' - 270^\circ = 7^\circ 33'$ und $BP = 23^\circ 28'$. Daher gibt die Formel 1) durch Logarithmen ausgedruckt:

$$\log \cos APB = \log \cos 7^\circ 33' = 9,9962185$$

$$\log \tan BP = \log \tan 23^\circ 28' = 9,6376106$$

$$\hline 19,6338291$$

$$10,$$

$$\log \tan PD = 9,6338291$$

$$= \log 23^\circ 17' \text{ beinahe. Es macht demnach der Bogen}$$

von $23^{\circ} 17'$ den Abschnitt PD aus. Allein AG ist die gegebene Abweichung, $= 38^{\circ} 36'$. Zieheth man nun diese von 90° ab d. i. $90^{\circ} - 38^{\circ} 36' = 51^{\circ} 24'$; so ist diese Zahl die Seite AP. Also erhält man $AD = AP - PD = 51^{\circ} 24' - 23^{\circ} 17' = 28^{\circ} 7'$. Daher sind jetzt die beiden Abschnitte der Grundlinie im $\triangle ABP$ bekannt. Daraus und vermittelst der andern bekannten Stücke, kann man nun aus 2) bei I. die dritte Seite AB berechnen, indem $\cos AB = \frac{\cos BP \cdot \cos AD}{\cos DP}$ ist.

Es ist aber

$$\log \cos BP = \log \cos 23^{\circ} 28' = 9,9625076$$

$$\log \cos AD = \log \cos 28^{\circ} 7' = 9,9454636$$

$$\text{Summe} = 19,9079712$$

$$\log \cos DP = \log \cos 23^{\circ} 17' = 9,9631082$$

$$\log \cos AB = 9,9448630$$

$= \log \cos 28^{\circ} 16'$ beinahe, welches also der Logarithmus des Cosinus der gesuchten Seite AB ist. Zieheth man diese von $BF = 90^{\circ}$ ab, so ist $90^{\circ} - AB = 90^{\circ} - 28^{\circ} 16' = 61^{\circ} 44' = AF$ d. i. $=$ der gesuchten Breite des Sterns in A.

Nun folgt die Bestimmung der Länge. Man hat aber aus 1) bei II.

$$\log \cos PB = \log \cos 23^{\circ} 28' = 9,9625076$$

$$\log \tan BPD = \log \tan 7^{\circ} 33' = 9,1185667$$

$$\text{Summe der Log.} = 19,0810743$$

$$\log r = 10,$$

$$\log \cot PBD = 9,0810743$$

$= \log \cot 83^{\circ} 8'$ beinahe. Wegen der andern Gleichung

M 2

in II. nemlich $\cos ABD = \frac{\cos BPD \cdot \tan BP}{\tan AB}$, ist

$$\log \cos BPD = \log \cos 85^\circ 8' = 9,0775832$$

$$\log \tan BP = \log \tan 25^\circ 28' = 9,6376106$$

$$\text{Summe der Log.} = 18,7151938$$

$$\log \tan AB = \log \tan 28^\circ 16' = 9,7505554$$

$$\log \cos ABD = 8,9846584$$

$= \log \cos 84^\circ 28'$ beinahe. Diese Zahl gibt also die Größe des Winkels ABD an. Nach 3) bei I. aber ist $ABP = ABD + DBP = 84^\circ 28' + 85^\circ 8' = 169^\circ 36'$. Dieses Bogens Ergänzung zu 180° ist $= 12^\circ 24'$. Also die Länge des Sterns in A, $= 270^\circ + 12^\circ 24' = 282^\circ 24'$.

Zusatz 1. Stünde der Stern im Aequator, z. B. in G; so wäre seine Abweichung $= 0$, die gerade Aufsteigung aber der Bogen WG, die Schiefe der Ekliptik der $\angle$ LWG und bei G d. i. WGH ein rechter Winkel und man hätte nur nöthig das rechtwinklige Dreieck WGL aus den genannten Stücken aufzulösen, wodurch man die Breite des Sterns HG und seine Länge WH bestimmen könnte.

Zusatz 2. Vergleicht man nun die Seiten und Winkel des sphär. $\triangle ABP$ mit einander, so wird man leicht finden, daß die sechs Stücke: Länge, Breite, Abweichung, gerade Aufsteigung, Schiefe der Ekliptik und der $\angle$ bei A, d. i. derjenige, welchen der Abweichungs- und Breitenkreis bei A einschließen (Positionswinkel), in einer solchen Verbindung mit einander stehen, daß man aus drei derselben die übrigen Stücke herleiten kann; wenn man nur erwägt, daß AB, AP der Winkel PBA

und APB die ergänzenden Theile der Abweichung, der Breite, der Länge und der geraden Aufsteigung vom Colurus der Sonnenwende an gerechnet sind; BP aber die Schiefe der Ekliptik und der Winkel bei P den Positionswinkel bezeichnet.

Anmerkung 1. Unter den in (96.) gegebenen Auflösungen, verdient besonders die in (Anm. 2.) bemerkt zu werden, weil man durch die andern, leicht zu bedeutenden Fehlern verleitet werden kann, zumahl wenn die Figur nicht in jedem besondern Falle nach der Lage des Quadranten verzeichnet worden ist. Bei dieser Auflösung aber darf man nur die trigonometrischen Linien, mit den ihnen zugehörigen Vorzeichen verbinden und bemerken, daß wenn sich die gerade Aufsteigung des Sterns im ersten oder vierten Quadranten befindet, seine Länge nicht im zweiten oder dritten sein kann und wieder, wenn die gerade Aufsteigung in diesen ist, seine Länge nicht in jenen sein kann. Wendet man nun die in (96. Anm. 2.) gefundene Auflösung, auf das $\triangle ABP$ mit Rücksicht auf die Lage der gegebenen und gesuchten Stücke an, so erhält man 1) zur Bestimmung der Länge

$$\begin{aligned} \text{tang PBA} &= \frac{\sin APB}{\sin BP \cdot \cot AP - \cos PB \cdot \cos APB} \quad \text{oder} \\ \cot ABP &= \frac{\sin BP \cdot \cot AP - \cos PB \cdot \cos APB}{\sin APB} \\ &= \frac{\sin BP \cdot \cot AP}{\sin APB} - \cos BP \cdot \cot APB. \end{aligned}$$

Hierbei kann man nun bemerken, daß $\cot APB = \cot (90^\circ - \text{VPG}) = \cot 90^\circ - \text{VG d. i.} - \cot 90^\circ - \text{der ger. Aufst.}$. Wäre APB ein stumpfer Winkel; so hätte man auch $\cot APB = (\cot 90^\circ + \text{der ger. Aufst.})$. Damit man nun nicht immer genöthigt ist, sich an die Figur zu binden, so drücke man die Werthe der vorigen Gleichung, durch die ihnen in der Aufgabe beigelegten Benennungen aus, und ändere, wie gesagt, nach dem Quadranten,

auch die Vorzeichen der trigonometr. Linien. Alsdann ist

$$\text{tang Länge} = \frac{\sin \text{der Schiefe} \cdot \text{tang Abw.}}{\cos \text{ger. Aufst.}} + \cos \text{Schiefe.}$$

$$\text{tang ger. Aufst.} = \cos \text{Schiefe der Ekliptik} \cdot \text{tang ger. Aufst.}$$

$$\left(\frac{\text{tang Schiefe} \cdot \text{tang Abw.}}{\sin \text{ger. Aufst.}} + 1 \right). \text{ Dieser Ausdruck ist}$$

zur Berechnung bequemer, als jener.

Zur Berechnung des gefundenen Werthes mit Logarithmen, kann man denselben in zwei andere Gleichungen auflösen, nemlich 1) in

$$\text{tang } \beta = \sqrt{\left(\frac{\text{tang Schiefe d. Ekl.} \cdot \text{tang Abw.}}{\sin \text{ger. Aufst.}} \right)} \text{ und 2) in}$$

$$\text{tang Länge} = \frac{\cos \text{Schiefe} \cdot \text{tang ger. Aufst.}}{\cos \beta^2}.$$

Zur Bestimmung der Breite als des zweiten Theiles dieser Aufgabe, kann man die in der (Anm. 1. 95.) gegebene zweite Auflöf. der in (95.) vorgetragenen Aufg. nehmen, und zwar um so viel mehr, weil hier, einen Logar. ausgenommen, dieselben Logar. gesucht werden, welche bei der Berechnung der Länge vorkommen. Wendet man daher jenen Ausdruck auf dieses $\triangle APB$ an; so erhält man $\cos AB =$

$\cos BP \cdot \cos AP + \sin BP \cdot \sin AP \cdot \cos APB$. Wäre nun hier APB ein stumpfer Winkel, so würde der letzte Theil der Gleichung das Vorzeichen (—) erhalten. Setzt man also mit Rücksicht auf den letztern Umstand, anstatt der Werthe, ihre Benennungen in die Gleichung, so darf man in allen Fällen bloß das Vorzeichen der trigonometrischen Linien abändern. Alsdann erhält man

$$\begin{aligned} \sin Br. &= \cos \text{Schiefe d. Ekl.} \cdot \sin \text{Abw.} - \sin \text{Schiefe.} \\ &\quad \cos \text{Abw.} \cdot \sin \text{ger. Aufst.} \\ &= \cos \text{Schiefe d. Ekl.} \cdot \sin \text{Abw.} (1 - \text{tang Schiefe} \\ &\quad \text{d. Ekl.} \cdot \cot \text{Abw.} \sin \text{ger. Aufst.}). \end{aligned}$$

Zur Berechnung dieser Werthe mit Logarithmen setze man

$$\text{tang } \gamma = \sqrt{1 - \text{tang Schiefe} \cdot \cot \text{Abw.} \sin \text{ger. Aufst.}}$$

$$\sin \text{Breite} = \frac{\cos \text{Schiefe} \cdot \sin \text{Abw.}}{\cos \gamma^2}.$$

Anmerkung 2. Aus dem (2. Zus. 111.) ersieht man, daß man aus der gegebenen Länge und Breite eines Sterns nebst der Schiefe der Ekliptik, die Abweichung und gerade Aufsteigung desselben finden kann. Nur ist zu bemerken, daß man von dieser Aufgabe in der Astronomie nicht so häufigen Gebrauch macht, als von der vorigen, welche auch besonders dazu dient, die in der Nähe der Ekliptik befindlichen Fixsterne nach ihrer Länge und Breite zu berechnen. Man hat aber auch überhaupt diese Berechnungen in Verzeichnisse gebracht und sie mit in die astronomischen Tafeln aufgenommen.

§. 112.

Aufgabe. Auf der Erdoberfläche sind Behufs einer Landesvermessung, zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel vermessen, und die dritte Seite daraus nach den Grundsätzen der ebenen Trigonometrie berechnet worden; man fragt, wie groß diese Seite sei, wenn man die durch unmittelbare Messung gefundenen Stücke, wegen der Gestalt der Erde, als Theile eines sphärischen Dreiecks betrachten will.

Erläuterung. Bei geographischen Vermessungen liegen die Schenkel der Winkel in Vertical-Ebenen und die Visirlinien sind daher Tangenten, welche die Größe des sphärischen Winkels, von dessen Scheitelpunct sie ausgehen, genau angeben. Die in der Richtung der Visirlinien ausgestreckten und gemessenen Schenkel, sind eigentlich Bogen größter Kreise auf der Erdoberfläche, die nach Graden, Minuten u. 15 Meilen auf einen Grad gerechnet, müssen ausgedruckt werden.

Nun sei (Fig. 39.) ABC ein sphär. Dreieck, dessen Seiten und Winkel, d. h. $AB = c$, $AC = b$ und BAC gemessen worden sind, in welchem man bei dieser Untersuchung die Seiten AB , AC von gleicher Größe annehmen kann. Alsdann ist

$$\sin \frac{1}{2} a = \sin \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} b. \text{ Denn es ist}$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b^2}{\sin b^2}, \text{ weil } b = c \text{ ist.}$$

$$\cos a = \cos A \sin b^2 + \cos b^2. \text{ Es ist aber}$$

$$2 \sin \frac{1}{2} A^2 = 1 - \cos A$$

$$\cos A = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} A^2 \text{ und daher}$$

$$\cos a = (1 - 2 \sin \frac{1}{2} A^2) \sin b^2 + \cos b^2 \text{ oder}$$

$$\cos a = \sin b^2 + \cos b^2 - 2 \sin \frac{1}{2} A^2 \sin b^2 \text{ oder}$$

$$\cos a = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} A^2 \sin b^2, \text{ weil } \sin b^2 + \cos b^2 = 1 \text{ ist.}$$

$$1 - \cos a = 2 \sin \frac{1}{2} A^2 \sin b^2. \text{ Es ist aber}$$

$$1 - \cos a = 2 \sin \frac{1}{2} a^2$$

$$\text{Also } 2 \sin \frac{1}{2} a^2 = 2 \sin \frac{1}{2} A^2 \cdot \sin b^2 \text{ oder}$$

$\sin \frac{1}{2} a = \sin \frac{1}{2} A \cdot \sin b$. Hieraus ergibt sich nun leicht der Werth von a , wenn man die Seiten als Kreisbogen betrachtet. Als gerade Linien aber würden sie ein ebenes geradliniges gleichschenkliges Dreieck bilden, bei welchem sich nach der angenommenen Voraussetzung, aus einer der beiden gleichen Seiten und dem halben Winkel an der Spitze, die Grundlinie finden läßt. Bezeichnet man auch bei diesem, den Winkel an der Spitze mit A , jede der gleichen Seiten mit b und die

Grundlinie mit a ; so ist $a = 2 b \sin \frac{1}{2} A$. Aus der Vergleichung beider Werthe, ergibt sich alsdann der Unterschied der dritten Seite,

Beispiel. Es sei z. B. bei einer geographischen Vermessung $b = 60$ Meilen oder $= 4^\circ$, wenn man, wie nachher geschehen soll, b als einen Kreisbogen auf der Kugelfläche betrachtet, $A = 54^\circ 36'$; so wird die dritte Seite nach der letztern Bestimmung d. i. $a = 2 b \sin \frac{1}{2} A$ oder vermittlest der Logarithmen $\log a = \log 2 b + \log \sin \frac{1}{2} A$. Es ist aber

$$\begin{array}{rcl} \log 2 b & = \log 120 & = 2,0791812 \\ \log \sin \frac{1}{2} A & = \log 27^\circ 18' & = 9,6614810 \\ \hline & & 11,7406622 \\ & & 10, \end{array}$$

$$\log a = 1,7406622 =$$

$\log 55,038$. Also ist $a = 55,038$ Meilen.

Nun suche man diese Seite aus $\sin \frac{1}{2} a = \sin b \sin \frac{1}{2} A$, oder vermittlest der Logarithmen ist $\log \sin \frac{1}{2} a = \log \sin b + \log \sin \frac{1}{2} A$. Es ist aber

$$\begin{array}{rcl} \log \sin b & = \log \sin 4^\circ & = 8,8435845 \\ \log \sin \frac{1}{2} A & = \log \sin 27^\circ 18' & = 9,6614810 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Summe der Log.} & = & 18,5050655 \\ & & 10, \end{array}$$

$$\log \sin \frac{1}{2} a = 8,5050655 =$$

$\log \sin 1^\circ 50' 45''$. Es ist also a das Doppelte von $1^\circ 50' 1,5'' = 3^\circ 40' 2\frac{1}{2}''$. Verwandelt man diesen Bogen in Meilen; so erhält man 55,011 Meilen.

Also ist der Unterschied zwischen beiden Resultaten sehr unbedeutend und man kann ohne Bedenken die auf

der Oberfläche der Erde gemessenen Linien als Schenkel eines geradlinigen Winkels betrachten.

Anmerkung. Bedeutender wird der Unterschied, wenn man aus den gegebenen Stücken, den Flächeninhalt des ebenen und des sphärischen Dreieckes berechnet. Außer dem Halbmesser der Erde, der abwechselnden Krümmung ihrer Oberfläche, ihrer abweichenden Gestalt von der Kugel, haben auf diese Bestimmung noch mancherlei andere Umstände einen unverkennbaren Einfluß. Berechnet man z. B. den Inhalt eines sphärischen Dreieckes aus dem Erdradius von 859 und dann von 860 Meilen; so gibt diese verschiedene Annahme einen bedeutenden Unterschied in Rücksicht des Flächeninhalts. Aus diesem Umstande allein läßt sich einsehen, daß in allen Berechnungen für den Inhalt der Oberfläche der Erde und ihrer Theile, wo der Halbmesser oder gar dessen Quadrat in Anschlag gebracht werden muß, man kein zuverlässiges Resultat zu erwarten habe. Daher verdient die Methode, nach welcher man Theile der Oberfläche der Erde aus kleineren ebenen Dreiecken, deren Summe man alsdann berechnet, ungeachtet mancher unvermeidlichen Schwierigkeit, wenigstens vor der gedachten Verfahrensart, noch den Vorzug. Man vergl. auch Mönnich's Lehrb. der Math. 2te Abth. des 1sten Th. S. 144. S. 31.

§. 113.

Aufgabe. Aus der Länge der Sonne, der Polhöhe eines Ortes, die Dauer der Morgen- und Abenddämmerung an dem gedachten Orte zu bestimmen.

Erläuterung. Die Atmosphäre, welche die Erde rings umher umgibt, bricht die von der Sonne nach allen Seiten und Richtungen ausgehenden Lichtstrahlen

und macht, daß dadurch die noch in Dunkel gefüllten Theile der Erde des Morgens früher erleuchtet werden als die Sonne den Horizont erreicht hat, und des Abends nach ihrem Untergange noch eine Zeit lang erhellet bleiben. Zur Bestimmung der obigen Aufgabe wird man hauptsächlich auszumachen haben, unter welcher Tiefe die Sonne unter dem Horizonte die gedachten Wirkungen vermittlest der Atmosphäre auf die Lichtstrahlen, auf der Erdoberfläche sichtbar werden. Die früher oder später anfangende Dämmerung hängt von mancherlei Umständen ab, indeß nehmen die meisten Astronomen die Tiefe unter dem Horizonte nach den deshalb angestellten Beobachtungen, in einer Entfernung von 18° an. Daher beschreibt man in dieser Entfernung unter dem Horizonte HR (Fig. 44.) mit demselben einen Parallelkreis GD und rechnet von diesem Kreise, als der Grenze der Dämmerung (Dämmerungskreis) den Anfang der Abend- oder Morgendämmerung. Diese bricht an, wenn die Sonne bei ihrem Aufgange in den Parallelkreis DG tritt, und jene währet so lange, bis die Sonne bei ihrem Untergange bis auf den gedachten Kreis DG herab gesunken ist.

Auflösung. Es sei die Sonne in dem Punkte C des Dämmerungskreises GD, welcher mit dem Horizonte HR parallel gezogen ist, Z das Zenith, AQ der Aequator, P dessen Pol; so ist der Punkt A des Aequators in dem Augenblicke im Meridian, wann die Sonne den Dämmerungskreis erreicht hat. Nun ziehe man durch C den Abweichungskreis PCF, so ist CF die Abweichung der Sonne und der Bogen AF, der in der Zeit durch den Meridian gehet, während welcher

sich die Sonne von dem Puncte C bis zur größten Höhe erhebt und culminirt. Die Zeit also, welche die Sonne zu dieser Bewegung braucht, von dem Anfange der Morgendämmerung bis zum Mittage, wird also durch den Bogen AF bestimmt. Zieheth man nun von diesem die halbe Länge des Tages ab; so gibt die Differenz, die Dauer der Morgendämmerung.

Der Bogen AF aber ist das Maß des sphärischen Winkels ZPC in dem $\triangle CZP$. In diesem $\triangle$ kennt man PC und PZ als die ergänzenden Theile der Polhöhe und der Abweichung der Sonne, zu 90° . Aber auch CZ ist bekannt, weil die Bogen von Z bis an den Horizont 90° und der Bogen vom Horizont bis an den Dämmerungskreis 18° , folglich $CZ = 90^\circ + 18^\circ = 108^\circ$ beträgt. Es sind daher alle drei Seiten PC, PZ und CZ des sphärischen Dreiecks CPZ bekannt, aus welchen sich der Winkel bei P, welcher von dem in Zeit zu verwandelnden Bogen AF gemessen wird, berechnen läßt. Es ist aber $\sin \frac{1}{2} P =$

$$\sqrt{\frac{r^2 \sin \frac{1}{2} (CZ + PC - PZ) \cdot \sin \frac{1}{2} (CZ + PZ - PC)}{\sin PC \cdot \sin PZ}} (90.)$$

Hat man durch diese Gleichung den Winkel bei P gefunden, seinen Bogen in Zeit verwandelt, davon die halbe, nach (84.) zu suchende Länge des Bogens abgezogen; so gibt die Differenz die verlangte Morgendämmerung an.

Nach diesen Vorschriften findet man auch, mit Erwägung der dabei vorkommenden Umstände, die Abenddämmerung.

Beispiel. Wie viel beträgt die Morgendämmerung zu Berlin am 30. März 1811, wenn die Polhöhe

dieses Orts $52^{\circ} 31'$ und die nördliche Abweichung der Sonne an diesem Tage $3^{\circ} 31'$ beträgt? Hier ist also

$$PR = 52^{\circ} 31' 44''$$

$$CF = 3^{\circ} 31'; \text{ folglich}$$

$$PZ = 90^{\circ} - PR = 37^{\circ} 28' 16''$$

$$CP = 90^{\circ} - CF = 86^{\circ} 29'$$

$$CZ = 90^{\circ} + 18 = 108^{\circ}.$$

Es ist also, wenn man diese Zahlen nach geschehener Subtraction in den obigen Ausdruck schreibt,

$$\sin \frac{1}{2} P = \sqrt{\left(\frac{r^2 (\sin 29^{\circ} 29' 38'' \cdot \sin 78^{\circ} 30' 22'')}{\sin 86^{\circ} 29' \cdot \sin 37^{\circ} 28' 16''} \right)}$$

$$\log r^2 = 20,$$

$$\log \sin 29^{\circ} 29' 38'' = 9,6922569$$

$$\log \sin 78^{\circ} 30' 22'' = 9,9912021$$

$$\text{Logar. des Zählers} = 19,6834590$$

$$\log \sin 86^{\circ} 29' = 9,9991815$$

$$\log \sin 37^{\circ} 28' 16'' = 9,7841616$$

$$\text{Logar. des Nenners} = 19,7833431$$

$$2) 19,9001159$$

$$\log \sin \frac{1}{2} P = 9,9500579 =$$

$\log \sin 65^{\circ} 2' 45''$. Das Doppelte dieses Bogens ist daher $126^{\circ} 5' 30''$. Verwandelt man diesen Bogen in Zeit, so erhält man 8 St. $24' 26''$. An dem in der Aufgabe angeführten Tage geht die Sonne 5 U. 40 M. auf. Daher gibt die Differenz die Dauer der Morgendämmerung 2 St. $4' 26''$ an.

Zusatz. Aus den, in der Aufgabe vorkommenden Daten, läßt sich nun auch beurtheilen, wann in den, in der gemäßigten Zone der Erde, liegenden Gegenden,

die Dämmerung die ganze Nacht hindurch dauert. Dieses wird überall so lange geschehen, als die Sonne bei ihrem Durchgange durch den Meridian unter dem Horizonte nicht eine Tiefe von 18° erreicht. Stellt nun MCN die Linie vor, welche der Mittelpunkt der Sonne in ihrer Bewegung, von Mittag bis Mitternacht, beschreibt; so ist offenbar, daß die Dämmerung in den Nächten nicht unterbrochen wird, wo die Sonne bei ihrem tiefsten Standpunkte in N, nicht wie in der Figur unter, sondern über D bleibt, d. h. so lange der Bogen QN größer als QD ist; daß sie alsdann ihre Grenze erreicht hat, wenn N mit D zusammenfällt oder $QN = QD$ ist und endlich; daß die Dämmerung in den Nächten nicht mehr Statt finden kann, wenn QN kleiner als QD wird. Es ergibt sich hierbei von selbst, daß, wenn die Gegenden auf der nördlichen Halbkugel der Erde durch die Dämmerung erhellet werden, die Sonne sich in ihrer Laufbahn auch in den nördlichen Zeichen, auf der südlichen aber, in den südlichen verweilen müsse. — Es hängt aber die vorhin erwähnte Lage der Punkte N und D, von der Lage der Pols oder Aequatorhöhe eines Ortes ab. Denn der Bogen CF bezeichnet die Abweichung der Sonne und ist $= NQ$; hingegen ist $QD = QR - 18^\circ$ d. h. $=$ der Höhe des Aequators weniger 18° . Die größte Abweichung, welche die Sonne erreicht, beträgt $23^\circ 28'$ beinahe. Setzt man nun die 18° als den Abstand des Dämmerungskreises vom Horizont dazu; so erhält man $41^\circ 28'$. Diese Zahl bestimmt als Aequatorhöhe die Grenze, bei welcher die durch die Nacht dauernde Dämmerung anfängt. In allen Gegenden also bleibt die Dämmerung

so lange die ganze Nacht hindurch, als der Unterschied zwischen der Aequatorhöhe und der sich stets ändernden Abweichung der Sonne, weniger als 18° ausmacht.

Die Polhöhe von Berlin z. B. beträgt $52^\circ 31' 44''$, also die Aequatorhöhe $37^\circ 28' 76''$. So bald nun die Abweichung der Sonne so viel beträgt, daß deren Differenz von der Aequatorhöhe 18° oder weniger ausmacht; so dauert die Dämmerung die ganze Nacht hindurch. Es ist aber die Abweichung der Sonne am 17. Mai 1810 nach den Ephemeriden $19^\circ 27' 39''$, folglich ist die Differenz ungefähr 18° . Daher fängt sich mit diesem Tage die, durch die ganze Nacht währrende, Dämmerung an. Nun nimmt die Abweichung bis zum 22. Juni zu. Von dieser Zeit an nimmt sie wieder ab, bis sie am 25. Juli ungefähr eben so groß ist als am 17. Mai. Während dieser ganzen Zeit also dauert die Dämmerung ununterbrochen die ganze Nacht hindurch.

Zusatz 2. Ist die gegebene Abweichung südlich; so zieht man sie nicht von 90° ab, sondern setzt sie zu dem Bogen von 90° hinzu.

Anmerkung 1. Dauert die Dämmerung nicht die ganze Nacht hindurch, so läßt sich die Abenddämmerung auf gleiche Art berechnen. Da man hier aber nicht die größte Genauigkeit fordert und auch nicht fordern kann, weil die Tiefe des Dämmerungskreises unter dem Horizont nicht als eine, außer allem Zweifel gesetzte Angabe, der Berechnung zum Grunde liegt; so kann man die Abend- und Morgendämmerung an jedem Tage, von gleicher Dauer annehmen.

Anmerkung 2. Die Dämmerung ändert sich theils nach der verschiedenen Lage der Gegenden auf der Erde, theils

nach den Jahreszeiten. Unter dem Aequator nimmt sie desto mehr zu, je größer die Abweichung der Sonne wird, und hat die Sonne ihren Standpunct in den Nachgleichen, so beträgt die Dämmerung ungefähr $\frac{1}{2}$ Stunden. Unter den Polen, wo die lange Abwesenheit der Sonne, nach sechs Monaten eine tiefe Dunkelheit bewirkt, erhellet die Dämmerung zwei Monate vor ihrer Rückkehr die dortigen Gegenden.

Anmerkung 3. Mehr Schwierigkeit hat die Aufgabe für die Zeit der kürzesten Dämmerung. Kästner gibt für den Tag der kürzesten Dämmerung folgenden Ausdruck: Es ist $\sin$ Abweich. der Sonne $= \sin$ Polhöhe $\cdot \tan 19^\circ$. Man vergl. noch (85. Anm. 3.). L. Bergmann, Geschichte der Wiss. von der Dämmerung. Schwed. Abhandl. 1760. Gehlers physikal. Wörterbuch unter dem Artikel Dämmerung.

§. 114.

Die in diesem Abschnitte vorgetragenen Aufgaben mögen hinreichen, die Anwendung der sphärischen Trigonometrie, auf die Geographie, Feldmeßkunst und Astronomie zu zeigen. Sie ist aber nicht bloß auf diese Theile der mathematischen Wissenschaften beschränkt, sondern sie dehnt sich über alle Gegenstände derselben aus, bei welchen die Lage der Ebenen in Betrachtung gezogen wird. Daher wird man durch sie in den Stand gesetzt, geometrische Körper oft aus solchen Abmessungen zu berechnen, die nur an ihren Grundflächen genommen werden. Sie ist daher ein schätzbares Hülfsmittel, diejenigen Eigenschaften der Körper auf eine sehr einfache und einleuchtende Art zu entwickeln, welche man sonst entweder gar nicht kannte oder auf einem sehr mühsamen Wege kennen lernen mußte. Als ein Beispiel

spiel mögen uns hier die regulären Körper dienen, womit sich die Alten so angelegentlich beschäftigt haben. Es gibt eine Sage, nach welcher man behauptet, daß Euklides seine Elemente nur um ihrentwillen geschrieben habe. Ich lasse die Zuverlässigkeit dieser Behauptung dahin gestellt sein, und zwar um so mehr, da ich auch die entgegengesetzte Meinung kenne. So viel aber ist gewiß, daß diese Körper schon der Aufmerksamkeit der Pythagoräer nicht entgangen sind, daß die spätern Weltweisen Griechenlands einen sehr großen Werth auf deren Kenntniß und Eigenschaften legten, weil nach ihrer Meinung die Natur in ihren ursprünglichen Zusammensetzungen und Formenbildung Gesetze befolge, nach welchen die Urstoffe aller Dinge aus den gedachten Körpern beständen. Und noch jetzt kommen dieselben in den neuern Schriften der Mathematiker, unter dem Namen der platonischen Körper vor.

§. 115.

Die fünf regulären Körper, welche die Geometrie aufstellt, sind das Tetraedron, das Octaedron, das Icosaedron, das Hexaedron und das Dodecaedron; ausser diesen sind keine regulären Körper möglich. — Denn aus den Begriffen regulärer Körper folgt: 1) ihre Seitenflächen müssen lauter gleiche, ähnliche, reguläre, durch gerade Linien begrenzte Figuren von gleicher Art sein. Ihre Regulärität würde aufgehoben, wenn eine Seitenfläche ein gleichseitiges Dreieck, die andere aber ein Quadrat wäre, obgleich beiden Figuren die übrigen Bestimmungen zukommen; und 2) müssen auch ihre Ecken, welche durch die zu-

R

sammenstoßenden Seitenflächen gebildet werden, alle von gleicher Größe, d. h. einander gleich und ähnlich seyn, und weniger als 360° betragen. Aus diesem Grunde und weil zu einer körperlichen Ecke wenigstens drei Seitenflächen erfordert werden, können diese nur Dreiecke oder Quadrate oder Fünfecke der gedachten Art seyn. Im ersten Falle macht ihre Summe an der Ecke $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, im andern $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$ und im dritten $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$. Wollte man nun aus drei Sechsecken oder Siebenecken zc. den körperlichen Winkel zusammensetzen; so würde ihre Summe $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$, welche also in einer Ebene liegen; oder $3 \cdot 128\frac{1}{2}^\circ = 385\frac{1}{2}^\circ$ einen einwärtsgehenden Winkel machen würden.

Untersucht man nun weiter, wieviel der regulären Seitenflächen bei Bildung einer körperlichen Ecke zusammenstoßen können; so wird man finden, daß die Summe dreier, vier und fünf Dreiecke in der genannten Ordnung 180° , 240° und 300° ausmachen. Würde man aber deren sechs nehmen wollen, so können diese keinen Winkel mehr bilden; noch weniger aber sieben zc. Also sind nicht mehr als drei reguläre Körper möglich, welche von Triangeln eingeschlossen werden. So entsteht das Tetraedron, Octaedron und Icosaedron. Nimmt man Quadrate oder Fünfecke, so ist in jedem Fall ein regulärer Körper möglich; jene geben das Hexaedron oder den Würfel, diese das Dodecaedron.

Anmerkung. Eine sehr allgemeine, mehr umfassende und tiefer gehende vervollkommnete Theorie dreieckiger Körper hat L. Euler, und nach ihm Karsten vorgetragen. Jener im vierten Bande der Petersburger Commentarien, unter der Aufschrift: *Elementa doctrinae solidorum*,

und dann Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum etc. Dieser in der ersten Abth. des ersten Th. seines Lehrb. der ges. Mathematik. Nach der 2ten Aufl. von 1786 von S. 559 — 572.

§. 116.

Die Untersuchung der regulären Körper, geht von der gleichseitigen Pyramide aus. Sie hat eine ebene, reguläre, durch gerade Linien begrenzte Figur zur Grundfläche und ihre Seitenflächen sind lauter gleiche, ähnliche und gleichschenklige Dreiecke. Bei einer nähern Prüfung der Lage der Linien und Winkel gegen die Grundfläche wird sich zeigen, daß die Seitenlinien dieser Pyramide, welche von der Spitze nach den Winkelpuncten der Grundfläche gezogen werden, wie PA, PB etc. (Fig. 45.), alle von gleicher Länge sind und daß die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander; wie auch gegen die Grundfläche, von gleicher Größe sind. Auch geht bei einer gleichseitigen Pyramide, der Perpendikel, der von der Spitze auf die Grundfläche gefällt wird, allemahl durch den Mittelpunct der Grundfläche.

Aus den Grundsätzen der Geometrie in Verbindung mit den im dritten Abschnitte vorgetragenen Lehren erhellet: daß 1) eine gleichseitige Pyramide entsteht, wenn man alle Seiten eines regulären Polygons mit Ebenen durchschneidet, welche gegen die Grundfläche unter demselben spitzen Winkel geneigt sind.

2) Daß, wenn mehr als zwei Seitenlinien PA, PB, PC etc. einer gleichseitigen und gleichwinkligen körperlichen Ecke um den Punct P von gleicher Länge sind, A, B, C, D, E als Winkelpuncte eines regulären Poly-

gons in einer Ebene liegen, dessen Seitenlinien mit der Anzahl der Seitenflächen an der körperlichen Ecke bei P übereinstimmen.

§. 117.

Wenn man die Flächenwinkel eines regulären Tetraedrons halbt, so wird der Körper in vier gleiche, ähnliche und gleichseitige Pyramiden getheilt, deren jede, eine von den vier Seitenflächen zur Grundfläche hat.

Alle Flächenwinkel eines Tetraedrons sind einander gleich, und jeder einzelne für sich genommen $< 2 R$. Durch die vorgeschriebene Theilung legt man nun durch jede Seitenlinie eine Ebene, welche innerhalb des körperlichen Raumes gegen jede Seitenfläche gleich geneigt ist, und auf diese Weise entstehen vier Pyramiden, deren jede eine Seitenfläche des Tetraedrons zur Grundfläche hat, und die alle gleich, ähnlich und gleichseitig sind, und zwar aus dem Grunde, weil ihre Spitzen in einen gemeinschaftlichen Punct zusammenfallen, indem jede Seitenfläche der vier aus der Zerfällung des Ganzen entstandenen Pyramiden, zugleich eine Seitenfläche der anliegenden ist.

Zusatz 1. Da nun alle Seitenlinien der vier aus der Theilung des Tetraedrons entstandenen Pyramiden, von ihrer gemeinschaftlichen Spitze, innerhalb des gegebenen Körpers, bis an einen der vier Puncte seiner körperlichen Ecken gehen; so kann man mit diesem Abstände als mit einem Halbmesser, eine Kugel beschreiben, in deren Oberfläche die vier Spitzen des Tetraedrons liegen.

Zusatz 2. Diese Sätze gelten nicht bloß vom Tetraedron, sondern sie lassen sich aus gleichen Gründen, über alle reguläre Körper ausdehnen.

§. 118.

Aufgabe. Die Polygonseite, der Polygonwinkel der Grundfläche nebst dem Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche einer gleichseitigen Pyramide, sind bekannt; wie findet man aus diesen Abmessungen, die Länge ihrer Seitenlinien, ihren körperlichen Inhalt und ihre Oberfläche?

1) Es sei jede Polygonseite der Grundfläche der Pyramide (Fig. 45.), $BC = a$, jeder Polygonwinkel wie $ABC = BCD$ u. $= \beta$, der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche $= \gamma$, die Anzahl ihrer Seiten $= n$, L die Länge der Seitenlinien $PC = PD = PE$ u., K der Inhalt und F die Oberfläche der Pyramide. Nun sei PQ senkrecht auf die Grundfläche gesetzt, ihr Mittelpunkt Q mit den Winkelspitzen A, B, C, D u. durch gerade Linien AQ, BQ, CQ u. verbunden und von Q ein Perpendikel QR auf CD herabgelassen; so hat man $CQ = \frac{\frac{1}{2} DC}{\cos \frac{1}{2} \beta} = \frac{\frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} \beta} =$

$\frac{1}{2} a \sec \frac{1}{2} \beta$, und die Höhe der Pyr. $PQ = QC \cdot \tan PCQ$. Um nun den Winkel PCQ zu bestimmen, beschreibe man aus C mit einem beliebigen Halbmesser die Kreisbogen MN, NO, OM in den drei Seitenflächen BCD, PCB und ADC der körperlichen Ecke bei C und lasse aus O den Bogen OW senkrecht auf NM herab, so

ist in dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke MWO der Winkel WMO = γ d. i. der Neigungswinkel der Seitenfläche DPC gegen die Grundfläche, der Bogen NM das Maß des W. BCD = β und es verhält sich $r : \sin MW = \tan OMW : \tan OW$ (68.) oder

$$r : \sin \frac{1}{2} \beta = \tan \gamma : \tan PCQ, \text{ folglich}$$

$$2) \tan PCQ = \sin \frac{1}{2} \beta \cdot \tan \gamma. \text{ Daraus findet man die Höhe } PQ = QC \cdot \tan PCQ = \frac{\frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} \beta \cdot \tan \gamma}{\cos \frac{1}{2} \beta} =$$

$$\frac{1}{2} a \tan \frac{1}{2} \beta \cdot \tan \gamma \text{ und hieraus die Seitenlinie } PC = L = \sqrt{CQ^2 + PQ^2} = \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4} a^2}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta} + \frac{\frac{1}{4} a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \beta \cdot \tan^2 \gamma}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta} \right)} \\ = \frac{\sqrt{\frac{1}{4} a^2 (1 + \sin^2 \frac{1}{2} \beta \cdot \tan^2 \gamma)}}{\cos \frac{1}{2} \beta} = \frac{\frac{1}{2} a \sqrt{1 + \sin^2 \frac{1}{2} \beta \cdot \tan^2 \gamma}}{\cos \frac{1}{2} \beta}.$$

II) Setzt man die Grundfläche der Pyramide = b , so ist $K = \frac{1}{3} b \cdot PQ$. Es ist aber $b = n \cdot \frac{1}{2} a$. $QR = \frac{1}{2} a n CQ \sin \frac{1}{2} \beta = \frac{\frac{1}{4} a^2 n \sin \frac{1}{2} \beta}{\cos \frac{1}{2} \beta} = \frac{1}{4} a^2 n \tan \frac{1}{2} \beta$ und $PQ = \frac{1}{2} a \cdot \tan \frac{1}{2} \beta \cdot \tan \gamma$. Also erhält man $K = \frac{1}{24} a^3 n \cdot \tan \frac{1}{2} \beta^2 \tan \gamma$.

III) Setzt man die Oberfläche der Pyramide, ohne die Grundfläche b , = f ; so ist $f = n \cdot PCD$. Es ist aber $\triangle PCD = \frac{1}{2} a L \sin PCD$. Nach den vorhergegangenen Bestimmungen aber ist

$$PC = \frac{\frac{1}{2} a \sqrt{1 + \sin^2 \frac{1}{2} \beta \cdot \tan^2 \gamma}}{\cos \frac{1}{2} \beta} \text{ (I); folglich}$$

$$f = \frac{\frac{1}{4} \sin PCD a^2 n \sqrt{1 + \sin^2 \frac{1}{2} \beta \cdot \tan^2 \gamma}}{\cos \frac{1}{2} \beta}.$$

Daher kommt es hier auf den Werth des $\sin PCD$ an.

Es ist aber $\operatorname{cosec} PCQ = V(1 + \cot PCQ^2)$

$$\begin{aligned} &= V\left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\beta^2 \tan \gamma^2}\right) \text{ (nach I)} \\ &= V\left(\frac{(\sin \frac{1}{2}\beta^2 \tan \gamma^2 + 1)}{\sin \frac{1}{2}\beta^2 \tan \gamma^2}\right) \\ &= \frac{V(1 + \sin \frac{1}{2}\beta^2 \tan \gamma^2)}{\sin \frac{1}{2}\beta \tan \gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Also } \sin PCQ &= \frac{1}{\operatorname{cosec} PCQ} \\ &= 1: \frac{V(1 + \sin \frac{1}{2}\beta^2 \tan \gamma^2)}{\sin \frac{1}{2}\beta \tan \gamma} = \frac{\sin \frac{1}{2}\beta \tan \gamma}{V(1 + \sin \frac{1}{2}\beta^2 \tan \gamma^2)}. \end{aligned}$$

Nun verhält sich in dem rechtwinkl. sphär. $\triangle OWM$
 $\sin OM : 1 = \sin WMO : \sin OW$ oder

$$\sin PCD : 1 = \sin \gamma : \sin PCQ$$

$$\sin PCD = \frac{\sin \gamma}{\sin PCQ}. \text{ Schr. man f. } \sin PCQ \text{ f. Werth, so ist}$$

$$\sin PCD = \frac{\sin \gamma V(1 + \sin \frac{1}{2}\beta^2 \tan \gamma^2)}{\sin \frac{1}{2}\beta \tan \gamma}. \text{ Folglich ist}$$

$$\begin{aligned} n \triangle PCD &= n \times \frac{1}{2} a L \sin PCD = \frac{1}{2} n a L \sin PCD \\ &= \frac{\frac{1}{4} a^2 n \sin \frac{1}{2}\beta \tan \gamma}{\cos \frac{1}{2}\beta \cdot \sin \gamma} = \frac{\frac{1}{4} a^2 n \tan \frac{1}{2}\beta}{\cos \gamma} = \frac{1}{4} a^2 n \tan \frac{1}{2}\beta \sec \gamma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Also } F &= b + n \triangle PCD \\ &= \frac{1}{4} a^2 n \tan \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4} a^2 n \tan \frac{1}{2}\beta \sec \gamma \\ &= \frac{1}{4} a^2 n \tan \frac{1}{2}\beta (1 + \sec \gamma) \\ &= \frac{1}{4} a^2 n \tan \frac{1}{2}\beta \cdot \cot \frac{1}{2}\gamma \cdot \tan \gamma, \end{aligned}$$

Es ist also

$$\text{I) } L = \frac{\frac{1}{2} a V(1 + \sin \frac{1}{2}\beta^2 \tan \gamma^2)}{\cos \frac{1}{2}\beta} \text{ d. i. die Seitenlinie}$$

$$\text{II) } K = \frac{1}{24} a^3 n \tan \frac{1}{2}\beta^2 \tan \gamma \text{ d. i. der körperl. Inhalt}$$

III) $F = \frac{1}{4} a^2 n \tan \frac{1}{2} \beta \cdot \cot \frac{1}{2} \gamma \cdot \tan \gamma$ d. i. die Oberfläche.

Es sei β d. B. der Polygonwinkel der Grundfläche einer Pyramide $\beta = 120^\circ$, die Polygonseite $a = 48'$, der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche $\gamma = 32^\circ 40'$; so ist

$$\begin{aligned} \text{I) } L &= \frac{24 \sqrt{1 + \sin 60^\circ \cdot (\tan 32^\circ 40')^2}}{\cos 60^\circ} \\ &= \frac{24 \sqrt{1 + (0,8660254)^2 (0,6411673)^2}}{0,5} \end{aligned}$$

$$= 13,72582654. \text{ Also ist } L = 13,7 \text{ F.}$$

II) $K = \frac{1}{24} 48^3 \cdot 6 \cdot (\tan 60^\circ)^2 \tan \gamma$. Es ist aber

$$\log \frac{1}{24} \cdot 48^3 \cdot 6 = \log 12 \cdot 48^2 = 4,4416636$$

$$2 \log \tan 60^\circ = 20,4771212$$

$$\log \tan 32^\circ 40' = 9,8069714$$

$$\hline 34,7257562$$

$$3 \log \tan r = 30,$$

$$\log K = 4,7257562 =$$

$$\log 53180,956. \text{ Es ist demnach } K = 53181 \text{ Kubf.}$$

III) $F = \frac{1}{4} \cdot 48^2 \cdot 6 \cdot \tan 60^\circ \cdot \cot 16^\circ 28' \cdot \tan 32^\circ 40'$

$$\log \frac{1}{4} \cdot 48^2 \cdot 6 = \log 48 \cdot 72 = 3,5385737$$

$$\log \tan 60^\circ = 10,2385606$$

$$\log \cot 16^\circ 28' = 10,5330552$$

$$\log \tan 32^\circ 40' = 9,8069714$$

$$\hline 34,1171609$$

$$30,$$

$$\log F = 4,1171609 =$$

$$\log 34176,48. \text{ Also ist } F = 34176 \text{ Q. F.}$$

Anmerkung. Die letzte Gleichung bei III. für F entsteht

$$\text{aus der vorhergehenden, weil } 1 + \sec \gamma = 1 + \frac{1}{\cos \gamma}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 + \cos \gamma}{\cos \gamma} = \frac{(1 + \cos \gamma) \sin \gamma}{\sin \gamma \cos \gamma}. \text{ Hier ist nun } \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \\
 &= \tan \gamma \text{ und } \frac{1 + \cos \gamma}{\sin \gamma} = \cot \frac{1}{2} \gamma, \text{ folglich } 1 + \sec \gamma \\
 &= \cot \frac{1}{2} \gamma \cdot \tan \gamma.
 \end{aligned}$$

Zusatz. Aus dem regulären Polygon, läßt sich nach geom. Grundsätzen der Centriwinkel $\frac{4R}{n}$, folglich auch der Polygonwinkel desselben $2R - \frac{4R}{n} = \gamma$ leicht finden, und es ist also alsdann nicht nöthig, daß dieser zu den gegebenen Stücken gerechnet werden darf.

§. 119.

Aufgabe. Aus der Seitenlinie eines regulären Tetraedrons, seine Flächenwinkel, seinen Inhalt, seine Oberfläche und den Halbmesser, der um den gedachten Körper zu beschreibenden Kugel zu finden.

I) Es sei NOM (Fig. 46.) ein mit einem beliebigen Halbmesser aus der Ecke C beschriebenes sphärisches Dreieck, dessen Seiten MN, NO, OM, die in den drei in C zusammenstoßenden Seitenflächen liegen, einander gleich find, weil $\angle PCA = \angle PCB = \angle BCA = 60^\circ$ ist; so ist alsdann $\cos NMO = \frac{\cos NO - \cos NM \cdot \cos MO}{\sin NM \cdot \sin MO}$ oder wenn man auch hier diesen Winkel γ nennt, so ist $\cos \gamma = \frac{\cos 60 - \cos 60 \cdot \cos 60}{\sin 60 \cdot \sin 60} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} = 0,333333 = \cos \gamma$. Sucht man nun, welcher W.

zu diesem Cosinus gehört, oder berechnet man dessen Werth aus Logarithmen, so erhält man

$$10,0000000$$

$$\log 3 = 0,4771213$$

$$\log \cos \gamma = 9,5228786 = \log \cos 70^\circ 31' 45\frac{2}{3}''.$$

Folglich 1) $\gamma = 70^\circ 31' 45\frac{2}{3}''$.

II) Der körperliche Inhalt des Tetraedrons, welcher gesucht wird, ist als der Inhalt einer gleichseitigen Pyramide $K = \frac{1}{24} n a^3 \tan \frac{1}{2} \beta^2 \tan \gamma$ (118. II) anzusehen. Ändert man demnach mit Beibehaltung der Seitenlinie $= a$ die übrigen Größen nach den Verhältnissen um, welche aus den Eigenschaften des Tetraedrons fließen; so erhält man, weil $\beta = 60^\circ$,

$$1) \tan \frac{1}{2} \beta = \tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{folgt.}$$

$$\tan \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{1}{3}.$$

$$2) \tan \gamma = \sqrt{3}. \text{ Denn es ist}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{3} \text{ (nach 1)}$$

$$\frac{1}{\cos \gamma} = 1 : \frac{1}{3} = 3. \text{ Es ist aber}$$

$$\frac{1}{\cos \gamma} = \sec \gamma$$

$$\sec \gamma = 3$$

$$\sec \gamma^2 = 9. \text{ Es ist aber auch}$$

$$\sec \gamma^2 = 1 + \tan \gamma^2, \text{ folglich}$$

$$1 + \tan \gamma^2 = 9$$

$$\tan \gamma^2 = 9 - 1 = 8$$

$$\tan \gamma = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Schreibt man nun diese Zahlen in die allgemeine Gleichung für K; so erhält man des Tetraedrons körperlichen Inhalt

$$K = \frac{1}{24} \cdot 3 \cdot a^3 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{3} = \frac{1}{8} a^3 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{1}{8} \cdot a^3 \cdot \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ = \frac{1}{2} a^3 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{a^3}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}$$

III) Nennt man auch hier die gesammte Oberfläche des Tetraedrons F und nimmt man eine Seitenfläche b zur Grundfläche an; so ist nach den Grundsätzen der ebenen Trig. $b = \frac{1}{4} \sqrt{3} a^2 = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$ und weil $\sqrt{3} = \tan 50^\circ$ und $F = 4b$; so ist $F = a^2 \tan 50^\circ$.

IV) Der verlangte Halbmesser der Kugel ist eine von den Seitenlinien AD, der vier gleichen, ähnlichen und gleichseitigen Pyramiden, in welche das Tetraedron durch die Halbierung seiner Flächenwinkel zerfällt wird und deren gemeinschaftliche Spitze in D liegt. Diese Seitenlinie AD ist bei der Pyramide, welche D zur Spitze und das $\triangle APC$ zur Grundfläche hat, was L in der vorigen Aufgabe, bei der gleichseitigen Pyramide war. Nun ist, wenn der Flächenwinkel hier auch mit γ bezeichnet wird, derselbe also $= \frac{1}{2}\gamma$. Wendet man nun den obigen Ausdruck nach dieser Bestimmung ab und setzt man $AD = r$; so ist $r =$

$$\frac{\frac{1}{2}a \sqrt{(1 + \sin \frac{1}{2}\beta^2 \cdot \tan^2 \frac{1}{2}\gamma^2)}}{\cos \frac{1}{2}\beta}. \text{ Es ist aber } \beta = 60^\circ,$$

$$\text{folglich } \sin \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}, \cos \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} \sqrt{3}. \text{ Auch ist } \tan \frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\gamma}.$$

$$\text{Aber es ist } \sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ und } \cos \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{3}}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ folglich } \tan \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{2}}. \text{ Daher } r =$$

$$\frac{\frac{1}{2}a\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \text{ Es ist also}$$

bei einem Tetraedron

I) $\gamma = 70^\circ 31' 44''$ d. i. der Flächenwinkel.

II) $K = a^3 \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{3}}$ d. i. der körp. Inhalt.

III) $F = a^2 \sqrt{3}$ d. i. die Oberfläche.

IV) $r = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ d. i. der Kugel Halbmesser.

Es sei z. B. die Seitenlinie eines Tetraedrons, $a = 24'$, so ist dessen körperlicher Inhalt $K = a^3 \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$. Es ist aber

$$3 \log 24 = 4,1406536$$

$$\log \sqrt{2} = 0,1505150$$

$$4,2911486$$

$$\log 12 = 1,0791812$$

$$\log K = 3,2119674 = \log 1629,174 \text{ Kubf.}$$

Ferner ist des Tetraedrons Oberfläche $F = a^2 \sqrt{3}$.

Man findet aber

$$2 \log 24 = 2,7604224$$

$$\log \sqrt{3} = 0,2385606$$

$$\log F = 2,9989930 = \log 907,66. \text{ Es}$$

beträgt daher $F = 907,66$ Q. F.

Endlich 3) der Halbmesser, der um das Tetraedron zu beschreibenden Kugel, $r = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}a\sqrt{6}$. Es ist

aber

$$\log 6 = 0,7781512$$

$$\log \sqrt{6} = 0,5890756$$

$$\log r = 1,1672268 = \log 14,69.$$

Zusatz 1. Setzt man nun den Durchmesser der um das Tetraedron zu beschreibenden Kugel $d = 2r = 2 \times \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$; so ist $d^2 = \frac{3}{2}a^2$ oder $2d^2 = 3a^2$, folglich $2:3 = a^2:d^2$ d. h. es verhält sich 2 zu 3 wie das Quadrat der Seitenlinie des Tetraedrons, zum Quadrat des Durchmessers der gedachten Kugel. (Man vergl. Eukl. B. XIII. S. 13.)

Zusatz 2. Die lothrechte Höhe einer jeden der vier oben beschriebenen Pyramiden, wie DQ wird hier, mit Rücksicht auf den abgeänderten Winkel γ , eben so bestimmt, als PQ in der gleichseitigen Pyramide und es ist $DQ = \frac{1}{2}a \cdot \tan \frac{1}{2}\beta \cdot \tan \frac{1}{2}\gamma$. (118. I. 5.) Nimmt man nun aus IV. den Werth von $\tan \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{1}{3}}$ und $\tan \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}}$; so erhält man $DQ = \frac{1}{2}a \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Vergleicht man nun DQ mit r; so ist $DQ:r = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} : \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = 1:3$, folglich ist $DQ = \frac{1}{3}r$.

Zusatz 3. Um das gleichseitige Dreieck PBA läßt sich, wie um jedes reguläre Polygon, ein Kreis beschreiben. Setzt man nun dessen Halbmesser $= \epsilon$, so findet man $\epsilon = \frac{\frac{1}{2}a}{3 \sin 60^\circ} = \frac{a}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Es ist aber $d = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, folglich $a = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ und diesen Werth für a in ϵ gesetzt, gibt $\epsilon = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$ und $2\epsilon = d \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} =$

$\frac{2}{3}d\sqrt{2}$. Aus diesen Verhältnissen läßt sich nun folgende Aufgabe leicht auflösen.

§. 120.

Aufgabe. Eine Kugel, deren Halbmesser gegeben ist, um ein reguläres Tetraedron, zu beschreiben.

Man durchschneide die Kugel (Fig. 3.) dessen Halbmesser $CG = r$ gegeben ist, mit einer Ebene, die um den dritten Theil desselben d. h. um CG von dem Mittelpunkt C entfernt ist; so gibt der Durchschnitt einen Kreis, dessen Halbmesser $GB = \sqrt{r^2 - \frac{1}{9}r^2} = \sqrt{\frac{8}{9}r^2} = \frac{2}{3}r\sqrt{2}$ oder $= d\sqrt{\frac{2}{3}}$ ist. Zeichnet man nun in diesen Kreis ein gleichseitiges Dreieck; so beträgt dessen Seite, aus dem Halbmesser $\frac{2}{3}r\sqrt{2}$, (nach §. 120. m. Entwicklung der ersten Grunds. der Anal.) $2r\sqrt{\frac{2}{3}}$ oder $d\sqrt{\frac{2}{3}}$. Ziehet man nun aus dem Pol p des Kreises der mit der Kugel Mittelpunkt auf einer Seite liegt, nach den Winkelspitzen, des in den Kreis eingezeichneten gleichseitigen Dreieckes gerade Linien, so erhält man auf diese Art, das gesuchte Tetraedron. (Man vergl. Eukl. B. XIII. S. 13.)

§. 121.

Aufgabe. Aus der Seitenlinie eines Octaedrons, seine Flächenwinkel, seinen körperlichen Inhalt, seine Oberfläche nebst dem Halbmesser, der um den gedachten Körper, zu beschreibenden Kugel zu berechnen.

I) Das erste gesuchte Stück ist also der Flächenwinkel. Es sei (Fig. 47.) $PABCD$ die obere Hälfte

des Octaedrons, P eine Ecke, $PA = PB = PC = PD$, so ist ABCD ein Quadrat und jeder der darin enthaltenen Winkel, wie $BCD = 90^\circ$. Nun sei NMO ein mit einem beliebigen Halbmesser aus der Ecke C beschriebenes sphärisches Dreieck; so wird der Flächenwinkel γ welchen die beiden an PC liegenden Seitenflächen PCB und PCD einschließen, durch den sphärischen Winkel ONM bestimmt. Es ist aber $\cos ONM$ oder mit Beibehaltung der, den Buchstaben α, β, γ, r und ε im vorigen §. beigelegten Bedeutungen,

$$\cos \gamma = \frac{\cos OM - \cos NO \cos NM}{\sin NO \cdot \sin NM} \quad (89.) \text{ oder in Zahlen}$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos 90^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 60^\circ} = \frac{0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = -$$

$\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = -\frac{1}{3} = -0,3333333$. Dazu gehört ein Bogen von $109^\circ 28' 16\frac{2}{3}''$, welcher also die Größe des Flächenwinkels γ ausdrückt.

II) Das zweite der gesuchten Stücke ist der körperliche Inhalt des Octaedrons. Halbirt man nun dieses Körpers Flächenwinkel, auf die (117.) gezeigte Art; so erhält man acht gleiche, ähnliche und gleichseitige Pyramiden. Bezeichnet nun h die Höhe, b die Grundfläche einer solchen Pyramide; so erhält man aus 2, bei I, (118.) $h = \frac{1}{2} a \cdot \tan \frac{1}{2} \beta \cdot \tan \gamma$. Wegen des halbirten Flächenwinkels γ aber ist hier $h = \frac{1}{2} a \tan \frac{1}{2} \beta \cdot \tan \frac{1}{2} \gamma$. Allein b ist hier jede Seitenfläche, deren Inhalt $\frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$ beträgt. Folglich ist der körperliche Inhalt des Octaedrons $K = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a^3 \tan \frac{1}{2} \beta \cdot \tan \frac{1}{2} \gamma \sqrt{3} = \frac{1}{3} a^3 \tan \frac{1}{2} \beta \cdot \tan \frac{1}{2} \gamma \sqrt{3}$. Es kommt also noch hier auf die Bestimmung der beiden Werthe $\tan \frac{1}{2} \beta$ und $\tan \frac{1}{2} \gamma$ an. Der W. β aber ist $= 60^\circ$, folglich $\frac{1}{2} \beta = 30^\circ$ und

$\tan 30^\circ = \frac{\sin 50^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$. Aus $\cos \gamma$
 $= -\frac{1}{3}$, findet man $\sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma}{2}} =$
 $\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\cos \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{2}} =$
 $\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3}}{2}} = \frac{1}{3}$. Folglich $\tan \frac{1}{2}\gamma = \frac{\sqrt{2}}{1} : \frac{1}{3} =$
 $\sqrt{2}$. Setzt man nun die für $\tan \frac{1}{2}\beta$ und $\tan \frac{1}{2}\gamma$ ge-
 fundenen Werthe in die obige Gleichung; so erhält man
 $K = \frac{1}{3}a^3 \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}a^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$, welches der ver-
 langte Inhalt ist.

III) Das dritte Stück ist die Oberfläche. Eine
 Seitenfläche ist schon in II) durch b berechnet, wo $b =$
 $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$ gefunden wurde. Daher ist $F = 8b = 2a^2\sqrt{3}$.

IV) Endlich verlangt man auch den Halbmesser
 der um das Octaedron zu beschreibenden Kugel. Dieser
 Halbmesser hat hier diejenige Größe, die bei der gleich-
 seitigen Pyramide (118.) durch L bezeichnet wurde. Es ist
 aber $L = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{1 + \sin \frac{1}{2}\alpha^2 \cdot \tan \frac{1}{2}\beta^2}}{\cos \frac{1}{2}\alpha}$. Nach den

hier Statt findenden Verhältnissen aber ist, wenn man
 $L = r$ schreibt, $r = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{1 + \sin \frac{1}{2}\beta^2 \cdot \tan \frac{1}{2}\gamma^2}}{\cos \frac{1}{2}\beta}$.

Setzt man nun hier $\frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{1}{2}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan \frac{1}{2}\gamma =$
 $\sqrt{2}$; so wird $r = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{1 + \frac{1}{4} \cdot 2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} =$

$\frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Es ist also bei einem Octaedron

I) $\gamma = 109^\circ 28' 16\frac{2}{3}''$, d. i. der Flächenwinkel.

II) $K = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$ d. i. der körp. Inhalt.

III)

III) $F = 2a^2\sqrt{3}$ d. i. die Oberfläche und

IV) $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ d. i. der Halbmesser der Kugel.

Es sei z. B. eines Octaedrons Seitenlinie $a = 121'$; so ist 1) der körperliche Inhalt desselben $K = \frac{1}{6}a^3\sqrt{2}$. Man findet aber

$$3 \log a = 6,2483562$$

$$\log \sqrt{2} = 0,1505150$$

$$\hline 6,3988712$$

$$\log 12 = 1,0791812$$

$\log K = 5,5196900 = \log 208780,465$. Folglich ist $K = 208780,465$ Kubikf.

2) Des Octaedrons Oberfläche ist $F = 2a^2\sqrt{3}$. Aus den Tafeln aber ist

$$2 \log a = 4,1655708$$

$$\log 2 = 0,3010300$$

$$\log \sqrt{3} = 0,2385606$$

$\log F = 4,7051614 = \log 50717,91$. Es ist also $F = 50717,91$ Q. F.

Endlich ist 3) der Halbmesser der um das Octaedron zu beschreibenden Kugel $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Man findet aber

$$\log 121 = 2,0827854$$

$$\log \sqrt{2} = 0,1505150$$

$$\hline 2,2333004$$

$$\log 2 = 0,3010300$$

$\log r = 1,9322704 = \log 85,56$. Es ist demnach $r = 85,56$ F.

Zusatz 1. Aus $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ (nach III) folgt $r^2 = \frac{1}{2}a^2$; folglich $a^2 = r^2 : \frac{1}{2}$ und $a = r : \sqrt{\frac{1}{2}}$. Nimmt

D

man aber den Durchmesser $d = 2r$; so ist $d = a\sqrt{2}$,
 $d^2 = 2a^2$ und $a = d\sqrt{\frac{1}{2}}$ oder $\frac{a^2}{d^2} = \frac{1}{2}$ oder $a^2 : d^2$
 $= 1 : 2$, d. h. das Quadrat der Seitenlinie des Dodekaedrons, verhält sich zum Quadrat des Durchmessers der um dasselbe zu beschreibenden Kugel, wie 2 zu 1. Man vergl. (B. XIII. Eucl. S. 14.)

Zusatz 2. Sucht man nun den Halbmesser ρ des Kreises, der sich um jede Seitenfläche, der durch die Theilung entstandenen Pyramiden beschreiben läßt; so erhält man hier, wie in (119. Zus. 3.) $\rho = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Schreibt man nun für a den Werth aus (Zus. 1.), so ist $\rho = \frac{r}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{3}} = \frac{r}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = r : \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}r\sqrt{6}$ und $2\rho = \frac{2r}{3}\sqrt{6} = d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Zusatz 3. In dem aus C verzeichneten sphär. Dreiecke NOM, erhält man den Winkel, welchen die Seitenfläche PCB mit ABCD an BC einschließt d. i. den sphär. W. NOM, indem $\cos \text{NOM} = \frac{\cos \text{NM} - \cos \text{NO} \cdot \cos \text{OM}}{\sin \text{NO} \cdot \sin \text{OM}}$

(89.) Drückt man nun die Seiten durch Grade, Minuten u. aus; so erhält man $\cos \text{NOM} = \frac{\cos 60^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 90^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 90^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ (nach II) $= \cos \frac{1}{2}\gamma$. Nimmt man nun auf der entgegengesetzten Seite des Quadrats, in einer Entfernung, welche so groß als PQ ist, einen Punkt an und zieht von hier aus nach den vier Winkelpunkten A, B, C und D gerade Linien; so entsteht eine Pyra-

mide, welche der bisher betrachteten $PABCD$ gleich und ähnlich ist; beide zusammen aber haben die gemeinschaftliche Grundfläche $ABCD$ und bilden ein reguläres Octaedron.

Zusatz 4. Fället man aus der Spitze P auf die Grundfläche der Pyramide $ABCD$ einen Perpendikel PQ ; so trifft dieser den Mittelpunkt Q der Grundfläche $ABCD$. Denn verbindet man Q mit A, B, C und D durch gerade Linien; so ist $AQ = \sqrt{PA^2 - PQ^2}$, $BQ = \sqrt{PB^2 - PQ^2}$, $CQ = \sqrt{PC^2 - PQ^2}$ u. Es ist aber $PA = PB = PC$ u. $= L$ und PQ bleibt in allen Gleichungen unverändert, folglich ist $AQ = BQ = CQ$ u. und Q der Mittelpunkt der Grundfläche oder eigentlich der Mittelpunkt des um $ABCD$ zu beschreibenden Kreises. Fället man aus der Spitze der Pyramide auf der entgegengesetzten Seite der Grundfläche, auch einen Perpendikel auf dieselbe herab; so trifft er aus gleichen Gründen den Punct Q . Hieraus folgt, daß die beiden Pyramiden-Spitzen, auf den entgegengesetzten Seiten der Grundfläche $ABCD$ zugleich Pole des gedachten Kreises sind, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der um das Octaedron zu beschreibenden Kugel zusammenfällt, und PQ ist so wohl ein Halbmesser des Kreises um $ABCD$ als auch der Kugel um das Octaedron.

§. 122.

Aufgabe. Auf einer Kugel, deren Halbmesser gegeben ist, die Puncte zu einem Octaedron zu entwerfen.

Man durchschneide die Kugel mit einer durch den Mittelpunkt gelegten Ebene; so gibt die Durchschnitts-

figur einen größten Kreis, (4. I.) Durch seinen Mittelpunkt ziehe man eine gerade Linie, welche auf der Ebene dieses Kreises senkrecht steht; so trifft er gehörig verlängert, des Kreises Pole. Zeichnet man sich nun in diesen Kreis ein Quadrat ein und ziehet von dessen Winkelpuncten nach beiden Polen gerade Linien; so stellt diese Figur ein reguläres Octaedron vor.

§. 123.

Aufgabe. Aus der Seitenlinie eines Icosaedrons, seine Flächenwinkel, seinen körperlichen Inhalt, seine Oberfläche nebst dem Halbmesser der um das Icosaedron zu beschreibenden Kugel zu berechnen.

1) Das erste verlangte Stück ist der Flächenwinkel. Es sei (Fig. 48.) P eine Ecke des Icosaedrons mit den gleichen Seitenlinien PA, PB, PC, PD, PE; so ist ABCDE ein reguläres Fünfeck, folglich jeder der darin enthaltenen Polygonwinkel wie ABC, BCD etc. $= 108^\circ$ und PABCDE ist eine gleichseitige Pyramide, deren Grundfläche ABCDE und Spitze P ist. Aus C beschreibe man das sphärische Dreieck NOM, worin $NO = NM$ ist, weil jeder Winkel BCP und PCD eine Größe von 60° hat. Der W. BCD hingegen, oder der Bogen OM hat als dessen Maß 108° . Es ist aber der Cosinus des Winkels an PC, welchen die beiden Seitenflächen PCB und PCD mit einander einschließen d. i. $\cos ONM = \frac{\cos OM - \cos ON \cdot \cos MN}{\sin ON \cdot \sin MN}$
 $= \frac{\cos OM - \cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 60^\circ}$. Es ist aber $\cos OM$

$$= \cos 108^\circ = -\cos 72^\circ = -\left(\frac{1}{4}\sqrt{5} - 1\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Schreibt man nun die numerischen Werthe

$$\text{in die vorige Gleichung, so erhält man den Cosinus von PC oder } \cos ONM = \frac{\frac{1 - \sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Man findet aber } \sqrt{5} = 2,2360680, \text{ desgl. } \frac{\sqrt{5}}{5} =$$

$$0,7453560 \text{ und } -\frac{\sqrt{5}}{5} = -0,7453560. \text{ Dieser Co-}$$

sinus gehört zu einem Bogen von $158^\circ 11' 25''$. Vermittelt der Logarithmen führet man die Rechnung auf folgende Art. Man hat nehmlich

$$\begin{aligned} \log 1 &= 10, \\ \log \sqrt{5} &= \underline{0,3494850} \\ &10,3494850 \\ \log 5 &= \underline{0,4771212} \end{aligned}$$

$$\log \cos ONM = 9,8723638 = \log \cos 158^\circ 11' 25''.$$

Also ist jeder der gesuchten Flächenwinkel $= 158^\circ 11' 25''$.

II) Das zweite Stück, welches gesucht wird, ist der körperliche Inhalt des Icosaedrons. Es ist aber nach (118. II.) $K = 20 \left(\frac{1}{24}na^3 \tan \frac{1}{2}\beta^2 \cdot \tan \frac{1}{2}\gamma\right) =$

$$\frac{5}{3} \cdot 3 \cdot a^3 \tan \frac{1}{2}\beta^2 \tan \frac{1}{2}\gamma. \text{ Hier ist wieder } \beta = 50^\circ,$$

$$\sin \beta = \frac{1}{2}; \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ folglich } \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}}. \text{ Hingegen ist aus I. } \cos \gamma = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ folglich } \cos \frac{1}{2}\gamma$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1 + \cos \gamma}{2}\right)} \text{ oder } 2 \cos \frac{1}{2}\gamma^2 = 1 + \cos \gamma \text{ oder}$$

nach dem numerischen Werthe $2 \cos \frac{1}{2}\gamma^2 = 1 - \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{3 - \sqrt{5}}{3}$; weil $\cos \gamma = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, folglich $-\cos \gamma = +\frac{\sqrt{5}}{3}$. Also ist $\cos \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{6}\right)}$. Aus gleichen Gründen ist $\sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{(1 - \cos \gamma)} = \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)} = \sqrt{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{3}\right)}$. Daher ist $\tan \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}\right)}$. Setzt man nun die gefundenen Werthe für $\tan \frac{1}{2}\beta$ und $\tan \frac{1}{2}\gamma$, in die obige Gleichung, so ist $K = \frac{5}{8} \cdot 5 a^3 \frac{1}{8} \cdot \sqrt{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}\right)} = \frac{5}{8} a^3 \sqrt{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}\right)} = \frac{5}{8} a^3 \sqrt{\left(\frac{(3 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}\right)} = \frac{5}{8} a^3 \sqrt{\left(\frac{(3 + \sqrt{5})^2}{(9 - 5)}\right)} = \frac{5}{8} a^3 \sqrt{\left(\frac{(3 + \sqrt{5})^2}{4}\right)} = \frac{5}{8} a^3 (3 + \sqrt{5})$.

III) Sucht man die Oberfläche F. Hier kann jede Seitenfläche als die Grundfläche angesehen werden. Daher ist $F = 5ab$, allein $b = \frac{1}{2}a^2 \sqrt{3}$, (118.) folglich $F = 5a^2 \sqrt{3}$.

IV) Das vierte verlangte Stück endlich, ist der Halbmesser, der um das Icosaëdron zu beschreibenden Kugel r. Es hat aber r hier eine Lage, welche mit derjenigen übereinkommt, welche die Seitenlinie L bei der gleichseitigen Pyramide hat, (118. I) Daher ist $r = \frac{\frac{1}{2}a \sqrt{(1 + \sin \frac{1}{2}\beta^2 \tan^2 \frac{1}{2}\gamma^2)}}{\cos \beta}$. Nimmt man nun für $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\tan \frac{1}{2}\gamma$ die dafür in (II) gefundenen

Werthe; so wird

$$\sin \frac{1}{2}\beta^2 \cdot \tan \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4(3 - \sqrt{5})} \text{ und}$$

$$1 + \sin \frac{1}{2}\beta^2 \cdot \tan \frac{1}{2}\gamma^2 = 1 + \frac{3 + \sqrt{5}}{4(3 - \sqrt{5})} =$$

$$\frac{4(3 - \sqrt{5}) + 3 + \sqrt{5}}{4(3 - \sqrt{5})} = \frac{12 - 4\sqrt{5} + 3 + \sqrt{5}}{4(3 - \sqrt{5})} =$$

$$\frac{15 - 3\sqrt{5}}{4(3 - \sqrt{5})}. \text{ Folglich}$$

$$V(1 + \sin \frac{1}{2}\beta^2 \cdot \tan \frac{1}{2}\gamma^2) = V\left(\frac{15 - 3\sqrt{5}}{4(3 - \sqrt{5})}\right). \text{ Also}$$

$$r = \frac{V(1 + \sin \frac{1}{2}\beta^2 \cdot \tan \frac{1}{2}\gamma^2)}{\cos \frac{1}{2}\beta} = \frac{\frac{1}{2}a V\left(\frac{15 - 3\sqrt{5}}{4(3 - \sqrt{5})}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}a V\left(\frac{15 - 3\sqrt{5}}{3 \cdot (3 - \sqrt{5})}\right) = \frac{1}{2}a V\left(\frac{(5 - \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})}\right).$$

Es ist demnach bei einem Icosaedron

I) $\gamma = 138^\circ 11' 25''$ d. i. die Größe der Flächenwinkel.

II) $K = \frac{1}{2}a^3 V\left(\frac{(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})}\right)$ d. i. der körperliche Inhalt.

III) $F = 5a^2 \sqrt{3}$ d. i. die Oberfläche und

IV) $r = \frac{1}{2}a V\left(\frac{(5 - \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})}\right)$ d. i. der Halbmess-

ser der um das Icos. zu beschreibenden Kugel.

Es sei z. B. des Icosaedrons Seitenlinie $a = 86'$; wie groß ist sein Inhalt, seine Oberfläche und der Halbmesser, der um diesen Körper zu beschreibenden Kugel? — Es ist 1) $K = \frac{1}{2}a^3 (3 + \sqrt{5})$. Man

erhält aber $3 + \sqrt{5} = 5,236068$. Nun ist

$$\log(3 + \sqrt{5}) = 0,7190052$$

$$3 \log 86 = 5,8034952$$

$$\log 5 = 0,6989700$$

$$\hline 7,2214704$$

$$\log 12 = 1,0791812$$

$\log K = 6,1422896 = \log 1387680$. Es ist also $K = 1387680$ Kubf.

2) Hat man $F = 5a^2 \sqrt{5}$ gefunden. Es ist aber

$$2 \log 86 = 3,8689968$$

$$\log 5 = 0,6989700$$

$$\log \sqrt{5} = 0,2385606$$

$\log F = 4,8065274 = \log 64051,23$. Man erhält also für die Oberfläche des Icosaedrons $F = 64057,23$ Q. F.

Endlich findet man 3) der Kugel Halbmesser $r = \frac{1}{2}a$

$$\sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}\right)}. \text{ Es ist aber } 5 - \sqrt{5} = 2,7639320$$

$$\text{und } 3 - \sqrt{5} = 0,7639320, \text{ folglich } \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2,763932}{0,763932}} = \sqrt{\frac{2763,932}{763,932}}. \text{ Nach den log. Tafeln aber ist}$$

$$\log 2763,932 = 3,4415273$$

$$\log 763,932 = 2,8830547$$

$$\hline 0,5584726$$

$$2) \quad 0,2792363$$

$$\log 43 = 1,6334685$$

$\log r = 1,9127048 = \log 81,79$. Es ist also der Kugel Halbmesser $r = 81,79$ Fuß.

Zusatz 1. Nach dem geführten Beweise ist aus (IV)

$$r = \frac{1}{2}a \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})}{(5 + \sqrt{5})}} \text{ oder}$$

$$2r = a \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})}{(5 + \sqrt{5})}} = a \frac{\sqrt{(5 - \sqrt{5})}}{\sqrt{(5 + \sqrt{5})}} \text{ oder weil } d = 2r \text{ ist,}$$

$$\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{(5 - \sqrt{5})}}{\sqrt{(5 + \sqrt{5})}}; \text{ oder}$$

$$\begin{aligned} d:a &= \sqrt{(5 - \sqrt{5})} : \sqrt{(5 + \sqrt{5})} \text{ od. d. 2te Verhñ. } \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2(5 - \sqrt{5})} : \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \\ &= \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} : \sqrt{(6 + \sqrt{5})} \\ &= \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} : \sqrt{(5 - \sqrt{5} + 1)} \\ &= \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} : \sqrt{5 - 1} \text{ od. d. 2te Verhältn. : 4} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} : \frac{1}{4} \sqrt{5 - 1}. \end{aligned}$$

Erwäget man nun, daß $\frac{1}{4} \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = \sin 60^\circ$; $\frac{1}{4} \sqrt{5 - 1} = \sin 18^\circ$ (Man vergl. Lambert's Zus. zu den log. und trig. Tafeln S. 137. Tab. XIX. Desgl. des Hr. Prof. Klügels Math. Wörterbuch unter dem Art. Goniom. S. 601 und 602. — Meine Entwicklung der ersten Grunds. der Analysis a. d. a. D.) sei, ferner, daß die Sinus sich wie die zugehörigen Sehnen verhalten und endlich, daß die Sehnen, Seiten regulärer Polygone sind; so bezeichnet die letzte Proportion folgenden Satz: Es verhält sich der Durchmesser der Kugel, zur Seite des Icosaedrons, wie die Seite eines regulären Fünfecks, zur Seite eines regulären Zehneckes, vorausgesetzt, daß beide Polygone in Kreisen von gleichem Halbmesser liegen.

Zusatz 2. Bekanntlich ist nach den Grundsätzen der ebenen Trigonometrie $\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ$;

$$\begin{aligned}\text{folglich } 2 \cos 18^\circ &= \frac{\sin 36^\circ}{\sin 18^\circ} = 2 \sin 72^\circ. \quad \text{Nun ver-} \\ \text{hält sich } 2r : a &= \sin 36^\circ : \sin 18^\circ \text{ (Zus. 1.)} \\ &= \frac{\sin 36^\circ}{\sin 18^\circ} : 1 \\ &= 2 \sin 72^\circ : 1\end{aligned}$$

Also ist $r = a \sin 72^\circ = \frac{1}{4}a \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.
Hieraus läßt sich der Halbmesser leicht berechnen. Es
ist daher $r = a \sin 72^\circ = 86 \times 0,9510565 = 81,790859$
D. F. oder $\frac{1}{4}a \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$. Man findet aber
 $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 3,8042260$, folglich $r = \frac{86,38042260}{4}$
 $= 81,790859$.

Da nun die circulären Functionen, bis auf einige
wenige, wohin der hier gefundene Ausdruck nicht ge-
hört, irrational sind; so ist auch das Verhältniß des
Durchmessers der Kugel zur Seite des Icosaedrons
irrational. Man vergl. (Eucl. XIII. B. 18. S.)

Zusatz 5. Der körperliche Inhalt des Icosaedrons
läßt sich nun auch aus dem Halbmesser r , der um das-
selbe zu beschreibenden Kugel berechnen. Denn aus
(Zus. 1.) erhält man

$$a : 2r = \sqrt{3 - \sqrt{5}} : \sqrt{5 - \sqrt{5}}; \text{ folglich}$$

$$\begin{aligned}a &= \frac{2r\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}} = \frac{r\sqrt{4(3 - \sqrt{5})}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}} = \frac{r\sqrt{12 - 4\sqrt{5}}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}} \\ &= \frac{r\sqrt{(12 - 4\sqrt{5}) \cdot (5 + \sqrt{5})}}{\sqrt{(5 - \sqrt{5}) \cdot (5 + \sqrt{5})}} = r\sqrt{\frac{40 - 8\sqrt{5}}{20}} \\ &= \frac{r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}. \text{ Folglich ist}\end{aligned}$$

$$a^3 = \frac{r^3 (10 - 2\sqrt{5}) \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{5\sqrt{5}} \text{ und}$$

$$\frac{5}{12}a^3 = \frac{r^3 (10 - 2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{12\sqrt{5}}. \text{ Folglich}$$

$$K = \frac{5}{12}a^3 (3 + \sqrt{5}) = \frac{r^3 (10 - 2\sqrt{5}) (3 + \sqrt{5}) \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{12\sqrt{5}}$$

$$= \frac{r^3 (20 + 4\sqrt{5}) \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{12\sqrt{5}}$$

$$= \frac{r^3 (30 + 4\sqrt{5} - 10) \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{12\sqrt{5}}$$

$$= \frac{r^3 (20 + 4\sqrt{5}) \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{12\sqrt{5}}$$

$$= \frac{r^3 (10 + 2\sqrt{5}) \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{6\sqrt{5}}$$

$$= \frac{r^3 \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} \cdot (10 + 2\sqrt{5}) \cdot (10 - 2\sqrt{5})}{6\sqrt{5}}$$

$$= \frac{r^3 \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} \cdot \sqrt{80}}{6\sqrt{5}} = \frac{r^3 \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} \cdot \sqrt{5} \cdot 16}{6\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{3}r^3 \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = -\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4}r^3 \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2}{3}r^3 \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = \frac{8}{3}r^3 \sin 72^\circ, \text{ weil } \sin 72^\circ$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} \text{ ist.}$$

Hieraus läßt sich nun der körp. Inhalt K aus dem Halbmesser r sehr leicht berechnen. Es ist nemlich $\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = 3,80422606518$ folglich $K = \frac{2}{3} \cdot (81,97)^3 \cdot 3,804 \dots$ oder weil $\sin 72^\circ = 0,9510565$; so ist $K = \frac{8}{3} \cdot (81,97)^3 \cdot 0,9510565$.

Zusatz 4. Auch des Icosaedrons Oberfläche läßt sich aus dem gedachten Halbmesser berechnen. Man findet $F = 5a^2\sqrt{5}$ (III). Allein es ist

$$a = \frac{r\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}}, \text{ folglich}$$

$$a^2 = \frac{r^2(10 - 2\sqrt{5})}{5}. \text{ Also}$$

$$F = 5a^2\sqrt{3} = r^2(10 - 2\sqrt{5})\sqrt{3} \text{ oder}$$

$F = r^2\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} \cdot \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} \cdot \sqrt{3}$. Nun ist $(10 - 2\sqrt{5}) = \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} \cdot \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = 5,5278640449$ und $\sqrt{3} = 1,7320508007569$. Nimmt man nun $r = 81,79$, so kann man F so genau, als es nöthig ist, berechnen. Erinuert man sich nun, daß $\frac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = \sin 18^\circ$, (Man s. meine Entwicklung der ersten Grundf. der Anal. a. a. D.) $\sqrt{3} = \tan 60^\circ$, so ergibt sich hieraus der Werth von $F = 16r^2 \sin 36^\circ \cdot \sin 36^\circ \cdot \tan 60^\circ$. Ein Ausdruck, der sich sehr bequem durch Logarithmen berechnen läßt. Man hat aber

$$2 \log 81,79086 = 3,8254094$$

$$2 \log \sin 36^\circ = 19,5384374$$

$$\log \tan 60^\circ = 10,2385606$$

$$\log 16 = 1,2041200$$

$$= 34,8065274$$

$$\underline{30}$$

$$4,8065274 = \log 64051,23. \text{ Da}$$

her ist $F = 64051,23$ Q. F. wie vorhin.

Zusatz 5. Betrachtet man die Seitenflächen des Icosaedrons, als Grundflächen gleichseitiger Pyramiden, deren Spitzen sich in den gemeinschaftlichen Mittelpunkt vereinigen; so ist die Höhe dieser Pyramiden, zugleich der Abstand der Seitenflächen von dem Mittelpunkte. Jenen, folglich auch diesen findet man aber aus (118.), wo $PQ = \frac{1}{2}a \tan \frac{1}{2}\beta \tan \gamma$ ist. Hier aber ist der Flächenwinkel halbiert, also ist hier der gesuchte Abstand, $= \frac{1}{2}a \tan \frac{1}{2}\beta \tan \frac{1}{2}\gamma$. Es ist aber aus (II) $\tan \frac{1}{2}\beta =$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\tan \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})}}$, folglich der Ab-

stand $= \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})}} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot$

$\sqrt{\frac{(3 + \sqrt{5}) \cdot (3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5}) \cdot (3 + \sqrt{5})}} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} =$

$\frac{a(3 + \sqrt{5})}{4\sqrt{3}}$. Es ist aber $3 + \sqrt{5} = 5,236067$ und

$\sqrt{3} = 1,7320\dots$ Folglich der Abstand $= \frac{86 \cdot 5,2360}{4 \cdot 1,7320}$

$= 64,99$. Man kann aber auch hier für a den Werth

aus (Zus. 3.) d. i. $\frac{2r\sqrt{(3 - \sqrt{5})}}{\sqrt{(5 - \sqrt{5})}}$ nehmen; so ist der

Abstand $= \frac{r(3 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{(3 - \sqrt{5})}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{(5 - \sqrt{5})}} =$

$\frac{r(3 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{(3 - \sqrt{5})} \cdot \sqrt{(3 + \sqrt{5})}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{(5 - \sqrt{5})} \cdot \sqrt{(3 + \sqrt{5})}} =$

$\frac{r(3 + \sqrt{5})}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{(5 - \sqrt{5})} \cdot \sqrt{(3 + \sqrt{5})}} = \frac{r(3 + \sqrt{5})}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}$

$\frac{r(3 + \sqrt{5})}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{(5 + \sqrt{5})}}$. Es ist aber $3 + \sqrt{5} =$

$5,2360679\dots$ und $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{(5 + \sqrt{5})} =$

$6,589112828\dots$ folglich der Abstand $= \frac{81,79 \cdot 5,2360\dots}{6,5891\dots}$

$= 64,9$.

Zusatz 6. Setzt man den Halbmesser des, um das reguläre Polygon ABCDE, zu beschreibenden Kreises

CQ = ϵ ; so ist $\epsilon = \frac{\frac{1}{2}a}{\cos \frac{1}{2}BCD} = \frac{\frac{1}{2}a}{\cos 54^\circ} = \frac{\frac{1}{2}a}{\sin 36^\circ}$

$= \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}} = \frac{2a}{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}$. Nimmt man

also $a = 86'$ an; so hat man, weil $V(10 - 2\sqrt{5}) = 2,351141\dots$ ist, $\varepsilon = \frac{172}{2,351141} = 73,28'$. Schreibt

man nun in ε den für a gefundenen Werth $\frac{rV(10 - 2\sqrt{5})}{V5}$;

so erhält man $\varepsilon = \frac{2rV(10 - 2\sqrt{5})}{V5(V(10 - 2\sqrt{5}))} = \frac{2r}{V5} = \frac{2}{7}rV5$
 $= 15,15$.

Anmerkung. Die beiden ersten oben angeführten Zusätze, haben Karsten und Schulze in ihrer Trigonometrie mit dem Beweise des Hauptsatzes verwebt. Anfänger aber werden den Zusammenhang der dafür angeführten Gründe nicht wohl übersehen können, weil bei den gedachten Verfassern theils in den Citatis, theils aber auch in der Beschreibung selbst Druckfehler vorkommen, deren Berichtigungen nicht angegeben sind.

§. 124.

Aufgabe. Aus eines Icosaedrons gegebener Seitenlinie, die Höhe der Pyramide PABCDE und die Neigungswinkel der Seitenfläche DPG gegen das reguläre Fünfeck, als ihre Grundfläche zu finden.

Es sei PABCDE die Pyramide, deren Seitenlinie $CD = CP$ u. $= a$ ist; so suche man I) den Neigungswinkel der Seitenfläche an CD gegen die Grundfläche ABCDE, vermittelt des von C beschriebenen sphär. Dreieckes, dessen Winkel NMO mit dem gedachten Neigungswinkel von gleicher Größe ist.

II) Suche man den Neigungswinkel der Seitenlinie PC gegen die Grundfläche, vermittelt des rechtwin-

fligen sphär. Dreieckes NWM, dessen Seite NW als Kreisbogen, die Größe des gedachten Neigungswinkels mißt. Aus diesem kann man mit Hülfe der gegebenen Seitenlinie leicht die verlangte Höhe bestimmen. Es ist nemlich

$$I) \cos NMO = \frac{\cos NO - \cos NM \cdot \cos OM}{\sin NM \cos OM} \quad (89.)$$

$$= \frac{\cos 60^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 108^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 108^\circ}$$

$$= \frac{\cos 60^\circ + \cos 60^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 72^\circ}$$

Erwäget man nun, daß $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 72^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$; $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$;

$$\text{so ist } \cos NMO = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} =$$

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}. \text{ Hieraus kann man nun leicht den}$$

$\sin NMO$ finden. Es ist nemlich $\sin NMO =$

$$\sqrt{1 - \frac{(3 + \sqrt{5})^2}{(\sqrt{3}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})^2}} = \sqrt{\frac{30 + 6\sqrt{5} - 14 - 6\sqrt{5}}{3(10 + 2\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3(10 + 2\sqrt{5})}}.$$

II) In dem rechtwinkligen sphär. Dreiecke verhält sich $\sin WO : \sin NMW = \sin NM : 1$ (67.) oder

$$\sin PCQ : \frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sin 60' : 1 \text{ u. weil } \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin PCQ = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}.$$

$$\text{Also ist III) } PQ = PC \cdot \sin PCQ = \frac{2a}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

$= \frac{2a}{4 \sin 72^\circ}$, weil $\frac{1}{4}V(10+2\sqrt{5}) = \sin 72^\circ$ ist. Nimm

man nun $a = 36'$ an, so ist, weil $V(10+2\sqrt{5}) = 3,804226$ ist, die Höhe $PQ = 45,21$. Man kann aber dieselbe auch aus dem Halbmesser r berechnen und $\frac{rV(10-2\sqrt{5})}{\sqrt{5}}$ für a schreiben. Alsdann erhält man

$$\begin{aligned} \text{die Höhe } PQ &= \frac{2rV(10-2\sqrt{5})}{\sqrt{5}V(10+2\sqrt{5})} = \\ &= \frac{2rV(10-2\sqrt{5}) \cdot (10-2\sqrt{5})}{\sqrt{5}V(10+2\sqrt{5}) \cdot (10-2\sqrt{5})} = \frac{2r(10-2\sqrt{5})}{\sqrt{5} \cdot 80} = \\ &= \frac{2r(10-2\sqrt{5})}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{10}r(10-2\sqrt{5}) = \frac{2}{5}r \sin 36^\circ. \end{aligned}$$

$\sin 36^\circ$, weil $\frac{1}{4}V(10-2\sqrt{5}) = \sin 36^\circ$, folglich $\frac{1}{10} \cdot (10-2\sqrt{5}) = (\sin 36^\circ)^2$ und $\frac{1}{10}r(10-2\sqrt{5}) = \frac{8}{5}r(\sin 36^\circ)^2$. Setzt man hier $r = 81,79$, so ist $PQ = 45,21$ wie vorhin.

Zusatz 1. Zieht man nun PQ von r ab; so erhält man den Abstand der Grundfläche $ABCDE$ der Pyramide vom Mittelpunkte der Kugel. Es ist nemlich $= r - PQ = r - \frac{1}{10}r(10-2\sqrt{5}) = r - r + \frac{2}{10}r\sqrt{5} = \frac{1}{5}r\sqrt{5}$.

Zusatz 2. Legt man nun die gleichseitigen Dreiecke AEF , EDK , DIC , AGB , BHC als Seitenflächen unter dem (in I.) gefundenen Winkel von $158^\circ 11' 25''$, durch die Seiten des regulären Polygons $ABCDE$; so sind die Winkelspitzen dieser Dreiecke F , G , H , I , K von P gleichweit entfernt. Ziehet man nun dieselben durch gerade Linien FG , GH , HI , IK , KF zusammen; so erhält man ein reguläres Polygon, welches dem vorigen $ABCDE$ gleich und ähnlich ist und beider Ebenen laufen

fen mit einander parallel. Schließt sich nun an das Polygon FGHK eine gleichseitige Pyramide, welche der vorigen PABCD gleich und ähnlich ist, an, so ergibt sich aus dieser Zusammensetzung das ganze Icosaedron.

§. 125.

Aufgabe. Eine Kugel von bekanntem Halbmesser ist gegeben, man soll darauf die Winkelpunkte für das Icosaedron entwerfen.

Man wähle sich auf der Kugel zwei Punkte P und R zu Polen; so ist PR die Aze und ihre Mitte, der Mittelpunkt der Kugel. In einer Entfernung von diesem Punkte, welche so groß als $\frac{2}{3}r$ ist, beschreibe man zu beiden Seiten des Mittelpunktes, auf der Kugel zwei parallelaufende Kreise, in deren einen die Punkte A, B, C, D, E und in den andern die Punkte F, G, H, I, K nach (124. Zuf. 2.) fallen werden. Endlich lege man durch die Aze PR zehn sich einander unter dem W. von 36° schneidende Ebenen; so bestimmen ihre Durchschnittspunkte mit den beiden Kreisen, zehn und die Pole, die übrigen Ecken des verlangten Icosaedrons. Man vergl. (Eukl. 16. S. im XIII. B.).

§. 126.

Aus der gegebenen Seite eines Hexaedrons (Würfels), die Größe seiner Flächenwinkel, seinen körperlichen Inhalt und den Halbmesser der um den gedachten Körper zu beschreibenden Kugel zu finden.

1) Beschreibe man aus einer körperlichen Ecke C, (Fig. 49.) mit einem willkürlichen Halbmesser die

Kreisbogen MN, NO, OM in GCB, GCD und DCB als Seitenflächen; so ist das sphärische $\triangle MNO$ gleichseitig und jede Seite, folglich auch jeder Winkel 90° . (58. Zus.). Diese Größe ergibt sich auch (aus 89.) und es ist, wenn man den Buchstaben, die ihnen in den vorigen §§. gegebene Bedeutung läßt $\cos NMO = \cos \gamma$

$$= \frac{\cos NO - \cos MN \cdot \cos MO}{\sin MN \cdot \sin MO} \quad \text{oder} \quad \cos \gamma =$$

$$\frac{\cos 90^\circ - \cos 90^\circ \cdot \cos 90^\circ}{\sin 90^\circ \sin 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0. \quad \text{Ein Winkel}$$

dessen Maß nicht über 180° geht und dessen Cosinus 0 ist, beträgt 90° . Also ist $\gamma = 90^\circ$.

II) Es ist $K = 6 \cdot \frac{1}{24} \cdot n \cdot a^3 \tan \frac{1}{2}\beta^2 \cdot \tan \frac{1}{2}\gamma$. Nun ist $\gamma = 90^\circ$, $\frac{1}{2}\gamma = 45^\circ$, folglich $\sin \frac{1}{2}\gamma = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$; so groß ist auch $\cos \frac{1}{2}\gamma$, folglich $\tan \frac{1}{2}\gamma = \tan 45^\circ = 1$. Auch ist $\beta = 90^\circ$, $\frac{1}{2}\beta = 45^\circ$, folglich $\sin \frac{1}{2}\beta = \cos \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\tan \frac{1}{2}\beta = \tan 45^\circ = 1$, folglich auch $\tan \frac{1}{2}\beta^2 = 1$. Schreibt man nun diese für $\tan \frac{1}{2}\beta^2$, und $\tan \frac{1}{2}\gamma$ gefundenen Werthe und für $n = 4$, in K; so ist $K = a^3$, eine Größe, welche mit dem Resultat für den, aus den Grundsätzen der Geometrie, hergeleiteten Inhalt des Würfels, völlig übereinstimmt.

III) Halbt man nun die gefundenen Flächenwinkel, vermittelst der, durch die Seiten des Würfels gelegten Ebenen; so zerfällt der Körper in sechs gleiche ähnliche und gleichseitige Pyramiden, deren Grundflächen, die Seitenflächen des Würfels sind, deren Spitzen, in den Mittelpunkt der um denselben zu beschreibenden Kugel fallen, und deren Seitenlinien von der Spitze nach den Winkelpuncten der Grundflächen gezogen, die

Länge des verlangten, zur gedachten Kugel gehörigen Halbmessers r haben. Es ist also r hier einer gleichseitigen Pyramide Seitenlinie, welche nach (118.) $= \frac{\frac{1}{2}aV(1 + \sin \frac{1}{2}\beta^2 \cdot \tan^2 \frac{1}{2}\gamma^2)}{\cos \frac{1}{2}\beta}$ ist. Schreibt man nun

in diesen Ausdruck die Werthe aus II); so erhält man

$$r = \frac{\frac{1}{2}aV(1 + \frac{1}{2})}{V\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}aV3.$$

Es ist also bei einem Hexaedron

- I) $\gamma = 90^\circ$ d. i. der Flächenwinkel.
- II) $K = a^3$ d. i. der körperl. Inhalt.
- III) $r = \frac{1}{2}aV3$ d. i. der Halbmesser der um den Würfel zu beschreibenden Kugel.

Zusatz 1. Aus $r = \frac{1}{2}aV3$ folgt, daß, $2r : a = V3 : 1$ oder $4r^2 : a^2 = 3 : 1$ oder $d^2 : a^2 = 3 : 1$ d. h., daß sich das Quadrat des Durchmessers der Kugel, zum Quadrat der Seitenlinie des Würfels, wie 3 zu 1 verhält, oder, daß das Quadrat des Durchmessers der Kugel drei Mal größer sei als das Quadrat der Seitenlinie des in jene gezeichneten Würfels. Man vergl. (Eukl. 18. B. im XIII. B.)

Zusatz 2. Schneiden sich nun zwei durch AEGC und DHFB gelegte Ebenen einander so, daß ihre Durchschnittslinie IK auf den Seitenflächen ABCD, EFGH senkrecht steht; so bezeichnet, wofern $IL = KL$ ist, K den Mittelpunkt der um den Würfel zu beschreibenden Kugel, ferner ist $LA = LB = LC = LD = LE = LF = LG = LH = r$ und KL die Höhe der sechs in III) beschriebenen Pyramiden. Man findet aber $LK = \frac{1}{2}a \tan \frac{1}{2}\beta \cdot \tan \frac{1}{2}\gamma$ (118.) und setzt man für $\tan \frac{1}{2}\beta$ und $\tan \frac{1}{2}\gamma$ die Werthe aus II) in die

Gleichung für KL; so ist $KL = \frac{1}{2}a$, wie sich dieses auch aus Betrachtung der Figur ergibt. Da nun $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, folglich $\frac{1}{2}a = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}r\sqrt{3}$; so ist $LK = \frac{1}{3}r\sqrt{3} = r\sqrt{\frac{1}{3}} = r\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Zusatz 3. Beschreibt man nun durch die Winkelspitzen A, B, C, D der Seitenfläche ABCD des Hexaedrons, einen Kreis; so ist dessen Halbmesser $AK = \frac{\frac{1}{2}a}{\cos \frac{1}{2}\beta}$ (118. I) $= \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ oder weil $\frac{1}{2}a = \frac{r}{\sqrt{3}}$; so ist $AK = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = r = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

§. 127.

Aufgabe. Eine Kugel von bekanntem Halbmesser ist gegeben; man soll darauf die Winkelpuncte für das Hexaedron entwerfen.

Man nehme in der gegebenen Kugel einen beliebigen Durchmesser zur Axe an und beschreibe aus deren Pole zu beiden Seiten ihres Mittelpunctes L, zwei Kreise, deren jeder von L um $\frac{1}{3}r\sqrt{3}$ entfernt ist; so wird deren einer durch die Puncte A, B, C, D und der andere durch die Puncte E, F, G, H gehen. Läßt man nun durch die Pole dieser Kreise, zwei andere größte, die vorigen unter rechten Winkeln durchschneidende Kreise gehen; so werden ihre Ebenen mit AEGC und BFHD zusammenfallen, und die Durchschnittspuncte dieser Kreise mit jenen, werden die acht Winkelpuncte A, B, C, D, E, F, G, H für das Hexaedron geben. Man vergl. (Eucl. S. 15. im XIII. B.)

§. 128.

Aus der gegebenen Seitenlinie des Dodecaedrons, seine Flächenwinkel, seinen Inhalt, seine Oberfläche und den Halbmesser, der um dasselbe zu beschreibenden Kugel zu berechnen.

Aus der körperlichen Ecke C (Fig. 50.) beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser, das sphärische $\triangle MNO$, in welchen, wenn, die in den vorigen §§. angenommenen Buchstaben, in ihrem Werthe beibehalten

$$\text{werden, } \cos \gamma \text{ oder } \cos ONM = \frac{\cos OM - \cos NO \cdot \cos NM}{\sin NO \cdot \sin NM}$$

ist. Die drei Seiten MN, NO, OM des sphär. $\triangle NMO$ aber sind die Maße der gleichen Winkel DCV, BCD und BCV, weil jeder als ein Polygonwinkel des regulären Fünfecks $= 108^\circ$, beträgt. Daher ist $\cos \gamma =$

$$\frac{\cos 108^\circ - \cos 108^\circ \cdot \cos 108^\circ}{\sin 108^\circ \cdot \sin 108^\circ} = \frac{-\cos 72^\circ - (\cos 72^\circ)^2}{(\sin 72^\circ)^2}$$

$$\text{Es ist aber } \cos 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}, \text{ folglich } -\cos 72^\circ = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \text{ und } \sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Schreibt man nun diese Werthe in die Gleichung für

$$\begin{aligned} \cos \gamma; \text{ so erhält man } \cos \gamma &= \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)^2} \\ &= \frac{[(2 - 2\sqrt{5}) - (3 + \sqrt{5})] : 8}{(5 + \sqrt{5}) : 8} = \frac{2 - 2\sqrt{5} - 3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} \\ &= -\frac{1 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = -\frac{(1 + \sqrt{5}) \cdot (5 - \sqrt{5})}{(5 + \sqrt{5}) \cdot (5 - \sqrt{5})} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ &= -\frac{2,2360679775}{5} = -0,44721359 \text{ und also } \gamma = \end{aligned}$$

$180^\circ - 65^\circ 26' 6'' = 116^\circ 55' 54''$. (Man vergl. Eukl. 7. B. des XV. B.)

II) Der geometrische Inhalt des Dodecaedrons, besteht aus den zwölf gleichen ähnlichen und gleichseitigen Pyramiden, in welche dasselbe durch die in (118.) beschriebene Theilung sämtlicher Flächenwinkel zerfällt wird. Jede dieser Pyramiden ist demnach $= \frac{1}{24} na^3 \tan \frac{1}{2} \beta^2 \cdot \tan \frac{1}{2} \gamma$. Folglich ist $K = 12 \cdot \frac{1}{24} na^3 \tan \frac{1}{2} \beta^2 \tan \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2} a^3 \tan \frac{1}{2} \beta^2 \cdot \tan \frac{1}{2} \gamma$. Es ist aber $\cos \gamma = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; folglich

$$2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2 = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{5 + \sqrt{5}}{5}, \text{ und}$$

$$2 \cos \frac{1}{2} \gamma^2 = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{5}; \text{ folglich}$$

$$\tan \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\cos \frac{1}{2} \gamma^2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}.$$

$$\text{Also } \tan \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})}{(5 - \sqrt{5})}} =$$

$$\frac{\sqrt{(5 + \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}}{\sqrt{(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

$$\text{Ferner ist } \beta = 108^\circ, \text{ und } \cos \beta = \cos 108^\circ = -\cos 72^\circ = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}; \text{ folglich } \sin \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos \beta}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 108^\circ}{2}\right)} = \sqrt{\left(1 - \frac{(1 - \sqrt{5})}{4}\right)} : 2$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})}{2}}; \text{ und } \cos \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos \beta}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1 + \cos 108^\circ}{2}\right)} = \sqrt{\left(1 + \frac{(1 - \sqrt{5})}{4}\right)} : 2$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})}{2}}; \text{ folglich } \tan \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})}}$$

$$\text{und } \tan \frac{1}{2}\beta^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{20} =$$

$$\frac{20+8\sqrt{5}}{20} = \frac{5+2\sqrt{5}}{5}. \text{ Setzt man nun die für}$$

$\tan \frac{1}{2}\beta^2$ und $\tan \frac{1}{2}\gamma$ gefundenen Werthe in K; so ist

$$K = \frac{1}{2}a^3 \cdot \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}a^3 \cdot \frac{35+15\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{2}a^3 \cdot \frac{7+3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{4}a^3 (15+7\sqrt{5}).$$

III) Die Oberfläche F ist so groß, als eines der regulären Fünfecke (Seitenflächen) zwölf Mal genommen. Bezeichnet nun f den Flächeninhalt einer der gedachten Seitenflächen; so ist $f = \frac{1}{4}n \cdot a^2 \cot 36^\circ =$

$$\frac{1}{4}a^2 \cot 36^\circ, \text{ folglich } F = 12 f = 15a^2 \cot 36^\circ =$$

$$15a^2 \frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ}. \text{ Erwägt man nun, daß } \cos 36^\circ =$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} \text{ und daß } \sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\text{ist; so erhält man } F = \frac{15a^2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} =$$

$$\frac{15a^2 \sqrt{6+2\sqrt{5}} \cdot (10+2\sqrt{5})}{\sqrt{10-2\sqrt{5}} (10+2\sqrt{5})} = \frac{15a^2 \sqrt{80+32\sqrt{5}}}{16\sqrt{5}}$$

$$= \frac{15a^2 \sqrt{16(5+2\sqrt{5})}}{4\sqrt{5}} = 3a^2 \sqrt{5} \sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

IV) Das vierte Stück ist der Halbmesser, der um das Dodecaedron zu beschreibenden Kugel. Er ist hier eine der Seitenlinien, der durch die Halbierung der Flächenwinkel entstandenen zwölf Pyramiden. Er hat also den Werth von L in (118.). Daher ist $r =$

$\frac{\frac{1}{2}aV(1 + \sin \frac{1}{2}\beta^2 \tan \frac{1}{2}\gamma^2)}{\cos \frac{1}{2}\beta}$. Es ist aber (nach II)

$$\sin \frac{1}{2}\beta^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}, \cos \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8}\right)},$$

$$\tan \frac{1}{2}\gamma^2 = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

Schreibt man nun diese Werthe in r; so erhält man nach gehöriger Reduction $r = \frac{\frac{1}{2}aV(15 + 3\sqrt{5})}{V(5 - \sqrt{5})}$. Man hat also bei

einem Dodecaedron

- I) $\gamma = 116^\circ 33' 45''$ d. i. der Flächenwinkel.
- II) $K = \frac{1}{4}a^3 (15 + 7\sqrt{5})$ d. i. der körp. Inhalt.
- III) $F = 3a^2\sqrt{5} \cdot (V5 + 2\sqrt{5})$ d. i. die Oberfläche und
- IV) $r = \frac{\frac{1}{2}aV(15 + 3\sqrt{5})}{V(5 - \sqrt{5})}$ d. i. der Kugel Halbmesser.

Es sei z. B. eines Dodecaedrons Seitenlinie $a = 100$; wie groß ist sein körperlicher Inhalt, seine Oberfläche und der Halbmesser der um den gedachten Körper zu beschreibenden Kugel? Es ist $15 + 7\sqrt{5} = 30,652476$,
und $\log a^3 = 6$,

$$\log (15 + 7\sqrt{5}) = \frac{1,4864656}{7,4864656}$$

$$\log 4 = \frac{0,6020600}{}$$

$\log K = 6,8844056 = \log 7663119$; folglich ist $K = 7663119$ Kubf.

Ferner findet man, weil $\sqrt{5} V(5 + 2\sqrt{5}) = 6,8819096$

$$\log 3 = 0,4771212$$

$$\log \sqrt{5} V(5 + 2\sqrt{5}) = 0,8377090$$

$$\log a^2 = 4,$$

$$\log F = 5,3148302 = \log 20657,28;$$

folglich ist $F = 206457,28$ Q. F.

Endlich ist, weil man $V(15+3V5)=4,6592063630$
und $V(5-V5)=1,66250780$ findet

$$\log \frac{1}{2}a = 1,6989700$$

$$\log V(15+3V5) = 0,6683119$$

$$\hline 2,3672819$$

$$\log (5-V5) = 0,2207637$$

$$\log r = 2,1464182 = \log 140,1, \text{ folg-}$$

lich ist $r = 140,1$. F.

Zusatz 1. Der Werth des Halbmessers $r = \frac{\frac{1}{2}aV(15+3V5)}{V(5-V5)}$, läßt sich noch einfacher ausdrücken,

$$\text{indem } \frac{\frac{1}{2}aV(15+3V5)}{V(5-V5)} = \frac{\frac{1}{2}aV3V(5+V5)^2}{2V5} =$$

$$\frac{\frac{1}{4}a(5+V5)V3}{V5} = \frac{1}{4}aV3(V5+1) \text{ ist. Hieraus}$$

$$\text{erhält man } a = \frac{4r}{V3(V5+1)} = \frac{4rV3(V5-1)}{4V9}$$

$= rV\frac{1}{3}(5-1)$. Vermittelt dieser Gleichung kann man nun auch des Dodecaedrons körperl. Inhalt aus der Kugel Halbmesser bestimmen. Es ist nemlich $K = \frac{1}{4}a^3(15+7V5)$ und $rV\frac{1}{3}V(5-1)$ für a gesetzt, gibt $K = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}r^3(6-2V5)(15+7V5)V\frac{1}{3}(V5-1) = \frac{1}{3}r^3V\frac{1}{3}(10+2V5)$. Erwäget man nun, daß $V\frac{1}{3} = \tan 30^\circ$ und $\frac{1}{4}V(10+2V5) = \sin 72^\circ$ oder $V(10+2V5) = 4 \sin 72^\circ$; so erhält man auch $K = \frac{4}{3}r^3 \sin 72^\circ \tan 30^\circ$. Die Berechnung dieser Werthe für K vermittelt der Log. kommt auf folgende Art zu stehen

$$K = \frac{1}{2} r^3 (10 + 2\sqrt{5})\sqrt{3} \quad | \quad K = \frac{1}{2} r^3 \tan 30^\circ (\sin 72^\circ)^2$$

$3 \log r = 6,4393143$ $\log(10 + 2\sqrt{5}) = 1,1605327$ $\log \sqrt{3} = 0,2385606$ $\log 9 = 0,9542425$ $\log K = 6,8841651$ <u>Also K = 7658876</u>	$3 \log r = 6,4393143$ $\log \frac{1}{3} = 0,7269988$ $\log \tan 30^\circ = 9,7614594$ $2 \log \sin 72^\circ = 19,9564126$ $36,8841651$ <u>30,</u> $\log K = 6,8841651$
--	---

Zusatz 2. Auch die Oberfläche des Dodecaedrons läßt sich aus dem Halbmesser der, um dasselbe zu beschreibenden Kugel berechnen. Es ist nemlich, weil $a = r\sqrt{\frac{1}{2}(10 + 2\sqrt{5})}$, folglich $a^2 = \frac{1}{2}r^2(10 + 2\sqrt{5})$. Setzt man nun diesen Werth für a^2 in F; so ist $F = 2r^2\sqrt{5}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$; allein $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ ist $4 \sin 36^\circ$, folglich ist $F = 8r^2 \sin 36^\circ \sqrt{5}$. Berechnet man nun nach diesem Ausdruck den Flächeninhalt; so findet man

$$\begin{aligned} \log 8 &= 0,9030900 \\ 2 \log 140,1 &= 4,2930364 \\ \log \sin 36^\circ &= 9,7692187 \\ \log \sqrt{5} &= 0,3494850 \\ &= 15,3148301 \\ \log \tan r &= 10, \\ \log F &= 5,3148301 = \log 206457,25, \text{ folglich} \\ F &= 206457,25 \text{ Q. F.} \end{aligned}$$

Zusatz 3. Der Abstand der Seitenflächen des Dodecaedrons vom Mittelpunkte der Kugel, den wir hier A nennen wollen, ist nichts anders, als die Höhe einer der zwölf durch die in (117.) beschriebene Theilung der Flächenwinkel entstandenen Pyramiden, welche

nach (118. I) $= \frac{1}{2}a \tan \frac{1}{2}\beta \cdot \tan \gamma$ gefunden worden ist. Des Dodecaedrons Flächenwinkel γ ist hier halbirte, folglich ist der gedachte Abstand $A = \frac{1}{2}a \tan \frac{1}{2}\beta \cdot \tan \frac{1}{2}\gamma$. Setzt man nun aus II) die für $\tan \frac{1}{2}\beta$ und $\tan \frac{1}{2}\gamma$ gefundenen Werthe, so ergibt sich $A = \frac{\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}(V5+1) V(5+2V5)}{V5} = \frac{\frac{1}{4}a(V5+1) [V(5+2V5)]}{V5}$.

Schreibt man nun $r \frac{1}{2} V(5-1)$ für a ; so erhält man den gesuchten Abstand $A = \frac{\frac{1}{4}a V(5+2V5) (V5+1) \cdot V(5-1) V \frac{1}{2}}{V5}$

$$= \frac{a V \frac{1}{2} V(5+2V5)}{V5} = \frac{1}{2}a V \frac{1}{2} V(5+2V5), \text{ einen Aus-}$$

druck, der mit dem gleichnamigen Werthe für das Icosaedron vollkommen übereinstimmt.

Zusatz 4. Die Seitenlinien AT, BZ, CV, DR, ES der an ABCDE ringsumher angrenzenden Seitenflächen, sind nicht nur unter gleichen Winkeln gegen die gedachte Seitenfläche ABCDE geneigt, sondern ihre Endpunkte T, Z, V, R, S liegen auch von derselben gleichweit entfernt, folglich in einer und derselben mit ABCDE parallelaufenden Ebene. Von dieser Behauptung kann man sich durch folgende Betrachtungen überzeugen. Die aus T, Z, V, R, S auf die erweiterte Seitenfläche ABCDE gefällten Perpendikel, deren einer VP ist, sind, weil $AT = BZ = CV$ u. von gleicher Größe. Daher liegen die gedachten Punkte in einer mit ABCDE parallelen Ebene. Läßt man nun aus den fünf Winkelpunkten X, Y, L, a, U und zugleich aus dem Mittelpunkte des Polygons gerade Linien, auf die Seitenlinien AB, BC, CD, DE, EA, senkrecht herab; so stellen diese die Neigungswinkel der fünf Seitenflächen,

deren Winkelpuncte genannt sind, gegen ABCDE vor, deren einer X_m Q ist und die Neigung der gedachten Seitenfläche ATXZB gegen ABCDE angibt. Setzt man nun in dem gleichseitigen, folglich auch gleichschenkligen sphärischen Dreiecke, aus der Spitze M einen Bogen MW senkrecht auf die Grundlinie; so wird das sphärische $\triangle MNO$ in zwei rechtwinklige getheilt, in welchen $WO = WN = \frac{1}{2} ON$ ist (102. Anmerk. 3.). In dem rechtwinkligen sphärischen $\triangle WNM$ aber verhält sich $1 : \cos NW = \cos WM : \cos NM$ (69); folglich ist $\cos DCV$ oder $\cos WM = \frac{\cos NM}{\cos NW}$. Es ist

$$\begin{aligned} \text{aber } NM &= 108^\circ, NW = 54^\circ \text{ und wenn man also} \\ \text{diese Werthe in die vorige Gleichung schreibt; so ist} \\ \cos WM &= \frac{\cos 108^\circ}{\cos 54^\circ} = \frac{-\cos 72^\circ}{\cos 54^\circ} = \frac{-\frac{1}{4}(V5-1)}{\frac{1}{4}V(10-V5)} \\ &= \frac{1-V5}{V(10-2V5)}. \text{ Nun ist } \angle VCQ > R, \text{ folglich} \\ \angle VCP &< R, \text{ beide } = 2R, \text{ folglich ist } \cos QCV \\ &= -\cos VCP = \frac{V5-1}{V2V(5-2V5)}. \text{ Daher ist } \sin PCV \\ &= V(1-\cos PCV^2) = V\left[1 - \left(\frac{V5-1}{V2(V5-2V5)}\right)^2\right] \\ &= V\left(\frac{2(5-V5)-6+2V5}{2V(5-V5)}\right) = V\frac{4}{2(V5-V5)} \\ &= \frac{2}{V2V(5-V5)}. \end{aligned}$$

Nun kann man den Abstand der, durch die Punkte T, Z, V, R, S gehenden Ebene von ABCDE, und zwar durch PV leicht bestimmen. Es ist nemlich $PV =$

$$VC \cdot \sin VCP = \frac{2a}{V2V(5-V5)} = \frac{2a}{V(10-2V5)} =$$

$$\frac{a}{2 \sin 56^\circ} = \frac{1}{2} a \operatorname{cosec} 56^\circ. \text{ Bestimmt man nun diesen}$$

$$\text{Werth aus dem Halbmesser der Kugel; so ist } PV = \frac{2r V \frac{1}{2} (V5 - 1)}{V(10 - 2V5)} = \frac{2r V \frac{1}{2} V(10 - 2V5) (V5 - 1)}{10 - 2V5}$$

$$= \frac{2r V \frac{1}{2} V(10 - 2V5) (V5 - 1)}{10 (V5 - 1)} = \frac{1}{5} r V \frac{1}{2} V(10 - 2V5).$$

Der Abstand A der Seitenfläche ABCDE vom Mittelpunkte der Kugel war nach (Zus. 3.) $= \frac{1}{5} a V \frac{1}{2} V(5 + 2V5)$. Daher ist der Abstand, der durch die Punkte T, Z, V, R, S gehenden Ebene, vom Mittelpunkte, $= A - PV = \frac{1}{5} r V \frac{1}{2} V(5 + 2V5) - \frac{1}{5} r V \frac{1}{2} V(10 - 2V5) = \frac{1}{5} r V \frac{1}{2} [V(5 + 2V5) - V(10 - 2V5)]$. Dieser Ausdruck gibt den Abstand der durch die Punkte U a L Y X gehenden Ebene, vom Mittelpunkte auf der andern Seite an.

§. 129.

Aufgabe. Eine Kugel von bekanntem Halbmesser ist gegeben, man soll darauf die zu einem Dodecaedron gehörigen Winkelpunkte entwerfen.

Man durchschneide eine nach Willkühr angenommene Axe der Kugel, zu beiden Seiten ihres Mittelpunctes in den Entfernungen A und A — PV durch zwei senkrechte Ebenen; so entstehen dadurch vier Parallelskreise. Dann lege man durch die Axe fünf, einander unter dem Winkel von 56° durchschneidende Ebenen; so bilden diese auf der Kugelssfläche eben so viel größte

Kreise, welche mit den gedachten vier Parallellkreisen zehn Durchschnittspuncte machen. Bemerkt man nun endlich in jedem dieser parallellaufenden Kreise, fünf, um 72° von einander entfernte Puncte, so, daß wechselseitig zwei und zwei in demselben größten Kreise liegen; so werden diese, die zwanzig zu dem Dodecaedron gehörigen gesuchten Winkelpuncte sein.

A u ß z u g

aus den

Anfangsgründen der ebenen Trigonometrie

zur

Erläuterung der sphärischen,
mit Rücksicht auf die Ausbildung angehender Feldmesser
und Deconomen.

Von

C. G. Zimmermann,

Professor am Weid. Gymnasium und Lehrer der practischen Feldmesskunst
an der Königl. Bau-Academie.

Handwritten text, mostly illegible due to fading and bleed-through from the reverse side. The text appears to be organized into several paragraphs or sections, with some lines being more distinct than others. The ink is dark, but the paper is aged and discolored.

Erste Abtheilung.

Von den trigonometrischen Linien.

§. 1.

Die Trigonometrie *) ist eine Wissenschaft, welche aus drei gegebenen Stücken eines Dreieckes, die übrigen durch Rechnung finden lehrt. Man theilt sie in die ebene und sphärische. Jene betrachtet die ebenen, durch gerade Linien begrenzten Dreiecke, so wie sie in der Geometrie vorgekommen sind, doch so, daß die gegebenen Stücke durch Zahlen ausgedruckt und daß unter denselben allemahl eine Seite befindlich sein muß; indessen ist sie nicht hierauf allein eingeschränkt, sondern sie umfaßt noch viele andere Lehren über die Verbindung, Zusammensetzung, Theilung der Winkel und den damit zusammengehörigen Bogen, über die gegenseitigen

*) Ueber die Absicht und Einrichtung der ebenen Trigonometrie habe ich mich, in der Vorrede zur sphärischen Trigonometrie erklärt. Daher ich diesen Blättern keine besondere Vorrede beifüge.

Beziehungen und Lage der geraden Linien und den davon abhängigen Bogen &c. — Dreiecke deren Seiten, Bogen größter Kreise auf einer Kugel sind, machen, wie wir gesehen haben, den Gegenstand der sphärischen Trigonometrie aus, deren Aufgaben, der Einschränkung nicht bedürfen, daß unter den gegebenen Stücken, allemahl eine Seite enthalten sein müsse.

Anmerkung 1. Man mag Triangel mit noch so vollkommenen Werkzeugen verzeichnen und auftragen, so werden sich doch bei weiten Abmessungen selbst bei der größten Sorgfalt bedeutende Fehler einschleichen. Durch Rechnung hingegen gelangt man zu einer weit größern Schärfe. Es werden Zahlen gesucht, weil alle Größen, die Seiten nebst dem Winkel, oder die Winkel nebst der Seite in Zahlen ausgedruckt sind, so, daß Zeichnungen nur ein Hülfsmittel der Darstellung und ein sinnliches und unvollkommenes Bild einer weit richtigern und vollständign Berechnung abgeben, wodurch man nöthigen Falles Zeichnungen gänzlich entbehren kann. Durch diesen einzigen Vortheil der Trigonometrie ist man im Stande, in alle Theile der ausübenden Mathematik mehr Gewißheit und Genauigkeit einzuführen, als es ohne sie geschehen konnte.

Anmerkung 2. Soll nun aus drei gegebenen Stücken eines Dreieckes, die zu dessen Bestimmung dienen, das vierte gefunden werden; so könnte man dieser Forderung dadurch eine Genüge leisten, daß man sämmtliche Stücke zu Verhältnissen verbinde und deren Glieder dann so ordnete, daß das gesuchte Stück zum vierten Proportionalgliede würde. Allein hier tritt der Umstand ein, daß weder die Winkel, noch die Bogen zwischen ihren Schenkeln, mit den Seiten eines Dreieckes in gleichen Verhältnisse zu- und abnehmen. Daher ist man darauf bedacht gewesen, solche Größen in diese Wissenschaft einzuführen, durch welche jene Absichten vollkommen erreicht würden und welche mit den Seiten eines Dreieckes in der gedachten Verbindung

stehen. Hierzu dienen die sogenannten trigonometrischen Linien, welche die erforderlichen Eigenschaften haben, daß sie anstatt der Winkel und Bogen können gebraucht werden, und den Seiten der Dreiecke proportional sind; nur muß man bei denselben nicht allein auf ihre Größe, sondern auch auf ihre Lage Rücksicht nehmen.

§. 2.

Der Kreis ist eine in sich selbst laufende Linie. Er hat daher so wenig einen Anfangspunct als einen Endspunct. Soll er aber zu gewissen Bestimmungen dienen, so muß man irgend einen Punct, der jedesmaligen Absicht gemäß, zum Anfangspuncte eines Bogens oder Kreises machen. Ja man kann sogar um einer größern Allgemeinheit Willen, den Umfang des Kreises wiederholentlich in sich selbst zurückkehren lassen, und alsdann gewisse Linien so festsetzen, daß sie nicht allein zu Einem Bogen, sondern zu diesem Bogen nebst dem Vielfachen der ganzen Kreise gehören. Dieses wird durch nachfolgende Erklärungen mehr Deutlichkeit erhalten, und ist um so nöthiger, da in der Astronomie Bogen vorkommen, die über 90° , 180° , 280° u. gehen. Dadurch siehet man sich genöthiget, die zu solchen Bogen gehörigen Linien in Betrachtung zu ziehen, und ihre Beziehung auf einander näher zu bestimmen.

Erklärung. Von zweien Winkeln, die so beschaffen sind, daß sie einander zu zweien Rechten ergänzen, heißt gegenseitig die eine, das Complement des andern. Dasselbe gilt von zweien Bogen Fig. 1. AB und BL deren Summe $= 90^\circ$ beträgt. Ist z. B. AB $= 70^\circ$, BL $= 20^\circ$; so ist der Bogen von 70° , das Complement von 20° und dieser, das Complement von

jenem nemlich, der Bogen von 20° ist das Complement des Bogens von 70° .

Zusatz 1. Daher ist in jedem rechtwinkligen Dreiecke, der eine der spitzen Winkel das Complement des andern, so wie dieser von jenem, weil ihre Summe einem Rechten gleich ist.

Anmerkung. Findet die gedachte Beziehung zweier Winkel oder Bogen bei Nebenwinkeln oder solchen Bogen Statt, deren Summe 180° beträgt, so pflegt man bisweilen den einen das Supplement des andern, und zwar auch auf wechselseitige Art zu nennen.

§. 3.

Erklärung. Eine gerade Linie BD, welche (Fig. 1.) aus dem Endpunkte B eines von A anfangenden Bogens, lothrecht auf den Halbmesser AC des zu diesem Bogen gehörigen Kreises, herabgelassen wird, heißt der Sinus des Bogens AB oder des von AB gemessenen Winkels ACB am Mittelpunkte.

Zusatz 1. Verlängert man nun den Sinus, bis er den Kreis auf der andern Seite des Halbmessers in F trifft; so stellt die Linie BDF eine Sehne des Bogens BAF $= 2 AB$ vor, auf welcher CA senkrecht steht. Setzt man nun den Winkel ACB oder dessen Bogen $AB = a$, so läßt sich der Sinus eines Bogens a als die Hälfte, einer zum doppelten Bogen gehörigen Sehne betrachten, d. h. es ist $\sin a = \frac{1}{2} \text{chord } 2a$, eine Vorstellung, durch welche uns der Sinus überall leicht anschaulich wird. So ist z. B. die halbe Sehne eines Bogens von 60° , der Sinus eines Bogens von 30° ; die halbe Sehne eines Bogens von 40° , ist der Sinus eines Bogens von 20° ,

die halbe Sehne eines Bogens von 90° ist der Sinus eines Bogens von 45° .

Zusatz 2. Zeichnet man sich nun (Fig. 1.) zu verschiedenen Bogen eines Kreises als BAF , $B'AF'$, $B''AF''$, $B'''AF'''$ u. die dazu gehörigen Sehnen BF , $B'F'$, $B''F''$, $B'''F'''$; so sind ihre Hälften BD , $B'D'$, $B''D''$, $B'''D'''$, die Sinus der vorhin genannten Bogen d. h. es ist $BD = \sin \frac{1}{2} BAF = \frac{1}{2} BF$, $B'D' = \sin \frac{1}{2} B'AF' = \frac{1}{2} B'F'$; $B''D'' = \sin \frac{1}{2} B''AF'' = \frac{1}{2} B''F''$ u. Verbindet man nun diese Vorstellungen, mit den regulären in der Geometrie betrachteten Polygonen, die sich mit vollkommener Genauigkeit in Kreise einzeichnen lassen; so ergibt sich, daß ihre Seiten, Sehnen sind, deren Hälften zu den halben, von den Sehnen abgeschnittenen, Bogen gehören. So ist die Seite eines im Kreise liegenden Quadrats, die Sehne eines Bogens von 90° , also ihre Hälfte der Sinus von 45° ; die Seite eines regulären im Kreise liegenden Fünfecks, die Sehne eines Bogens von 72° , ihre Hälfte also der Sinus eines Bogens von 36° ; die Seite eines regulären Sechsecks die Sehne eines Bogens von 60° , ihre Hälfte der Sinus des Bogens von 30° . Die Seiten des Sechsecks aber sind, jede für sich genommen, dem Radius gleich. Daher ist der Sinus von 30° allemahl so groß, als der halbe Radius. Die Seite eines im Kreise liegenden Zehnecks, ist die Sehne des Bogens von 36° , folglich ihre Hälfte der Sinus eines Bogens von 18° . — Anstatt Sinus eines Bogens α schreibt man gewöhnlich $\sin \alpha$.

Zusatz 3. Zu größern Bogen, gehören größere Sehnen. Die größte Sehne ist der Durchmesser,

welcher zum Halbkreise gehört. Es wachsen daher die Sinus mit den Bogen, wie dieses auch aus der Figur zu ersehen ist, der größte Sinus aber ist die Hälfte der größten Sehne, also dem Radius gleich. Daher nennt man diesen zu einem Bogen von 90° gehörigen Sinus, den Sinus totus. Läßt man einen Perpendikel aus den Endpunkten solcher Bogen fallen, die $> 90^\circ$ sind, so werden sie kleiner als der Halbmesser, und es nehmen daher die Sinus von Bogen über 90° wieder ab.

Zusatz 4. Hieraus erhellet nun auch, daß der Sinus bei einem sehr kleinen Bogen, selbst sehr klein und von dem Bogen nicht merklich zu unterscheiden ist, indem Sinus und Bogen beinahe zusammenfallen. Dann nimmt der Sinus mit dem Bogen so lange zu, bis dieser 90° und jener dem Halbmesser gleich wird. Im zweiten Quadranten nimmt der Sinus wieder ab, nahe an 180° fällt er mit dem Bogen zusammen und verschwindet, wenn jener $= 180^\circ$ wird. Im dritten und vierten Quadranten findet zwischen dem Sinus und seinem Bogen dieselbe Relation in umgekehrter Ordnung Statt, wie im ersten und zweiten; nur ist hier (Fig. 2.) der Sinus des Bogens AKHQ der von Q nach O gehende Perpendikel QO und des Bogens AKHLR, der Perp. RD. Es ist demnach wenn r den Halbmesser bezeichnet; $\sin 0 = 0$, $\sin 90^\circ = r$, $\sin 180^\circ = 0$, $\sin 270^\circ = -r$, $\sin 360^\circ = 0$ oder wenn $r = 1$ ist, so ist $\sin 0 = 0$, $\sin 90^\circ = 1$, $\sin 180^\circ = 0$, $\sin 270^\circ = -1$, $\sin 360^\circ = 0$. Setzt man nun den Halbkreis $= \pi$; so ist $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$; $\sin \pi = 0$; $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$ und $\sin 2\pi = 0$.

Zusatz 5. Ist also, der Sinus eines Bogens unter 180° , $= 1$, so ist der Bogen selbst $= 90^\circ$ und ist

der Sinus eines Bogens der nicht über 180° geht, $= 0$; so ist der dazugehörige Bogen entweder 0 , oder 180° .

Zusatz 6. Der Bogen AB macht mit dem Bogen BK zusammen 90° aus. Daher ist der Sinus des Bogens AB, zugleich der Sinus des Complements von BK (1.). Um diesen Ausdruck zu verkürzen, sagt man auch anstatt BD ist der Sinus des Complements von BK, BD ist der Cosinus von BK; und schreibt: es ist $BD = \sin AB$, aber es ist auch $BD = \cos BK$. Wäre z. B. $AB = 70^\circ$ und $BK = 20^\circ$; so ist $BD = \sin 70^\circ$ aber auch $= \cos 20^\circ$.

§. 4.

Erklärung. Läßt man nun aus dem einen Endpunkte B des Bogens BK einen Perpendikel BG auf den, durch den andern Endpunkt K gezogenen Durchmesser KCL, herab, so ist BG der Sinus des Bogens BK. Es macht aber BK mit AB einen Bogen von 90° . Daher ist der Sinus des Bogens BK auch der Sinus des Complements von AB d. h. es ist $\sin BK = \cos AB$.

Zusatz 1. Die Figur CDBG ist ein rechtwinkliges Parallelogram, worin $BD = GC$ und $BG = DC$ ist. Aus diesem Grunde nennt man auch den Theil des Halbmessers zwischen D und C den Cosinus von AB. Setzt man nun den Bogen AB oder den von ihm gemessenen Winkel $BCD = \alpha$; so ist $BK = 90^\circ - \alpha$, folglich ist $BD = \sin AB = \sin \alpha = \sin (90^\circ - BK) = \cos BK$ und umgekehrt $DC = BG = \sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$. Ist demnach $\alpha = 70^\circ$, so ist $BD = \sin \alpha =$

$\cos (90 - \alpha) = \cos 20^\circ$ und $\sin 20^\circ = \sin (90 - \alpha)$
 $= \cos \alpha = \cos 70^\circ$. Also ist $\sin 30^\circ = \cos (90^\circ - 30^\circ)$
 $= \cos 60^\circ$ und $\cos 30^\circ = \sin (90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ$.

Zusatz 2. Betrachtet man nun das rechtwinklige $\triangle BDC$, worin der W. $BCD = \alpha$ gesetzt wird, so kann man die Seiten BD , BC , CB auf die Art, wie in der Geometrie gezeigt worden, durch Catheten und Hypothenuse ausdrücken; man kann sie aber auch durch die jetzt erklärten Benennungen bezeichnen, indem $BD = \sin \alpha$; $DC = \cos \alpha$ und $CB = \sin . tot$ ist.

Zusatz 3. Aus (Fig. 1.) kann man nun ersehen, daß die Cosinus DC , $D'C$, $D''C$, $D'''C$ immer kleiner werden, je größer, die mit ihnen zusammengehörige Bogen AB , AB' , AB'' , AB''' werden. So wie also die Bogen im ersten Quadranten wachsen, so nehmen ihre Cosinus ab. Siehet man nun auf die beiden Grenzpunkte eines Bogens von 90° ; so ist der Cosinus $= r$ d. i. dem Halbmesser gleich, wenn der Bogen $AB = 0$ d. h. noch keine Größe hat, er verschwindet d. h. wird 0, wenn der Bogen eine Größe von 90° erreicht hat und ist, bei einem sehr kleinen Bogen, von dem Halbmesser kaum zu unterscheiden.

Zusatz 4. Im zweiten Quadranten ist der Sinus des Bogens AF (Fig. 2.) der Perp. FO , sein Cosinus also CO , indem er also von 0 anfängt, nimmt er mit den Bogen zu, so, daß wenn dieser 180° wird, jener $= r$. Bei den, in den dritten und vierten Quadranten gehenden Bogen, verhält sich mit dem Wachsen und Abnehmen des Cosinus wieder, wie im ersten und zweiten, aber alles gehet in umgekehrter Ordnung vor. Es ist demnach, wenn r den Halbmesser ausdrückt, $\cos 0$

$= r$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -r$, $\cos 270^\circ = 0$ und $\cos 360^\circ = r$. Setzt man also den Halbkreis $= \pi$ und $r = 1$; so ist $\cos 0\pi = 1$, $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$; $\cos \pi = -1$; $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$ $\cos 2\pi = 1$. Ist also ein Bogen nicht $> 180^\circ$ und sein Cosinus $= 0$; so muß der Bogen 90° , ist aber sein Cosinus -1 , so muß derselbe 270° oder 180° sein.

§. 5.

Betrachtet man noch die Sinus und Cosinus der Bogen, deren Endpuncte in einen der vier Quadranten fallen, in welche der Kreis durch die beiden Durchmesser AH und KL zerfällt wird, in Hinsicht ihrer Richtung und Lage; so wird man bald einsehen, wie sich die gedachten Linien in dieser Hinsicht unterscheiden. Im ersten Quadranten wurden die Sinus der Bogen, deren Endpuncte in dem durch ABKFH gehenden Halbkreise liegen auf den Durchmesser AH, also in einer Richtung von K nach AH senkrecht herabgezogen. Im dritten und vierten aber nehmen sie in Bezug auf denselben Durchmesser die entgegengesetzte Richtung von L nach AH an. Gibt man also den Sinus im ersten Quadranten AK das Vorzeichen (+), so müssen die Sinus im zweiten Quadranten dasselbe; im dritten und vierten aber das entgegengesetzte Vorzeichen (—) erhalten. — Die Cosinus im ersten und vierten Quadranten, werden vom Mittelpuncte C aus, nach A genommen und liegen also sämtlich auf der einen Seite des Durchmessers KL, alle in der Richtung von C nach A; die Cosinus im zweiten und dritten Quadranten, rechnet man von C nach H und sie liegen auf der andern Seite

des Durchmessers KL, sämmtlich in der Richtung von C nach H, welche der vorigen von C nach A entgegengesetzt ist. Gibt man nun den Cofinus des ersten Quadranten, wie bei den Sinus, das Vorzeichen (+); so müssen die Cofinus im zweiten und dritten Quadranten, das Vorzeichen (—), im vierten aber wieder (+) erhalten.

Zusatz. Es ist demnach wenn $r = 1$ gesetzt wird
 $\sin 0\pi = 0$; $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$; $\sin \pi = 0$; $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$;
 $\sin 2\pi = 0$ und $\cos 0\pi = 1$; $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$; $\cos \pi = -1$;
 $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$; $\cos 2\pi = 1$.

§. 6.

Nimmt man nun in dem Kreise AKHL den Punct A zum Anfangspuncte an; so kann man in demselben von A nach L durch K zc. gehen; man kann aber auch in der Richtung durch L, H zc. in demselben fortgehen. Daher ist dieser Bogen dem vorigen entgegengesetzt und erhält das Vorzeichen (—), wenn jener durch das Vorzeichen (+) bezeichnet wird. Kommt nun noch dazu, daß der Bogen AQ so viel Grade als AB enthält; so ist nicht bloß $AQ = AB$, sondern $AQ = -AB$. Ist nun $AB = \alpha$, $< 90^\circ$ und verbindet man mit diesem Bogen die trig. Linien, nemlich Sinus und Cofinus; so ist begreiflich, daß $\sin AB = \sin +\alpha$ oder $\sin \alpha = BD$ und daß $\sin AQ = \sin -\alpha = DQ$, folglich daß zu einem positiven oder negativen Bogen $\alpha < 90^\circ$, ein positiver oder negativer Sinus gehört. Ist $\alpha > 90^\circ$, $= AF$ oder $= -AF$ d. i. AQ ; so ist $\sin ABF = \sin \alpha = FO$ und $\sin ALQ = \sin -AF = \sin -\alpha = QO$; folglich erhalten hier wieder Sinus und Bogen einerlei Vorzeichen. Ein positiver Bogen $\alpha > 90$ hat einen positiven Sinus und

ein negativer, einen negativen Sinus. So erhellet auch daß $\cos \alpha = CD$ und $\cos -\alpha = CD$ folglich, daß so lange $\alpha < 90^\circ$, der Cosinus allemahl positiv bleibt, sein Bogen mag positiv oder negativ sein. Ist $\alpha > 90^\circ$, $= AF$ oder $= -AF = AQ$; so ist $\cos ABF = \cos \alpha = CO$; und $\cos ALQ = \cos -AKF = \cos -\alpha = CQ$. Folglich gehört zu einem positiven oder negativen Bogen $\alpha > 90^\circ$, allemahl ein negativer Cosinus.

Zusatz 1. Hieraus folgt nun, daß der negative Cosinus CO , so wohl zu dem positiven Bogen $AKHQ > 180^\circ$ als auch zu dem negativen Bogen $ALQ < 180^\circ$ und daß der positive Cosinus CD , so wohl zu dem positiven Bogen $AKHK > 270^\circ$, als auch zum negativen Bogen AR gehöre.

Zusatz 2. Ist der positive Bogen $AKHQ > 180^\circ$ und der negative $ALHF$ auch $> 180^\circ$; so gehört zu jenem ein negativer und zu diesem ein positiver Sinus. So verhält es sich auch in Ansehung der Lage und der daraus entspringenden Vorzeichen der Sinus wenn jeder der beiden Bogen $> 270^\circ$ ist.

§. 7.

Erklärungen. Unter dem Sinusversus oder Quersinus eines Bogens $AB = \alpha$, versteht man denjenigen Theil des Halbmessers, der zwischen den Endpunkten A und D des Halbmessers und des Cosinus enthalten ist. Auf gleiche Art bezeichnet IK den Sinusversus des Bogens $BK, = (90^\circ - \alpha)$; oder auch den Cosinusversus des Bogens $AB, = \alpha$. Statt Sinusversus und Cosinusversus, schreibt man gemeiniglich $\sin. vers.$ und $\cos. vers.$ oder $\sin. v.$ und $\cos. v.$

§. 8.

Wird eine an sich unbegrenzte gerade Linie senkrecht durch den Endpunct A des Halbmessers AC, aus dem Mittelpuncte C aber durch des Bogens Endpunct B eine andere gerade Linie dergestalt gezogen, daß jene von dieser, in irgend einem Puncte E auf der einen oder andern Seite von AH geschnitten wird; so heißt die erstere AE die Tangente, die andere CE aber die Secante des Bogens $AB = \alpha$ oder des von dem Bogen AB gemessenen Winkels am Mittelpuncte ACE. Der Bogen AB aber ist das Complement von BK. Daher sind AE und CE die Tangente und Secante des Complements BK, aus diesem Grunde heißt AE die Cotangente von BK, wie CE die Cosecante von BK. Zur Abkürzung schreibt man die angeführten Ausdrücke $\text{tang } \alpha$ oder $\text{tg } \alpha$, $\text{sec } \alpha$, $\text{cot } \alpha$, $\text{cosec } \alpha$. Es ist also $AE = \text{tang } \alpha = \text{cot}(90^\circ - \alpha)$, $CE = \text{sec } \alpha = \text{cosec}(90^\circ - \alpha)$.

Zieheth man nun durch den Endpunct K die MK so, daß $CKM = R$ wird und durch B die gerade Linie CM, alles wie die beiden vorigen AK und CE, bis sie sich in M durchschneiden; so heißt MK die Tangente des Bogens BK und CM seine Secante. Auch hier aber ist, weil $AB + BK, 90^\circ$ beträgt, AB das Complement von BK. Daher heißt KM die Cotangente von $AB = \alpha$ und CM die Cosecante von $AB = \alpha$. Diese Ausdrücke schreibt man nun $KM = \text{tang BK}$ oder cot AB ; $CM = \text{sec BK} = \text{cosec AB}$. Es ist demnach $KM = \text{tang}(90 - \alpha) = \text{cot } \alpha$ und $CM = \text{sec}(90^\circ - \alpha) = \text{cosec } \alpha$.

§. 9.

Die von (1 — 7) erklärten auf die Bogen sich beziehenden Perpendikel, begreift man unter dem gemeinschaftlichen Namen der trigonometrischen Linien. Sie lassen sich auf folgende Art leicht übersehen. Es ist nemlich, wenn man $AB = a$ annimmt

1) $BD = \sin a = \sin \text{compl. } (90^\circ - a) = \cos (90^\circ - a)$

2) $AE = \tan a = \tan \text{compl. } (90^\circ - a) = \cot (90^\circ - a)$

3) $CE = \sec a = \sec \text{compl. } (90^\circ - a) = \text{cosec } (90^\circ - a)$

4) $AD = \sin v. a = \sin v. \text{compl. } (90^\circ - a) = \sin v. (90^\circ - a)$

5) $CD = \cos a = \sin \text{compl. } a = \sin (90^\circ - a)$

6) $KM = \cot a = \tan \text{compl. } a = \tan (90^\circ - a)$

7) $CM = \text{cosec } a = \sec \text{compl. } a = \sec (90^\circ - a)$

8) $KG = \cos v. a = \sin v. \text{compl. } a = \sin v. (90^\circ - a)$

Es ist also $\sin 25^\circ = \cos (90^\circ - 25^\circ) = \cos 65^\circ$;
 $\cos 46^\circ = \sin (90^\circ - 46^\circ) = \sin 44^\circ$; $\tan 36^\circ =$
 $\cot (90^\circ - 36^\circ) = \cot 54^\circ$; $\cot 24^\circ = \tan (90^\circ - 24^\circ)$
 $= \tan 66^\circ$; $\sec 15^\circ = \text{cosec } (90^\circ - 15^\circ) = \text{cosec } 75^\circ$;
 $\text{cosec } 30^\circ = \sec (90^\circ - 30^\circ) = \sec 60^\circ$; $\sin v. 60^\circ =$
 $\cos v. (90^\circ - 50^\circ) = \cos v. 40^\circ$; $\cos v. 72^\circ = \sin v. (90^\circ - 72^\circ)$
 $= \sin v. 18^\circ$.

Betrachtet man nun die in (Fig. 2.) zu dem Bogen $AB = a$ verzeichneten trigon. Linien, ohne auf den Sinusversus zu sehen; so wird man leicht finden, daß sie sämtlich durch Seiten rechtwinkliger Dreiecke vorgestellt worden. Zeichnet man sich nun den Winkel a mit den gedachten dazugehörigen trig. Linien aus größern oder kleinern Halbmessern, so werden, wegen des beibehaltenen und des rechten Winkels, die respectiven Dreiecke einander ähnlich sein und sich sämtlich, wie

die verschiedenen Halbmesser verhalten. Theilt man nun diese in eine gleiche Anzahl gleicher Theile; so werden diese Theile, beim größern Halbmesser größer, beim kleinern, kleiner ausfallen, es wird sich mit ihnen wie mit den Graden bei größern und kleinern Kreisen verhalten; und alle gleichnamige trigon. Linien, welche sich auf denselben Winkel beziehen, werden eine gleiche Menge von Theilen erhalten. Ändert sich aber in den entworfenen Figuren der Winkel oder der ihn messende Bogen α ; so ändern sich auch die dazugehörigen trig. Linien nach den oben angeführten Gesetzen, und es läßt sich hier schon übersehen, daß es für die Theorie und Ausübung seinen großen Nutzen haben würde, wenn man für jede Größe von α , von Grad zu Grad ic., die Werthe der trig. Linien in Zahlen und aus diesen wieder die Größe des Winkels anzugeben im Stande wäre.

Die mannigfaltigen Vortheile, die man sich mit so vielem Rechte von dieser Einrichtung versprach, veranlaßte die Mathematiker der vorigen Jahrhunderte vor Erfindung der Differenzialrechnung, diese Gedanken weiter zu verfolgen und aller Anstrengungen und Schwierigkeiten ungeachtet unternahmen sie es, die trigonometrischen Linien auf einem äußerst mühsamen Wege durch alle Grade, Minuten ic. eines Quadranten zu berechnen und die Resultate ihrer Bemühungen in Verzeichnisse zu bringen, die unter dem Nahmen der trig. Tafeln bekannt sind. Zu mehrerer Bequemlichkeit fügte man den Sinus, Cosinus ic. die Logarithmen bei, deren Kenntniß und Gebrauch ich hier als bekannt voraussetze. In meiner Einleitung, der ersten Grundsätze der Analysis habe ich die Lehre von den Logarithmen im XI. Abschnitte von S. 256

bis 329 umständlich erklärt, ihre mannigfaltige Anwendung gezeigt und zugleich die besten Ausgaben der logarithmischen Tafeln angeführt.

Anmerkung. Die Ausdrücke $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ u. sind nicht als Producte anzusehen, sondern man muß sie nur als einen Buchstaben, oder als eine Zahl betrachten; auch muß man die Bezeichnungen $\sin \frac{1}{2} \alpha$, $\frac{1}{2} \sin \alpha$, $\sin 2\alpha$, $\sin \alpha^2$ u. nicht mit einander verwechseln, sondern sie nach ihrem Werthe und der ihnen beigelegten Bedeutungen, gehörig unterscheiden, $\sin \frac{1}{2} \alpha$, $\frac{1}{2} \sin \alpha$, $\sin 2\alpha$, $\sin \alpha^2$ heißen in der angeführten Ordnung: Der Sinus des halben Winkels α , der halbe Sinus des ganzen Winkels α , der Sinus des doppelten Winkels von α , der Sinus von α ins Quadrat erhoben. Eben diese Bedeutungen haben die übrigen, auf diese Art ausgedruckten trigonometrischen Linien.

§. 10.

Ein spitzer und ein stumpfer Winkel, welche so zusammen gehören, daß die zwischen ihren Schenkeln mit demselben Halbmesser beschriebenen Kreisbogen 180° oder 360° betragen oder um 180° von einander verschieden sind, haben allemahl gleiche Sinus.

I) Die Bogen $HKB + AB$ (Fig. 2) mögen 180° betragen; so ist der Sinus jenes Bogens HKB der Perpendikel, der aus dem Endpuncte des Bogens HB auf den durch seinen Anfangspunct H gehenden Halbmesser oder dessen Verlängerung herabgelassen wird, d. i. BD welches auch der Sinus des Bogens AB ist. Setzt man nun $180^\circ = \pi$, $AB = \alpha$, so ist $HKB + \alpha = \pi$, folglich $HKB = \pi - \alpha$, also $BD = \sin HKB = \sin (\pi - \alpha)$ und $BD = \sin \alpha$, daher $\sin \alpha = \sin (\pi - \alpha)$.

Nimmt man nun $\angle AKF = \angle HKB = \pi - \alpha$; so ist $HF = AB = a$. Denn es ist $\angle AKF = \angle HKB$, BF ein Theil von beiden, also $\angle AKF - BF = \angle HKB - BF$ d. i. $\angle ABF = \angle HFB = \alpha$. Nun ist aber FO der Sinus des Bogens AKF und auch der Sinus des Bogens $HF = a$. Ist nun $FO = BD$, so ist auch der Sinus des Bogens ABF so groß als der Sinus des Bogens AB , $= a$. Die rechtwinkligen Dreiecke DBC und CFO sind gleich und ähnlich. Denn es ist $AB = FH$, folglich auch $\angle ACB = \angle FCH$, $\angle BDC = \angle COF = R$ und $CB = CF$, folglich $FO = BD$ und $CO = DO$. Nun machen $\angle AKF + \angle FH = 180^\circ$ oder $= \pi$ d. h. es ist $\sin \angle AKF = \sin \angle FH = \sin \alpha$. Es ist aber $\angle AKF = \pi - \angle FH = \pi - \alpha$. Also auch hier $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

II) Es sei ferner $\angle ACB$ der spitze Winkel, α sein Bogen, $\angle AKHQ$ der stumpfe Winkel und sein Bogen $180^\circ + \alpha$; so ist der Sinus BD des spitzigen Winkels α und der Perpendikel QO , der aus dem Endpunkt des Bogens Q auf den durch seinen Anfangspunkt A gehenden Halbmesser oder dessen Verlängerung, herabgelassen ist, der Sinus des Bogens $\angle AKHQ = 180^\circ + \alpha$. Sind nun BD und QO einander gleich, so haben auch die gedachten Bogen gleiche Sinus. Es sind aber die Dreiecke DBC und CQO gleich und ähnlich. Denn es ist $\angle ACB = \angle QCH$, $\angle BDC = \angle COQ = R$ und $CB = CQ$, folglich $\triangle DBC \cong \triangle CQO$, also $BD = OQ$ und $CD = CO$. Bezeichnet man nun die Bogen wie vorher, so ist $\sin \alpha = \sin(\pi + \alpha)$, d. h. zwei Winkel, welche um 180° verschieden sind, haben gleiche Sinus.

III) Es sei $\angle ACB$ der spitze Winkel, α sein Bogen $\angle AKHLR$ der stumpfe und $360 - \alpha$ sein Bogen, so ist

$\sin \alpha$

$\sin \alpha = BD$ und der Sinus des Bogens $360^\circ - \alpha$ der Perpendikel der von dem Endpuncte R, dieses Bogens R, auf den durch seinen Anfangspunct gehenden Halbmesser AC herabgelassen ist d. h. RD. Der Voraussetzung gemäß ist $AKHLR = 360^\circ - \alpha$, folglich $ACR = 360^\circ - AKHLR = 360^\circ - (360^\circ - \alpha) = \alpha$. Daher ist $\angle ACR = \angle ACB$, $\angle BDC = \angle RDC = R$, $CB = CR$, folglich $\triangle DCB \cong DCR$, also $BD = RD$ und DC ist eine gemeinschaftliche Seite. Es ist aber $BD = \sin \alpha$ und $RD = \sin (360^\circ - \alpha)$, folglich $\sin \alpha = \sin (360^\circ - \alpha)$. Bezeichnet aber π den Bogen von 180° , so ist $2\pi = 360^\circ$, folglich ist $\sin \alpha = \sin (2\pi - \alpha)$.

Zusatz 1. Da $\sin \alpha = \sin (\pi - \alpha)$ und $\sin \alpha = \sin (\pi + \alpha)$, so ist $\sin (\pi - \alpha) = \sin (\pi + \alpha)$. In Rücksicht auf den obigen Satz ist daher, wenn man $\alpha = 36^\circ$ annimmt

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin (\pi - \alpha) \text{ od. } \sin 36^\circ = \sin (180^\circ - 36^\circ) = \sin 144^\circ \\ &= \sin (\pi + \alpha) &= \sin (180^\circ + 36^\circ) = \sin 216^\circ \\ &= \sin (2\pi - \alpha) &= \sin (360^\circ - 36^\circ) = \sin 324^\circ. \end{aligned}$$

Zusatz 2. Nimmt man aber nach dem vorhergehenden §. auf die Lage der Sinus Rücksicht; so wird man finden, daß FO mit BD von gleicher Größe und Lage ist, daß QO und RD mit BD und OF von gleicher Größe, aber in Ansehung der Lage, denselben entgegen gesetzt sind. Um diese Beziehung der Sinus auf den gemeinschaftlichen Durchmesser, auf welchen sie aus den Endpuncten der Bogen nach verschiedenen Richtungen herabgelassen sind, auszudrücken; schreibt man

$$\begin{aligned} \sin (\pi - \alpha) &= + \sin \alpha, \text{ od. } \sin (180^\circ - 36^\circ) = + \sin 36^\circ \\ \sin (\pi + \alpha) &= - \sin \alpha & \sin (180^\circ + 36^\circ) &= - \sin 36^\circ \\ \sin (2\pi - \alpha) &= - \sin \alpha & \sin (360^\circ - 36^\circ) &= - \sin 36^\circ. \end{aligned}$$

Zusatz 3. Auch sind die Sinus zweier Bogen, deren einer so viel über 90° beträgt, als dem andern daran fehlt, von gleicher Größe und Lage. Es sei $BK = KF$; so ist $AF = 90^\circ + KF$ und $AB = 90^\circ - KB = 90^\circ - KF$. Nun ist $FH + FKA = 180^\circ$, folglich $\sin FH = \sin FKA$ (I). Allein es ist $FO = \sin FH = \sin(90 - KF) = \sin(90 - KB) = \sin AB$. Folglich $\sin FKA = \sin AB$.

Zusatz 4. Die in dem Hauptsatze von den Sinus aufgestellte Behauptung, läßt sich auch auf die Cosinus ausdehnen. Der Beweis erhellet aus den dort angegebenen Gründen und der Gleichheit der daselbst angeführten Größen, die man nur mit den zugehörigen trigonometrischen Benennungen bezeichnen darf. Es ist demnach, wenn man $\pi = 180^\circ$ und $\alpha = 40^\circ$ annimmt

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\pi - \alpha) \text{ od. } \cos 40^\circ = \cos(180^\circ - 40^\circ) = \cos 140^\circ \\ &= \cos(\pi + \alpha) &= \cos(180^\circ + 40^\circ) = \cos 220^\circ \\ &= \cos(2\pi - \alpha) &= \cos(360^\circ - 40^\circ) = \cos 320^\circ. \end{aligned}$$

Zusatz 5. Siehet man aber nach (5.) auf die Richtung und Lage der Linien, welche zu den, in der gedachten Verbindung stehenden Bogen gehören; so ist CD der Cosinus von α und $360^\circ - \alpha$, hingegen ist CO der CD entgegengesetzt und der Cosinus von $(180^\circ - \alpha)$ und $(180^\circ + \alpha)$. Es ist also der Cosinus der Bogen $> 90^\circ$ negativ, die Cosinus der Bogen aber, welche sich um 180° unterscheiden, einander entgegengesetzt. Daher ist

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha; \text{ od. } \cos(180^\circ - 40^\circ) = -\cos 40^\circ \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha & \cos(180^\circ + 40^\circ) &= -\cos 40^\circ \\ \cos(2\pi - \alpha) &= +\cos \alpha & \cos(360^\circ - 40^\circ) &= +\cos 40^\circ. \end{aligned}$$

Zusatz 6. Ist also ein Bogen nicht $> 180^\circ$; so

ist derselbe entweder $<$ oder $> 90^\circ$, je nachdem sein Cosinus positiv oder negativ ist.

Anmerkung. Aus dem angeführten Satze, ersiehet man nun, wie man im Stande ist, die verschiedenen Bogen auf die trig. Linien zu beziehen. Und es dient überhaupt zu Erweiterung der Begriffe, über die trig. Linien, wenn man sich den Sinus und Cosinus so vorstellt, daß sie nicht nur zu $AB = a$; sondern zu allen in A anfangenden und in B sich endigenden Bogen gehören. Indes werden hier hauptsächlich nur solche Bogen betrachtet, welche über die Grenzen von 360° nicht hinausgehen. Da nun die übrigen trig. Linien ihrer Größe und Lage nach, durch den Sinus und Cosinus bestimmt werden können, so ist es nothwendig, sich die Begriffe derselben so deutlich und geläufig zu machen, als es nur immer geschehen kann.

Zweite Abtheilung.

Von der Erfindung und Berechnung der trigonometrischen Linien.

§. 11.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Sinus eines Bogens, den Cosinus und Quersinus eben dieses Bogens zu berechnen.

Es sei (Fig. 2.) der Bogen $AB = a$; so ist zu beweisen, daß I) $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}$ und II) $\sin \text{vers } a = 1 - \cos a$ sei.

I) Die beiden lothrechten Seiten BD und CD des $\triangle BDC$, dessen Hypothenuse, der Sinus totus $= 1$ ist, bilden den Sinus und Cosinus des Bogens a . Es ist aber $BD^2 + DC^2 = BC^2$ (§. 125.) d. i. trigonometrisch ausgedrückt, $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$. Folglich $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ und $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}$.

II) Hat man $AD = AC - DC$, allein es ist $AD = \sin \text{vers } a$, $DC = \cos a$ und $AC = 1$. Daher ist $\sin \text{vers } a = 1 - \cos a$. AO aber ist $= AC + CO$; CO aber ist der Cosinus des stumpfen $\mathcal{W}$. ACF oder des ihn messenden Bogens AKF . Also ist der Sinus des stumpfen $\mathcal{W}$. $= 1 + \cos a$, wenn hier $a > 90^\circ = AKF$ ist.

Beispiel 1. Die Seite eines regulären Sechsecks ist dem Halbmesser gleich. Setzt man diesen = 1; so ist der Sinus eines Bogens von $30^\circ = \frac{1}{2}$ (Zus. 3.); wie groß ist der Cosinus und Quersinus dieses Bogens? — Es ist $\cos 30^\circ = \sqrt{1 - (\sin 30^\circ)^2}$
 $= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,73205080 : 2 = 0,86602540.$

Beispiel 2. Die Seite eines in den Kreis gezeichneten Quadrats, ist für den Halbmesser 1, die Sehne eines Bogens von 90° ; zugleich aber auch die Hypothenuse eines rechth. $\triangle$, von dessen Catheten jede dem Halbmesser, also = 1 ist. Daher ist die gedachte Seite oder Sehne = $\sqrt{2}$, ihre Hälfte, der Sinus eines Bogens von $45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; wie groß ist der Cosinus von 45° ? — In diesem Falle ist der Cosinus so groß, als der Sinus, folglich $= \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1,41421356 : 2 = 0,70710678.$

Beispiel 3. Der Sinus eines Bogens von 18° beträgt $\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$; wie groß ist dessen Cosinus? — Es ist $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - (\sin 18^\circ)^2} = \sqrt{1 - (\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4})^2} =$
 $\sqrt{1 - (\frac{1}{16} - \frac{2\sqrt{5}}{16})^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} =$
 $3,804226065781 : 4 = 0,951056516295.$

Zusatz. Ist der Cosinus eines Bogens a bekannt, so läßt sich auf diese Art auch dessen Sinus bestimmen. Denn es ist $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, folglich $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ und $\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}.$

Beispiel 1. Wie groß ist der Sinus eines Bogens, dessen Cosinus $\frac{1}{2} = 0,333..$ beträgt? — Es ist $\sin a = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,4142.. \times \frac{1}{2} = 0,9428...$

Beispiel 2. Wie groß ist der Sinus eines Bogens von 36° , wenn sein Cosinus $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$ beträgt? — Es ist $\sin 36^\circ = \sqrt{1 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5})^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2,351141 : 4 = 0,587785.$

Beispiel 3. Wie groß ist der Sinus eines Bogens von 60° , dessen Cosinus $\frac{1}{2}$ beträgt? — Es sei $a = 60^\circ$, so ist $\sin 60^\circ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ.$

Anmerkung. Fände man den Cosinus eines Bogens $\frac{1}{2}$ und

eines andern $-\frac{1}{3}$; so würde zwar der letztere so groß sein, wie der erstere, allein das Vorzeichen deutet an, daß er im zweiten Quadranten liegen müßte, wofern beide Bogen zusammen nicht $> 180^\circ$ sind. Der Cosinus des Flächenwinkels eines Tetraedrons z. B. ist $= \frac{1}{3}$; des Octaedrons $= -\frac{1}{3}$. Legt man nun zwei Seitenflächen dieser beiden Körper an einander, so, daß ihre dazugehörigen Seitenlinien zusammenfallen; so liegen die beiden andern in einerlei Ebene.

§. 12.

Aufgabe. Aus dem Sinus und Cosinus eines Bogens, seine Tangente zu berechnen.

Der Bogen AB werde durch α bezeichnet; so ist

$$\text{tang } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ d. h. die Tangente eines Bogens wird}$$

gefunden, wenn man den Sinus desselben durch den Cosinus dividirt. Denn wegen der ähnlichen Dreiecke AEC und DBC verhält sich $CD : DB = CA : AE$. Druckt man nun diese Größen trigonometrisch aus; so verhält sich $\cos \alpha : \sin \alpha = 1 : \text{tang } \alpha$. Also ist $\text{tang } \alpha =$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Anmerkung. Der gefundene Quotient für die Tangente ist allgemein und behält daher seine Richtigkeit, wenn $\alpha = \beta + \gamma$ oder, $= \beta - \gamma$ wäre d. h. es ist $\text{tang}(\beta + \gamma) = \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\cos(\beta + \gamma)}$, oder ist $\beta = \pi = 180^\circ$; so ist auch $\text{tang}(\pi - \gamma) = \frac{\sin(\pi - \gamma)}{\cos(\pi - \gamma)}$ oder $\text{tang}(180^\circ - \gamma) = \frac{\sin(180^\circ - \gamma)}{\cos(180^\circ - \gamma)}$.

Beispiel 1. Wie groß ist die Tangente eines Bogens von 60° , dessen Sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$ und dessen Cosinus $\frac{1}{2}$ beträgt? — Es ist

$$\text{tang } 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3} = 1,732050\dots$$

Beispiel 2. Wie groß ist die Tangente eines Bogens von 45° ? — Es ist $\text{tang } 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 1$.

Beispiel 3. Wie groß ist die Tangente eines Bogens α , dessen Sinus $= \sqrt{\frac{2}{3}}$ und Cosinus $= \sqrt{\frac{1}{3}}$ ist? — Es ist demnach $\text{tang } \alpha = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2} = 1,412\dots$

Zusatz 1. Aus dem algebraischen Ausdrucke $\text{tang } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ läßt sich nicht allein die Größe der

Tangente, sondern auch das ihr zukommende Vorzeichen genau bestimmen. Die Aenderung der Vorzeichen der Tangenten, werden aus ihren Sinus und Cosinus hergeleitet, diese aber ändern, wie solches aus dem Vorhergehenden deutlich erhellet, ihre Vorzeichen, wenn sie aus einem Halbkreise in den entgegengesetzten übergehen.

Ist z. B. $AB = \alpha$, $< 90^\circ$ und $\pi = 180^\circ$; so fällt des Bogens $(\pi - \alpha)$ Endpunkt in den zweiten Quadranten. Fragt man nun, was hat die dazu gehörige Tangente für ein Vorzeichen; so ergibt dieses, der Aus-

$$\text{druck } \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{+\sin \alpha}{-\cos \alpha} \text{ (9. und 9. Zuf.)} = -$$

$\text{tang}(\pi - \alpha)$. So lassen sich die Vorzeichen der Tangente, durch den ganzen Umfang bestimmen. Ist nun der Bogen $\alpha = 0$; so ist auch $\text{tang } \alpha = 0$. Nimmt

aber dieser Bogen zu; so wächst in $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ der Zähler, der Nenner aber nimmt ab, folglich wächst auch $\text{tang } \alpha$.

Wird nun $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, so ist $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2}\pi}{\cos \frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{0}$ d. h.

indem der Divisor abgenommen und kleiner geworden ist, wie jede angebliche Größe; so ist der Quotient über jede Größe, die sich angeben läßt, hinausgegangen oder unendlich geworden. Diesen Werth bezeichnet man dadurch, daß man $\frac{1}{0} = \infty$ schreibt. Dieses Verfahren zeigt hinlänglich, wie sich die Größe der Tangenten durch den ganzen Umlauf, aus ihrem Sinus und Cosinus angeben läßt. So erhält man in Verbindung mit (9.) wenn $\alpha < 90^\circ$ ist

$$\begin{aligned} \text{tang } (180^\circ + \alpha) &= \frac{\sin (180^\circ + \alpha)}{\cos (180^\circ + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} \\ &= +\text{tang } \alpha; \text{ tang } (180^\circ - \alpha) = \frac{+\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\text{tang } \alpha; \\ \text{tang } (360^\circ - \alpha) &= \frac{\sin (360^\circ - \alpha)}{\cos (360^\circ - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{+\cos \alpha} \\ &= -\text{tang } \alpha. \text{ Setzt man } \alpha = 40^\circ; \text{ so ist } \text{tang } (180^\circ - 40^\circ) \\ &= \text{tang } 140^\circ = -\text{tang } 40^\circ; \text{ tang } (180^\circ + 40^\circ) = \\ &= \text{tang } 220^\circ = +\text{tang } 40^\circ, \text{ tang } (360^\circ - 40^\circ) = \text{tg } 320^\circ \\ &= -\text{tang } 40^\circ. \text{ Ist also die Größe eines Bogens ge-} \\ &\text{geben, so darf man nur bemerken in welchen Quadranten} \\ &\text{sein Endpunct fällt, um alsdann seine Tangente an-} \\ &\text{zugeben. Ist z. B. der Bogen} = 245^\circ = (180^\circ + 65^\circ) \\ &\text{und } \alpha = 65^\circ; \text{ so ist } \text{tang } 245^\circ = \text{tang } 65^\circ. \end{aligned}$$

Zusatz 2. Die Tangenten entgegengesetzter Bogen lassen sich durch denselben Ausdruck mit Zuziehung des in (5.) vorgetragenen Satzes bestimmen. So ist z. B.

$$\text{tang } -62^\circ = \frac{\sin -62^\circ}{\cos -62^\circ} = \frac{-\sin 62^\circ}{+\cos 62^\circ} = -\text{tang } 62^\circ.$$

Zusatz 3. Hat demnach die Tangente eines Bogens, der nicht $> 180^\circ$ ist, das Vorzeichen (+) oder

(—); so ist der Bogen im ersten Falle kleiner, im andern aber größer als 90° .

Zusatz 4. Die drei Größen $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\tan \alpha$ des Ausdruckes $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, stehen mit einander in einer solchen Verbindung, daß man aus zweien allemahl die dritte, finden kann, und es ist $\sin \alpha = \cos \alpha \times \tan \alpha$ und $\cos \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha}$. Ueberdies aber läßt sich die Tangente, weil $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ (II) ist, auch bloß durch den Sinus ausdrücken, wenn man in $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ den angeführten Werth schreibt und es ist $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$.

§. 13.

Aufgabe. Aus dem Sinus und Cosinus eines Bogens, seine Cotangente zu berechnen.

Es sei der Bogen $AB = \alpha$; so ist $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

d. h. die Cotangente eines Bogens wird gefunden, wenn man den Cosinus dieses Bogens, durch seinen Sinus dividirt. — Die Dreiecke BGC und MKC sind wegen des gemeinschaftlichen $\angle BCG$ und wegen der rechten Winkel bei G und K einander ähnlich. Daher verhält sich $CG : GB = CK : KM$ oder weil im Rechtecke $DBGC$ die $CG = BD$ ist, $BD : GB = BK : KM$. Setzt man nun in diese Proportion, die trigonometrischen

Bezeichnungen, so ist $\sin \alpha : \cos \alpha = 1 : \cot \alpha$ d. h. es ist

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Beispiel 1. Wie groß ist die Cotangente eines Bogens von 30° , dessen Sinus $\frac{1}{2}$ und Cosinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$ beträgt? — Es ist

$$\cot 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = 1,732 \dots \text{wie in (9.) weil}$$

die Cotangente von 30° nichts anders ist, als die Tangente von 60° .

Beispiel 2. Wie groß ist die Cotangente eines Bogens α dessen Sinus $\frac{\sqrt{3}}{5}$ und Cosinus $\frac{1}{5}$ beträgt? — Hier ist $\cot \alpha = \frac{1}{5} : \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1,4142 \dots \times \frac{1}{5} = 0,3535 \dots$

Beispiel 3. Wie groß ist die Cotangente eines Bogens von 15° , dessen Sinus durch $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ und dessen Cosinus durch $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ angegeben wird? — Hier ist $\cot 15^\circ = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = 2 + \sqrt{3} = 2 + 1,7320508 = 3,7320508$.

Zusatz 1. Aus dem allgemeinen Ausdruck $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, läßt sich auch hier die Größe und das Vorzeichen der Cotangente bestimmen. Ist $\pi = 180^\circ$, $\alpha < 90^\circ$, so erhält man $\cot (\pi + \alpha) = \frac{\cos (\pi + \alpha)}{\sin (\pi + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \cot \alpha$. Für $\alpha = 16^\circ$ ist z. B. $\cot (180^\circ + 16^\circ) = \cot 196^\circ = \cot 16^\circ$. Auf diese Art kann man die Größe und das Vorzeichen der Cotangente durch den ganzen Umkreis bestimmen.

Zusatz 2. Die Vorzeichen der zu positiven und negativen Bogen gehörigen Cotangenten, lassen sich eben-

falls aus dem obigen Ausdruck mit Zuziehung des in (5.) erklärten Satzes bestimmen.

Zusatz 3. Aus $\frac{\cot \alpha}{1} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ (Zusatz 2.) folgt, daß

$$1 : \cos \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha \text{ und aus } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ daß}$$

$$\tan \alpha : 1 = \sin \alpha : \cos \alpha \text{ und hieraus, daß}$$

$$\tan \alpha : 1 = 1 : \cot \alpha, \text{ folglich}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}, \text{ oder } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \text{ sei.}$$

Zusatz 4. Bezeichnet nun β einen größern oder kleinern Bogen als α in (Fig. 2.); so gilt die in (Zus. 3.) angeführte Behauptung auch von der zu β gehörigen Tangente und Cotangente, und es ist $\tan \beta = \frac{1}{\cot \beta}$,

$$\text{folglich ist } \tan \alpha : \tan \beta = \frac{1}{\cot \alpha} : \frac{1}{\cot \beta} = \cot \beta : \cot \alpha$$

d. h. die Tangenten der Bogen α und β verhalten sich umgekehrt wie ihre Cotangenten.

Zusatz 5. Auch hier stehen die drei Größen $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\cot \alpha$ in einer solchen Verbindung mit einander, daß vermittelt der Gleichung $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ aus zweien derselben, wie in (9. Zus. 4.) allemahl die dritte gefunden werden kann. Und weil $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ ist; so erhält man $\cot \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$. Diesen

Werth erhält man auch aus (Zus. 3.).

Anmerkung. Die Cotangenten sind nichts anders als die Tangenten der Complemente 90° . Daher gelten die Bemerkungen

kungen über die Tangenten auch von den Cotangenten und die wechselnden Vorzeichen stimmen bei ihnen in den vier Quadranten überein.

§. 14.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Sinus und Cosinus eines Bogens, seine Secante und Cosecante zu berechnen.

Es ist mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung

$$I) \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \text{ und } II) \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \text{ d. h. die}$$

Secante eines Bogens α wird gefunden, wenn man eins durch den Cosinus und die Cosecante, wenn man eins durch den Sinus dieses Bogens dividirt.

I) Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke EAC und BDC, welche den W. DCB gemeinschaftlich und bei D und A rechte Winkel haben, folgt die Proportion:
 $DC : BC = AC : EC$; oder nach den obigen Erfl.
 $\cos \alpha : 1 = 1 : \sec \alpha$, folglich

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

II) Wegen der ähnlichen Dreiecke BGC und MKC verhält sich

$$GC : BC = KC : MC \text{ oder}$$

$$BD : BC = KC : MC \text{ weil } GC = BD \text{ ist, oder}$$

$$\sin \alpha : 1 = 1 : \operatorname{cosec} \alpha; \text{ folglich}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Zusatz 1. Aus den gefundenen Ausdrücken, kann man nun die Secanten und Cosecanten durch die vier

Quadranten des Kreises vermittlest der Sinus und Cosinus angeben. Ist $\alpha < 90^\circ$ und $\pi = 180^\circ$; so findet man

$$\sec(\pi - \alpha) = \frac{1}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{1}{-\cos \alpha}$$

$$= -\sec \alpha; \sec(\pi + \alpha) = \frac{1}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{1}{-\cos \alpha}$$

$$= -\sec \alpha; \sec(2\pi - \alpha) = \frac{1}{\cos(2\pi - \alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$= \sec \alpha$. So kann man auch die Cosecanten durchgehen.

$$\text{Daher ist z. B. cosec}(180^\circ + 20^\circ) = \frac{1}{\sin 200^\circ} =$$

$$= \frac{1}{-\sin 20^\circ} = -\text{cosec } 20^\circ \text{ wenn } \alpha = 20^\circ \text{ ist.}$$

Zusatz 2. Die Secante und Cosecante lassen sich auch durch die Tangente und Cotangente berechnen. Denn im rechth. $\triangle AEC$ ist $CE^2 = (AC^2 + AE^2)$ (S. 126.), folglich $CE = \sqrt{AC^2 + AE^2}$; nun ist aber $CE = \sec \alpha$, $AE = \tan \alpha$ und $AC = 1$. Setzt man nun diese Bezeichnungen an die Stelle der vorigen; so erhält man $\sec \alpha = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$. Aus denselben Gründen ist $MC = \sqrt{CM^2 + CK^2}$ d. h. es ist $\text{cosec } \alpha = \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}$.

Zusatz 3. Sind nun Secante und Cosecante eines Bogens α bekannt, so läßt sich auch umgekehrt aus jener die Tangente und aus dieser die Cotangente finden. Es ist $\sec \alpha = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$ oder $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$, folglich $\tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1$ und $\tan \alpha = \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}$. So ist auch $\cot \alpha = \sqrt{\text{cosec}^2 \alpha - 1}$.

Anmerkung 1. Die weitere Bestimmung der Größe und des damit verbundenen Vorzeichens des Sinusversus, läßt sich aus dem Cosinus leicht beurtheilen. Ist $AB = \alpha < 90^\circ$;

so ist $AC = \sin v. \alpha = AC - CD = 1 - \cos \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, weil $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ (II). Ist $\alpha = 0$, so ist $\sin v. \alpha = 1 - 1 = 0$; ist $\alpha = 90^\circ$, so ist $\sin v. 90^\circ = 1 - \cos 90^\circ = 1 - 0 = 1$. Für $\alpha > 90^\circ$ und $< 180^\circ$ ist $\sin v. \alpha = 1 - (-\cos \alpha) = 1 + \cos \alpha$ also 1; für $\alpha = 180^\circ$ aber, ist $\sin v. \alpha = 1 - \cos 180^\circ = 1 - (-1) = 2$. Für $\alpha > 180^\circ$ und $< 270^\circ$ ist $\sin v. \alpha = 1 + \cos \alpha$ und für $\alpha = 270^\circ = 1 + 0 = 1$. Ist endlich $\alpha > 270^\circ$ und $< 360^\circ$; so erhält man $\sin v. \alpha = 1 - \cos \alpha$, und ist also < 1 . Die Sinusversus wachsen also im ersten und zweiten Quadranten, nehmen im dritten und vierten Quadranten ab, verschwinden bei 0° und 360° und bleiben in allen vier positiv.

Anmerkung 2. Auf gleiche Art lassen sich die Werthe des Cosinusversus (sinus versus complementi) beurtheilen und festsetzen. Auch stehet man aus der Vergleichung der Bogen mit ihren trigonometrischen Linien, daß auf eine der gedachten Linien mehrere Bogen bezogen werden können. So. z. B. gehört zu dem Sinus von 30° , der Bogen von 30° , 150° , von 210° , von 330° etc.

Anmerkung 3. Nimmt man bei den algebraischen Rechnungen, auf Verhältnisse zwischen Sinus, Cosinus, Secante, Cosecante, Tangente, Cotangente aus dem Halbmesser, Rücksicht; so kann man sagen: eine gegebene Größe durch den Sinus, Cotangente dividiren, ist eben so viel als die gedachte Größe mit der Cosecante, Secante, Tangente multipliciren und so auch umgekehrt. Will man aber bei den verschiedenen arithmetischen Operationen, den Halbmesser oder dessen Potenzen wieder herstellen, wie doch eigentlich $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = r^2$ ist; so darf man nur in allen Gleichungen darauf sehen, daß die darin vorkommenden Glieder, ohne Rücksicht ihrer Coefficienten, bis auf eine gleiche Anzahl Dimensionen steigen und die Gleichung dadurch homogen werde. Diese Bemerkung wird uns überall sicher leiten können, um in allen Fällen den weggelassenen Halb-

messer oder dessen Potenzen in die Rechnung einzuführen. Wollte man die Gleichung $3x^3 = 4y^2 + z - 8$ durch den Halbmesser homogen machen; so ist $5x^3 = 4xy^2 + r^2z - 8r^3$. Hat man die Gleichung $\sin \alpha^2 \cos \beta = \tan \alpha$, so wird diese $\sin \alpha^2 \cos \beta = r^2 \tan \alpha$. So läßt sich der Halbmesser in allen Gleichungen und auch in der sphär. Trig. (92. Ann.) weit leichter bestimmen.

§. 15.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Cofinus eines Bogens, den Sinus und Cofinus seiner Hälfte zu berechnen.

Man beschreibe (Fig. 3.) mit einem zu dem gegebenen Bogen gehörigen Halbmesser $AC=1$, den Halbkreis ABD , theile den Bogen $AB = \alpha$ in zwei gleiche Theile; so wird auch die dazu gehörige Sehne halbirt sein und $AK = BK$ wird der Sinus von $BF = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\alpha$, CK dessen Cofinus d. i. $\cos \frac{1}{2}\alpha$ und GC der gegebene Cofinus des Bogens α sein. In dem rechtwinkligen $\triangle ABD$ verhält sich nach (§. 77. Zus. 9.)

I) $AG:AB=AB:AD$ d. i.

$$AC - CG : 2BK = 2BK : 2 \text{ oder das 2te Verhältn. : 2}$$

$$AC - CG : 2BK = BK : 1$$

$$1 - \cos \alpha : 2 \sin \frac{1}{2}\alpha = \sin \frac{1}{2}\alpha : 1 \text{ d. i.}$$

$$2 \sin \frac{1}{2}\alpha^2 = 1 - \cos \alpha$$

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

II) Verhält sich

$$GD:BD=BD:DA \text{ d. i. weil } BD=2BE=2CK$$

$$GC + CD : 2CK = 2CK : 2 \text{ oder das 2te Verhältniß : 2}$$

$GC + CD : 2CK = CK : 1$ d. i. nach obiger Bezeichnung

$$1 + \cos \alpha : 2 \cos \frac{1}{2} \alpha = \cos \frac{1}{2} \alpha : 1$$

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)}.$$

Anmerkung. Man hat verschiedene Auflösungen dieser Aufgabe. Einige Mathematiker haben selbige vermittelst einer vermischten quadr. Gleichung aufgelöst, wie Lacroix in s. ebenen Trigonometrie (§. 12.), andere, wie Euler leiten sie aus (15.) her. Die obige Beweisart ist von derjenigen, welche andere Schriftsteller befolgen, verschieden und scheint mir wegen ihrer Simplicität, die einfachste zu sein. — Uebrigens kann man vermittelst dieses Satzes, eine Reihe von andern Sinus und Cosinus berechnen, indem man aus dem gefundenen Cosinus, immer den Sinus und Cosinus seiner Hälfte herleiten kann.

Beispiel 1. Wie groß ist der Sinus und Cosinus eines Bogens von 15° , wenn der Cosinus eines Bogens von 30° mit dem Werthe der $\sqrt{\frac{1}{2}}$ übereinkommt? — Es ist 1) $\sin 15^\circ =$

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} : 2 = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{4} \sqrt{6} - \frac{1}{4} \sqrt{2} = \left(\frac{1}{4} \sqrt{6} - \sqrt{2} \right).$$

Nun findet man aber $\sqrt{6} = 2,4494897$ und $\sqrt{2} = 1,4142136$, folglich $\sin 15^\circ = 0,2598190$. 2) Ist $\cos 15^\circ =$

$$\sqrt{\left(\frac{1 + \cos 30^\circ}{2} \right)} = \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} : 2 = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{4} \sqrt{6} + \frac{1}{4} \sqrt{2} = 3,8637033 : 4 = 0,9659258.$$

Beispiel 2. Wie groß ist der Sinus und Cosinus von $\frac{1}{2}\gamma$, wenn $\cos \gamma = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ gefunden worden ist. Es ist 1) $\sin \frac{1}{2}\gamma =$

$$\sqrt{\left(\frac{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3} \right)}{2} \right)} = \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3} \right)} : 2 =$$

$$\sqrt{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{6} \right)}. \quad 2) \text{ Ist } \cos \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\left(1 + \frac{(-\sqrt{5})}{3} \right)} : 2 =$$

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3} \right)}.$$

$\sqrt{1 - \frac{\sqrt{5}}{3}} : 2 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}}$. Man sehe sphärische Trig. (123. II).

Zusatz 1. Betrachtet man nun den halben Bogen als einen Ganzen; so wird der Ganze, der doppelte Bogen vom halben, d. h. setzt man $\frac{1}{2}\gamma = \beta$; so ist $\gamma = 2\beta$ und schreibt man diese Werthe in die obige Aufgabe, so ist

$$1) \sin \beta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\beta}{2}} \text{ und}$$

$$2) \cos \beta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\beta}{2}}.$$

Zusatz 2. Es ist also $2 \sin \beta^2 = 1 - \cos 2\beta$ und $2 \cos \beta^2 = 1 + \cos 2\beta$; folglich $4 \sin \beta^2 \cos \beta^2 = (1 - \cos 2\beta)^2 = \sin 2\beta^2$; folglich $\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cdot \cos \beta$.

$$\text{Zusatz 3. Es ist auch } \frac{\sin \beta^2}{\cos \beta^2} = \frac{1 - \cos 2\beta}{1 + \cos 2\beta} =$$

$$\tan \beta^2, \text{ folglich } \tan \beta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\beta}{1 + \cos 2\beta}}.$$

§. 16.

Lehn s a t z. Aus der gegebenen Summe und Differenz zweier Größen, die Größen selbst zu finden.

Es sei S die Summe und D die Differenz der gegebenen Größen A und B; so ist die größere A = $\frac{S + D}{2}$ und die kleinere B = $\frac{S - D}{2}$. Diese Aus-

drücke aber werden gefunden, wenn man für A die halbe Differenz zur halben Summe addirt und für B, die halbe Differenz von der halben Summe abzieht.

Q

§. 17.

Aufgabe. Aus den Sinus und Cosinus zweier Bogen, den Sinus und Cosinus der Summe beider Bogen zu finden.

Man kann sich von der Richtigkeit dieses Satzes, welcher die Gründe vieler trig. Berechnungen enthält und von sehr ausgebreiteten Folgen ist, sehr leicht überzeugen, wenn man sich die Figur mit den zugehörigen Linien verzeichnet, selbige mit den ihnen zukommenden trig. Nahmen belegt und die bekannten und gesuchten Stücke gehörig von einander unterscheidet.

Sind demnach die Sinus und Cosinus der beiden Bogen A und B gegeben; so ist

$$I) \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \text{ und}$$

$$II) \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

Es sei in (Fig. 4.) der Bogen DG mit dem Halbmesser $DE = 1$ beschrieben worden, ferner sei der eine Bogen $DF = A$, der andere $FG = B$, deren Sinus und Cosinus KF , LG , KE und LE gegeben sind; so wird DG die Summe von A und B, folglich GI und IE der gesuchte Sinus und Cosinus, aus den vorigen Stücken, zu berechnen sein. Endlich ziehe man des Beweises wegen LM und LO aus L senkrecht auf GI und GE, so wird man die gedachten Linien $GI = GO + OI$ und $IE = KE - KI$ auf folgende Art bestimmen können. Es ist nemlich $\triangle GLO$ (117.) $\sim GLH \sim HIE$ wegen der rechten Winkel GLH und HIE und der gleichen Verticalwinkel bei H und HIE $\sim LME$. Also verhält sich

I) $EF:FK=EL:LM$ und $EF:EK=GL:GO$

$$1:\sin A=\cos B:LM$$

$$1:\cos A=\sin B:GO$$

$$LM=\sin A \cdot \cos B=OI$$

$$GO=\sin B \cdot \cos A.$$

Es ist aber $OI+OG=GI=\sin(A+B)$

folglich $\sin(A+B)=\sin A \cos B+\cos A \sin B.$

II) Verhält sich, weil $\triangle GLO \sim LME \sim EFK$ ist,

$EF:EK=EL:EM$ und $EF:FK=LG:LO$

$$1:\cos A=\cos B:EM$$

$$1:\sin A=\sin B:LO$$

$$EM=\cos A \cdot \cos B$$

$$LO=\sin A \cdot \sin B.$$

Es ist aber $EM-MI=IE=EM-LO=\cos(A+B)$

folglich $\cos(A+B)=\cos A \cdot \cos B-\sin A \cdot \sin B.$

Betrachtet man nun B als einen negativen Bogen; so ist sein Sinus negativ und sein Cosinus positiv (6.). Hieraus folgt nun, daß

III) $\sin(A-B)=\sin A \cdot \cos B-\cos A \cdot \sin B$ und

VI) $\cos(A-B)=\cos A \cdot \cos B+\sin A \cdot \sin B.$

Anmerkung. Aus diesen vier Grundformeln fließt eine große Menge anderer Lehren und Formeln, selbst die Sinus und Cosinus derjenigen Bogen nicht ausgeschlossen, welche Vielfache von andern sind. In der Folge sollen die merkwürdigsten Ausdrücke davon angeführt, so wie hier einige aus dem Hauptsatze unmittelbar hergeleitete Folgerungen aufgezeichnet werden.

Zusatz 1. Aus dem oben erwiesenen Satze folgt nun, daß

$$1) \sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A \cdot \cos B$$

$$2) \sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A \cdot \sin B$$

$$3) \cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A \cdot \cos B$$

$$4) \cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A \cdot \sin B$$

sein. Die erste und dritte dieser Gleichung entsteht

durch die Addition und Subtraction der bei (I und II) wie auch der bei (III und IV) angeführten Gleichungen. Die 3te durch die Addition der bei (III und IV), die 4te aber durch die Subtraction der bei (III) von der bei (IV).

Zusatz 2. Aus den im (Zus. 1.) gefundenen Gleichungen, lassen sich verschiedene andere ableiten. Und wenn man $A + B = \alpha$ und $A - B = \beta$, folglich $A = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und $B = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ (16.) schreibt; so erhält man

$$1) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$2) \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$3) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$4) \cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Dividirt man nun die erste Gleichung durch die andere; so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \quad (\S. 20.) \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \quad (12 \text{ u. } 13.) \\ &= \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$\sin \alpha + \sin \beta : \sin \alpha - \sin \beta = \tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
d. h. die Summe und Differenz der Sinus zweier Bogen, sind den Tangenten der halben Summe und Differenz derselben proportional.

§. 18.

Aufgabe. Aus den Tangenten zweier Bogen, die Tangenten und Cotangenten der Summe und Differenz dieser Bogen zu berechnen.

1) Man bezeichne die beiden Bogen mit α und β , so ist $\tan(\alpha + \beta) = 1) \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \quad (12.) =$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} \quad (17.) = \\
 & \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \\
 3) \quad & \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = 4) \quad \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{1 - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \\
 5) \quad & \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}
 \end{aligned}$$

Daß die Brüche bei 2 und 3

einander gleich gesetzt werden können, folgt daraus, weil Zähler und Nenner durch dieselbe Größe, nemlich durch $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ dividirt worden sind. Aus dem Bruche bei 3) entsteht der Bruch bei 4) indem hier die im Zähler und Nenner einander aufhebenden Theile wegelassen sind.

$$\text{II) Es ist } \cot(\alpha + \beta) = \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)} = \frac{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

$$\text{III) Ist } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Der Beweis

wird vollkommen so wie bei (I) geführt.

$$\text{IV) Es ist } \cot(\alpha - \beta) = \frac{1}{\tan(\alpha - \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$$

Zusatz. Setzt man nun $\alpha = 45^\circ$; so wird, weil $\tan 45^\circ = 1$, die Gleichung bei (I) $\tan(45^\circ + \beta) =$

$$\frac{1 + \tan \beta}{1 - \tan \beta} = \frac{1 + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta}$$

$$\text{II) } \tan(45^\circ - \beta) = \frac{\cos \beta - \sin \beta}{\cos \beta + \sin \beta} \text{ nach denselb. Regeln.}$$

$$\text{III) } \cot(45^\circ + \beta) = \frac{\cos \beta - \sin \beta}{\cos \beta + \sin \beta} \text{ und}$$

$$\text{IV) } \cot(45^\circ - \beta) = \frac{\cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta}$$

Dritte Abtheilung.

Von den Auflösungen der Aufgaben geradliniger Dreiecke.

§. 19.

Da an alle Aufgaben geradliniger Dreiecke die Bedingung geknüpft ist, daß unter den bekannten Stücken, allemahl eine Seite sein muß, so lassen sich die Fälle leicht angeben, welche bei der Auflösung ebener geradliniger Dreiecke Statt finden können. Aus den Winkeln allein kann man zwar nicht die Größe, wohl aber das Verhältniß derselben gegen die Seiten des Dreiecks bestimmen, und diese Bestimmung ist so wichtig, daß alle trigonometrische Untersuchungen über die Ausmessung der Dreiecke, selbst jene sinnreichen, dem ersten Anscheine nach, unmöglichen Aufgaben nicht ausgeschlossen, vermittelst welcher die unzugänglichen Entfernungen auf der Erde, die Größen und Entfernungen der Himmelskörper u. berechnet werden können, lediglich auf diesen Satz gegründet sind. Die hier vorkommenden Fälle lassen sich auf folgende Weise unterscheiden. Die drei gegebenen Stücke sind

- I) entweder Seiten und Winkel, oder
- II) Seiten allein. In jenem Falle sind unter den gegebenen Stücken wieder
 - 1) entweder eine Seite nebst zwei Winkeln; oder

- 2) ein Winkel nebst zweien Seiten enthalten. In diesem Falle kann der Winkel
- a) einer der beiden gegebenen Seiten gegenüber liegen; oder
 - b) er kann von denselben eingeschlossen sein.

§. 20.

In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Es ist hier zu beweisen, daß sich (Fig. 5.) $AB:BC = \sin C : \sin A$ verhält. — Man ziehe durch die drei Winkelspitzen A, B, C des Dreieckes den Kreis ABC. Aus seinem Mittelpuncte lasse man die bis an den Umfang in E und F verlängerten Perpendikel DE, DF, auf die Seiten AB, BC des $\triangle$ herab; so sind die Seiten AB und BC zugleich Sehnen des Kreises, welche, wie die ihnen zugehörigen eben so bezeichneten Bogen durch DE und DF halbirt werden (§. 66.). Zwei Seiten aber verhalten sich allemahl, wie ihre Hälften. Folglich ist $AB:BC = \frac{1}{2}AB:\frac{1}{2}BC$. Nun ist aber $\frac{1}{2}AB$ die halbe Sehne des Bogens AEB oder 2EB d. i. der Sinus des Bogens EB oder des von diesem Bogen EB gemessenen Winkels $EDB = ACB = C$ (§. 129.) d. h. es ist $\frac{1}{2}AB = \sin C$ (§. Zus. 1.). So ist auch $\frac{1}{2}BC = \sin A$. Schreibt man nun diese Ausdrücke in die vorige Proportion, so erhält man

$$AB:BC = \sin C : \sin A.$$

Aus gleichen Gründen ist

$$BC:AC = \sin A : \sin B,$$

folglich auch

$$AB:AC = \sin C : \sin B.$$

Zusatz 1. In jedem $\triangle$ wie ABC , ist der Sinus eines Winkels A , allemahl so groß, als der Sinus der Summe der beiden andern Winkel B und C . Denn es ist $B + C = 180^\circ - A$, folglich $\sin(B + C) = \sin A$ (10.).

Zusatz 2. Bei einem rechtwinkligen $\triangle ABC$ (Fig. 6.) dürfen, weil der rechte Winkel bekannt ist, nur zwei Stücke, wovon aber wenigstens das eine, eine Seite sein muß, gegeben sein und mit Hülfe des angeführten Satzes kann man aus der Hypothenuse $AB = c$ und einem der spitzen Winkel A , die beiden lothrechten Seiten $BC = a$ und $AC = b$ des rechtwinkligen $\triangle$ berechnen; nur muß man bemerken, daß $\sin. tot.$ zur Erleichterung der Berechnung allemahl $= 1$ gesetzt wird. Es ist nemlich

I) $a = c \sin A$ und II) $b = c \cos A$. Es verhält sich
 $a : c = \sin A : \sin. tot$

Folglich I) $a = c \sin A$. So verhält sich auch

$b : c = \sin B : 1$. Es ist aber

$A + B = 90^\circ$, folglich

$\sin B = \cos A$ (4. Zus. 1.)

$b : c = \cos A : 1$

II) $b = c \cos A$.

Beispiel. Wie groß sind die lothrechten Seiten a und b im rechth. $\triangle ABC$, wenn die Hypothenuse $c = 3914$ und $\angle A = 27^\circ 15'$ beträgt? — Man nehme für die Berechnung die erste der obigen Gleichungen, nach welcher $a = c \sin A$, oder mit Rücksicht auf den Halbmesser der Tafeln r , $= \frac{c \sin A}{r}$ ist. Davon ist die log. Gleichung $\log a = \log c + \log \sin A - 10$. Die Berechnung davon ist folgende: es ist

$$\begin{aligned}\log c &= \log 3914 = 3,5926208 \\ \log \sin A &= \log \sin 27^\circ 15' = 9,6607459 \\ &\quad \underline{13,2533667}\end{aligned}$$

$\log \sin . \text{tot. tab} = 10,$
 $\log a = 3,2533667 = \log 1792$ beinahe,
 folglich ist $a = 1792$. Den Werth für b findet man aus der
 zweiten Gleichung nach welcher $b = \frac{c \cdot \cos A}{x}$ ist; oder es ist ver-
 mittelt der Logarithmen

$$\begin{aligned}\log c &= \log 3914 = 3,5926208 \\ \log \cos A &= \log \cos 27^\circ 15' = 9,9489101 \\ &\quad \underline{13,5415309}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log . \sin . \text{tot. tab} &= 10, \\ \log b &= 5,5415309 = \log 3479 \text{ beinahe.}\end{aligned}$$

Zusatz 3. Wären in dem rechth. $\triangle ABC$ die
 beiden lorthrechten Seiten $BC = a$ und $AC = b$ ge-
 geben; so ließen sich hieraus die spizen Winkel A und
 B berechnen, aus deren einem, schon der andere be-
 stimmt wird, weil ihre Summe 90° beträgt. Es ist aber
 $\tan A = \frac{a}{b}$. Denn es verhält sich

$$b : a = \sin B : \sin A; \text{ es ist aber}$$

$$\sin B = \cos A, \text{ folglich}$$

$$b : a = \cos A : \sin A$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A \text{ (12.)} \quad \text{Auch ist } \frac{a}{b} =$$

$$\cot B, \text{ weil } \tan A = \cot B \text{ (8.) ist.}$$

Beispiel. Wie groß ist der spize Winkel A , wenn
 $a = 1748'$ und $b = 1615'$ beträgt? — Es ist $\tan A = \frac{a}{b}$ oder
 $= \frac{a \cdot \sin . \text{tot}}{b}$, oder vermittelt der Log. $\log \tan A = r + \log a$

— log b. Man findet aber

$$\log . \sin . \text{tot. tab} = 10,$$

$$\log a = \log 1748 = \frac{3,2425414}{13,2425414}$$

$$\log b = \log 1675 = \frac{3,2240148}{13,2240148}$$

$$\log \tan A = 10,0185266 = \log \tan 46^{\circ} 2', \text{ folglich } A = 46^{\circ} 2' \text{ und } B = 90^{\circ} - 46^{\circ} 2' = 43^{\circ} 58'.$$

Zusatz 4. Man kann nun die trig. Linien eines rechth. $\triangle$ sehr leicht durch dessen Seiten ausdrücken.

Es ist nemlich 1) $\sin A = \frac{a}{c}$; 2) $\cos A = \frac{b}{c}$;

3) $\tan A = \frac{a}{b}$; 4) $\cot A = \frac{b}{a}$; 5) $\sec A = \frac{c}{b}$ und

6) $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}.$

Zusatz 5. Sind die Winkel in einem $\triangle$ sehr klein, so kann man, ohne merklichen Fehler, anstatt der trigonometrischen Linien, die Winkel selbst nehmen. In diesem Fall heißt die im Satze angeführte Proportion $AB : BC = C : A.$

Zusatz 6. Jedes rechtwinklige $\triangle$, läßt sich als die Hälfte eines gleichschenkligen betrachten, worin die halbe Grundlinie durch die eine und der von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel, durch die andere lothrechte Seite, vorgestellt wird. Daher kann man aus den bekannten Verhältnissen rechtwinkliger Dreiecke, die Eigenschaften eines gleichschenkligen Dreiecks entwickeln. Es sei (Fig. 7.) das gleichschenklige $\triangle$, worin das rechth.

$$\triangle ACG = \frac{1}{2} ACB$$

$$AG = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} b$$

$$AC = h \text{ und}$$

$$\angle ACG = \frac{1}{2} ACB = \frac{1}{2} \alpha, \text{ so ist}$$

$$1) \sin ACG = \sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{AG}{AC} = \frac{\frac{1}{2}b}{h} = \frac{b}{2h} \text{ (Zus. 4.)}$$

$$2) h = \frac{b}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha} \text{ und}$$

3) $b = 2h \sin \frac{1}{2} \alpha$. Diese drei Größen, a , b und α stehen in einer solchen Verbindung mit einander, daß man aus zweien allemahl die dritte finden kann. Sind also die Seiten des Dreieckes gegeben, so lassen sich daraus die Winkel und aus einem Winkel und einer Seite, läßt sich die andere, berechnen.

Beispiel. Wie groß ist der $\angle \alpha$, wenn die Seite $AC = h = 128^\circ$; $AG = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} b = 96^\circ$ angenommen wird? —

Hier ist $\sin ACG = \sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{\frac{1}{2}b}{a}$ oder $\log \sin \frac{1}{2} \alpha = \log \frac{1}{2} b +$

$1 - \log a = \log 96 + 10 - \log 128$. Es ist aber

$$\log \frac{1}{2} b = \log 96 = 1,9822712$$

$$\log \sin \text{tot tab} = \frac{10,0000000}{11,9822712}$$

$$\log h = \log 128 = 2,1071100$$

$$\log \frac{1}{2} \alpha = \frac{9,8750612}{9,8750612} = \log 48^\circ 35', \text{ folglich } \alpha = 97^\circ 10' \text{ beinahe.}$$

Anmerkung 1. Auf die Eigenschaften des gleichschenkligen $\triangle ABC$ gründet sich auch eine Methode, Winkel auf dem Papier zu messen — und auf dem Felde gemessene Winkel zu zeichnen, die sicherer ist, als das Verfahren vermittelt des gewöhnlichen oder des geradlinigen Transporteurs. — Einen vorgegebenen Winkel mißt man auf folgende Art: Man gibt beiden Schenkeln AC und BC eine Länge von 1000 gleichen Theilen, nach dem verjüngten Maßstabe. Dann mißt man den Abstand AB , nimmt dessen Hälfte und sucht aus den Sinustafeln, welche Ziffern mit dem für $\frac{1}{2} AB$ gefundenen Werthe übereinstimmen. Den, mit dieser Zahl zusammengehörigen Bogen, doppelt genommen, gibt die Größe des W. ACB an.

Zum Auftragen eines gemessenen Winkels, nimmt man die 4 oder 5 ersten Stellen von dessen Sinus doppelt, macht $AC = 1000$, beschreibt mit AC einen Kreisbogen, zeichnet die Länge der durch die drei ersten Ziffern bestimmten Sehne AB , nach dem verjüngten Maßstabe in den Kreisbogen; so wird BCA der verlangte Winkel sein.

Anmerkung. 2. In gleicher Absicht kann man sich des rechtwinkl. $\triangle ACG$ bedienen. Ist ACG der gegebene Winkel, so nehme man $AC = 1000$, lasse CG senkrecht auf AB , messe wie viel von den 1000 Theilen in CG enthalten sind; so ist diese Zahl die Größe des zum CAG gehörigen Sinus, durch welchen man den Winkel selbst findet. Es sei z. B. $CG = 348$; so ist der W. $20^\circ 20' - 25'$.

Soll man von A aus, einen $\angle$ von $24^\circ 28'$ auftragen; so ziehe man durch A die AB , mache $AC = 910$, errichte aus C einen Perp. GC , mache $GC = 414$; ziehe AC , so wird $CAG = 24^\circ 23'$, AC sein Sinus und AG sein Cosinus sein.

§. 21.

Aufgabe. Zwei Winkel nebst einer Seite eines Dreiecks sind in Zahlen gegeben; man soll den dritten Winkel und die beiden übrigen Seiten durch Rechnung finden.

Es sei (Fig. 8.) ABC das Dreieck, dessen Seite $AB = c$, und dessen Winkel A und B bekannt sind; so ergibt sich aus diesen Stücken der Aufgabe zugleich die Größe des dritten W. $C = 180^\circ - (A + B)$. Daher kennt man, außer der Größe der gegebenen Seite und den beiden gedachten Winkeln, den dritten, der bekannten Seite gegenüberliegenden Winkel. Daher lassen sich nach (20.) zwei Proportionen dergestalt anordnen, daß in jeder, die eine der gesuchten Seiten, das vierte

Proportionalglied werde. Sucht man nun einen Winkel, so fängt man die Proportion mit einer Seite an, sucht man aber eine Seite, so fängt man die Prop. mit einem Winkel an. Es verhält sich demnach im $\triangle ABC$,

$$\sin C : c = \sin A : a \text{ und}$$

$$\sin C : c = \sin B : b, \text{ folglich ist}$$

$$I) a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C} \text{ und}$$

$$II) b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}.$$

Beispiel. Im $\triangle ABC$ sind nach Vorschrift der obigen Aufgabe eine Seite und zwei Winkel gegeben, nemlich $c = 648^\circ$, $\angle A = 53^\circ 38'$ und $\angle B = 61^\circ 25'$; wie groß sind die übrigen Stücke des gedachten $\triangle ABC$? — Es ist $\angle C = 180^\circ - (53^\circ 38' + 61^\circ 25') = 180^\circ - 115^\circ 3' = 64^\circ 57'$. Drückt man nun die bei (I und II) gefundenen Gleichungen durch die Logarithmen der gegebenen Zahlen aus; so hat man

$$I) \log a = \log 648 + \log \sin 53^\circ 38' - \log \sin 64^\circ 57' \text{ und}$$

$$II) \log b = \log 648 + \log \sin 61^\circ 25' - \log \sin 64^\circ 57'. \text{ Die weitere Berechnung beider Gleichungen steht nun so:}$$

$$I) \log 648 = 2,8115750$$

$$II) \log 648 = 2,8115750$$

$$\log \sin 53^\circ 38' = \frac{9,9059247}{12,7174997}$$

$$\log \sin 61^\circ 25' = \frac{9,9435549}{12,7551299}$$

$$\log \sin 64^\circ 57' = \frac{9,9570988}{12,7551299}$$

$$\log \sin 64^\circ 57' = \frac{9,9570988}{12,7551299}$$

$$\log a = 2,7604009$$

$$\log b = 2,7980311$$

$$= \log 575,9 \text{ also}$$

$$= \log 628,1$$

$$a = 575,9.$$

$$\text{folglich } b = 628,1.$$

§. 22.

Aufgabe. Aus einem Winkel und zweien Seiten, deren eine dem gedachten Winkel gegenüberliegt, die dritte Seite nebst den beiden übrigen Winkeln durch Rechnung zu finden.

Es sei (Fig. 8.) die Seite $AB = c$, $BC = a$

und der der Seite a gegenüberliegenden Winkel $= A$; so sucht man die Seite $AC = b$ und die Winkel B und C . Nun kann man zur Aufl. dieser Aufgabe den Satz aus (20.) unmittelbar anwenden, zu Folge dessen sich $a : c = \sin A : \sin C$ verhält, folglich ist

$$\text{I) } \sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}. \quad \text{Nun erhält man}$$

II) $\angle B = 180^\circ - (A + C)$ und nach (20.) verhält sich wieder $\sin A : \sin B = a : b$ folglich

$$\text{III) } b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}.$$

Anmerkung. Dieses würde der Gang der Rechnung sein, wenn der gegebene Winkel stumpf wäre, oder wenn man von ihm wüßte, daß er $> C$ ist. Im entgegengesetzten Fall, wo man dieses nicht wüßte oder wo er $< C$ wäre, wird diese Aufgabe unbestimmt sein, d. h. die Auflösung gibt einen doppelten Werth und man weiß nicht, welcher von beiden derjenige ist, der eigentlich verlangt wird. Sind die beiden Seiten c und a und der W. A gegeben; so erhellet es schon aus Gründen der Geometrie, daß sich aus den Datis nicht allein das $\triangle ABC$ (Fig. 9.) sondern auch das $\triangle ABC'$ verzeichnen läßt. Folglich bleibt es hier unentschieden, ob die Verzeichnung dieses oder jenes Dreieckes verlangt wurde.

Wollte man nun versuchen, ob nicht die Trigonometrie Hülfsmittel darböthe, diese Zweideutigkeit zu heben; so würde man unfehlbar, wie oben geschehen, den Winkel C durch Rechnung zu bestimmen suchen. Nun ist zwar im $\triangle ABC$ bei C ein spitzer $\angle$ nemlich ABC und im andern $\triangle ABC$ bei C' ein stumpfer $\angle$ nemlich $AC'B$, allein diese Winkel sind zwei einander zu 180° ergänzende Theile und solche Winkel haben einerlei Sinus (10.). Daher läßt sich auch auf diesem Wege nicht erkennen, ob der stumpfe oder spitze Winkel genommen werden muß.

Auch gibt es noch einen andern Umstand, der bei der vorläufigen Prüfung, wie die gegebenen und gesuchten Stücke von einander abhängen, erwogen werden muß. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn die dem gegebenen $\angle A$ entgegengesetzte Seite a nicht nur $< c$ d. h. als die bekannte an A anliegende Seite, sondern auch kleiner, als der aus B auf AC herabgelassene Perpendikel BD ist. Da aber dieser Perpendikel allemahl $= \frac{c \cdot \sin A}{r}$ ist und dieser Ausdruck lauter bekannte Größen enthält, so läßt sich über den gedachten Punct leicht entscheiden. — Aus diesen Betrachtungen ergibt sich nun folgendes Resultat.

Ist die gegebene Seite $a = BC < \frac{BA \cdot \sin A}{r}$, so ist die Aufgabe unmöglich; ist hingegen $BC > \frac{BA \cdot \sin A}{r}$, und zugleich $BC < BA$, so ist die Aufgabe zwar möglich, aber unbestimmt; ist endlich $BC > BA$, so ist die Aufgabe möglich und bestimmt. Denn nun weiß man, daß der gesuchte Winkel kleiner, als der gegebene ist, weil der größern Seite BC , der größere Winkel gegenüber liegt. In diesen drei Fällen wird nehmlich angenommen, daß der gegebene Winkel A spitzig und der Seite BC entgegengesetzt ist. Sollte man aber bei der Prüfung der gegebenen Seite, $BC = \frac{BA \cdot \sin A}{r}$ gefunden haben; so wäre dieses ein Beweis, daß BC und BD zusammenfallen und das Dreieck ABC ein rechtwinkliges sein müßte.

Die oben gedachte Zweideutigkeit des Winkels bei C , hat, so lange sie nicht gehoben ist, auch auf die Bestimmung des dritten Winkels B und der dritten Seite b allemahl Einfluß. Die Rechnung gibt nehmlich AC oder AC' , je nachdem der eine oder der andere Werth des Winkels bei C oder C' gebraucht wird. In der Ausübung macht dieser Umstand keine Schwierigkeit, weil sich aus den damit

verknüpften Umständen leicht beurtheilen läßt, ob der Winkel bei C spitz oder stumpf sei.

Beispiel. Es sei in der obigen Aufgabe die Seite $a = 895^\circ$, $b = 623^\circ$ und der W. $A = 28^\circ 12'$; wie groß sind die beiden übrigen Winkel B und C und die dritte Seite $AC = b$? — Man suche nun aus der bei (I) gefundenen Gleichung den

$\angle C$; so ist diese Gleichung $\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$, durch Logarithmen ausgedrückt $\log \sin C = \log c + \log \sin A - \log a$, deren Berechnung auf folgende Art zu stehen kommt. Es ist

$$\log c = \log 895 = 2,9518230$$

$$\log \sin A = \log \sin 28^\circ 12' = \frac{9,6744485}{12,6262715}$$

$$\log a = \log 623 = 2,7944880$$

$\log \sin C = 9,8317835$. Allein der Sinus dieses Log. gehört so wohl zum $\angle C$ von $42^\circ 45'$ beinahe, als auch zu einem W. C' von $137^\circ 15'$. Nimmt man nun jenen Werth; so erhält der W. B aus (II) in der Aufl. eine Größe von $109^\circ 3'$, im andern aber, wenn $C = 137^\circ 15'$ wird, eine Größe von $14^\circ 33'$.

Die Gleichung bei III) $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ ist durch Logarithmen ausgedrückt $\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$. Es ist aber

$$\log a = \log 623 = 2,7944880$$

$$\log \sin B = \log \sin 70^\circ 51' = \frac{9,9755594}{12,7700274}$$

$$\log \sin A = \log \sin 28^\circ 12' = 9,6744485$$

$\log A C' = \log b = 3,0955789 = \log 1246$ beinahe, folglich $b = 1246^\circ$. Nimmt man aber für den W. B den andern Werth, so ändert sich in der obigen Rechnung der $\angle B$, folglich auch dessen Logarithme und es ist

$$\log a = \log 623 = 2,7944880$$

$$\log \sin B = \log \sin 14^\circ 33' = \frac{9,4000625}{12,1945505}$$

$$\log \sin A = \log \sin 28^\circ 12' = 9,6745485$$

$$\log A C' = \log b' = 2,5201020 = \log 331,2, \text{ folglich ist}$$

A C'

$AC' = b' = 331$. Ist aber die Seite $a = 856$, $c = 428$ und der W. $A = 39^\circ 46'$; so findet nach den oben gemachten Bemerkungen keine Zweideutigkeit Statt und die Berechnung dieses Beispiels vermittelt der Logarithmen ist folgende. Es ist die Gleichung bei (I) $\log \sin C = \log c + \log \sin A - \log a$, oder nach den gegebenen Zahlen $\log \sin C = \log 428 + \log \sin 39^\circ 46' - \log 856$. Man findet aber

$$\begin{aligned} \log c &= \log 428 = 2,6314438 \\ \log \sin A &= \log \sin 39^\circ 46' = \frac{9,8059510}{12,4373948} \\ \log a &= \log 856 = 2,9324738 \\ \log \sin C &= 9,5049210 = \log \sin 18^\circ 39' \text{ beinahe,} \\ \text{folglich } C &= 18^\circ 39'. \text{ Nun ist aus (II) } B = 180^\circ - (A + C) \\ &= 180^\circ - 58^\circ 25' = 121^\circ 35' \text{ und } \sin 121^\circ 35' = \sin 58^\circ 25' (10.). \end{aligned}$$

Die Gleichung bei (III) $b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}$ ist, durch Logarithmen ausgedrückt, $\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$ und nach den gegebenen Zahlen, $= \log 856 + \log \sin 58^\circ 25' - \log \sin 39^\circ 46'$. Man findet aber

$$\begin{aligned} \log a &= \log 856 = 2,9324738 \\ \log \sin B &= \log \sin 58^\circ 25' = \frac{9,9303781}{12,8628519} \\ \log \sin A &= \log \sin 39^\circ 46' = \frac{9,8059510}{3,0569009} = \log 1139, \text{ beinahe,} \\ \text{folglich } b &= 1139. \end{aligned}$$

§. 23.

Aufgabe. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreieckes, die dritte Seite nebst den beiden andern Winkeln zu finden.

Im $\triangle ABC$ (Fig. 8.) sind die Seiten b, c und der W. A gegeben und aus diesen Stücken sucht man die beiden übrigen Winkel B und C und die dritte Seite $a = BC$. Nach (20.) verhält sich

$b:c = \sin B : \sin C$, hieraus folgt

$$\begin{aligned} b+c : b-c &= \sin B + \sin C : \sin B - \sin C; \text{ allein es verh. sich} \\ \sin B + \sin C : \sin B - \sin C &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B+C) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-C). \text{ Also} \\ b+c : b-c &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B+C) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-C). \end{aligned}$$

Aus den drei ersten bekannten Gliedern dieser Proportion findet man demnach das vierte d. i. $\frac{1}{2}(B-C)$.

$$\text{Es ist aber } \frac{1}{2}(B+C) = \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}A.$$

Daher ist $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(B+C) = \operatorname{tang}(90^\circ - \frac{1}{2}A) = \cot \frac{1}{2}A$ (8.). Setzt man nun diesen Werth anstatt $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(B+C)$ in die obige Proportion; so erhält man $b+c : b-c = \cot \frac{1}{2}A : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(B-C)$. Aus der halben Summe und Differenz dieser beiden Winkel, findet man durch deren Addition nach (16.) den größern Winkel B, und durch deren Subtraction den kleinern A. Kennt man nun die Winkel, so kann man die dritte Seite a durch die Anwendung des Satzes (20.) leicht berechnen.

Beispiel. Wie groß sind im $\triangle ABC$ die beiden Winkel B und C nebst der dritten Seite $BC = a$, wenn die Seite $AB = c = 849^\circ$; $AC = b = 1800^\circ$ und der W. A $= 56^\circ 32'$ beträgt?

Nach den Vorschriften der Aufl. ist die Proportion, nach welcher sich $b+c : b-c = \cot \frac{1}{2}A : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(B-C)$ verhält, d. i. durch die geg. Zahlen ausgedrückt

$$1800 + 849 : 1800 - 849 = \cot \frac{1}{2}(56^\circ 32') : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(B-C) \text{ oder} \\ 2649 : 951 = \cot 28^\circ 16' : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(B-C). \text{ Folglich ist}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(B-C) = \frac{951 \cdot \cot 28^\circ 16'}{2649} \text{ oder durch Log. ausgedrückt, ist}$$

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(B-C) = \log 951 + \log \cot 28^\circ 16' - \log 2649.$$

Es ist aber

$$\log(b - c) = \log 951 = 2,9781805$$

$$\log \cot \frac{1}{2}A = \log \cot 28^{\circ}16' = \frac{10,2694646}{13,2476451}$$

$$\log(b + c) = \log 2649 = 3,4230820$$

$$\log \tan \frac{1}{2}(B - C) = 9,8245631 = \log \tan 33^{\circ}43'$$

beinahe, folglich $\frac{1}{2}(B - C) = 33^{\circ}43'$. Nun war aber $\frac{1}{2}(B + C) = 61^{\circ}44'$, folglich ist der größere W. $B = \frac{1}{2}(B + C) + \frac{1}{2}(B - C) = 61^{\circ}44' + 33^{\circ}43' = 95^{\circ}27'$ und der kleinere $C = \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(B - C) = 61^{\circ}44' - 33^{\circ}43' = 28^{\circ}1'$.

Aus diesen Winkeln kann man nun auch die Seite a berechnen und zwar aus der Proportion, nach welcher $\sin C : \sin A = c : a$, folglich ist $a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C}$, oder durch Logarithmen ausgedrückt, ist $\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C$, oder nach den gegebenen und gefundenen Stücken $\log a = \log 849 + \log \sin 56^{\circ}32' - \log 28^{\circ}1'$. Es ist aber

$$\log c = \log 849 = 2,9289077$$

$$\log \sin A = \log \sin 56^{\circ}32' = \frac{9,9212737}{12,8501814}$$

$$\log \sin C = \log \sin 28^{\circ}1' = 9,6718468$$

$$\log a = 3,1783346 = \log 1507 \text{ beinahe,}$$

folglich $a = BC = 1507$. Diese Seite würde auch gefunden sein, wenn man anstatt des W. C und der Seite c , den W. B und die Seite b genommen und a auf dieselbe Art daraus hergeleitet hätte.

II) Es gibt von dieser Aufgabe mehrere Auflösungen, deren ich in meinen *N. der eb. Tr.* fünf angeführt habe. Bisweilen verlangt man die Winkel nicht, sondern man wünscht nur die dritte Seite aus den gegebenen Stücken zu berechnen. Weil Anfänger sich gemeinlich mit einigen Sätzen des Eukl. bekannt gemacht haben; so lege ich bei dieser Aufl. den 15ten Satz aus dem II. Buche zum Grunde. Es sei (Fig. 10.) das $\triangle ABC$, in welchem die Seiten $AB = c$, $AC = b$ und der Winkel A bekannt sind und woraus nun die dritte Seite $a = BC$ gefunden werden soll.

Läßt man nun aus B einen Perp. BD auf AC lothrecht herab;
so ist nach dem vorhin angeführten Satze

$$AC^2 + AB^2 = 2AC \cdot AD + BC^2 \text{ oder}$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AD \text{ oder}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AD. \text{ Es ist aber}$$

$$AD = AB \cdot \cos BAC = c \cos A \text{ (20. Zus. 2.)}$$

$$\text{Folglich } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}.$$

Beispiel. 1. Wie groß ist die dritte Seite a, worin die beiden andern $b=10$, $c=16$ und der von b und c eingeschlossene W. A, 60° beträgt? — Ist $\angle A = 60^\circ$, so ist $\cos A = \frac{1}{2}$, folglich $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$ in Zahlen, $= \sqrt{100 + 256 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{356 - 160} = \sqrt{196} = 14$.

Beispiel. 2. Wie groß ist die dritte Seite a, wenn die Seite $b = 375,92^\circ$, $c = 529,6785^\circ$ und $A = 35^\circ 36'$ gefunden worden ist? — Hier ist $a = \sqrt{[(375,92)^\circ]^2 + (529,6785)^\circ^2 - 2 \cdot 529,6783 \cdot 375,92 \cos 35^\circ 36'} = \sqrt{141315,8464089991} = 375,9200$.

Zusatz 1. Wäre A ein stumpfer Winkel, so ist $AD = -c \cdot \cos A$, folglich würde alsdann $a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}$ sein.

Zusatz 2. Wären die drei Seiten bekannt, so könnte man daraus die Winkel berechnen und es ist
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Zusatz 3. Wäre $\cos A = 0$; so würde $\angle A = R$ und der Theil $2bc \cos A = 0$; folglich bliebe $a^2 = b^2 + c^2$.

Zusatz. 4. Es ist $\tan C = \frac{BD}{DC} = \frac{c \cdot \sin A}{b - AD} = \frac{c \cdot \sin A}{b - c \cos A}$. Es ist aber $\cot C = \frac{1}{\tan C} = 1 : \frac{c \cdot \sin A}{b - c \cos A}$

$$= \frac{b - c \cos A}{c \sin A} = \frac{b}{c \sin A} - \cot A. \quad \text{Aus gleichen}$$

Gründen ist $\cot B = \frac{c}{b \sin A} - \cot A$, wo aber $\cot A$

das Vorzeichen $+$ erhält, wenn $A > 90^\circ$ ist.

Anmerkung 1. Dieser Ausdruck ist besonders zur Berechnung der Winkel brauchbar, wenn nur das Verhältniß der beiden Seiten durch Logarithmen gegeben ist und vermittlest solcher Tafeln, welche bis auf 100000 berechnet sind, findet man den Werth des Nenners in 100000 Theilen und noch genauer. (Man vergl. Kästners geom. Abhandl. I. Samml. S. 155.)

Anmerkung 2. In der Astronomie werden die beiden Winkel B und C außer dem dritten A nur oft durch das Verhältniß der diesen Winkel A einschließenden Seiten, wie in dem Falle, wenn man bloß die Logarithmen dieser Seiten hat, bestimmt. Die Gleichheit der homologen Winkel in zweien verschiedenen Dreiecken, gibt zwar nicht die Größe derselben, wohl aber ihre Gestalt an. Dazu aber wird nur erfordert, daß in den gedachten Dreiecken ein Winkel von gleicher Größe angetroffen werde, die diesen Winkel einschließenden Seiten aber proportional sein müssen. Aus diesen Bestimmungen ergibt sich nun die Ähnlichkeit der Dreiecke, und hieraus die Gleichheit der beiden übrigen Winkel B und C. Diese Winkel können nun durch das Verhältniß der Seiten vermittlest folgender Vorschrift auf eine sehr einfache Art gefunden werden.

Man bestimme durch den Quotienten, welcher aus der Division der kleinern Seite durch die größere entsteht, eine Tangente, so ist alsdann das Product aus $\tan(45 - \beta)$ in die Cotangente des gegebenen Winkels, der $\tan \frac{1}{2}(B - C)$ gleich; oder es ist $\tan \frac{1}{2}(B - C) = \tan(45 - \beta) \cot \frac{1}{2} A$.

Die Ausführung dieser Vorschriften, werden folgende Ueberlegungen deutlich machen. Zuerst bemerke man, daß $\frac{c}{b}$ ein echter Bruch, und also kleiner als 1 ist. Die Tangenten der von 0 bis 45° wachsenden Bogen, sind alle zwischen den Grenzen von 0 bis 1 enthalten. Unter diesen wird auch ein solcher Bogen vorkommen, dessen Tangente $= \frac{c}{b}$ ist. Bezeichnet man nun diesen Bogen mit β , so ist

$$\tan \beta = \frac{c}{b}.$$

Dann lege man die in (I) gefundene Proportion zum Grunde, nach welcher sich verhält

$$b + c : b - c = \tan \frac{1}{2}(B + C) : \tan \frac{1}{2}(B - C) \text{ od. das erste Verh.: } b$$

$$1 + \frac{c}{b} : 1 - \frac{c}{b} = \tan \frac{1}{2}(B + C) : \tan \frac{1}{2}(B - C) \text{ v. d. 1ste V.: } 1 + \frac{c}{b} \text{ gibt}$$

$$1 : \frac{1 - \frac{c}{b}}{1 + \frac{c}{b}} = \tan \frac{1}{2}(B + C) : \tan \frac{1}{2}(B - C); \quad \frac{c}{b} \text{ für } \tan \beta \text{ gesetzt gibt}$$

$$1 : \frac{1 - \tan \beta}{1 + \tan \beta} = \tan \frac{1}{2}(B + C) : \tan \frac{1}{2}(B - C). \text{ Nun suche}$$

man den Werth von $\frac{1 - \tan \beta}{1 + \tan \beta}$ aus (81. III). Hiernach

$$\text{ist } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}. \text{ Es sei aber } \alpha = 45^\circ, \text{ so}$$

$$\text{ist } \tan(45^\circ - \beta) = \frac{\tan 45^\circ - \tan \beta}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan \beta}. \text{ Weil aber } \tan 45^\circ$$

$$= 1 \text{ ist; so hat man } \tan(45^\circ - \beta) = \frac{1 - \tan \beta}{1 + \tan \beta}. \text{ Nach}$$

$$\text{dem Vorhergehenden ist aber } \frac{1 - \tan \beta}{1 + \tan \beta} = \frac{1 - \frac{c}{b}}{1 + \frac{c}{b}} =$$

$$\frac{b - c}{b + c}; \text{ hier aber ist } \frac{1 - \tan \beta}{1 + \tan \beta} = \tan(45^\circ - \beta). \text{ Da}$$

her ist $\tan(45 - \beta) = \frac{b - c}{b + c}$. Aus der ersten Proportion

aber folgt, daß

$$\frac{b - c}{b + c} = \frac{\tan \frac{1}{2}(B - C)}{\tan \frac{1}{2}(B + C)}. \text{ Folglich } = \tan(45 - \beta) \text{ sei. Nun war}$$

$$1 - \frac{c}{b} = \tan \frac{1}{2}(B + C) : \tan \frac{1}{2}(B - C) \text{ oder}$$

$$1 : \frac{b - c}{b + c} = \tan \frac{1}{2}(B + C) : \tan \frac{1}{2}(B - C) \text{ oder}$$

$$1 : \tan(45 - \beta) = \tan \frac{1}{2}(B + C) : \tan \frac{1}{2}(B - C), \text{ folglich}$$

$$\tan \frac{1}{2}(B - C) = \tan(45 - \beta) \times \tan \frac{1}{2}(B + C).$$

Da aber $B + C + A = 180^\circ$, folglich $B + C = 180^\circ - A$ und $\tan \frac{1}{2}(B + C) = \tan(90^\circ - \frac{1}{2}A) = \cot \frac{1}{2}A$. Also $\tan \frac{1}{2}(B - C) = \tan(45 - \beta) \cdot \cot \frac{1}{2}A$.

Nimmt man nun hier, wie im vorigen Beispiele, $b = 1800$, $c = 849$; so berechne man hieraus erst β aus dem angeführten Ausdruck $\tan \beta = \frac{c}{b}$, ziehe β von 45° ab, und leite hieraus $\tan \frac{1}{2}(B - C) = \tan(45 - \beta) \cdot \cot \frac{1}{2}A$ mit Rücksicht auf den Halbmesser der Tafeln auf folgende Art her. Es ist

$$\log c = \log 849 + 10 = 12,9289077$$

$$\log b = \log 1800 = 3,2552725$$

$$\text{so ist } \log \tan \beta = 9,6736352 = \log 23^\circ 15' \text{ beinahe, folglich } \beta = 23^\circ 15', \text{ also ist } (45^\circ - \beta) = 21^\circ 45'.$$

Es ist aber

$$\log \tan(45^\circ - \beta) = \log \tan 21^\circ 45' = 9,5551388$$

$$\text{und } \log \cot \frac{1}{2}A = \log \cot 28^\circ 16' = 10,2694646$$

$$19,8246034$$

$$10,0000000$$

$$\log \tan \frac{1}{2}(B - C) = 9,8246034 =$$

$\log \tan 33^\circ 43'$, folglich $\frac{1}{2}(B - C) = 33^\circ 43'$. Hieraus leitet man nun wie bei der vorigen Auflösung die beiden B , und die dritte Seite her.

Anmerkung 3. Bei der Entwicklung des obigen Ausdruckes

hätte man auch den Quotienten $\frac{b}{c} = \tan \alpha$ setzen können;

allein in diesem Falle gehörte die Tangente zu einem der von 45 bis 90 Grade wachsenden Bogen. In der gedachten Absicht aber muß man bemühet sein, den Winkel α oder β so genau wie möglich zu erhalten. Wenn aber die Bogen unter und über 45° um gleiche Theile zunehmen; so wachsen die Tangenten der ersten weit schneller, als der andern und in so fern fände man β vermittlest der Proportionaltheile genauer als E . Man vergl. hiermit die 19te der Kästnerschen geometr. Abhandlungen in der 1. Saml. S. 153 16. Das β gibt das von Kästnern gebrauchte D und α das daselbst von Rob. Anderson eingeführte E, nach welchem $\tan \frac{1}{2}(B-C) = \tan(E-45^\circ)$. $\tan \frac{1}{2}(B+C)$.

§. 24.

Aufgabe. Aus den drei Seiten eines Dreieckes, die Winkel durch Rechnung zu finden.

Es sei ABC (Fig. 11.) das Dreieck mit den gegebenen Seiten $AB = c$, $BC = b$, $AC = a$; so sollen daraus die Winkel A, B und C gefunden werden.

I) Man beschreibe aus der Spitze, des der größten Seite gegenüberliegenden W., mit der kleinsten Seite BC einen Kreis, welcher in der Entfernung von BC durch die Punkte C, E und F läuft und also die Seiten AB und AC in E und F durchschneidet. Nun verhält sich, wenn man AB bis an den Umfang in G verlängert $AC : AG = AF : AE$. Dann lasse man aus B die BD senkrecht auf AC herab, so wird CE als eine Sehne des vorher beschriebenen Kreises durch BD halbiert und ABC in zwei rechtwinklige Dreiecke BDA

und BDC zerfällt. Nach der Bezeichnung ist
 $BG = BF = BC$, folglich

$AG = AB + BG = AB + BC = c + a$ und
 $AF = AB - BF = AB - BC = c - a$. Schreibt
man nun diese Ausdrücke in die obige Proportion an
die Stelle der Glieder AF und AG; so erhält man

$$c : c + a = c - a : AE$$

$$AE = \frac{c + a \cdot c - a}{c} = \frac{c^2 - a^2}{c}. \text{ Durch AE hat}$$

man nun auch die Sehne $EC = AC - AE$, folglich
auch $ED = DC = \frac{1}{2}EC$ und $AD = AE + ED$
gefunden.

Sind nun die gedachten Stücke berechnet; so kann
man daraus die Winkel A und C herleiten. Es ist
nehmlich $\cos A = \frac{AD}{AB}$, $\cos C = \frac{CD}{CB}$ (20. Zus. 3. bei 2.)
und $B = 180 - (A + C)$.

Beispiel. Es sei $a = 116^\circ$, $b = 280^\circ$ und $c = 250^\circ$,
wie groß sind die Winkel A, B und C? — Hieraus erhält man

$$c + a = 346, c - a = 114, \text{ folglich ist } AE = \frac{346 \times 114}{280} =$$

$$140,87, \text{ also } EC = 280 - 140,87 = 139,12, ED =$$

$$DC = \frac{1}{2}EC = 69,56 \text{ und } AD = 140,87 + 69,56 = 210,43.$$

$$\text{Folglich ist } \cos A = \frac{210,43}{250} \text{ und } \cos C = \frac{69,56}{250}; \text{ oder durch Log}$$

$$\text{arithmen ist } \log \cos A = \log 210,43 + 10 - \log 250 \text{ und } \log \cos C$$

$$= \log 69,56 + 10 - \log 250. \text{ Es ist aber}$$

$$1) \log 210,43 = \frac{2,3231077}{10,} \text{ und } 2) \log 69,56 = \frac{1,8423596}{10,}$$

$$\log 250 = \frac{2,3979400}{10,}$$

$$\log \cos A = 9,9613799$$

$$= \lg 22^\circ 58' \text{ nahe,}$$

$$\text{folglich } A = 22^\circ 58'.$$

$$\log 250 = \frac{2,3979400}{10,}$$

$$\log \cos C = 9,4806318$$

$$= \lg 72^\circ 24' \text{ nahe,}$$

$$\text{folglich } C = 72^\circ 24'.$$

Also $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (22^\circ 58' + 72^\circ 24') = 180^\circ - 95^\circ 22' = 84^\circ 38'.$

II) Diese Aufgabe lässt sich auch auf folgende Art auflösen. Es ist aus (23. II) Zus. 1.)

$$\cos A = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}. \quad \text{Es ist aber}$$

$$\sin A = \sqrt{(1 - \cos A^2)} \text{ (Zus. 11.)} = \sqrt{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}.$$

$$\text{Nun ist } 1 + \cos A = 1 + \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) =$$

$$\frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}. \quad \text{Setzt man nun}$$

$$b+c = m, \text{ folglich } (b+c)^2 = m^2; \text{ so ist}$$

$$1 + \cos A = \frac{m^2 - a^2}{2bc} = \frac{m+a \cdot m-a}{2bc}. \quad \text{Schreibt man aber}$$

$$b+c \text{ wieder für } m, \text{ so ist}$$

$$1 + \cos A = \frac{b+c+a \cdot b+c-a}{2bc}, \quad \text{Es ist aber auch}$$

$$1 - \cos A = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}.$$

$$\text{Setzt man nun } b-c = n, \text{ so ist}$$

$$1 - \cos A = \frac{a^2 - n^2}{2bc} = \frac{a+n \cdot a-n}{2bc}. \quad \text{Schreibt man nun}$$

$$b-c \text{ für } n; \text{ so ist}$$

$$1 - \cos A = \frac{a+b-c \cdot a-b+c}{2bc}, \text{ folglich ist}$$

$$1 + \cos A \cdot 1 - \cos A = \frac{a+b+c \cdot a+b-c \cdot a+c-b \cdot b+c-a}{4b^2c^2}$$

$$\text{und } \sqrt{(1 + \cos A \cdot 1 - \cos A)} =$$

$$\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2bc}}. \text{ Nun}$$

$$\text{war } \sin A = \sqrt{(1 + \cos A \cdot 1 - \cos A)} = \sqrt{(1 - \cos A^2)}.$$

$$\text{Also ist } \sin A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{4b^2c^2}.$$

So findet man auch

$$\sin C = \frac{\sqrt{(a+b+c \cdot a+b-c \cdot a+c-b \cdot b+c-a)}}{2ab}. \text{ Setzt}$$

man nun $N = \sqrt{(a+b+c \cdot a+b-c \cdot a+c-b \cdot b+c-a)}$,
so ist die log. Gleichung des ersten Ausdruckes, nemlich
 $\log \sin A = \frac{1}{2} \log N + 20 - (\log 2 + \log b + \log c)$
und des andern nemlich $\log \sin B = \frac{1}{2} \log N + 20 -$
 $(\log 2 + \log a + \log b)$.

Beispiel. Wie groß ist der Winkel A, wenn die Seite a = 400°, b = 745° und c = 680° gefunden worden ist? — Es ist a + b + c = 1825, b + c - a = 1025, a + c - b = 335 und a + b - c = 465. Man findet aber

$$\log(a+b+c) = \log 1825 = 3,2612629$$

$$\log(a+b-c) = \log 465 = 2,6674530$$

$$\log(a+c-b) = \log 335 = 2,5250448$$

$$\log(b+c-a) = \log 1025 = 3,0107239$$

$$11,4644846$$

$$20,0000000$$

$$31,4644846$$

$$2) 15,7322423$$

$$\log 2 = 0,3010300$$

$$\log b = \log 745 = 2,8721563$$

$$\log c = \log 680 = 2,8325089$$

$$\log 2 + \log b + \log c = 6,0056952$$

$$\log \sin A = 9,7265471 = \log \sin 32^\circ 11' \text{ bei}$$

nahe, folglich ist der W. A = 32° 11'.

Zusatz. Wird in einem gleichschenkligen Dreiecke der Winkel an der Spitze gesucht; so sind die beiden Schen-

fel b und c einander gleich d. i. $b = c$, folglich ist

$$\text{alsdann } \sin A = \frac{\sqrt{c(2b + a) \cdot (2b - a)a^2}}{2b^2} =$$

$$\frac{a \sqrt{(2b + a) \cdot (2b - a)}}{2b^2} = \frac{a \sqrt{4b^2 - a^2}}{2b^2}.$$

Anmerkung. Ohne Anwendung der Logarithmen kann man den Winkel A auch aus dem obigen Ausdrucke $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ berechnen; allein der vorher gefundene Ausdruck gibt eine sehr einfache Formel, sowohl den Flächeninhalt der Dreiecke als der geradlinigen Figuren aus ihren Umfangs- und Diagonallinien zu berechnen.

Vierte Abtheilung.

I) Von der Anwendung der ebenen Trigonometrie auf die Höhenmessung etc.

§. 25.

Das ganze für die Ausübung so wichtige Verfahren, Höhen und unzugängliche Entfernungen, entweder durch Zeichnungen oder durch Rechnung anzugeben, beruhet lediglich auf den geometrischen Grundsätzen, nach welchen so viele Theile eines Dreieckes oder so viele Seiten und Winkel an dem Umfange einer geradlinigen Figur ausgemessen werden, als zu deren Bestimmung nöthig sind. Die übrigen Messungen der Seiten oder Winkel, die dann noch vorgenommen werden, dienen nur zur Prüfung und Berichtigung der vollzogenen Vermessung. Um nun in jedem besondern Falle, den Zusammenhang der zu einem gewissen Zwecke auszumessenden Gegend leichter zu übersehen, entwirft man sich aus freier Hand, eine einfache Zeichnung, nach welcher man den Gang der Vermessung einrichten und anordnen kann. Diejenigen Fälle, welche bei der Höhenmessung am häufigsten vorkommen, lassen sich in folgende Aufgaben zusammenfassen.

Aufgabe. Die Höhe eines Gegenstandes PR durch Rechnung zu finden, wenn man auf der Horizontalfläche, worauf PR steht, in der Richtung von A nach R eine Grundlinie AR messen und den Gegenstand von A aus übersehen kann.

Man messe die Länge der Stationslinie $AR = CQ$ (Fig. 12.) und setze diese $= b$, dann nehme man den $\angle PCQ = BCD$ und setze ihn α ; so hat man im rechth. $\triangle PCQ$ die eine Cathete CQ und den an CQ liegenden spitzen $\angle \alpha$. Daraus ergibt sich die Höhe $PQ = b \tan \alpha$ (20. Zus. 3.). Hierzu rechne man nun noch die Höhe des Instruments $AC = QR$; so hat man daraus die ganze Höhe $PR = PQ + QR$. Drückt man die gefundenen Werthe für $PQ = b \tan \alpha$ durch Logarithmen aus, so erhält man $\log PQ = \log b + \log \tan \alpha - 10$.

Beispiel. Wie groß ist die Höhe PR, wenn die gemessene Grundlinie $b = 785'$ und der $\angle \alpha = 28^\circ 54'$ gefunden worden ist? — Man hat alsdann $\log PQ = \log 785 + \log 28^\circ 54' - 10$. Es ist aber

$$\begin{array}{r} \log 785 = 2,8948696 \\ \log \tan 28^\circ 54' = 9,7419624 \\ \hline 12,6368320 \\ 10, \end{array}$$

$\log PQ = 2,6368320 = \log 433,54$, folglich $PQ = 433,54'$ wozu für die Höhe des Instruments QR noch eine Größe von $5 - 4'$ gesetzt werden muß.

Zusatz. Fällt der Schatten eines Gegenstandes auf die Horizontalfläche, so kann man aus dessen Länge und der Sonnehöhe, die Höhe des Gegenstandes berechnen. Stellt in der (Fig. 6.) $BC = a$ die gesuchte Höhe des Gegenstandes, der W. BAC die Höhe der Sonne

über dem Horizont und $AC = b$ der Länge des Schattens vor, wovon die beiden letzten Stücke gemessen sind; so ist auch hier $BC = a = b \cdot \tan A$, oder vermittelst der Logarithmen $\log a = \log b + \log \tan A - 10$.

Beispiel. Wie groß ist die Höhe $BC = a$, wenn der W. $A = 39^\circ 32'$ und die Schattenlänge $AC = b = 392$ gefunden worden ist? — Es ist

$$\begin{array}{rcl} \log b = \log 392 & = & 2,5932861 \\ \log \tan A = \log \tan 39^\circ 32' & = & 9,9166192 \\ \hline & & 12,5099053 \\ & & 10, \\ \hline \log a & = & 2,5099053 = \log 323,5 \text{ beinahe,} \\ \text{folglich ist } a & = & 323,5. \end{array}$$

§. 26.

Aufgabe. Die Höhe eines Gegenstandes zu messen, wenn man auf der Horizontalfläche, worauf derselbe steht, wegen vorkommender Hindernisse, von keiner Seite die Standlinie bis an den Fuß des Gegenstandes fortsehen kann.

Wird man durch einen Fluß oder See oder irgend ein anderes Hinderniß abgehalten, die Messung von A bis Q (Fig. 13.) vorzunehmen; so messe man sich nur einen Theil der geraden Linie von D nach R etwa DE als Grundlinie ab, nehme in A den W. PAQ, in B den W. PBQ, welcher den W. ABP zu 180° ergänzt; so hat man den W. $APB = 180^\circ - (PAB + PBA)$ und im $\triangle ABP$ sind außer der einen Seite B alle Winkel bekannt, woraus sich nun die Seite BP berechnen läßt. Denn setzt man $DE = AB = b$ und bezeichnet man den W. BAP durch α , den W. ABP durch β ; so ist

$\angle APB = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, folglich $\sin APB = \sin(\alpha + \beta)$ (10.) und es verhält sich

$PC : AB = \sin BAP : \sin APB$ (20.) oder

$$PB : b = \sin \alpha : \sin(\alpha + \beta).$$

Folglich ist $PB = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. Aus PB und dem W.

PBQ findet man nun im rechth. $\triangle PQB$ die Höhe $PQ = PB \cdot \sin \beta$. Schreibt man nun hier anstatt PB den vorhin dafür gefundenen Werth; so erhält man $PQ = \frac{b \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ und $PR = AD = QR + \frac{b \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Beispiel. Wie groß ist die Höhe PR, wenn $b = 872^\circ$, $\angle \alpha = 15^\circ 38'$, der $\angle \beta = 28^\circ 16'$ gefunden worden ist und die Höhe des Instruments $4'$ beträgt? — Hier ist also $PR = 4' + \frac{872^\circ \sin 15^\circ 38' \cdot \sin 28^\circ 16'}{\sin 43^\circ 54'}$ oder vermitteltst der Logarithmen ist

$$PQ = \log 872^\circ + \log \sin 15^\circ 38' + \sin \log 28^\circ 16' - (10 + \log \sin 43^\circ 54'). \text{ Man findet aber}$$

$$\log b = \log 872^\circ = 2,9405165$$

$$\log \sin \alpha = \log \sin 15^\circ 38' = 9,4305267$$

$$\log \sin \beta = \log \sin 28^\circ 16' = 9,6753896$$

$$22,0464328$$

$$10,0000000$$

$$\log \sin(\alpha + \beta) = \log \sin 43^\circ 54' = 9,8409850$$

$$19,8409850$$

$$\log PQ = 2,2054478 = \log 160,49,$$

$$\text{folglich } PR = 160,49^\circ + 4' = 160,89^\circ.$$

Anmerkung. Zu diesen Aufgaben werde ich noch einige practische Bemerkungen hinzufügen. Die Theorie kennt bei der Auflösung dieser Aufg. keine Schwierigkeit, allein in der Ausübung hat man stets darauf zu sehen, daß bei der vorgenommenen Messung die Winkel die gehörige Schärfe

Schärfe erhalten und nicht zu spitz oder zu stumpf ausfallen. Am besten lassen sich die Fehler bei den Winkeln gleichseitiger oder auch solcher Dreiecke vermeiden, bei welchen die gesuchte Seite, so groß als die Standlinie ist, oder wo die beiden Winkel an der Standlinie einander gleich sind. Ich weiß, die Wahl dieser Linien und Winkel hängt nicht von unserer Willkühr, sondern von den mannigfaltigen Umständen ab, durch welche der bei der Vermessung einzuschlagende Weg, gleichsam vorgeschrieben wird. Allein mancherlei Hindernisse lassen sich durch eine zweckmäßige Benützung der Umstände vermeiden, und es ist ausgemacht, daß die Winkel desto unzuverlässiger werden, je mehr man sich dabei von den obigen Vorschriften entfernt. Kleine Winkel aber lassen allemahl die Zuverlässigkeit der daraus hergeleiteten Angaben bezweifeln, so sehr man auch mit ihrer Genauigkeit prahlen mag. Auch muß man es bei entscheidenden Messungen, wo möglich, nie unterlassen, außer den zwei gemessenen Winkeln, auch den dritten durch wirkliche Messung anzugeben.

Damit nun die zu messenden Winkel in den angeführten Aufgaben nicht zu klein ausfallen, so muß man 1) darauf sehen, daß man sich nicht zu weit von dem Gegenstande, dessen Höhe bestimmt werden soll, entferne und 2) daß man sich nicht eine zu kleine Standlinie abmesse. Reicht alle Vorsicht nicht zu, gar zu kleine Winkel zu vermeiden; so bediene man sich lieber einer der allgemeineren Methoden, die in den folgenden Aufgaben vorgetragen werden sollen.

Die Höhenmessungen durch den von den Gegenständen geworfenen Schatten, sind zwar auf mancherlei Art auszuführen, allein die Angaben sind theils, wegen der Horizontaltafel, theils wegen des Schattens selbst, der auf der Erdoberfläche nicht scharf abgeschnitten wird, sondern durch den Halbschatten nach und nach ins Helle übergeht, unsicher und unzuverlässig. Falls man aber doch eine solche Methode wählen wollte; so würden die Mittagsstunden dazu am besten sein. Beträgt der Winkel, welcher das Maß der Sonnenhöhe

ausmacht 45° , so ist der Schatten mit dem Gegenstande von gleicher Größe. Merkwürdig bleibt dieses Verfahren wohl deshalb, weil die ersten Messungen nach selbigem geschehen sind. Versiel Thales zuerst auf die Eigenschaften des gleichschenkligen Dreieckes; so mag er auch auf die vorhin gedachte Art die Höhen der Pyramiden in Aegypten angegeben haben.

Die gewöhnlichsten winkelmessenden Instrumente sind, die Bouffole, der Meßtisch, die Zollmannsche Scheibe mit oder ohne Kippregel, das Astrolabium u. m. a. An und für sich kann man dieses oder jenes Instrument nicht für verwerflich oder brauchbar und zweckmäßig erklären. Plan und Umstände schreiben dem Feldmesser, bei welchem man eine richtige Kenntniß und Beurtheilung seiner Instrumente vorsetzen darf, die Auswahl derselben vor. Bei den Höhenmessungen und überall, wo es auf Rechnung ankommt, verdient das Astrolabium wohl den Vorzug, wenn es gut gearbeitet, nicht aus einem zu kleinen Halbmesser besteht, richtig eingetheilt, mit einem Nonius, Fernrohr und andern Vorrichtungen versehen ist, die zur Vollkommenheit desselben und zur Bestimmung der kleinern Abtheilungen der Grade dienen. Die Englischen Werkzeuge dieser Art unterscheiden sich dadurch, daß man selbst bei einem kleinen Halbmesser des Instruments, auf eine genaue und richtige Eintheilung rechnen kann.

§. 27.

Aufgabe. Die Höhe eines Gegenstandes zu berechnen, wenn man die Stationspunkte oder die Standlinie auf der Horizontalfläche nicht in einer Richtung annehmen kann, daß sie mit der lothrechten Höhe in einerlei Vertical-ebene liegt.

Es sei PQ (Fig. 14.) die gesuchte Höhe; so messe

man sich auf der Horizontalfläche die Standlinie $LM = b$ ab, und nehme mit dem winkelmessenden Instrument, die beiden Horizontalwinkel $QLM = \gamma$ und $QML = \beta$. Aus einem der beiden Punkte L oder M messe man den Erhebungswinkel $PLQ = \alpha$; so hat man durch diese Messungen diejenigen Stücke, welche zur Berechnung der Höhe PQ erforderlich sind. Im $\triangle LQM$ ist der W. $QLM = 180^\circ - (\beta + \gamma)$, folglich $\sin LQM = \sin(\beta + \gamma)$ (10.). Nun verhält sich im gedachten Dreiecke $LQ : LM = \sin LMQ : \sin QLM$ (20.) oder

$$LQ : b = \sin \beta : \sin(\beta + \gamma)$$

$$LQ = \frac{b \cdot \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}. \text{ Es ist aber im rechth. } \triangle LPQ$$

$PQ = LQ \cdot \operatorname{tg} \alpha$ od. $\sin LQ$ in den vor. Werth gesetzt, gibt

$$PQ = \frac{b \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

Beispiel. Wie groß ist die Höhe PQ, wenn die Grundlinie $LM = b = 3964'$, der W. $QLM = \beta = 65^\circ 32'$, der W. $QML = \gamma = 96^\circ 42'$ und der W. $PLQ = 16^\circ 27'$ gefunden worden ist? — Es ist nach der obigen Gleichung $PQ =$

$$\frac{3964 \cdot \operatorname{tg} 16^\circ 27' \cdot \sin 65^\circ 32'}{\sin 135^\circ 14'} = \frac{3964 \cdot \operatorname{tg} 16^\circ 27' \cdot \sin 65^\circ 32'}{\sin 44^\circ 46'}$$

oder mittelst der Logarithmen hat man, $\log PQ = \log 3964 + \log \operatorname{tg} 16^\circ 27' + \log \sin 65^\circ 32' - (10 + \log \sin 44^\circ 46')$.

Man findet aber

$$\begin{aligned}\log b &= \log 3964 = 3,5674969 \\ \log \tan \alpha &= \log \tan 16^{\circ} 27' = 9,4702112 \\ \log \sin \beta &= \log \sin 65^{\circ} 32' = 9,9591380 \\ &22,9968461 \\ \log \sin (\beta + \gamma) &= \log 44^{\circ} 46' = 19,8477091 \\ \log PQ &= 3,1491370 = \log 1409,73, \\ \text{folglich ist } PQ &= 1409,73^{\circ}.\end{aligned}$$

Anmerkung. Diese Auflösung ist zwar da anwendbar, wo man neben dem Thurm oder Berge *ic.* eine Horizontalsfläche finden kann, worin zugleich der tiefste Punkt des zu messenden Gegenstandes liegt; allein dieser Fall wird durch die Lage des Terrains und durch die Localität der Umstände sehr beschränkt und daher nicht häufig vorkommen. Daher wird man sich entweder eine schief liegende Grundlinie abmessen, oder zu andern Hülfsmitteln seine Zuflucht nehmen müssen. Die Höhenmessung hat ihre eigene Schwierigkeiten, besonders muß man alle Aufmerksamkeit auf den Elevationswinkel der in der Regel immer nur klein ist, wenden, und ein Fehler von einer Minute und viel weniger, bringt einen wesentlichen Unterschied in der Bestimmung der ganzen Höhe hervor. Und jener Fehler kann theils durch zu kleine Instrumente, welche zu andern ähnlichen Vermessungen brauchbar sein können, theils dadurch, daß die Beobachtung bei der oft zitternden Bewegung, welche die Gegenstände auf der Erde, wegen der Dünste der Atmosphäre und auf andere Arten erleiden, erschwert wird, so leicht verursacht werden. Selbst die leiseste Bewegung während des Gebrauches des Instrumentes, bei dessen Aufstellung, Richtung *ic.* kann, nach einer am Ende unterlassenen Prüfung, bedeutende Fehler zur Folge haben.

§. 28.

Aufgabe. Die Höhe eines Gegenstandes zu finden, dessen Fuß durch Mauern, Gebüsche *ic.*

verdeckt ist, dessen Spitze man aber aus einem Standpuncte sehen kann, der mit dem Fuß des gedachten Gegenstandes in derselben Horizontalfläche liegt.

Es sei (Fig. 15.) PQ die zu messende Höhe, Q durch andere davorliegende Gegenstände verdeckt, nun weiß man, daß der Stationspunct A mit Q in derselben Ebene liegt. Nun messe man sich eine Standlinie $AB = b$ von deren andern Ende B man die Spitze P auch sehen kann, ab. Hierauf nehme man aus A erstens den Elevationswinkel $PAQ = \alpha$, indem man dem Fernrohr zuerst eine horizontale Stellung gibt, und es dann nach dem Puncte P hinrichtet, ungeachtet man nach dem Puncte Q nicht hinvisiren kann; zweitens den W. $BAP = \beta$ mit schräg gestelltem Instrumente, weil eine Lage in der Ebene PAQ hier nicht gestattet wird. Endlich nehme man aus B noch den W. $ABP = \gamma$; so kann man aus den gemessenen Stücken, die verlangte Höhe auf folgende Art berechnen. Es ist nemlich im $\triangle BPA$ der W. $BPA = 180^\circ - (\beta + \gamma)$; folglich $\sin BPA = \sin(\beta + \gamma)$ (10.) und es verhält sich

$$AP : AB = \sin ABP : \sin APB \text{ oder}$$

$$AP : b = \sin \gamma : \sin(\beta + \gamma)$$

$$AP = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}. \text{ Im recht. } \triangle PAQ \text{ aber ist}$$

$PQ = AP \cdot \sin PAQ = AP \cdot \sin \alpha$ und für AP den vorigen Werth gesetzt, gibt

$$PQ = \frac{b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

Anmerkung. Diese Aufgabe unterscheidet sich von derjeni-

gen, welche in (27.) vorkommt, dadurch, daß die Grundlinie AB auf einer schiefen Ebene abgemessen wird, und nicht in der durch PQ geführten Verticalebene liegt. Stände der Gegenstand PQ aber schon auf einer Anhöhe; so ist offenbar, daß man alsdann durch die gezeigte Auflösung nicht, die Höhe des Gegenstandes selbst, sondern eigentlich die Erhebung des Punctes P über der Horizontalfläche durch den Punct Q, gefunden hätte.

§. 29.

Aufgabe. Die Höhe eines Berges zu messen, der sich beträchtlich über die Meeresfläche erhebt und in dessen Nähe man keine Standlinie finden kann, deren Endpuncte mit dem Fuß des Berges in derselben Horizontalfläche liegen.

Vorb. 1. Diese Aufgabe soll hauptsächlich dazu dienen, Anfänger auf einige Umstände zu leiten, die gemeiniglich sonst gänzlich übersehen werden. Da in der Aufgabe angenommen wird, daß die drei Puncte, der Fuß des Berges und die Endpuncte der gewählten Standlinie in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpuncte der Erde, welche hier als eine Kugel angesehen werden kann, liegen; so ist es nöthig, die gedachten drei Puncte auf eine Horizontalfläche zu reduciren.

2. Dieser Horizont aber wird gewöhnlich noch höher als die Meeresfläche liegen und in diesem Falle muß man nach geschעהer Auflösung dieser Aufgabe, noch die Mittel angeben, die gedachten Puncte auf die Meeresfläche zu reduciren, wodurch man die eigentliche Höhe des Berges erhält. Die vorzüglichsten davon sind folgende. Kennt man die

Höhe des Berges über der angenommenen Stationslinie; so findet man die Höhe des Beobachtungsortes über der Meeresfläche bei einer nicht großen Entfernung von derselben entweder durchs Nivelliren bis ans Meer; oder im Falle es zu entfernt ist, durch das Nivelliren bis an einen Ort, dessen Höhe über der Meeresfläche bekannt ist; oder im Fall beides nicht angeht, durch die Vergleichung des Barometers am Beobachtungsorte und an der Meeresfläche.

3. Ist es bekannt, daß uns die Gegenstände nur vermittelt der Lichtstrahlen sichtbar werden. Diese gehen nur so lange nach den Richtungen gerader Linien fort, so lange sie in einem und demselben Mittel bleiben. Die Atmosphäre aber, durch welche die Visirlinien gehen, hat in verschiedenen Höhen, eine verschiedene Elasticität und Dichtigkeit. Daher ist eine ihrer Wirkungen diese, daß vermittelt der gedachten Lichtstrahlen, der Gipfel des Berges an einer höhern Stelle gesehen wird, als diejenige ist, wo derselbe sich wirklich befindet. Es ist hier der Ort nicht, die Theorie dieser Erscheinungen auseinander zu setzen, daher begnüge ich mich die, noch durch mehrere Erfahrungen, sicher zu stellenden Resultate anzuführen. Nach Bouguer *) beträgt die Refraction $\frac{1}{8}$, nach Lambert **) $\frac{1}{4}$ des Kreisbogens des Erdumfanges, welchen man von dem Beobachtungsorte bis an den Ort

*) Mem. de l'Acad. royale de sciences de Paris, 1749.

**) Les Propr. de la route de la lumiere, à la Haye, 1759, p. (67—71). M. s. auch dessen Beiträge zu Picards Abh. vom Wassermägen. S. 242.

beschreibt, nach welchem man hinvisirt. Jene Angabe ändert den Elevationswinkel um $\frac{1}{5}$, diese um $\frac{1}{7}$; andere gestatten sich noch größere Abweichungen. So viel ist gewiß, daß die steten Veränderungen, welchen die Atmosphäre unterworfen ist, den Gebrauch dieser Regel wesentlich beschränken und man muß wenigstens die gedachten Beobachtungen, nicht kurz nach Sonnenaufgang oder kurz vor Sonnenuntergang vornehmen. Schneidet man z. B. in der Mittagsstunde den Gipfel eines Berges mit dem Horizontalfaden im Fernrohr, so zeigt sich derselbe des Abends wohl um 2 bis 3 Minuten höher.

4. Die zu einer Höhenmessung gewählten Stationspunkte liegen oft in einer beträchtlichen Entfernung von dem zu bestimmenden Gegenstande. Dieser Umstand bringt eine der Refraction entgegengesetzte Wirkung hervor und macht, daß man wegen der Krümmung der Erde, die Spitze eines Thurms, Berges u. an einer tiefern Stelle sieht, als diejenige ist, an welcher sie sich wirklich befindet. Man hat also außer der Auflösung und der Erwägung der obigen Stücke, noch eine Rechnung wegen der Krümmung der Erde anzustellen.

5. Auch muß man die Höhe des ausgesteckten Signals von der Erde bis an die ausgespannte Leinwand als dem Zielpunkte in Rechnung bringen. Und es hält besonders bei Höhenmessungen oft ungemein schwer, einen für das Signal bequemen Ort ausfindig zu machen. Denn oft sind die Berge bis dahin nicht zu erklimmen, oft treten andere Hindernisse in den Weg, daher muß man sich zuweilen damit begnügen, ohne ein ausgestecktes Signal nach einer von Natur deutlich hervorragenden Felsenspitze

oder nach einer auf eine andere Art kenntlich gewordenen Stelle zu visiren.

Auflösung. Bei der Auflösung wollen wir nun zuerst auf diejenigen Stücke Rücksicht nehmen, die durch wirkliche Messung und dann auf diejenigen, welche aus den vorigen durch Rechnung gefunden werden. Man nehme nun an, die Standlinie könne nicht anders gewählt werden, als so, daß jeder der drei Punkte M, H, N nemlich die Endpunkte der Standlinie MN und der Fuß des Berges, einen andern Horizont habe, und zwar so, daß H tiefer als M und M tiefer als N liege; so stelle man sich alsdann eine Horizontalebene HOR durch H vor, so, daß O und R die Durchschnittspunkte dieser Ebene, mit den aus M und N herabgelassenen Verticallinien MO und NR sind. Alsdann messe man die Stationslinie $MN = b$, in N den Horizontalwinkel $HRO = \delta$, in M den Horizontalwinkel $HOR = \gamma$, den Verticalwinkel $LMN = \phi$, den Depressionswinkel $PMH = \beta$ und den Elevationswinkel $PMQ = \alpha$; so können daraus in den Dreiecken LMN, HOR, PMH und PMQ die zur Bestimmung der Höhe HQ nöthigen Stücke berechnet werden.

I) Im rechth. $\triangle LMN$ ist $ML = MN \cdot \cos \phi = b \cos \phi$ (20. Zus. 2. II) $= OR$, weil MLOR ein rechth. Parallelogram ist.

II) Im $\triangle HOR$ sind die beiden Winkel γ, δ nebst der Seite OR aus (I) $= b \cdot \cos \phi$ bekannt. Hieraus läßt sich nun nach (20.) $HO = PM$ herleiten und es

$$\text{ist } HO = \frac{OR \cdot \sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)} = \frac{b \cdot \cos \phi \cdot \sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)}$$

III) Die MP steht auf HQ senkrecht. Daher ist

daß $\triangle MPH$ ein rechtwinkliges, in welchem $PH = MP \cdot \tan \beta$ (20. Zus. 3.). Aus demselben Grunde ist nun auch

IV) im rechtwinkligen $\triangle MPQ$, die Seite $PQ = MP \cdot \tan \alpha$. Die gesuchte Höhe HQ aber besteht nach (III und IV) aus $PQ + PH = MP \cdot \tan \alpha + MP \cdot \tan \beta = MP (\tan \alpha + \tan \beta) = \frac{MP \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$. Schreibt

man nun noch für MP den in (III) dafür gefundenen Werth; so ist $HQ = \frac{b \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \delta \cdot \cos \varphi}{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin(\gamma + \delta)}$. Das übrige wird durch folgendes Beispiel die nöthige Erläuterung erhalten.

Beispiel. Wie groß ist die Höhe eines Berges, zu deren Bestimmung folgende Abmessungen gefunden worden sind, nemlich:

die Standlinie $b = 7548'$

der Erhöhungswinkel $\alpha = 13^\circ 27'$

der Vertiefungswinkel $\beta = 2^\circ 13'$

der Horizontalwinkel an M , $= \gamma = 41^\circ 16'$

der Horizontalwinkel an N , $= \delta = 87^\circ 26'$

der Verticalwinkel $LMN = \varphi = 1^\circ 58' 40''$? — Nun berechne man sich erst HQ aus dem in (IV) angegebenen Ausdruck

$$= \frac{b \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \delta \cdot \cos \varphi}{\sin(\gamma + \delta) \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta}; \text{ oder vermittelst der Logarithmen}$$

$$\log b + \log \sin(\alpha + \beta) + \log \sin \delta + \log \cos \varphi - [\log \sin(\gamma + \delta) + \log \cos \alpha + \log \cos \beta]. \text{ Es ist aber}$$

*) Es ist aber $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$ gesetzt wor;

den, weil $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$ (17. I) und

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \tan \alpha + \tan \beta \text{ ist.}$$

$$\begin{aligned}
 \log b &= \log 7548 = 3,8778519 \\
 \log \sin(\alpha + \beta) &= \log \sin 15^\circ 40' = 9,4314286 \\
 \log \sin \delta &= \log \sin 87^\circ 26' = 9,9995641 \\
 \log \cos \phi &= \log \cos 1^\circ 58' 40'' = 9,9997412 \\
 &\quad \underline{33,5085658} \\
 \log \sin(\gamma + \delta) &= \log \sin 51^\circ 18' = 9,8923342 \\
 \log \cos \alpha &= \log \cos 15^\circ 27' = 9,9879223 \\
 \log \cos \beta &= \log \cos 2^\circ 13' = 9,9996749 \\
 &\quad \underline{29,8799514} \\
 \log H Q &= 33,4286544 = \log 2685,085, \\
 \text{folglich } H Q &= 2685,085.
 \end{aligned}$$

Aus V) erhellet nun, daß man zunächst auf die Krümmung der Erde zu sehen habe, welche verursacht, daß man denjenigen Theil, um welchen der Gipfel des Berges zu tief erscheint, und welcher durch $\frac{n^2}{2r}$ ausgedrückt wird, noch hinzuzusetzen habe. Nach der Theorie des Hr. Lambert geht der durch die Luft von der geraden Linie abgelenkte Lichtstrahl in einem Kreise fort, dessen Halbmesser 7 bis 8 Mal größer ist, als der Halbmesser der Erde. Diese Eigenschaft des Lichtstrahls setzt uns in den Stand, die wegen der Refraction der Höhe des Berges abzuziehende Größe, aus $\frac{n^2}{2r}$ anzugeben, wenn man dafür den siebenten Theil der gedachten Größe nimmt. Nach Lambert beträgt die Krümmung der Erde auf eine Weite von 3000 rheinl. Ruthen, $31' 10'' 8'''$. In diesem Abstände würde z. B. die Spitze eines Berges um $31' 10'' 8''' : 7$ d. i. um $4' 6'' 8'''$ zu hoch erscheinen. Im obigen Beispiele ist der horizontale Abstand $HO = 9656,127'$ gefunden worden. Setzt man nun $HO = n$, und berechnet man sich den Logarithmen

für den Erdradius $r = 18937251$ rhl. Fuß; so findet man $\log r = 7,2773169$ und es ist

$$\log n^2 = 2 \log n = 2 \log 9656,1 = 7,9696036$$

$$\log 2r = \log 2 + \log 18937251 = \underline{7,5783469}$$

$$\log \frac{n^2}{2r} = 0,3912567 = \log 2,461,$$

also erhält die Höhe wegen der Krümmung der Erde einen Zusatz von $2,461'$, wovon aber wegen der Refraction der siebente, oder da sie hier bloß der Entfernung prop. gesetzt wird, sicherer der sechste Theil d. i. $0,410$ abgezogen werden muß, wovon der Rest $2,051'$ beträgt. Dieses Verfahren gibt mit dem in (Not. 3) angeführten Ausdruck beinahe völlig dasselbe Resultat. Addirt man nun diese Zahl zur gefundenen Höhe, so erhält man $2685,156'$.

Allein diese Höhe bezieht sich nur auf die durch das Instrument gezogene Horizontallinie. Daher muß dessen Höhe zur obigen Zahl ebenfalls noch addirt werden. Wäre sie etwa $4,2'$, so ist die gesuchte Höhe $2689,356$. Ist dagegen die Visirlinie durch die ausgespannte Leinwand, des auf dem Gipfel ausgesteckten Signals gegangen, dessen Höhe bis dahin $8,1'$ betrug; so muß man dieselbe von der vorher gefundenen Zahl abziehen. Man erhält also dafür $2681,256'$. Endlich ist noch übrig, die Lage des Standortes gegen die Meeresfläche zu berücksichtigen. Dieses geschieht wie in (V) bemerkt worden, entweder durchs Nivelliren, oder durch die gleichzeitigen Barometerbeobachtungen oder durch den mittlern Barometerstand. Wäre nun das Quecksilber aus einer Reihe von Beobachtungen nach der Mittelzahl $335'''$ also um $1'''$ tiefer als an der Oberfläche des Meeres gefunden worden; so müßte man, um

die Höhe des Berges über der Meeresfläche anzugeben, zu der vorigen Zahl 2681,236' noch 78' addiren, wodurch man 2759,236'. Also erhebt sich der Berg 2759,236' über die Meeresfläche. Zur bequemern Uebersicht dieser Stücke will ich die angeführten Bestimmungen noch einmahl in folgender Ordnung niederschreiben. Die trigonometrische Rechnung gibt

für die Höhe des Berges . . .	2683,085
die Instrumentshöhe macht . . .	4,2
wegen Krümmung der Erde . . .	2,461
wegen Höhe von M über der Meeresfl.	78,
	2767,746
wegen der Refraction	0,410
wegen der Höhe des Signals . .	8,100
gesammter Abzug	8,510
	2759,236.

Zusatz. Aus (Not. 1) ersieht man, wie man verschiedene schief liegende Seiten eines Dreiecks auf einen gemeinschaftlichen Horizont reduciren kann. Auch kann man durch die obige Auflösung allemahl finden, um wie viel die Stationspuncte M und N über dem Horizont durch H liegen. Es ist nemlich die lothrechte Höhe MO

$$= PH = OH \tan \beta \quad (20. \text{Zus. 3.}) = \frac{b \cdot \cos \varphi \sin \delta \tan \beta}{\sin(\gamma + \delta)}$$

$$\text{und } NR = LR + LN = OM + LN = \frac{b \cdot \cos \varphi \sin \delta \tan \beta}{\sin(\gamma + \delta)}$$

$$+ b \sin \varphi.$$

Anmerkung 1. Zu mehrerer Bestimmung der vorigen Aufg. kann noch folgendes dienen. Der Standpunct des Beobachters (Fig. 17.), welcher in A den Elevationswinkel PAQ misst, ist vom Horizonte des Berges verschieden. MQN

ist der Horizont der Bergspitze Q, ABD der Horizont durch den Standpunct A, folglich ist BQ die wahre, PQ aber die durch Beobachtung gefundene Höhe. Daher ist die Correction wegen BP nothwendig. Stellt man sich nun in der Figur den Umkreis des Bogens ABD völlig ausgezogen vor; so verhält sich $PB : PA = PA : PB$

$$+ 2BC \text{ und es ist } BP = \frac{AP^2}{PB + 2BC}.$$

Da nun BC den Erdradius vorstellt; so ist BP gegen 2BC eine unbedeutende Größe, die im Divisor völlig weggelassen werden kann.

$$\text{Man hat daher } BP = \frac{AP^2}{2BC}.$$

Schreibt man nun $AB = n$ für AP, Größen die sich in der That sehr wenig von einander unterscheiden, und r für BC; so ist BP

$$= \frac{n^2}{2r}.$$

Anmerkung 2. Aus (Nr. IV) ist der Ausdruck für die Refraction der Lichtstrahlen nach Lambert $\frac{n^2}{14r}$.

Man kann daher die beiden Ausdrücke für die Refraction und die Krümmung der Erde in einen zusammenfassen. Es ist

$$\text{nehmlich } \frac{n^2}{2r} - \frac{n^2}{14r} = \frac{7n^2 - n^2}{14r} = \frac{6n^2}{14r} = \frac{3n^2}{7r}.$$

Anmerkung 3. Bei der Bestimmung der Höhen betrachtet man den $\angle APQ$ als einen rechten. Eigentlich aber ist

$$\angle APQ = PAC + ACP = 90^\circ + ACP \text{ (§. 54.)}$$

Allein der Winkel bei C beträgt in der Regel nur wenige Minuten.

Daher kann man APQ als ein $\triangle$ auflösen, das bei P einen rechten Winkel hat. Obgleich nun auf diese

Art mancherlei Veränderungen mit den Größen vorgenommen werden, so haben selbige doch auf die daraus hergeleiteten Bestimmungen für die Höhen, keinen merklichen

Einfluß, und kommen gegen diejenigen, welche aus einer fehlerhaften Beobachtung oder durch Vernachlässigung an-

derer Vorsichtsregeln geschehen, in der Ausübung nicht in Betrachtung.

II) Von der Messung anzugänglicher Entfernungen.

Wenn man sich zur Bestimmung eines Dreieckes oder einer geradlinigen Figur, oder einer Verbindung mehrerer Dreiecke, außer den beobachteten Winkeln, eine Seite zur Grundlinie wählt; so muß man besonders in dem letzten Falle, alle Sorgfalt und Aufmerksamkeit auf die richtige Abmessung derselben verwenden. Diese festgelegte Grundlinie, macht die Angaben der durch sie zu bestimmenden übrigen Theile der Figur, mit Rücksicht der dabei vorkommenden Umstände desto sicherer, je länger sie fortgezogen und je genauer sie gemessen wird. Soll sie vielleicht die Grundlinie einer Dreieckverbindung abgeben, wovon die richtige Lage ganzer Länder abhängt, oder zu einem andern ähnlichen Zwecke dienen, so muß man zu ihrer wirklichen Ausmessung, Maßstäbe nehmen, die längst einer ausgespannten Schnur an einander gelegt werden; oder man muß der gewöhnlichen Meßkette eine andere Einrichtung geben, während der Operation auf die durch die Wärme bewirkte Ausdehnung Rücksicht nehmen, und nach vollendeter Messung, die Standlinie, wenn sie vielleicht auf einer schiefen Ebene liegt, nivelliren. Selten ist der Boden so eben, daß sich die Kette in gerader Richtung ausdehnen kann. Damit sie nun gerade und richtig ausgespannt werden könne; so erhält sie eine Unterlage von Brettern, die auf 3 bis 4 Kettenzüge eingerichtet ist. Die Vernachlässigung des Nivellirens hat mit dazu beigetragen, daß die von Maupertuis ausgeführte Gradmessung in Lappland so unrichtig ausfiel, daß die Länge des Grades am Polarkreise 223 Toisen, d. i. 1584,8 rhL. Fuß von ihm zu groß angegeben worden ist. Dieses zeigte sich bei der im Jahr 1801 —

1803 unter der Direction von Svanberg wiederholten Messung nach dem, von dem Ritter Melanderhielm deshalb der Antrag dem Könige gemacht wurde, und dieser am 17ten Febr. im Jahr 1801 die Kosten dazu bewilligt hatte. Maupertuis maß sich eine Standlinie von 7406 R. 5 F. 2 Z. auf dem Eise ab, nur er vernachlässigte es, dieselbe zu nivelliren. Freilich liegt der Grund jener beträchtlichen Abweichung von 223 F. nicht hierin allein, sondern vornehmlich in den fehlerhaften Beobachtungen mit dem Zenithsector. Die vom 22sten Febr. bis zum 11ten Apr. 1802 unter Svanberg gemessene Grundlinie von Niemisby bis Priki Tornea betrug $7414\frac{1}{2}$ Toisen. Man findet die Resultate dieser Gradmessung in der Exposition des operations faites en Laponie, pour la détermination d'un arc du méridien en 1801 — 5 etc. publiée par l'Académie de sciences à Stockholm, 1805.

Wenn vorhin bemerkt wurde, daß sich die Kette selten in gerader Richtung fortziehen lasse, so rührt dieses von den Ungleichheiten des Terrains, nicht aber von der Krümmung der Erde her. Diese kommt bei Linien dieser Art, wenn sie gleich eine ansehnliche Länge haben, nicht so leicht in Betrachtung. Denn auch die längste bisher gemessene Linie beträgt noch nicht 40000 rhl. F. und diese läßt bei einer wirklichen Messung, als in einer ausgebreiteten Ebene liegend, ansehen. Um sich davon zu überzeugen, darf man nur den Unterschied des Bogens AB (Fig. 17.) und die dazu gehörige Sehne $AB = 2AE$ untersuchen. Man nehme an der $\angle ACB$ sei $= \alpha = 30'$, so hat man im rechth. $\triangle AEC$, folgende Proportion: $\sin \alpha : \sin 90^\circ = AC : AE$. Hier
ist

ist AC der Erdradius $= 859,4566$ geograph. Meilen.
 Folglich ist $AE = AC \times \sin \alpha = 859,4566 \times 0,0043633$
 $= 3,7499716$ d. i. die halbe Sehne des Bogens AB ,
 folglich ist dessen doppelte Sehne $= 7,499959432$.
 Der Bogen eines Grades im Längenmaße aber beträgt
 $\frac{5400}{360} = 15,00$, davon ist die Hälfte der in der Figur

angenommene Bogen $AB = 15,00$... wo sich also bei
 dieser vorläufigen Berechnung, zwischen der Sehne und
 dem dazugehörigen Bogen, erst bei der fünften Stelle
 ein Unterschied entdecken läßt. Rechnet man nun auf
 eine geogr. Meile 23598 rhl. Fuß, so ist der Unterschied
 noch nicht ein rhl. Fuß. Denn er ist 0,9573 eines rhl.
 Fußes und dieser Bogen mehr als 4 mahl größer als
 die oben angegebene Länge.

Aber auch schon bei den gewöhnlichen Vermessun-
 gen der Feldmarken, Wälder &c. zeigen sich mancherlei
 Hindernisse, so, daß die geraden Linien über gewisse
 Districte hin, nicht unmittelbar wegen der dazwischen
 liegende Moräste, Seen, Wälder &c. abgesteckt und mit
 der Kette gemessen werden können. Solche Linien, die
 im Laufe der Messung so häufig vorkommen, nennt man
 unzugängliche Entfernungen. Man fordert aber
 von einem Feldmesser, daß er diese Entfernungen mit
 eben der Genauigkeit anzugeben weiß, als wenn sie
 wirklich wären gemessen worden. Außerdem aber dienen
 diese Operationen häufig zur Verkürzung des ganzen Ge-
 schäftes, da man nicht nöthig hat, in solchen Gegenden,
 wo keine Hindernisse vorkommen, alles aufzumessen.
 Daher sollen hier die vornehmsten Fälle in folgenden
 Aufgaben, wo die Voraussetzung in Ansehung des

Winkelinstrumentes und des Zweckes bleibt, gezeigt werden.

§. 30.

Aufgabe. Es sei AC (Fig. 8.) ein Theil einer zu messenden Standlinie, von welchem man aus A und C einen entlegenen Gegenstand in B, etwa ein Grenzbaum, eine Mühle zc. sehen kann; man fragt, wie weit derselbe von A und C entfernt sei?

Ist $AC = b$ ein Stück einer Standlinie; so nehme man bei deren wirklichen Messung, die Winkel in A und C und berechne nach (20.) die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten, so werden die gefundenen Zahlen, die gesuchten Entfernungen ausdrücken. Es ist nemlich

$$BC = \frac{b \cdot \sin A}{\sin(A+C)} \text{ und } AB = \frac{b \cdot \sin C}{\sin(A+C)}.$$

Beispiel. Wie weit ist B von A und C entfernt, wenn die gemessene Linie $AC = b = 1436,27'$ der W. $A = 25^\circ 36' 57''$ und der W. $C = 81^\circ 45'$ gefunden worden ist? — Nimmt man von den obigen Ausdrücken die log. Gleichung, so ist $\log BC = \log b + \log \sin A - \log \sin(A+C)$ und $\log AB = \log b - \log \sin C + \log \sin(A+C)$. Es ist aber

1) $\log b = 3,1572360$	und 2) $\log b = 3,1572360$
$\log \sin A = \frac{9,6357325}{12,7929685}$	$\log \sin C = \frac{9,9954822}{13,1527182}$
$\log \sin(A+C) = \frac{9,9797915}{2,8132770}$	$\log \sin(A+C) = \frac{9,9797915}{3,1729267}$
$\log BC = 2,8132770$	$\log AB = 3,1729267$
$= \log 650,39,$	$= \log 1489,1,$
folgl. $BC = 650,39'.$	folgl. $AB = 1489,1.$

Anmerkung. Man sieht wie man auf eine ähnliche Art die

Entfernungen AE, AF, CE, EF aus der Standlinie und den aus A und C genommenen Winkeln CAE, CAF, ECA, FCA etc. berechnen und so die Weiten verschiedener Punkte rings um AC bestimmen kann. Wollte man bloß die Lage der Punkte C, E, und F gegen AC angeben; so hätte man gar nicht nöthig, dieselbe zu messen.

Zusatz. Stellet AB die Breite eines Flusses vor; so messe man sich die Standlinie AC und die beiden Winkel BAC und BCA in A und C, so ist auch der dritte bei B bekannt und es läßt sich daraus, wie vorher die Seite AB, berechnen.

§. 31.

Aufgabe. Die Entfernung zweier, durch Sümpfe, Moräste etc. von einander getrennten Gegenstände aus einem dritten Standpuncte A, von welchem man nach den gedachten Gegenständen C, B sehen und messen kann, zu berechnen.

Es sei (Fig. 8.) der Standpunct B, von welchem aus man nach A und C sehen und messen kann, und AC die gesuchte Entfernung; so ist dieselbe, wenn man $AB = c$, $BC = a$ und den W. $ABC = B$ gemessen hat, $= \sqrt{a^2 + b^2 - 2bc \cos B}$ (23. II).

Beispiel. Wie groß ist die Entfernung AC, wenn $a = 810'$, $c = 576'$ und der $\angle A = 46^\circ 8'$ gefunden worden ist? — Es ist demnach in Zahlen $AC = \sqrt{810^2 + 576^2 - 2 \cdot 810 \cdot 576 \cdot \cos 46^\circ 8'}$ $= \sqrt{656100 + 331776 - 646635,83}$, indem $\cos 46^\circ 8' = 0,6929825$ ist, folglich $AC = \sqrt{341240,16} = 584,1'$.

Zusatz. Man kann aber auch erst die beiden übrigen Winkel bei A und C nach der Proportion $a + c : a - c = \operatorname{tg} \frac{1}{2} B : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - C)$ (23.), berechnen und

nach deren Bestimmung aus (20.) die verlangte Entfernung AC herleiten. Mit Beibehaltung der im vorigen Beispiele aus der Messung, gefundenen Größen ist die angeführte Proportion in Zahlen $810 + 576 : 810 - 576 = \cot 23^\circ 4' : \tan \frac{1}{2}(A - C)$, oder $1386 : 234 = \cot 23^\circ 4' : \tan \frac{1}{2}(A - C)$. Man findet aber

$$\begin{aligned} 1) \quad \cot 23^\circ 4' &= 10,3707447 \\ \log 234 &= \underline{2,3692159} \\ &12,7399606 \\ \log 1386 &= \underline{3,1417632} \\ \log \tan \frac{1}{2}(A - C) &= 9,5981974 \\ &= \log 27^\circ 37', \text{ folglich } \frac{1}{2}(A - C) = \\ 21^\circ 37', \text{ also } A &= 88^\circ 53' \text{ und } C = 45^\circ 19'. \end{aligned}$$

Nun ist 2) $\sin A : \sin B = a : AC$ und $AC = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}$. Es ist aber

$$\begin{aligned} \log 810 &= 2,9084850 \\ \log \sin 46^\circ 8' &= \underline{9,8579078} \\ &12,7663928 \\ \log \sin 88^\circ 53' &= \underline{9,9998609} \\ \log AC &= 2,7665319 = \log 584,16, \text{ folglich } AC = 584,16. \end{aligned}$$

§. 32.

Aufgabe. Die Entfernung zweier Gegenstände, zu deren keinem man kommen kann, durch Rechnung zu finden.

Man messe (Fig. 18.) eine Grundlinie CD ab, welche man sich in Bezug auf die Gegenstände, von welchen man durch einen Fluß oder andere Hindernisse

getrennt ist, so vorthailhaft wie möglich, wählt. In C nehme man den W. ACD und den größern der beiden W. ACB oder BCD; in D nehme man den W. BDC und den größern der beiden andern BDA oder ADC; so kennt man auch allemahl den dritten. Auf diese Art sind in den beiden Dreiecken ACD und BCD alle drei W. nebst der gemessenen Seite CD bekannt. Nun berechne man daraus die Seiten AC und CB oder die Seiten DA und DB und aus diesen beiden Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel ACD oder ADB läßt sich die dritte Seite, welche den gesuchten Abstand bezeichnet, finden. Die Berechnung dieser Seite kommt auf folgende Art zu stehen. Es sei $ACD = C$, $BCD = \alpha$, $BDC = D$, $ADC = \beta$; so ist im $\triangle ACD$ der W. $CAD = \gamma = 180^\circ - (C + \beta)$ und im $\triangle BCD$, der W. $CBD = \delta = 180^\circ - (D + \alpha)$. Demnach verhält sich im $\triangle CAD$

$$AC:b = \sin \beta : \sin \gamma, \text{ folgl. ist } 1) AC = \frac{b \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} \text{ u. i. } \triangle CBD$$

$$BC:b = \sin D : \sin \delta, \text{ folgl. ist } 2) BC = \frac{b \cdot \sin D}{\sin \delta}. \text{ Nun sind}$$

im $\triangle ACB$ außer den beiden Seiten AC und BC noch der eingeschlossene W. $ACB = (C - \alpha) = \varphi$ bekannt. Daraus erhält man 3) $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cos \varphi}$ (23. II).

Beispiel. Wie groß ist der Abstand AB, wenn $b = 986'$ der W. $C = 98^\circ 25'$, $\alpha = 39^\circ 21'$, $D = 75^\circ 16'$, $\beta = 52^\circ 48'$, folglich $\gamma = 48^\circ 47'$, $\delta = 65^\circ 23'$. Daher ist, wenn man die obigen 3 Ausdrücke berechnet

$\begin{aligned} 1) \log b &= 2,9938769 \\ \log \sin \beta &= 9,7337654 \\ \hline &12,7276423 \\ \log \sin \gamma &= 9,8765468 \\ \log AC &= 2,8512955 \\ &= \log 710,0, \end{aligned}$	$\begin{aligned} 2) \log b &= 2,9938769 \\ \log \sin D &= 9,9854885 \\ \hline &12,9793572 \\ \log \sin \delta &= 9,9599188 \\ \log BC &= 3,0194584 \\ &= \log 1045, \end{aligned}$
folgl. $AC = 710'$ folgl. $BC = 1045'$.	
$\begin{aligned} 3) AB &= \sqrt{(710^2 + 1045^2 - 2 \cdot 710 \cdot 1045 \cdot 0,5140404)} = \\ &= \sqrt{(504100 + 1092025 - 762784,5495600)} = \sqrt{833340,450430} = \\ &912,874. \end{aligned}$	

Zusatz 1. Aus der obigen Auflösung siehet man, wie man durch einen gegebenen Punct C mit der unzugänglichen geraden Linie AB, eine Parallellinie ziehen kann. Hat man sich nach der vorigen Aufg. AB berechnet; so läßt sich auch der $\angle ABC = \lambda$ daraus bestimmen. Nun setzt man an den Punct C der BC einen Winkel, welcher $= \angle ABC$ ist, folglich läuft, wegen der dadurch entstandenen Wechselswinkel, der Schenkel CD des $\angle BCD$, parallel mit AB.

Zusatz 2. Auch läßt sich durch ein einfaches Verfahren, mit Hülfe der obigen Auflösung die senkrechte Entfernung CE eines Gegenstandes in C von der unzugänglichen Linie AB nebst den Segmenten bestimmen, in welche AB durch CE zerfällt wird. Denn aus der obigen Aufl. kennt man AC, BC nebst dem $\angle ACB$, aus (Zus. 1.) den $\angle ABC = \lambda$, folglich ist die senkrechte Entfernung des Standpunctes oder des Gegenstandes in C von AB d. i. $CE = CB \sin \lambda$, der eine Abschnitt $BE = CB \cos \lambda$ und der andere $AE = AB - BE$.

Anmerkung. Oft ist es in der Ausübung von vielem Nutzen, den auf einer Anhöhe gemessenen Winkel, dessen Schenkel

von oben nach unten herabgehen, auf den gemeinschaftlichen Horizont der tieferliegenden Punkte zu reduciren. Ge-
setzt man sollte den W. NQM (Fig. 19.) auf den gemeinschaftl.
Horizont durch N und M reduciren, d. h. man sollte den
W. NPM angeben; so messe man von Q aus, außer dem
 $\angle NQM = \alpha$ noch die beiden Depressionsw. $QNP = \beta$
und $QMP = \gamma$ der gesuchte $\angle$ dessen Schenkel PN und PM
den man sich leicht vorstellen kann, sei $= \phi$; so hat man
 $NM^2 = QN^2 + QM^2 - 2QN \cdot QM \cos \alpha$ (25. II) u. a. dens. G.
 $NM^2 = PN^2 + PM^2 - 2PN \cdot PM \cos \phi$, folglich

$$\begin{aligned} QN^2 + QM^2 - 2QN \cdot QM \cos \alpha &= PN^2 + PM^2 - 2PN \cdot PM \cos \phi \\ \cos \phi &= \frac{2QN \cdot QM \cos \alpha - 2QP^2}{2PN \cdot PM}, \text{ weil } \begin{pmatrix} PN^2 = QN^2 - QP^2 \\ QM^2 = QM^2 - QP^2 \end{pmatrix} \text{ ist} \\ &= \frac{QN \cdot QM \cos \alpha}{PN \cdot PM} - \frac{PQ^2}{PN \cdot PM} \\ &= \frac{\cos \alpha - \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\cos \beta \cdot \cos \gamma} \quad (20. Zus. 4.) \text{ d. h. der Cosinus} \end{aligned}$$

des reducirten Winkels wird gefunden, wenn
man vom Cosinus des beobachteten Winkels α
das Product der Sinus beider Depressionswin-
kel abzieht und diese Differenz durch das Pro-
duct der Sinus der gedachten Winkel dividirt.
Diese Bemerkung setzt uns in den Stand, folgende Aufg.
ohne Schwierigkeit aufzulösen.

§. 33.

Aufgabe. Den horizontalen Abstand zweier Ge-
genstände zu finden, wenn man weiß, um wie
viel der Beobachtungsort sich über den Hori-
zont der beiden tiefer liegenden Gegenstände
erhebt.

Es sei der Beobachtungsort Q (Fig. 19.) auf dem
Gipfel eines Berges, dessen Höhe PQ über dem Hori-

zont durch Q, vermittelst einer der oben angegebenen Methoden gefunden worden ist und NM sei die gesuchte Entfernung der beiden mit P auf einer Horizontalfläche liegenden Gegenstände; so messe man den Winkel MQN $= \alpha$ und die Depressionsw. QNP $= \beta$ und QMP $= \gamma$ oder deren Ergänzungsw. zu 90° . Nun läßt sich α nach der obigen Bemerkung auf φ reduciren, aus PQ und α läßt sich PM, aus PQ und β , wieder PN und aus PM, PN und φ die gesuchte Entfernung NM berechnen.

§. 33.

Aufgabe. Man kann aus einem gewissen Standpunkte nach dreien auf dem Felde aufgenommenen Gegenständen sehen; man soll nun die Lage und Entfernung des Stationspunktes, von jedem der gedachten Gegenstände, welche mit jenem auf derselben Horizontalebene liegen, durch Rechnung finden.

In der (Fig. 20.) sind $AB = a$, $BC = b$, der W. $ABC = B$, folglich alle Stücke des $\triangle ABC$ bekannt. Von dem Stationspunkte P kann man nach A, B und C sehen und also die Winkel APC und APB aufnehmen. Dadurch erhält man außer jenen gemessenen Stücken, noch den W. $APB = \alpha$ und $BPC = \beta$. Wäre nun von den beiden Winkeln BAP, BCP einer bekannt; so würde man auch den andern leicht finden können. Man setze daher denjenigen W. den man als unbekannt ansehen will, wie $A = BAP = x$, den andern BCP bezeichne man mit einem Buchstaben C, wie auch $\alpha + \beta$ mit P, behandle die unbekannte Größe,

wie die bekannten; so erhält man $\angle C = 4R - B - P - x = 360^\circ - (B + P) - x$.

$= m - x$, wenn man $360^\circ - (B + P) = m$ setzt.

Nun verhält sich 1) im $\triangle ABP$

$$BP : AB = \sin A : \sin APB \text{ oder}$$

$$BP : a = \sin x : \sin \alpha$$

$$BP = \frac{a \cdot \sin x}{\sin \alpha}. \quad 2) \text{ Verhält sich im } \triangle PBC$$

$$BP : BC = \sin C : \sin BPC$$

$$BP : b = \sin C : \sin \beta$$

$$BP = \frac{b \cdot \sin(m - x)}{\sin \beta}. \quad \text{Aus 1) und 2) ergibt sich die}$$

$$\text{Fundamentalgl. } \frac{a \cdot \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \cdot \sin(m - x)}{\sin \beta}$$

$$a \cdot \sin \beta \cdot \sin x = b \cdot \sin \alpha \cdot \sin(m - x)$$

$$= b \sin \alpha \cdot \sin m \cdot \cos x - b \cdot \sin \alpha \cdot \cos m \cdot \sin x \quad (17. \text{ III})$$

$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin m \cdot \cot x - b \cdot \sin \alpha \cdot \cos m$$

$$a \cdot \sin \beta + b \cdot \sin \alpha \cdot \cos m = b \cdot \sin \alpha \cdot \sin m \cdot \cot x$$

$$\cot x = \cot m + \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha \sin m}$$

Durch diese Gleichung ist der Winkel x bestimmt und nun kann man die Entfernungen der drei Gegenstände vom Stationspunkte, durch einfache Proportionen herleiten. Es ist nemlich

$$BP : a = \sin x : \sin \alpha$$

$$1) BP = \frac{a \cdot \sin x}{\sin \alpha}. \quad \text{Ferner}$$

$$AP : \sin ABP = a : \sin \alpha \quad (20.), \text{ oder}$$

$$AP : \sin(\alpha + x) = a : \sin \alpha$$

$$\text{II) } AP = \frac{a \cdot \sin(\alpha + x)}{\sin \alpha}. \text{ Endlich ist}$$

$$CP : \sin CBP = b : \sin \beta, (20.), \text{ oder}$$

$$CP : \sin(C + \beta) = b : \sin \beta$$

$$CP : \sin(360^\circ - B - \alpha - x) = b : \sin \beta$$

$$CP : \sin(B + \alpha + x - 180^\circ) = b : \sin \beta \quad (10.)$$

$$\text{III) } CP = \frac{b \sin(B + \alpha + x - 180^\circ)}{\sin \beta}.$$

Zusatz 1. Liegt der Gegenstand, vom Stationspuncte P aus gesehen, nicht hinter der Linie AC, wie in der Figur, sondern vor derselben; so muß man den erhabenen Winkel AbC in Rechnung bringen.

Zusatz 2. Fällt der Punct A auf AC, so daß A, B, C in einer geraden Linie liegen; so wird $ABC = B = 180^\circ$ und man muß also in den obigen Werth für m anstatt des Winkels A, seine Größe von 180° schreiben. In diesem Falle ist also $m = 360^\circ - B - P = 360^\circ - B - \alpha - \beta = 360^\circ - 180^\circ - \alpha - \beta = 180 - (\alpha + \beta)$; folglich $\cot m = -\cot(\alpha + \beta)$ und $\sin m = \sin(\alpha + \beta)$. Dadurch ändert sich der Werth für $\cot x$ auf folgende Art ab. Es ist nemlich $\cot x = -\cot m + \frac{a \cdot \sin \beta}{b \cdot \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}$.

Beispiel. Wie groß ist 1) der Winkel x und 2) die Entfernung des Stationspunctes von A, B und C, d. h. PA, PB und PC, wenn $a = 2400'$, $b = 2000'$, der W. B = $122^\circ 28'$, $\alpha = 24^\circ 16'$, $\beta = 21^\circ 16'$ gefunden worden ist? — Es ist demnach der W. $m = 360^\circ - (122^\circ 28' + 24^\circ 16' + 21^\circ 26') = 360^\circ - 168^\circ 10' = 191^\circ 50' = m$, folglich $\sin m = \sin 191^\circ 50' = \sin 11^\circ 50'$ (10. Zus. 2.) und $\cot m = \cot 191^\circ 50' = \cot 11^\circ 50'$ (13. Zus. 1.). Daher wird $\frac{a \sin \beta}{b \cdot \sin m \cdot \sin \alpha} = -$

$$\frac{2400 \sin 21^{\circ} 16'}{2000 \cdot 0,2040655 \cdot 0,4109841} = -5,2284992 \text{ und } \cot m = 4,7728567,$$

$$\text{folglich } \cot x = \cot m + \frac{a \sin \beta}{b \cdot \sin \alpha \cdot \sin m} = -0,4556425. \text{ Die}$$

ses ist der Werth einer Cotangente mit einem negativen Vorzeichen, welches beweiset, daß dieselbe zu einem stumpfen W. gehört. Man schlage daher in den Tafeln die gefundene Zahl ohne Rücksicht auf ihre Vorzeichen auf und ziehe den zu dieser Cotangente gehörigen Bogen von 180° ab. Es ist aber $0,4556425 = \cot 65^{\circ} 31'$, folglich $180^{\circ} - 65^{\circ} 31' = 114^{\circ} 29'$; also ist der W. $x = 114^{\circ} 29'$. Zur Bestimmung der Entfernungen, kann man die obigen Ausdrücke leicht durch Logarithmen berechnen und man findet

$$\begin{array}{ll} 1) \log a = 3,3802112 & 2) \log a = 3,3802112 \\ \log \sin(\alpha + x) = 9,8191133 & \log \sin x = 9,9590805 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 13,1993245 & 13,3392917 \\ \log \sin \alpha = 9,6138250 & \log \sin \alpha = 9,6138250 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \log AP = 3,5854995 & \log BP = 3,7254667 \\ = \log 3850,3; & = \log 5314,5; \end{array}$$

$$\text{folgl. } AP = 3850,3'. \quad \text{folgl. } BP = 5314,5'.$$

$$\begin{array}{ll} 3) \log b = \log 2000 = 3,3010300 & \\ \log \sin(B + \alpha + x - 180^{\circ}) = \log \sin 81^{\circ} 13' = 9,9948769 & \\ & 13,2959069 \end{array}$$

$$\log \sin \beta = \log \sin 21^{\circ} 26' = 9,5627904$$

$$\log CP = 3,7531165 =$$

$$5409; \text{ folglich } \log CP = 5409'.$$

Anmerkung. Hätte man die drei Punkte A, B, C schon auf der Charte und man wollte ihre Entfernungen von P bloß durch Zeichnung bestimmen; so betrachte man AB und BC als Sehnen, beschreibe über AB und BC die beiden Kreishogen APB und BPC, deren jener den gemessenen W. α , dieser den W. β in sich faßt; so wird ihr Durchschnitt P die auf dem Felde angenommenen Standpunct bezeichnen, von wo aus man α und β gemessen hat.

§. 54.

Aufgabe. Die Entfernung zweier Gegenstände A und Z (Fig. 22.) zu messen, die zwar sehr beträchtlich, doch von der Beschaffenheit ist, daß man von A nach Z sehen kann.

Man stelle sich mehrere Signale zu beiden Seiten der zu messenden Linie AZ so aus, daß AZ so viel es sich thun läßt mitten durch die Signale läuft und daß diese eine Reihe neben einander liegender guter Dreiecke bilden. Nun messe man von den Stationspuncten A, B, C, D &c. die zu jedem Dreiecke gehörigen Winkel von A aus den W. BAC, von B aus, die W. ABC, CBD, von C aus die W. ACB, BCD, DCE &c. Alsdann messe man sich in einem der Dreiecke, eine dazu bequem gelegene Seite zur Grundlinie ab, etwa AB im $\triangle ACB$ und berechne aus dieser Seite und den in A und B beobachteten W. BAC und ABC die beiden andern Seiten AC und CB. Hierauf berechne man wieder aus BC und den beiden W. an BC, nemlich BCD und DBC die beiden Seiten BD und CD und so setze man dieses Verfahren fort, bis man die Seiten DZ und EZ des letzten $\triangle DZE$ gefunden hat.

Da man nun, der Voraussetzung gemäß, von A nach Z sehen kann; so nehme man noch die W. BAZ, CAZ, DZA und EZA; lasse aus den Winkelpuncten B, C, D und E die geraden Linien BF, CH, DK, EL senkrecht herab; so kann man im rechth. $\triangle DKZ$, aus DZ und dem W. DZA die Seiten DK und KZ berechnen. So lassen sich auch im rechth. $\triangle ABF$ aus AB und dem W. BAF die Seiten AF und BF berechnen. Endlich

erhält man im rechth. $\triangle BDG$, $BG = BF - GF = BF - DK$ und sucht nun $GD = AK$ aus den Seiten CD und BG . Durch die Berechnung der drei rechth. Dreiecke ABF , DKZ und BDG , hat man die drei Entfernungen AF , FK und KZ gefunden, welche den ganzen Abstand von A bis Z ausmachen. — Zu demselben Resultate würde man auch vermittlest der Dreiecke AHC , CIE und ELZ gelangen sein.

Beispiel. Wie groß ist demnach die Entfernung AZ , wenn die gemessene Grundlinie $AB = b = 6978'$, die beobachteten und durch Rechnung berichtigten Winkel

$$BAC = 58^{\circ} 42'$$

$$ABC = 79^{\circ} 24'$$

$$BCA = 41^{\circ} 45'$$

$$CBD = 59^{\circ} 22'$$

$$BCD = 62^{\circ} 44'$$

$$BDC = 57^{\circ} 54'$$

$$DCE = 48^{\circ} 46'$$

$$CDE = 58^{\circ} 37'$$

$$DEC = 72^{\circ} 37'$$

$$EDZ = 39^{\circ} 26'$$

$$DEZ = 42^{\circ} 54'$$

$$DZE = 82^{\circ}$$

$$BAZ = 26^{\circ} 52'$$

$$DZA = 91^{\circ} 15'$$

gefunden worden sind? — Nach diesen Angaben findet man im $\triangle ABC$ aus AB und den anliegenden Winkeln die Seiten $AC = 10270'$ und $BC = 8928'$. Im $\triangle BCD$ aus BC und den anl. Winkeln, die Seite $BD = 9368'$ und $CD = 9068'$. Im $\triangle CDE$ aus CD und den anl. Winkeln, die Seite $DE = 7146'$. Im $\triangle DEZ$ aus DE und den anliegenden Winkeln $DZ = 4881'$.

Nun ergibt sich in dem rechth. $\triangle DZK$ aus DZ und dem in Z beobachteten W. DZK , der Perpendikel $DK = 4279'$ und der Abstand $KZ = 5091'$. Ferner im rechth. $\triangle ABF$ aus AB und dem in A be-

beobachteten W. BAF, der Perpendikel BF = 3117 und der Abstand AF = 6243, folglich erhält man aus der Differenz beider Perpendikel d. i. aus DK — BF = 1162 und hieraus und der Seite BD, findet man $FK = DG = \sqrt{(9568^2 - 1162^2)} = \sqrt{86409180} = 9295,6$. Also ist $AZ = AF + FK + KZ = 6243 + 9294 + 5091 = 20629$. Da dieses Beispiel nur den Gang der Rechnung zeigen soll, so ist dabei auf die dazugehörigen Decimalbrüche nicht Rücksicht genommen worden.

Anmerkung 1. Zur Berichtigung der ganzen Vermessung kann man noch am Ende die Seite EZ messen und durch ein ähnliches Verfahren die Grundlinie daraus berechnen; so wird die Abweichung, welche sich aus dieser Rechnung ergibt, zeigen, wie weit man sich auf die Richtigkeit der Messung verlassen kann.

Anmerkung 2. Da nun die Signale gemeiniglich auf Anhöhen gestellt werden und dadurch einige Dreieckspuncte höher, andere tiefer zu liegen kommen; so muß man sie sämmtlich auf einen gemeinschaftlichen Horizont reduciren, welches nach den oben gezeigten Grundsätzen der ebenen, leichter aber nach den Lehren der sphärischen Trig. geschehen kann. Diese Reduction ist um so nöthiger, weil die Endpuncte der zu bestimmenden Linie AZ selbst, in ungleichen Entfernungen vom Mittelpuncte der Erde liegen können. Um nun aus dem in A beobachteten W. BAC den Horizontalwinkel bac berechnen zu können; so lasse man im Fall B und C höher als A liegen, aus A, B und C die Verticallinien aA, Bb und Cc auf die Horizontalfläche durch A herab, messe die Erhöhungswinkel BAB und CAc. Nun kann man sich durch jede drei Puncte b, A, c; B, A, b und C, A, c; drei Ebenen vorstellen die in A zusammenstoßen und eine körperliche Ecke bilden, von A aus mit einem beliebigen Halbmesser die drei Kreisbogen MN, NO, OM beschreiben, welche ein sphär. $\triangle MNO$ bilden, dessen Seiten zugleich die Maße der bekannten Winkel sind, daher aus den drei Seiten MN, NO, OM das sphär. $\triangle NMO$ der W. MNO

der Winkel welcher die Seitenflächen ANM und ANO machen, einerlei ist, gefunden wird.

Anmerkung 3. Das in (Anm. 2.) gedachte Verfahren die drei Punkte B, A, C auf den Horizont durch A zu reduciren, hat den Vortheil, daß man dabei nicht auf den Erdradius sehen darf und man also dieselben Regeln anwenden kann, sämtliche Dreieckspunkte A, B, C, D, E, Z auf einen gemeinschaftlichen Horizont zu bringen und dann die in der Auflösung gezeigte und an dem Beispiel erläuterte trigonometrische Rechnung mit Dreiecken vorzunehmen, deren Seiten mit der Grundlinie des Polygons in der durch A geführten Horizontalfläche liegen. Die Aufg. in (34.) ist nur als eine Vorbereitung einer weit wichtigern anzusehen, die sich damit beschäftigt, die Länge eines Bogens des zwischen zwei Parallellkreisen enthaltenen Bogens des Mittagskreises, der ungefähr einen Grad beträgt, in Ruthen, Fuß &c. anzugeben. Die vollständige Aufl. erfordert einige Uebungen in der höhern Analysis und setzt Kenntnisse voraus, die sich hier nicht vortragen lassen. Daher habe ich mich darauf beschränkt, angehende Feldmesser auf die Wichtigkeit dieses Gegenstandes aufmerksam zu machen, und diejenigen Aufgaben vorzutragen, die in der Ausübung am häufigsten vorkommen und deren Aufl. sich aus den vorhergegangenen Lehren der ebenen und sphärischen Trigonometrie leicht übersehen lassen.

D r u c k f e h l e r.

Seite 140 Zeile	5 v. u.	lese man	$\sin b \sin c \cos A$	anstatt	$\sin b \sin C \cos A$
— 204 —	7 v. u.	—	997,66	anstatt	907,66
— —	8 v. u.	—	997,66	anstatt	907,66
— 274 —	11 v. u.	—	DI	anstatt	DG
— —	7 v. u.	—	DE	anstatt	GE
— —	5 v. u.	—	ME—MI	anstatt	KE—KI
— 296 —	6 v. o.	—	über und unter	anstatt	unter und über
— 306 —	10 v. u.	—	nach Astrolabium,	fehlen die	Worte: die Borda'schen Vervielfältigungskreise, Theodolite, Sextanten *)
— 328 —	11 v. o.	—	§. 34	anstatt	§. 35
— 331 —	8 v. u.	—	A, B, C, (Fig. 21)	anst.	A, B, C
— 332 —	1 v. o.	—	§. 35	anstatt	§. 34

Vielleicht wird es manchen Auswärtigen nicht unangenehm sein, wenn ich den noch übrigen Raum dieses Blattes zur Anzeige einiger Meßinstrumente und deren Preise benutze. Bei den hiesigen sehr geschickten Mechanicis H. H. Siebrecht und besonders Mendelssohn erhält man:

Borda'sche Vervielfältigungskreise von 12" im Durchmesser von 10" zu 10" auf Silber getheilt, von der Art wie sie in Frankreich, Schweden u. zur Gradmessung gebraucht worden sind, für

350 — 400 Thlr.

Dieselben von 4—10" im Durchmesser mit Stellschrauben

100 — 300 Thlr.

Der verschiedene Kaufpreis rührt von der verschiedenen Güte und Vollkommenheit des Instruments her.

Sextanten von 5—10" im Durchmesser von 20 zu 20 Sec. auf Silber getheilt

50 — 100 Thlr.

Theodolite von 4—8"

100 — 125 Thlr.

Houssolen mit einigen Veränderungen

50 — 80 Thlr.

Astrolabien von 10" im Durchmesser von 10 zu 10" eingetheilt und sehr vollkommener Construction

100 — 125 Thlr.

Messketten, deren Defen durch das Anziehen der Kette nicht leicht verrückt oder ausgedehnt werden können 6—8 Thlr.

*) M. f. G. S. Branders Beschreibung eines Spiegelsextanten u. S. 9—31. Augsburg 1774.

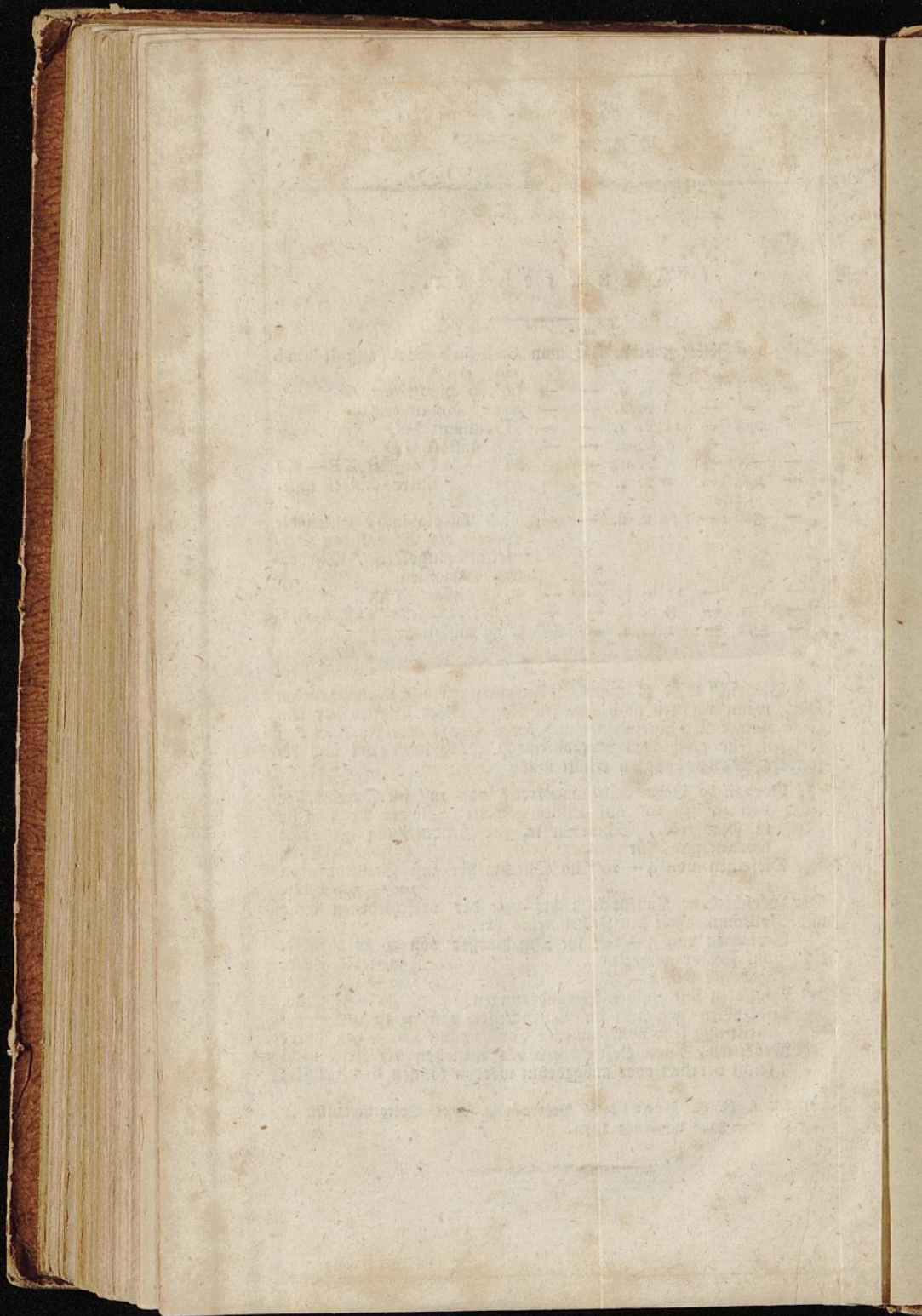


Fig. 5.

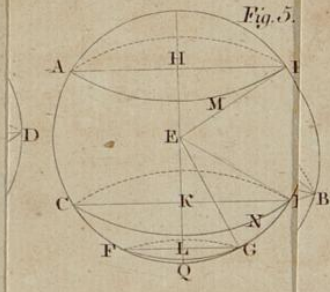


Fig. 9.

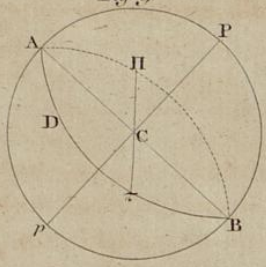


Fig. 17.

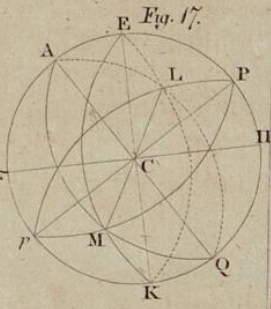


Fig. 20.

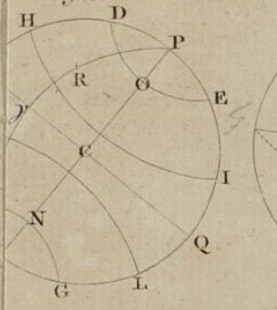


Fig. 27.

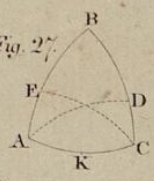


Fig. 35.

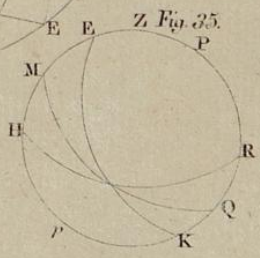


Fig. 31.

