

ZEHNTE KAPITEL.

Terrestrische Messungen.

§. 1.

Wir wenden uns nun zu den Beobachtungen, die man auf der Oberfläche unserer Erde selbst vorzunehmen hat, um die Entfernungen einzelner Orte derselben und ihre gegenseitige Lage sowohl, als auch die Grösse und Gestalt dieser Erde selbst zu bestimmen.

Das einfachste Mittel, die Distanz zweyer Orte auf der Oberfläche der Erde zu finden, ist die unmittelbare Messung mit einem bekannten Längenmaße z. B. der Toise. Allein wenn diese Distanz groß ist, so wird jene Methode beschwerlich und oft gänzlich unausführbar. Wollte man z. B. die Länge des Bogens des Meridians Ax (Fig 20) zwischen den zwey mehrere Meilen entfernten Orten A, E bestimmen, so kann man in dem ersten Orte A die Richtung des Meridians desselben durch astronomische Beobachtungen bestimmen, und wenn man den letzten Ort E aus A nicht, aber wohl andere näher liegende Orte B, C sehen kann, in dem Dreyecke ABC die drey Winkel messen, deren Summe nur wenig größer als 180° seyn wird. Hat man aber die Distanz von zweyen dieser Orte, z. B. die Distanz AB unmittelbar mit der Toise gemessen, so kann man mittels dieser gegebenen Dinge die beyden andern Seiten AC, BC durch Rechnung finden. Da man ferner die Winkel xAB, xAC , das heist die Azimute von B und C für den Horizont von A kennt, so kann man auch die Linien Ba, Ca und das Stück des Meridians Aa nebst dem Winkel AaB finden. Sieht man ferner aus B und C einen dritten Ort D , so kann man die Winkel CBD, BCD und BDC messen, woraus man die Linien BD, CD und den Theil ab des Meridians erhält. Mißt man ferner noch die Winkel DBE, BDE, BED , so erhält man die Linien BE, DE und Bc, cE und bc . Fällt man endlich von E auf den Meridian eine senkrechte Linie $Ex = Ec \sin Ec x$ und berechnet $cx = Ec \cos Ec x$, so ist die Summe

$$Aa + ab + bc + cx = A$$

die gesuchte Länge des Meridians zwischen den beyden Orten A und E.

Hat man überdies in beyden Orten A, E die Polhöhe oder die Zenithdistanz desselben Sterns gemessen, und ist B die Differenz dieser beyden Zenithdistanzen, so findet man aus A und B durch eine einfache Proportion den Werth eines Grades des Meridians in Toisen, also auch den Werth des Umkreises, der Oberfläche, des Halbmessers der Erde in Toisen. Dies wird hinreichen, eine erste Idee von dem Verfahren zu geben, welches man bey Meridianmessungen anzuwenden hat.

Wenn die Entfernung A B zweyer Orte selbst sich nicht gut unmittelbar messen läßt, so mißt man in der Nähe eines dieser Orte A, B, C, D... in einem schicklichen Platze eine Basis M N, und verbindet diese Basis mit dem Dreyecknetze, wodurch man z. B. erhält

$$A N = M N \cdot \frac{\sin M}{\sin A} \quad \text{und} \quad A B = A N \cdot \frac{\sin N}{\sin B}$$

Eine ähnliche zweyte Basis kann man auch an dem Ende des Dreyecknetzes messen, welche dem Ganzen zur Prüfung dienen wird.

§. 2.

Bey der vorläufigen Auswahl der Stationen muß man darauf sehen, daß man so viel möglich solche nimmt, die hoch genug sind, um sich am Himmel, nicht auf Berge oder Wälder zu projiziren; daß die Dreyecke so nahe als möglich gleichseitig sind, wodurch alle zu spitzen oder stumpfen Winkel vermieden werden; daß die Seiten so groß als möglich sind u. s. w. Die besten künstlichen Signale sind Lampen mit parabolischen Reverberen; Thürme, Pyramiden u. dgl. sind oft von der Sonne schief beleuchtet, und wenn man nach der Mitte des beleuchteten Theils visirt, entfernt man sich von ihrer Axe. Ist C (fig. 21) diese Axe, c der beleuchtete Punkt, so hat man den Winkel B A c statt dem wahren B A C gemessen. Ist

$$C A c = x, \quad A C = R, \quad C c = r \quad \text{und} \quad A C c = \alpha$$

so ist

$$\operatorname{Tg} x = \frac{\frac{r}{R} \sin \alpha}{1 - \frac{r}{R} \cos \alpha}$$

oder

$$x = \frac{r}{R} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin 1'}$$

und x wird zu dem beobachteten Winkel B A c addirt, wenn der beleuchtete Theil c näher bey dem andern Signale B ist, als die Axe C.

Ist h die Höhe des Signalpunktes über dem Boden, und D die Distanz desselben vom Beobachtungspunkte, so muß man

$$\frac{h}{D \sin 1''}$$

zur beobachteten Zenithdistanz addiren, um die Zenithdistanz des Fußpunktes der Station zu erhalten. Ist h' die Höhe des Instruments auf der Station A, so muß

$$\frac{h'}{D \sin 1''}$$

von der beobachteten Zenithdistanz subtrahirt werden, um die zu erhalten, die man auf dem Fußpunkte selbst beobachtet hätte. Ist endlich h'' die Höhe des Signals A über dem Instrumente, so muß

$$\frac{h''}{D \sin 1''}$$

zur beobachteten Zenithdistanz addirt werden, um jene zu erhalten, die man von der Spitze des Signals A genommen hätte.

Ist man gehindert, im Mittelpunkte C (Fig. 22) des Signals zu beobachten, muß man z. B. das Instrument seitwärts in O stellen, so beobachtet man den Winkel AOB statt dem wahren ACB. Sey

$$AOB = O, BOC = y$$

$$\text{also } COA = O + y \text{ und}$$

$$OC = r, AC = R, BC = L$$

so ist, wie man leicht findet

$$C = O + \left(\frac{r}{R}\right) \frac{\sin (O+y)}{\sin 1''} - \left(\frac{r}{L}\right) \frac{\sin y}{\sin 1''}$$

wo R, L die Entfernungen des rechts und links stehenden Signals sind, und wo man die Linie r und den Winkel y immer messen kann.

§. 3.

Zur Basismessung muß man eine Gegend wählen, die sich leicht und sicher mit dem Dreyecksnetze vereinigen läßt, eine ebene Gegend von festem Boden. Welche Vorsicht in der Auswahl und Behandlung der Maßstäbe anzuwenden sey, kann man in Delambres Astronomie III. Band und in dessen Base du syst. métrique nachsehen. Besteht die Basis aus zwey geraden Linien b, c , welche den sehr stumpfen Winkel A unter einander bilden, so ist die Entfernung d ihrer beyden äußersten Punkte

$$d = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

$$= (b+c) \left(1 - \frac{2bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2} \right)$$

Eigentlich erhält man durch die aufeinander folgende Nebeneinanderlegung der Toise zur Basis ein Polygon von mehrern geraden Linien, aber man wird sich leicht überzeugen, daß die Differenz dieses Polygons von einem Bogen des größten Kreises ganz unbedeutend ist. Um endlich die so erhaltene Basis auf das Niveau des Meeres zu reduzieren, sey R der Erdhalbmesser, H die Höhe des Bodens über dem Meere, B die gemessene Basis, so ist die reduzierte Basis

$$B' = B \left(\frac{R}{R+H} \right) = B - \frac{B}{R} \cdot H$$

§. 4.

Wären die drey Punkte des Dreyecks auf der Oberfläche derselben Kugel, so wäre das Dreyeck ein sphärisches. Da aber die drey Signale gewöhnlich ungleiche Höhen haben, so reduziert man jeden gemessenen Winkel auf den Horizont. Sind $90 + \alpha$, $90 + \beta$ die Zenithdistanzen der beyden Signalpunkte, und A der zwischen ihnen beobachtete, und endlich $A + x$ der auf den Horizont reduzierte Winkel, so ist

$$\cos(A+x) = \frac{\cos A - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}$$

woraus man leicht ableitet

$$\frac{x}{\sin 1''} = p^2 \operatorname{Tg} \frac{1}{2} A - q^2 \operatorname{Cotg} \frac{1}{2} A$$

$$\text{wenn } p = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad q = \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ ist.}$$

Will man überdies diesen horizontalen Winkel, der von den beyden Bogen gebildet wird, welche den Beobachtungspunkt mit den beyden andern Signalen verbinden, auf den Winkel bringen, welchen die Chorden dieser Bogen in dem Beobachtungsorte bilden, so seyen $2\alpha'$, $2\beta'$ diese Bogen und wie zuvor $A + x = B$ der Winkel der Bogen, so wie $B + y$ der Winkel der Chorden, so hat man, da der Winkel der Chorde eines Bogens mit dessen Tangente der Hälfte dieses Bogens gleich ist,

$$\cos(B+y) = \cos B \cos \alpha' \cos \beta' + \sin \alpha' \sin \beta'$$

also wieder

$$\frac{y}{\sin 1''} = q'^2 \operatorname{Cotg} \frac{B}{2} - p'^2 \operatorname{Tg} \frac{B}{2}$$

$$\text{wenn } p' = \frac{\alpha' + \beta'}{\alpha}, \quad q' = \frac{\alpha' - \beta'}{2} \text{ ist.}$$

Reduzirt man so alle Dreyecke auf ihre Chorden, so muß man auch die Basis B' , die ein Bogen des größten Kreises ist, auf ihre Chorde bringen, und man hat

$$\text{Chorde } B' = \text{Bog } B' - \frac{(\text{Bog } B')^3}{24 R^2}$$

Will man aber das ganze Netz als ein Aggregat von sphärischen Dreyecken behandeln, so fällt die Reduction auf die Chorde weg, und man wird die Basis B' , die ein Bogen des größten Kreises ist, auf ihre Sinus bringen, wodurch man hat

$$\text{Sin } B' = \text{Bog } B' - \frac{(\text{Bog } B')^3}{6 R^2}$$

und dann hat man in dem Dreyecke MAN (Fig. 20)

$$\text{Sin } AM = \frac{\text{Sin } N}{\text{Sin } A} \text{ Sin } B'$$

$$\text{Sin } AN = \frac{\text{Sin } M}{\text{Sin } A} \text{ Sin } B'$$

und so für die übrigen Dreyecke. Alle so erhaltenen Seiten der Dreyecke werden Sinus seyn, aber in dem gebrauchten Längennasse z. B. der Toise ausgedrückt, wenn der Halbmesser R der Erde eben so ausgedrückt wird.

Auch kann man sehr bequem die Cap. I. §. 3. gegebene Methode anwenden, und diese sphärischen Dreyecke wie geradlinichte behandeln. Sind $A B C$ die Winkel, und $\alpha \beta \gamma$ die gegenüberstehenden Seiten des sphärischen Dreyeckes, so sey

$$A' = A - \frac{1}{6} \beta \gamma \text{ Sin } A$$

$$B' = B - \frac{1}{6} \alpha \gamma \text{ Sin } B$$

$$C' = C - \frac{1}{6} \alpha \beta \text{ Sin } C$$

so hat man

$$\beta = \alpha \frac{\text{Sin } B'}{\text{Sin } A'},$$

$$\gamma = \alpha \frac{\text{Sin } C'}{\text{Sin } A'} \quad \text{u. s. w.}$$

Wenn endlich alle Dreyecke berechnet sind, so muß man die Richtung und die Länge des Meridians, der durch das ganze Netz läuft, bestimmen. Zu diesem Zwecke muß man ein, besser mehrere, Azimute an verschiedenen Stationen beobachten: das sicherste Mittel ist ein Mittagsrohr, welches man auf

eine der Stationen genau in den Meridian stellt, mit dessen Hilfe man ein künstliches Signal im Meridian selbst errichtet, und dasselbe durch Winkelmessungen mit den übrigen Dreyecken verbindet.

§. 5.

Ehe wir zu den verschiedenen Untersuchungen übergehen, welche man mit den so erhaltenen Distanzen und Winkeln anstellen kann, wird es gut seyn, einige allgemeine Betrachtungen voraus zu schicken.

Betrachtet man, wie dies gewöhnlich geschieht, die Erde als einen Körper, welcher durch die Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist, so sey CDB (Fig. 23) eine Ellipse, deren halbe große Axe BC = a und halbe kleine DC = b ist. Mit dem Halbmesser CB = Cd = a beschreibe man aus dem Mittelpunkte C der Ellipse einen Kreis dm B und ziehe m MP senkrecht auf CB, die Tangente MT in M und MN, darauf senkrecht und bis zur kleinen Axe DCN verlängert.

Sey

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

die Excentricität und

$$\alpha = \frac{a - b}{b}$$

die Abplattung der Erde, also

$$\varepsilon^2 = 2\alpha - 3\alpha^2 + 4\alpha^3 - 5\alpha^4 +$$

ferner sey

$$CP = x, PM = y, CM = r$$

und MEB = φ die beobachtete,

MCB = φ' die geocentrische Polhöhe

des Ortes M, so ist, wie man aus der bekannten Gleichung

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

der Ellipse leicht findet

$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi'}} = a \sqrt{\frac{1 + (1 - \varepsilon^2)^2 \operatorname{Tg}^2 \varphi}{1 + (1 - \varepsilon^2) \operatorname{Tg}^2 \varphi}}$$

$$x = \frac{b \cos \varphi'}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi'}} = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$$

S 2

$$y = \frac{b \sin \varphi'}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi'}} = \frac{a (1-\varepsilon^2) \sin \varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$$

die Normale

$$MN = \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$$

und endlich der Krümmungshalbmesser ρ der Ellipse in M

$$\rho = a (1-\varepsilon^2) (1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}}$$

I. Ist g der Meridiangrad der Breite φ , so ist

$$g = \frac{\rho \pi}{180} = \frac{a \pi (1-\varepsilon^2)}{180 (1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

wo π das Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser des Kreises bezeichnet. Entwickelt man eben so g' für φ' , so ist

$$g = g' \left(\frac{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi'}{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ und}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{g^{\frac{2}{3}} - g'^{\frac{2}{3}}}{g^{\frac{2}{3}} \sin^2 \varphi - g'^{\frac{2}{3}} \sin^2 \varphi'}$$

Bezeichnet eben so γ den Längengrad für die Breite φ , so ist

$$\gamma = \frac{\pi x}{180} = \frac{a \pi \cos \varphi}{180 \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$$

II. Für den Bogen $MB = s$ der Ellipse vom Aequator bis zu dem Punkte, dessen Breite φ ist, hat man

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{a (1-\varepsilon^2) d\varphi}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

oder was dasselbe ist

$$ds = \rho \cdot d\varphi$$

Entwickelt man diesen Ausdruck und integrirt, so erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$\alpha = \frac{3}{2^2},$$

$$\beta = \frac{3.5}{4^2} \alpha,$$

$$\gamma = \frac{5.7}{6^2} \beta,$$

$$\delta = \frac{7 \cdot 9}{8^2} \gamma \text{ --- setzt,}$$

$$s = \frac{b^2}{a} \left\{ \begin{aligned} & (1 + \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^6 + \delta \varepsilon^8 +) \frac{\pi \varphi}{180} \\ & - (\alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^6 + \delta \varepsilon^8 +) \sin \varphi \cos \varphi \\ & - \frac{2}{3} (\beta \varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^6 + \delta \varepsilon^8 +) \sin^3 \varphi \cos \varphi \\ & - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} (\gamma \varepsilon^6 + \delta \varepsilon^8 +) \sin^5 \varphi \cos \varphi \\ & - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} (\delta \varepsilon^8 +) \sin^7 \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

Für $\varphi = 90^\circ$ verschwinden alle Glieder dieser Reihe außer dem ersten, also drückt das erste Glied derselben die Länge Q eines Quadranten des Meridians aus, oder es ist

$$Q = \frac{b^2}{a} (1 + \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^6 +) \frac{\pi}{2}$$

Ist Q und ε bekannt, so ist

$$a = \frac{2Q}{\pi} \left(1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \frac{7}{64} \varepsilon^4 + \frac{15}{256} \varepsilon^6 + \right)$$

$$b = \frac{2Q}{\pi} \left(1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 - \frac{9}{64} \varepsilon^4 - \frac{33}{256} \varepsilon^6 - \right)$$

Endlich ist die Oberfläche Z einer Zone zwischen dem Aequator und dem Parallelkreise der Breite φ gleich

$$Z = 2 \pi b^2 (\sin \varphi + \frac{2}{3} \varepsilon^2 \sin^3 \varphi + \frac{2}{5} \varepsilon^4 \sin^5 \varphi + \frac{4}{7} \varepsilon^6 \sin^7 \varphi +)$$

§. 6.

Die unterscheidende Eigenschaft der durch geodätische Operationen gezogenen Linien auf der Oberfläche der Erde ist folgende. Man bildet, um z. B. die geodätische Linie $A a b c$. . fig. (20) zu beschreiben, ein erstes horizontales Dreyeck ABC , dessen ein Winkel zur Spitze den Anfangspunkt dieser Linie hat, und dessen zwey andere Winkel zur Spitze irgend zwey sichtbare Gegenstände B, C haben. Man bestimmt die Richtung der ersten Seite der krummen Linie gegen die Seiten des Dreyecks, oder die Winkel BAa , CAa und überdieß ihre Länge Aa bis zu dem Punkt, wo sie die Seite Bc schneidet. Dann bildet man ein zweytes horizontales Dreyeck BCD mit den beyden vorigen Gegenständen B, C und einem dritten D . Dieses zweyte Dreyeck ist nicht in der Ebene des ersten, es hat nur eine Seite BC mit ihm gemein. Die Verlängerung der ersten Seite Aa der krummen Linie erhebt sich also über die Ebene des zweyten Dreyecks: man biegt sie aber

gegen diese Ebene herab, und zwar so, daß sie immer die selben Winkel mit der den beyden Dreyecken gemeinschaftlichen Linie BC mache, und man sieht leicht, daß man sie nach einer auf diese Ebene senkrechten Linie biegen muß. So ist also die erste Seite der geodätischen Linie, deren Richtung willkürlich seyn kann, eine Tangente an der Oberfläche der Erde; ihre zweyte Seite ist die Verlängerung dieser Tangente nach einer Vertikallinie gebogen; ihre dritte Seite ist die Verlängerung der zweyten, nach einer Vertikallinie gebogen, und so fort für die übrigen.

Daraus folgt, daß die so gezogene geodätische Linie $Aa \dots x$ die kürzeste Linie ist, welche man auf der Oberfläche der Erde zwischen den zwey Punkten A und x ziehen kann. Denn ist DM BE (fig. 24) der Durchschnitt zweyer Ebenen, in deren erster der Punkt A, und in der zweyten der Punkt C liegt, so ist die kürzeste Linie zwischen A und C jene, welche mit DE zu beyden Seiten gleiche Winkel bildet. Ist nämlich $AD = a$ und $EC = c$ senkrecht auf dem Durchschnitte

$DE = b$ und ist $EM = x$, so ist

$$MC^2 = c^2 + x^2,$$

$$AM^2 = a^2 + (b - x)^2 \text{ also}$$

$$AM + MC = \sqrt{c^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + (b - x)^2}$$

Setzt man das Differential dieses Ausdrucks gleich Null, so erhält man

$$x : \sqrt{c^2 + x^2} = (b - x) : \sqrt{a^2 + (b - x)^2}$$

das heißt

$$EM : MC = DM : AM$$

und aus dieser Proportion folgt, daß

$$AMD = EMC$$

seyn muß, wenn AMC die kürzeste Linie ist.

I. Wir wollen daher die allgemeine Gleichung der kürzesten Linie auf einer gegebenen Oberfläche suchen.

$$\text{Ist } u = f \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots \right)$$

irgend eine Function der Größen

$$x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots,$$

welcher Größen Abhängigkeit von einander durch die Gleichung

$$w = \varphi \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, z, \frac{dz}{dx}, \dots \right)$$

gegeben seyn soll, so hat man bekanntlich für den größten oder kleinsten Werth der Function u folgende Ausdrücke

$$0 = \frac{d. f(y)}{d y} - d. \frac{d f(dy)}{d^2 y} + d^2. \frac{d f(d^2 y)}{d^3 y} \dots$$

$$+ \mu. \frac{d \varphi(y)}{d y} - d. \frac{\mu d \varphi(dy)}{d^2 y} + d^2. \frac{\mu d \varphi(d^2 y)}{d^3 y} -$$

und

$$0 = \frac{d. f(z)}{d z} - d. \frac{d f(dz)}{d^2 z} + \dots$$

$$+ \mu. \frac{d \varphi(z)}{d z} - d. \frac{\mu d \varphi(dz)}{d^2 z} +$$

wo μ einen willkürlichen unbestimmten Factor, und wo

$$\frac{d f(y)}{d y} \quad \text{oder} \quad \frac{d f(dy)}{d^2 y} \dots$$

das Differential der Function u bloß in Beziehung auf die Gröfse y oder $dy \dots$ durch dy oder $d^2 y$ dividirt, bezeichnet.

Ist, wie in unserm Falle, die Oberfläche, auf welcher die kürzeste Linie bestimmt werden soll, durch eine endliche Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $x y z$, ohne Differentialien, gegeben, so werden die vorhergehenden Ausdrücke viel einfacher. Es ist nämlich die zweyte der gegebenen Gleichungen

$$\omega = \varphi(x, y, z)$$

und das Element des Bogens der gesuchten Linie

$$u = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

also hat man

$$d. \frac{d f(dy)}{d^2 y} = d. \frac{dy}{ds},$$

$$d. \frac{d f(dz)}{d^2 z} = d. \frac{dz}{ds},$$

$$\mu. \frac{d \varphi(y)}{d y} = \mu. \left(\frac{d \omega}{dy} \right),$$

$$\mu. \frac{d \varphi(z)}{d z} = \mu. \left(\frac{d \omega}{dz} \right)$$

und daraus folgt

$$\left. \begin{aligned} \mu \left(\frac{d\omega}{dy} \right) - d. \frac{dy}{ds} &= 0 \\ \text{und eben so} \\ \mu \left(\frac{d\omega}{dz} \right) - d. \frac{dz}{ds} &= 0 \\ \mu \left(\frac{d\omega}{dx} \right) - d. \frac{dx}{ds} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Multipliziert man aber die erste dieser Gleichungen durch

$$\left(\frac{d\omega}{dz} \right) \text{ und}$$

die zweyte durch

$$\left(\frac{d\omega}{dy} \right),$$

so gibt ihr Unterschied

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dz} \right) d. \frac{dy}{ds} - \left(\frac{d\omega}{dy} \right) d. \frac{dz}{ds} &= 0 \\ \text{und eben so} \\ \left(\frac{d\omega}{dx} \right) d. \frac{dz}{ds} - \left(\frac{d\omega}{dz} \right) d. \frac{dx}{ds} &= 0 \\ \left(\frac{d\omega}{dx} \right) d. \frac{dy}{ds} - \left(\frac{d\omega}{dy} \right) d. \frac{dx}{ds} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ I.}$$

In diesen Gleichungen ist kein Differential beständig angenommen worden. Nimmt man also ds constant an, so ist

$$d. \frac{dx}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2},$$

$$d. \frac{dy}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2},$$

$$d. \frac{dz}{ds} = \frac{d^2z}{ds^2},$$

und die vorhergehenden Gleichungen gehen in folgende über

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dz} \right) d^2y - \left(\frac{d\omega}{dy} \right) d^2z &= 0 \\ \left(\frac{d\omega}{dx} \right) d^2z - \left(\frac{d\omega}{dz} \right) d^2x &= 0 \\ \left(\frac{d\omega}{dx} \right) d^2y - \left(\frac{d\omega}{dy} \right) d^2x &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ II.}$$

welches die Gleichungen der kürzesten Linie sind, die wir suchten.

Für eine Oberfläche, die durch die Rotation irgend einer krummen Linie um die Axe der x entstanden ist, ist die Gleichung der Oberfläche

$$\omega = \varphi(r, x) = 0$$

$$\text{wo } r^2 = y^2 + z^2 \text{ oder}$$

$$r \, dr = y \, dy + z \, dz,$$

und daraus folgt

$$\left(\frac{d\omega}{dz}\right) = \frac{z}{r} \left(\frac{d\omega}{dr}\right)$$

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right) = \frac{y}{r} \left(\frac{d\omega}{dr}\right)$$

also wird die erste der Gleichungen I.

$$z \, d\left(\frac{dy}{ds}\right) - y \, d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

deren Integral, für $ds = \text{Const.}$

$$z \, dy - y \, dz = A \, ds \quad \text{--- (III.)}$$

wo A die Constante der Integration ist. Diese Gleichung III. mit der gegebenen Gleichung

$$\varphi(r, x) = 0$$

reicht hin, die gesuchte kürzeste Linie zu bestimmen.

II. Man könnte dieselben Gleichungen noch einfacher durch folgende Betrachtungen finden. Die geodätische Linie ist nach dem Vorhergehenden einerley mit der, welche ein auf der gegebenen Oberfläche zwischen den beyden Punkten frey gespannter Faden beschreiben würde. Der Faden ist aber dann frey gespannt, oder alle seine Punkte sind dann unter einander im Gleichgewicht, wenn der Druck, welchen die Spannung auf die Oberfläche ausübt, in allen Punkten des Fadens senkrecht auf diese Oberfläche ausgeübt wird. Dieser Druck hat aber bekanntlich immer in der Ebene des Krümmungshalbmessers statt: also ist die kürzeste Linie auf einer Fläche die, deren Krümmungshalbmesser alle auf dieser Fläche senkrecht stehen.

Ist also

$$\omega = \varphi(x, y, z) = 0$$

die Gleichung der Fläche, und

$$x + A y + B z = 0$$

die Gleichung der Ebene der Krümmungshalbmesser, so ist die Gleichung der die Fläche berührenden Ebene

$$x \left(\frac{d\omega}{dz} \right) + y \left(\frac{d\omega}{dy} \right) + z \left(\frac{d\omega}{dx} \right) + C = 0$$

Da aber die beyden letzten Ebenen sich unter einem rechten Winkel schneiden sollen, so ist

$$\left(\frac{d\omega}{dx} \right) + A \left(\frac{d\omega}{dy} \right) + B \left(\frac{d\omega}{dz} \right) = 0 \dots (a)$$

Die Gleichungen

$$\omega = 0 \text{ und } x + Ay + Bz = 0$$

aber geben, wenn man sie differentiirt,

$$d\omega = \left(\frac{d\omega}{dx} \right) dx + \left(\frac{d\omega}{dy} \right) dy + \left(\frac{d\omega}{dz} \right) dz = 0 \dots (b)$$

$$dx + A dy + B dz = 0$$

$$A d^2 y + B d^2 z = 0$$

woraus man erhält

$$A = \frac{dx d^2 z}{dz d^2 y - dy d^2 z} \text{ und}$$

$$B = - \frac{dx d^2 y}{dz d^2 y - dy d^2 z}$$

Eliminirt man aber

$$\left(\frac{d\omega}{dx} \right)$$

aus den Gleichungen a, b, substituirt die erhaltenen Werthe von A, B und dividirt durch

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

so hat man

$$\left(\frac{d\omega}{dy} \right) \frac{dx^2 d^2 z + dy^2 d^2 z - dy dz d^2 y}{ds^3} - \left(\frac{d\omega}{dz} \right) \frac{dx^2 d^2 y + dz^2 d^2 y - dy dz d^2 z}{ds^3} = 0$$

$$\text{Es ist aber } d^2 s = \frac{dy d^2 y + dz d^2 z}{ds}$$

also auch

$$d. \frac{dz}{ds} = \frac{(ds d^2 z - dz d^2 s) ds}{ds^3}$$

und eben so

$$d. \frac{dy}{ds} = \frac{(ds d^2 y - dy d^2 s) ds}{ds^3}$$

und diese Ausdrücke sind offenbar den Factoren von

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right), \text{ und von } \left(\frac{d\omega}{dz}\right)$$

der letzten Gleichung gleich, also ist diese Gleichung

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right) d. \frac{dz}{ds} - \left(\frac{d\omega}{dz}\right) d. \frac{dy}{ds} = 0$$

welcher Ausdruck mit der ersten der Gleichungen I. identisch ist.

Eine dritte merkwürdige Ableitung jener Gleichungen für die kürzeste Linie folgt endlich noch aus der Betrachtung, daß die krumme Linie, welche ein Körper, der gezwungen ist, auf einer gegebenen Fläche zu bleiben, auf dieser Fläche beschreibt, wenn keine äußeren Kräfte auf ihn wirken, immer die kürzeste Linie unter allen ist, welche man in dieser Fläche zwischen zwey äußersten gegebenen Punkten ziehen kann.

III. Eigentlich gehört diese Aufgabe in das Gebiet der Variationsrechnung, von welcher wir einen der vorzüglichsten Sätze hier kurz entwickeln wollen.

Es sey U eine Function von x y und z und den Differentialen dieser Gröſſen, und y sowohl als z eine Function von x , wie das bey den Gleichungen der Curven von doppelter Krümmung der Fall ist, so kann das Integral

$$\int U dx$$

als irgend eine Function dieser Curve, ihr Bogen, ihre Fläche u. ſ. zw. zwischen zwey Endpunkten dieser Curve betrachtet werden. Man soll von allen krummen Linien, welche zwischen jenen zwey gegebenen Endpunkten gezogen werden können, diejenige finden, in welcher das Integral $\int U dx$ ein Größtes oder ein Kleinstes ist.

Es sey der Kürze wegen $dy = p dx$, $dp = q dx$, $dq = r dx$.. und

$$dz = p' dx, dp' = q' dx, dq' = r' dx...$$

und da, nach der Voraussetzung, U eine Function von y z pp' qq' ... ist, so kann man annehmen

$$dU = N dy + P dp + Q dq + R dr + \\ + N' dz + P' dp' + Q' dq' + R' dr' +$$

Bezeichnet man die willkührlichen Veränderungen, oder die Variationen von y und z durch δy und δz , so hat man für die Variation des gegebenen Integrals

$$\delta \int U dx = \int \delta (U dx) = \int (U \delta dx + dx \delta U) \\ = U \delta x - \int \delta x. dU + \int dx \delta U$$

Betrachtet man aber Anfangs die Gröfse U blofs als eine Function von x und y und ihren Differentialien, so ist $z = p' = q' \dots$ Null, und wenn man den oben gegebenen Werth von

$$dU = Ndy + Pdp + \dots$$

so wie den Werth von

$$\delta U = N\delta y + P\delta p + \dots$$

in der letzten Gleichung substituirt, so erhält man

$$\delta \int U dx = U\delta x + \int N dx (\delta y - p\delta x) + \int P d. (\delta y - p\delta x) + \int Q d. (\delta p - q\delta x) + \dots$$

Um diesen Ausdruck abzukürzen, sey $\omega = \delta y - p\delta x$, so ist

$$\delta p - q\delta x = \frac{d\omega}{dx},$$

$$\delta q - r\delta x = \frac{1}{dx} \cdot d. \frac{d\omega}{dx} \text{ u. f.}$$

also

$$\delta \int U dx = U\delta x + \int N\omega dx + \int P d\omega + \int Q d. \frac{d\omega}{dx} + \int R d. \frac{1}{dx} \cdot d. \frac{d\omega}{dx} + \dots$$

Integrirt man aber diese Ausdrücke theilweise, so ist

$$\int Q d. \frac{d\omega}{dx} = Q \frac{d\omega}{dx} - \frac{dQ}{dx} \omega + \int \omega d. \frac{dQ}{dx}$$

$$\int R d. \frac{1}{dx} \cdot d. \frac{d\omega}{dx} = \frac{R}{dx} d. \frac{d\omega}{dx} - \frac{dR}{dx} \frac{d\omega}{dx}$$

$$+ \frac{1}{dx} d. \frac{dR}{dx} \omega - \int \omega d. \frac{1}{dx} \cdot d. \frac{dR}{dx} \dots$$

Substituirt man diese Ausdrücke in der vorhergehenden Gleichung, und bemerkt man, dafs, wenn z nicht Null ist, man noch einer zweyten, dem vorigen ganz ähnlichen Ausdruck erhält, in welchem man blofs $N P Q \dots$ in $N' P' Q' \dots$

$$\text{und} \quad \omega = \delta y - p\delta x$$

$$\text{in} \quad \omega' = \delta z - p'\delta x$$

verwandelt, so erhält man für die vollständige Variation des gegebenen Integrals, wenn dx constant angenommen wird,

$$\delta \int U dx = \int \omega dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \dots \right) + \int \omega' dx \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
& + U \delta x + \omega \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \right) \\
& + \omega' \left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{d^2R'}{dx^2} - \frac{d^3S'}{dx^3} + \right) \\
& + \frac{d\omega}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \right) \\
& + \frac{d\omega'}{dx} \left(Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{d^2S'}{dx^2} - \right) \\
& + \frac{d^2\omega}{dx^2} \left(R - \frac{dS}{dx} + \right) + \dots
\end{aligned}$$

Um daher den gesuchten größten oder kleinsten Werth dieses Integrals zu erhalten, darf man nur, nach den bekannten Vorschriften der Differentialrechnung, die gefundene Variation gleich Null setzen, wo dann ein Größtes oder ein Kleinstes statt haben wird, nach dem der Werth des Integrals

$$\int \delta^2 U \, dx$$

zwischen denselben Gränzen, wie vorhin das Integral $\int U \, dx$ genommen, negativ oder positiv ist.

Wenn man aber die gefundene Variation gleich Null setzt, so wird man bemerken, daß diese Variation aus zwey unter einander völlig verschiedenen Theilen besteht, deren einer das Integralzeichen vor sich hat, während der andere davon frey ist, und daß man daher jeden dieser Theile für sich gleich Null setzen muß.

Setzt man den ersten Theil dieser Variation gleich Null, so wird man haben

$$\left. \begin{aligned}
0 &= N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \\
0 &= N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} -
\end{aligned} \right\}$$

und dies werden die Gleichungen der gesuchten Linie seyn, in welcher das Integral

$$\int U \, dx$$

zwischen den gegebenen Gränzen genommen, ein Größtes oder ein Kleinstes ist. Da diese Gleichungen erste .. zweyte .. Differentialien enthalten, so wird ihre erste, zweyte ... Integration auch eine, zwey ... Constanten einführen, und die Bestimmung dieser Constanten wird der zweyte Theil der gegebenen Gleichung geben, welcher das Integralzeichen nicht enthält. Dieser

zweyte Theil wird nämlich die Bedingungen enthalten, welche für die Endpunkte jener Curve festgesetzt werden, daß sie sich z. B. an zwey fixen Punkten enden, oder daß sie von zwey andern gegebenen Curven begränzt seyn, oder daß sie diese andern Curven unter einem gegebenen Winkel schneiden soll u. f.

Man bemerke noch, daß jene ersten Gleichungen nichts anders sind, als die Bedingungsgleichungen der Integrabilität der gegebenen Gleichung $U dx$. Denn wenn diese Gleichungen gleich Null sind, so enthält die Variation des Ausdruckes

$$\int U dx$$

kein Integralzeichen mehr, oder diese Variation hängt für alle möglichen Werthe von xyz nur von den Variationen der Endpunkte der Curve ab, was nicht möglich wäre, wenn $U dx$ nicht für sich integrabel ist.

Nimmt man also bloß auf das erste Glied jener Variation Rücksicht, welche das Integralzeichen enthält, so hat man, wenn man die Variation von x , oder δx gleich Null setzt, für die gesuchte Curve

$$\begin{aligned} (N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} -) \cdot \delta y \\ + (N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} -) \cdot \delta z = 0 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

und wenn die zwey unbekannten Größen y und z von einander unabhängig sind, so werden es auch ihre Variationen seyn, daher die letzte Gleichung den zwey folgenden gleich gelten wird

$$\left. \begin{aligned} N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - &= 0 \\ N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

und diese beyden Gleichungen werden die der gesuchten Curve seyn.

Sind aber die Größen y und z durch irgend eine gegebene Bedingungsgleichung von einander abhängig, soll z. B. die gesuchte Curve auf irgend einer gegebenen Fläche liegen, deren Gleichung $L = 0$ ist, so wird man für diese Bedingungsgleichung haben

$$\left(\frac{dL}{dy}\right) \cdot \delta y + \left(\frac{dL}{dz}\right) \cdot \delta z = 0$$

und wenn man aus dieser Gleichung und der gegebenen (1) eine

der zwey Gröfsen $\delta y, \delta z$ eliminirt, wodurch auch die andere entfernt wird, so hat man

$$\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \dots\right) \cdot \left(\frac{dL}{dz}\right) - \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \dots\right) \cdot \left(\frac{dL}{dy}\right) = 0 \quad (3)$$

und die Gleichung (3), verbunden mit der Gleichung $L = 0$ wird für jeden besondern Fall die gesuchten Werthe von y und z geben. Auch kann man diesen Fall auf den ersten zurückführen, wenn man statt den Gleichungen (2) folgende annimmt,

$$\left. \begin{aligned} N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \dots + \lambda \left(\frac{dL}{dy}\right) &= 0 \\ N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \dots + \lambda \left(\frac{dL}{dz}\right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

wo λ ein unbestimmter Factor ist. Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Gröfse λ , so erhält man wieder die Gleichung (3); sind aber die Gröfsen y und z von einander unabhängig, so ist $\lambda = 0$, und man erhält die Gleichungen (2).

Um das Vorhergehende durch ein Beyspiel zu erläutern, suche man die kürzeste Linie zwischen zwey gegebenen Punkten. Da der allgemeine Ausdruck der Linie

$$s = \int (\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}) = \int dx \cdot \sqrt{1+p^2+p'^2}$$

ist, so hat man

$$U = \sqrt{1+p^2+p'^2}, \quad dU = \frac{p \, dp + p' \, dp'}{\sqrt{1+p^2+p'^2}}$$

$$P = \frac{p}{U}, \quad P' = \frac{p'}{U} \quad \text{und}$$

$$N = N' = Q = Q' = 0.$$

Daher ist der Theil des vorhergehenden Ausdrucks unter dem Integralzeichen

$$\frac{dP}{dx} = 0, \quad \frac{dP'}{dx} = 0,$$

oder wenn man integrirt,

$$\frac{dy}{dx} = A, \quad \frac{dz}{dx} = B,$$

und wenn man noch einmal integrirt.

$$y = Ax + B$$

$$z = Bx + B'$$

also die gesuchte Curve eine gerade Linie. Sind die beyden äußersten Punkte derselben fix, so verschwindet der andere Theil der Variation, welcher das Integralzeichen nicht enthält. Soll aber z B die gesuchte Curve an ihren Endpunkten durch zwey krumme Flächen begränzt seyn, deren Gleichungen sind

$$dz' = m' dx' + n' dy' \text{ für den Anfangspunkt}$$

$$dz'' = m'' dx'' + n'' dy'' \text{ für den Endpunkt der Curve,}$$

so ist der andere Theil der Variation

$$U \delta x + \omega P + \omega' P' = 0 \text{ oder}$$

$$U \delta x + (\delta y - p \delta x) P + (\delta z - p' \delta x) P' = 0$$

Substituirt man aber in den beyden letzten Gleichungen für dz' und dz'' die Werthe dieser Gröſsen aus den vorletzten Gleichungen, und nimmt ihre Differenzen, und setzt endlich in den erhaltenen Ausdrücken die Factoren der unter sich unabhängigen Variationen $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta y'$, $\delta y''$, jeden für sich gleich Null, so erhält man

$$1 + m' \frac{dz'}{dx'} = 0 \quad \text{und} \quad 1 + m'' \frac{dz''}{dx''} = 0$$

$$1 + n' \frac{dz'}{dy'} = 0 \quad 1 + n'' \frac{dz''}{dy''} = 0$$

und da diese Gleichungen die der Normalen auf jene beyden Flächen sind, so muß die gesuchte kürzeste Curve, oder die gefundene gerade Linie, auf jenen beyden Flächen senkrecht stehen.

Wollte man aben die kürzeste Linie auf einer gegebenen Fläche zwischen zwey gegebenen Punkten dieser Fläche erhalten, so sey die Gleichung dieser Fläche

$$L = 0 = A dx + B dy + C dz$$

wo A, B, C Functionen von x y z sind. Dies vorausgesetzt hat man, wie zuvor,

$$U = \sqrt{1+p^2+p'^2},$$

$$P = \frac{p}{U}, \quad P' = \frac{p'}{U}$$

$$N = N' = 0$$

und daher die Gleichung (3)

$$\left(\frac{dL}{dz}\right) dz - \left(\frac{dL}{dy}\right) dy = 0, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{dL}{dz}\right) \cdot d \cdot \frac{p}{U} - \left(\frac{dL}{dy}\right) \cdot d \cdot \frac{p'}{U} = 0$$

oder da

$$U \, dx = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds \text{ ist,}$$

$$\left(\frac{dL}{dz}\right) \cdot d \cdot \frac{dy}{ds} - \left(\frac{dL}{dy}\right) \cdot d \cdot \frac{dz}{ds} = 0$$

für die Gleichung der kürzesten Linie auf der gegebenen Fläche, wie wir früher schon gefunden haben. Für die Kugel z. B. ist

$$A = x, B = y, C = z$$

und

$$L = 0 = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

wenn r der Halbmesser der Kugel ist. Die letzte Gleichung wird daher für diesen besondern Fall

$$\left(\frac{dL}{dz}\right) d^2 y - \left(\frac{dL}{dy}\right) d^2 z = 0,$$

und eben so

$$\left(\frac{dL}{dx}\right) d^2 y - \left(\frac{dL}{dy}\right) d^2 x = 0$$

das heißt $z d^2 y - y d^2 z = 0$

$$x d^2 y - y d^2 x = 0$$

Die Integralien dieser beyden Gleichungen sind

$$z \, dy - y \, dz = C$$

$$x \, dy - y \, dx = C'$$

also ist, wenn C'' irgend eine Constante bezeichnet,

$$z \, dy - y \, dz = C'' (x \, dy - y \, dx)$$

Multipliziert man aber diese Gleichung durch $\frac{1}{y^2}$, und integirt sie, so hat man

$$z = C'' x + B y$$

und dies ist die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Verbindet man sie mit der Gleichung $L = 0$ der Kugel selbst, so erhält man die Gleichung eines größten Kreises, der daher die gesuchte kürzeste Linie zwischen zwey Punkten der Kugel ist.

IV. Um endlich den Krümmungshalbmesser einer krummen Linie von doppelter Krümmung, d. h. die Gröfse des Halbmessers des Krümmungskreises und den Ort seines Mittel-

punktes zu finden, dessen drey rechtwinklichte Coordinaten a, b, c seyn sollen, so sind die Gleichungen eines Kreises, der denselben Mittelpunkt und den Halbmesser ρ hat, folgende

$$\rho^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

$$0 = (x - a) + m(y - b) + n(z - c)$$

wo m, n zwey willkürliche Gröfsen sind, welche die Lage dieses Kreises im Raume ausdrücken. Soll dieser Kreis der Krümmungskreis der gegebenen Curve seyn, so müssen nicht nur die Werthe der xyz aus diesen beyden Gleichungen, sondern auch noch ihre ersten und zweyten Differentialien mit jenen der gegebenen Curve identisch seyn. Diese Differentialien der vorhergehenden Gleichungen aber sind, wenn man kein erstes Differential beständig annimmt,

$$(x - a) dx + (y - b) dy + (z - c) dz = 0$$

$$dx + m dy + n dz = 0$$

$$(x - a) d^2 x + (y - b) d^2 y + (z - c) d^2 z + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

$$d^2 x + m d^2 y + n d^2 z = 0$$

Die vierte und sechste dieser Gleichungen geben sofort

$$m = \frac{d z d^2 x - d x d^2 z}{d y d^2 z - d z d^2 y}$$

und

$$n = \frac{d x d^2 y - d y d^2 x}{d y d^2 z - d z d^2 y}$$

Substituirt man diese Werthe von m, n in der zweyten jener Gleichungen, so gibt die zweyte, dritte und fünfte, welche drey Gleichungen blofs die drey unbekannten Gröfsen a, b, c enthalten, folgende Werthe derselben

$$a - x = \frac{ds^2}{A} ((dy^2 + dz^2) d^2 x - (dy d^2 y + dz d^2 z) dx)$$

$$b - y = \frac{ds^2}{A} ((dx^2 + dz^2) d^2 y - (dx d^2 x + dz d^2 z) dy)$$

$$c - z = \frac{ds^2}{A} ((dx^2 + dy^2) d^2 z - (dy d^2 y + dx d^2 x) dz)$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \text{ und}$$

$$A = ds^2 (d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2) - (dx d^2 x + dy d^2 y + dz d^2 z)$$

Kennt man so die Coordinaten a, b, c des Mittelpunkts des Krümmungskreises, und die Lage der Ebene desselben durch die

Größen m n , so ist aus der ersten der oben gegebenen Gleichungen der Halbmesser des Krümmungskreises

$$\varsigma = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$

In allem Vorhergehenden wurde kein Differential als beständig angenommen. Ist also der Bogen

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

constant, so ist

$$dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z = 0 \text{ also}$$

$$A = ds^2 (d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) \text{ und daher}$$

$$a - x = \frac{ds^2 d^2x}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2} = \rho^2 \frac{d^2x}{ds^2}$$

$$b - y = \frac{ds^2 d^2y}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2} = \varsigma^2 \frac{d^2y}{ds^2}$$

$$c - z = \frac{ds^2 d^2z}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2} = \rho^2 \frac{d^2z}{ds^2}$$

und endlich

$$\varsigma = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}$$

aus welchen Betrachtungen man auch zugleich leicht die allgemeine Theorie der Evoluten ableiten wird.

§. 7.

Sind xyz die Coordinaten eines Punktes der Fläche, und $x'y'z'$ die der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt in dem ersten gegebenen Punkt der Fläche, und deren Halbmesser R ist, so ist die Gleichung der Kugel

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = R^2 \dots (A)$$

und die Gleichungen der Normale der Fläche in dem gegebenen Punkt sind

$$x - x' + (z - z')p = 0 \dots (B)$$

$$y - y' + (z - z')q = 0 \dots (C)$$

wo

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

ist, und wo $x'y'z'$ die veränderlichen Größen der Normale sind,

während die Größen $xyzpq$ für dieselbe Normale als constant angesehen werden. Denkt man sich also eine zweyte Normale in einem dem ersten unendlich nahen Punkt der Fläche, so wird diese zweyte Normale, wenn sie mit der ersten in einer Ebene liegt, diese irgendwo in einem Punkte schneiden, und dieser Durchschnittspunkt wird derjenige Punkt der ersten Normale seyn, für welche $x' y' z'$ sich nicht ändert, während sich $x y z$ ändert, d. h. differentiirt man die zwey Gleichungen B und C, indem man $x' y' z'$ als constant ansieht, so erhält man

$$g(z - z')^2 + h(z - z') + k^2 = 0 \dots (D)$$

$$((1+q^2)s - pqt) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$+ ((1+q^2)r - (1+p^2)t) \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$- (1+p^2)s + pqr = 0 \dots (E)$$

wo man der Kürze wegen gesetzt hat

$$r = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), s = \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right), t = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \text{ und}$$

$$g = rt - s^2$$

$$h = (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t,$$

$$k^2 = 1 + p^2 + q^2$$

Die drey ersten Gleichungen B, C, D zusammen genommen geben die Coordinaten des Durchschnittspunktes beyder Normalen. Ist nämlich

$$m = h + \sqrt{h^2 - 4gk^2}$$

so findet man für diese Coordinaten

$$x - x' = \frac{2k^2 p}{m}$$

$$y - y' = \frac{2k^2 q}{m}$$

$$z - z' = -\frac{2k^2}{m}$$

Die vierte Gleichung E aber, die keine der Coordinaten enthält, ist die Bedingungsgleichung, die den Werth von

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

oder die Richtung angibt, in welcher man von dem ersten Punkte der Fläche ausgehen muß, um zu dem zweyten zu kommen,

damit beyde Normalen sich schneiden. Diese Richtung ist immer zweyfach, da die Gleichung E für

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

des zweyten Grades ist. Man kann immer, ohne der Allgemeinheit der Untersuchung Eintrag zu thun, annehmen, daß die drey coordinirten Ebenen der

$$xy, xz \text{ und } yz$$

so gewählt wurden, daß die berührende Ebene in dem gegebenen Punkt der Fläche parallel mit der Ebene der xy ist, dann ist

$$p = q = 0$$

und die Gleichung E wird

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{r-t}{s}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) - 1 = 0$$

Sind daher n und n' die beyden Werthe von

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

aus dieser Gleichung, so hat man

$$n \cdot n' + 1 = 0$$

woraus folgt, daß jene beyden Richtungen, in welchen sich die Normalen zweyer nächsten Punkte schneiden, aufeinander senkrecht sind.

Da auch die Gleichung D des zweyten Grades in Beziehung auf $(z - z')$ ist, so sind auch die Werthe der Coordinaten des Durchschnittspunktes der Normalen doppelt, oder die erste wird im allgemeinen von den beyden andern in zwey verschiedenen Punkten geschnitten.

Denkt man sich den Durchschnitt der ersten Normale mit der zweyten als den Mittelpunkt einer Kugel, deren Fläche durch den ersten Punkt der gegebenen Oberfläche geht, so sind die beyden ersten Normalen auch auf der Kugel normal; die Fläche der Kugel und die gegebene Fläche haben also zwey nächste gemeinschaftliche Normalen, also auch zwey nächste gemeinschaftliche tangirende Ebenen; also haben auch beyde Flächen dieselbe Krümmung in dieser Richtung, die durch den ersten Werth

$$n \text{ von } \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

bestimmt wird, und der Mittelpunkt dieser Krümmung wird zu-

gleich der Mittelpunkt der Kugel, d. h. der Durchschnitt der beyden ersten Normalen seyn.

Denkt man sich eben so den Durchschnitt der ersten Normale mit der dritten als den Mittelpunkt einer Kugel, deren Fläche durch den ersten Punkt der gegebenen Fläche geht, so haben beyde Flächen auch in dieser Richtung, die durch den zweyten Werth

$$n' \text{ von } \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

bestimmt wird, einerley Krümmung, und der Mittelpunkt dieser Krümmung ist der der zweyten Kugel.

Jede Fläche hat also, unter unzähligen anderen, in jedem ihrer Punkte zwey Krümmungen, deren Richtungen in zwey auf einander senkrechten Normalebenen liegen, und deren Mittelpunkte der Krümmung in der Normallinie jenes Punktes sind.

Sind

$$x \ y \ z$$

die Coordinaten jenes Punktes, und

$$x' \ y' \ z'$$

die des Mittelpunktes der Krümmung, so ist offenbar die Distanz dieser beyden Punkte, d. h. der Halbmesser der Krümmung, nichts anders, als die Gröfse R der Gleichung (A). Man wird daher diesen Halbmesser R der Krümmung finden, wenn man in der Gleichung (A) die oben gegebenen Werthe von

$$x - x', \ y - y' \text{ und } z - z'$$

substituirt, wodurch man erhält

$$R = (z - z') \sqrt{1 + p^2 + q^2} \text{ oder} \\ R = - \frac{2 k^3}{h + \sqrt{h^2 - 4 g k^2}}$$

I. Dieselben Resultate lassen sich noch auf folgende merkwürdige Art finden.

Ist $z = \varphi(x, y)$ die Gleichung einer Fläche, und geht x in $x + \xi$, und y in $y + v$ über, so geht bekanntlich z über in

$$z + \zeta = z + \left(\xi \frac{dz}{dx} + v \frac{dz}{dy} \right) + \frac{1}{1.2} \left(\xi^2 \frac{d^2z}{dx^2} + 2 \xi v \frac{d^2z}{dx dy} + v^2 \frac{d^2z}{dy^2} \right) \\ + \frac{1}{1.2.3} \left(\xi^3 \frac{d^3z}{dx^3} + 3 \xi^2 v \frac{d^3z}{dx^2 dy} + 3 \xi v^2 \frac{d^3z}{dx dy^2} + v^3 \frac{d^3z}{dy^3} \right) +$$

Ist aber $z' = f(x' y')$ die Gleichung einer andern Fläche, so ist eben so, wenn

$$x' \text{ in } x' + \xi, \text{ und } y' \text{ in } y' + \upsilon$$

übergeht,

$$z' + \zeta = z' + \left(\xi \frac{dz'}{dx'} + \upsilon \frac{dz'}{dy'} \right) + \text{u. f.}$$

Bestimmt man in der zweyten Fläche eine ihrer Constanten so, daß $z = z'$ wird, so werden beyde Flächen einen zu den Coordinaten $x' y' z'$ gehörenden Punkt gemeinschaftlich haben, und die Differenz der diesem gemeinschaftlichen Punkte nächsten Ordinaten

$$z + \zeta, z' + \zeta$$

wird seyn

$$\begin{aligned} \Delta &= \xi \left(\frac{dz'}{dx'} - \frac{dz}{dx} \right) + \upsilon \left(\frac{dz'}{dy'} - \frac{dz}{dy} \right) \\ &+ \frac{\xi^2}{2} \left(\frac{d^2 z'}{dx'^2} - \frac{d^2 z}{dx^2} \right) \\ &+ \xi \upsilon \left(\frac{d^2 z'}{dx' dy'} - \frac{d^2 z}{dx dy} \right) \\ &+ \frac{\upsilon^2}{2} \left(\frac{d^2 z'}{dy'^2} - \frac{d^2 z}{dy^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

in welchem Ausdrücke man bekanntlich die willkührlichen Größen ξ und υ so klein annehmen kann, daß die Summe aller der Glieder, die in irgend eine Potenz von ξ , oder υ multiplicirt sind, größer werde, als die Summe aller nachfolgenden, in höhere Potenzen von ξ und υ multiplicirten Glieder, so lange nämlich jene erste Summe nicht schon für sich gleich Null ist. Daraus folgt, daß in der Nähe des gemeinschaftlichen Punktes beyder Flächen die Differenz Δ der Ordinaten beyder Flächen desto kleiner seyn wird, je mehr von den ersten Gliedern der letzten Reihe verschwinden, d. h. je mehr von den Factoren

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dz'}{dx'} - \frac{dz}{dx} \right), \\ &\left(\frac{dz'}{dy'} - \frac{dz}{dy} \right) \dots \end{aligned}$$

gleich Null werden.

Nimmt man also in der zweyten Fläche

$$z' = f(x' y')$$

noch zwey Constanten so an, daß

$$\frac{dz'}{dx'} = \frac{dz}{dx} \quad \text{und}$$

$$\frac{dz'}{dy'} = \frac{dz}{dy}$$

werde, so sind beyde Flächen bey dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte einander so nahe, daß keine dritte Fläche zwischen ihnen durchgehen kann, außer wenn diese dritte Fläche denselben Bedingungen entspricht, welche durch die zwey letzten Gleichungen ausgedrückt werden, d. h. wie man sich gewöhnlich ausdrückt, die beyden ersten Flächen werden eine Berührung der ersten Ordnung mit einander haben.

Bestimmt man überdiß in der zweyten Fläche noch drey Constanten so, daß

$$\frac{d^2 z'}{dx'^2} = \frac{d^2 z}{dx^2},$$

$$\frac{d^2 z'}{dx' dy'} = \frac{d^2 z}{dx dy}, \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2 z'}{dy'^2} = \frac{d^2 z}{dy^2}$$

werde, so werden beyde Flächen sich um den gemeinschaftlichen Punkt noch mehr an einander schliessen, oder sie werden eine Berührung der zweyten Ordnung haben, und so fort mit den Berührungen aller höhern Ordnungen.

Um dies auf Beyspiele anzuwenden, sey die erste Fläche eine Ebene und ihre Gleichung

$$z = a + bx + cy$$

Soll diese Ebene mit der andern Fläche, deren Gleichung

$$z = \varphi(x, y)$$

ist, einen Punkt gemein haben, der zu den Coordinaten $x' y' z'$ gehört, so hat man auch

$$z' = a + bx' + cy'$$

und eliminirt man aus diesen Gleichungen eine der Constanten, z. B. a , so ist

$$z - z' = b(x - x') + c(y - y')$$

und dies ist die Gleichung einer Ebene, die mit der gegebenen Fläche den Punkt gemein hat, dessen Coordinaten $x' y' z'$ sind.

Soll aber die Ebene mit der Fläche in diesem gegebenen Punkt eine Berührung der ersten Ordnung haben, so ist

$$z' = a + b x' + c y'$$

$$\frac{dz'}{dx'} = \frac{dz}{dx} = b$$

$$\frac{dz'}{dy'} = \frac{dz}{dy} = c$$

also auch

$$a = z' - x' \frac{dz'}{dx'} - y' \frac{dz'}{dy'}$$

Substituirt man diese Werthe von a, b, c in der Gleichung

$$z = a + b x + c y$$

so erhält man

$$z - z' = (x - x') \left(\frac{dz'}{dx'} \right) + (y - y') \left(\frac{dz'}{dy'} \right)$$

und dies ist die Gleichung der Ebene, welche mit der Fläche in dem gegebenen Punkt eine Berührung der ersten Ordnung hat. Da die Gleichung der Ebene nur drey Constanten enthält, so kann auch eine Ebene mit einer Fläche nur eine Berührung der ersten Ordnung haben.

Es seyen a, b, c die Coordinaten des Mittelpunkts einer Kugel, deren Halbmesser R ist, so ist die Gleichung der Oberfläche der Kugel

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \dots (I)$$

und da diese Gleichung nur vier Constanten enthält, so ist auch die Kugel zu einer Berührung der zweyten Ordnung nicht hinreichend. Für eine Berührung der ersten Ordnung aber hat man

$$(x' - a)^2 + (y' - b)^2 + (z' - c)^2 = R^2$$

$$\left(\frac{dz'}{dx'} \right) = - \frac{x' - a}{z' - c}$$

$$\left(\frac{dz'}{dy'} \right) = - \frac{y' - b}{z' - c}$$

Eliminirt man aus diesen drey Gleichungen die Größen

$$a, b, c,$$

so hat man, wenn wieder

$$p = \frac{dz'}{dx'}, \quad q = \frac{dz'}{dy'} \text{ ist,}$$

$$a = x' + \frac{p R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$b = y' + \frac{q R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$c = z' - \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Bestimmt man also die Werthe von p, q aus der Differentialgleichung der gegebenen Fläche, und substituirt sie in den angezeigten Werthen von a, b, c , so erhält man den Mittelpunkt einer Kugel, die mit der Fläche eine Berührung der ersten Ordnung hat; der Halbmesser der Kugel ist willkürlich.

Man kann aber auch annehmen, daß für die gesuchte Kugel noch die Summe aller Glieder der oben gegebenen Reihe verschwinden, welche in

$$\xi^2, \nu^2 \text{ und } \xi \nu$$

multiplicirt sind. Diese Bedingung gibt, wenn

$$\frac{\nu}{\xi} = \omega$$

gesetzt wird.

$$\left(\frac{d^2 z'}{dx'^2} - \frac{d^2 z}{dx^2}\right) + 2\omega \left(\frac{d^2 z'}{dx' dy'} - \frac{d^2 z}{dx dy}\right) + \omega^2 \left(\frac{d^2 z'}{dy'^2} - \frac{d^2 z}{dy^2}\right) = 0.$$

Für die Kugel ist aber

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1+p^2}{c-z}, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{1+q^2}{c-z}$$

und da

$$(z-c) \left(\frac{dz}{dx}\right) + (x-a) = 0$$

ist, so ist auch

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) \left(\frac{dx}{dx}\right) + (z-c) \left(\frac{d^2 z}{dx dy}\right) = 0, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dx dy}\right) = \frac{pq}{c-z}$$

Läßt man also den Größen r, s, t die in §. 7. gegebene Bedeutung, so ist die letzte Bedingungsgleichung

$$r + 2\omega s + \omega^2 t^2$$

$$= \frac{1 + p^2 + 2\omega pq + \omega^2 (1 + q^2)}{c - z}$$

und da

$$c - z = - \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

ist, so hat man

$$R = - \frac{(1+p^2+2pq\omega+(1+q^2)\omega^2) \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}}{r+2s\omega+t\omega^2} \dots (II)$$

und dies ist der Ausdruck des Halbmessers einer Kugel, welche die Eigenschaft hat, daß keine andere Kugel zwischen ihr und der gegebenen Fläche in dem Punkte durchgehen kann, der zu den Ordinaten $x + \xi$, $y + \upsilon$ gehört.

In diesem Ausdrücke von R ist aber die Gröfse

$$\omega = \frac{\upsilon}{\xi}$$

willkürlich. Gibt man daher dieser Gröfse ω irgend einen bestimmten Werth, so wird die genannte Eigenschaft der Kugel für alle die Punkte gelten, für welche ω denselben Werth hat, d. h. für alle Punkte der Curve, die in dem Durchschnitte einer ihrer Lage nach constanten Ebene mit der gegebenen Fläche liegen.

Da das Verhältnifs von ω willkürlich ist, so wollen wir denjenigen Werth von ω suchen, für welchen R ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Setzt man der Kürze wegen

$$A = (1+q^2)s - pqt$$

$$B = (1+q^2)r - (1+p^2)t$$

$$C = (1+p^2)s - pqr$$

so gibt die Gleichung (II.)

$$\frac{dR}{2d\omega} = - (A\omega^2 + B\omega - C) \cdot (r + 2s\omega + t\omega^2)^{-2} \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}$$

Setzt man also

$$dR = 0$$

so hat man

$$A\omega^2 + B\omega - C = 0 \dots III.$$

und dies ist offenbar dieselbe Gleichung mit der, welche wir oben E genannt haben. Sie gibt

$$\omega = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A} \dots (IV)$$

und dies ist der gesuchte Werth von ω .

Wenn man den vorhergehenden Ausdruck dR noch einmal differentiirt, so findet man leicht, daß in der Gleichung (IV) das obere positive Zeichen für den größten, und das untere für den kleinsten Werth von R gehört.

Jede Fläche hat also in jedem ihrer Punkte nach irgend einer durch ω bestimmten Richtung eine Krümmung, wozu der Halbmesser R aus (II.) gehört, und unter allen diesen Richtungen gibt es zwey, die auf einander senkrecht sind, in welchen allein die zwey nächsten Normalen der Fläche sich schneiden, oder in einer Ebene liegen und die Krümmungen der Fläche in diesen beyden Richtungen sind zugleich die größte und die kleinste Krümmung, die um diesen Punkt statt haben.

II. Um diese allgemeinen Betrachtungen auf ein Beyspiel anzuwenden, hat man für die Gleichung aller Flächen, die durch die Rotation einer Curve um die Axe der z entstehen

$$z = f(x^2 + y^2)$$

Es sey

$$dz = f' (x dx + y dy)$$

$$df = f'' (x dx + y dy)$$

wo f' , f'' Functionen von $(x^2 + y^2)$ ausdrücken.

Dies vorausgesetzt, hat man

$$p = f' x$$

$$q = f' y$$

$$r = f' + f'' x^2$$

$$s = f'' xy$$

$$t = f' + f'' y^2$$

$$g = f'^2 + f' f'' (x^2 + y^2)$$

$$h = 2 f' + f'^3 (x^2 + y^2) + f'' (x^2 + y^2)$$

$$k^2 = 1 + f'^2 (x^2 + y^2)$$

$$\sqrt{h^2 - 4 g k^2} = (f'^3 - f'') (x^2 + y^2)$$

Substituirt man diese Werthe in dem Ausdrücke des größten oder kleinsten Krümmungshalbmessers

$$R = - \frac{2 k^3}{h \pm \sqrt{h^2 - 4 g k^2}}$$

so erhält man, nachdem man das obere oder das untere Zeichen braucht,

$$\rho' = - \frac{1}{f'} \cdot (1 + f'^2 \cdot (x^2 + y^2))^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho'' = - \frac{(1 + f'^2 \cdot (x^2 + y^2))^{\frac{3}{2}}}{f' + f'' \cdot (x^2 + y^2)}$$

Es sey in einem besondern Fall für das Ellipsoid

$$a^2 b^2 = a^2 z^2 + b^2 (x^2 + y^2)$$

so ist

$$p = - \frac{b^2 x}{a^2 z}$$

$$q = - \frac{b^2 y}{a^2 z}$$

$$r = - \frac{b^4 (a^2 - y^2)}{a^4 z^3}$$

$$s = - \frac{b^4 x y}{a^4 z^3}$$

$$t = - \frac{b^4 (a^2 - x^2)}{a^4 z^3}$$

also $f' = - \frac{b^2}{a^2 z}$ und

$$f'' = - \frac{b^4}{a^4 z^3}$$

und daher

$$\rho' = \frac{a}{b^2} (b^4 + (a^2 - b^2) z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho'' = \frac{1}{a \cdot b^4} (b^4 + (a^2 - b^2) z^2)^{\frac{3}{2}}$$

für $z = 0$ ist $\rho' = a$, $\rho'' = \frac{b^2}{a}$

für $z = c$ ist $\rho' = \rho'' = \frac{a^2}{b}$

für $a = b$ ist $\rho' = \rho'' = a$

Man kann noch bemerken, daß die Normale der erzeugenden Ellipse ist

$$N = \frac{z \, ds}{dx} = \frac{1}{a} (b^4 + (a^2 - b^2) z^2)^{\frac{3}{2}}$$

und da in jedem Kegelschnitt der Krümmungshalbmesser r der Curve gleich

$$\frac{N^3}{p^2}$$

ist, wo

$$p = \frac{b^2}{a}$$

der halbe Parameter ist, so ist der Krümmungshalbmesser der erzeugenden Ellipse

$$r = \frac{(b^4 + (a^2 - b^2) z^2)^{\frac{3}{2}}}{a \cdot b^4}$$

also ist

$$\varphi'' = r \text{ und}$$

$$\varphi' = N \cdot \frac{a}{b^2}$$

Will man endlich diese beyden Krümmungshalbmesser φ' φ'' durch ε und φ (§. 5. I.) ausdrücken, so ist

$$z = \frac{a (1 - \varepsilon^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$$

wo φ die beobachtete Polhöhe und

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \text{ ist.}$$

Substituirt man diesen Werth von

$$z \text{ und } b^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2)$$

in den oben gefundenen Ausdrücken von φ' und φ'' , so hat man, wenn man die höheren Potenzen von ε vernachlässiget,

$$b^4 + (a^2 - b^2) z^2 =$$

$$a^4 (1 - 2 \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)$$

also auch

$$\varphi' = a (1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)$$

$$\varphi'' = a (1 - \varepsilon^2 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)$$

und dies sind die Werthe des größten und kleinsten Krümmungshalbmessers für jeden Punkt des Ellipsoids.

§. 8.

Wir wollen nun zur Bestimmung der geographischen Lage der Signalpunkte unsers Dreyecknetzes übergehen.

Denkt man sich von dem Signalpunkte C, B, D... senkrechte Linien $C\alpha$, $B\beta$, $D\gamma$... auf den Meridian von A und nennt

$$A\alpha = x, C\alpha = y$$

die Coordinaten des ersten Ortes C,

$$A\beta = x', B\beta = y'$$

die des zweyten Ortes B u. f. so wird man aus den bereits bekannten Seiten und Winkeln der Dreyecke die Werthe dieser Coordinaten ohne Mühe ableiten.

Wenn das ganze Netz nur einen geringen Theil der Erdoberfläche einnimmt, oder wenn man, wie in §. 4. alle Dreyecke auf Ebene reduzirt, so seyen nach der Ordnung die Seiten der Dreyecke

$$AC = a, CD = b, DE = c \dots$$

und die zwischen ihnen enthaltenen Winkel

$$CA\alpha = \alpha, ACD = \beta, CDE = \gamma \dots$$

so hat man, wenn X, Y die Coordinaten des letzten Signalpunkts bezeichnen, und R der rechte Winkel ist, wie man leicht sieht, folgende Ausdrücke,

$$\begin{aligned} X &= a \cos \alpha + b \cos (\alpha + \beta - 2R) \\ &+ c \cos (\alpha + \beta + \gamma - 4R) + d \cos (\alpha + \beta + \gamma + \delta - 6R) + \\ Y &= a \sin \alpha + b \sin (\alpha + \beta - 2R) \\ &+ c \sin (\alpha + \beta + \gamma - 4R) + d \sin (\alpha + \beta + \gamma + \delta - 6R) + \end{aligned}$$

wo unter $\alpha \beta \gamma \dots$ immer die Winkel verstanden werden, die auf der Seite des Weges a b c liegen, auf welcher das Azimut α des ersten Ortes A liegt, so daß also diese Winkel auch größer als $2R$ seyn können. Man bemerkt übrigens von selbst, daß man, indem man die Coordinaten X Y des letzten Punktes auf diese Art berechnet, man zugleich die Coordinaten aller zwischenliegenden Punkte C, D, E... erhält. Bricht z. B. die Reihe mit c ab, so gibt für $d = 0$ der vorhergehende Ausdruck von X und Y die Coordinaten des Punktes E u. f. wenn auf die Zeichen gehörig Rücksicht genommen wird, wo dann negative X oder Y anzeigen, daß der gesuchte Punkt im ersten Falle auf der Seite von A, wo M liegt, und im zweyten auf der Seite von Ax, wo der Punkt B liegt, genommen werden soll,

Wie man aber aus den gegebenen Coordinaten $X Y$ eines Ortes die geographische Position desselben gegen den ersten Ort A ableiten könne, werden wir weiter unten sehen.

§. 9.

Die geographische Lage der verschiedenen Signalpunkte des Dreyecknetzes läßt sich am einfachsten aus den bekannten Dreyecken selbst unmittelbar ableiten.

Sey P (Fig. 25.) der Nordpol der Erde, und B, A zwey Punkte der Oberfläche derselben, die wir anfangs als eine vollkommene Kugel annehmen wollen.

Für den gegebenen Ort A sey die Aequatorhöhe ψ , und das Azimut z , für den gesuchten Ort B aber die Aequatorhöhe ψ' , und das Azimut z' . Die Längendifferenz beyder Orte sey u , und die bekannte Distanz BA im Horizont des Meeres, als Bogen eines größten Kreises betrachtet, sey gleich δ . Dies vorausgesetzt, hat man sofort

$$\begin{aligned} \operatorname{Tg} \frac{z' + u}{2} &= - \frac{\sin \frac{\psi + \delta}{2}}{\sin \frac{\psi - \delta}{2}} \operatorname{Cotg} \frac{z}{2} \\ \operatorname{Tg} \frac{z' - u}{2} &= - \frac{\cos \frac{\psi + \delta}{2}}{\cos \frac{\psi - \delta}{2}} \operatorname{Cotg} \frac{z}{2} \\ \sin \psi' &= - \frac{\sin z \sin \delta}{\sin u} = - \frac{\sin z \sin \psi}{\sin z'} \end{aligned}$$

§. 10.

Wir wollen nun dieselbe Aufgabe unter der Voraussetzung auflösen, daß die Erde durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist. Ist a, b die halbe grofse und halbe kleine Axe dieser Ellipse und

$$a \varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$$

so sey (Fig. 26.) P der Pol, PC die halbe kleine Axe und A, B die beyden Punkte der Oberfläche der Erde, deren Normalen AM, BO sind. Man hat also

$$PMA = \psi, POB = \psi'$$

Beschreibt man aber aus dem Punkte M mit dem Halbmesser MA die drey Kreisbogen

$$Ap, pb, bA,$$

so bilden diese Bogen ein sphärisches Dreyeck, dasselbe, welches wir im vorhergehenden §. betrachtet haben. In diesem Dreyecke haben wir angenommen

$$pA = pMA = \psi,$$

$$pb = pMb = \psi',$$

$$pAb = z - 180,$$

$$pbA = 180 - z'$$

$$\text{und } Apb = u$$

Dadurch ist also zuerst die Gröfse ψ' fehlerhaft angenommen worden, da ψ' eigentlich gleich pOB ist, so dafs also ψ' um den Winkel OBM zu klein angenommen wurde

Es ist aber die Normale

$$BO = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \psi'}}$$

wenn $a = 1$ vorausgesetzt wird.

Ferner ist

$$CO = \frac{\varepsilon^2 \cos \psi'}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \psi'}}$$

$$CM = \frac{\varepsilon^2 \cos \psi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \psi}}, \text{ also}$$

$$\frac{OM}{OB} = \frac{\varepsilon^2 \cos \psi \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 \psi\right)}{1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 \psi'} - \varepsilon^2 \cos \psi'$$

Aber es ist

$$\cos \psi' = \cos \psi \cos \delta - \sin \psi \sin \delta \cos z \text{ oder}$$

$$\cos \psi' = \cos \psi \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) - \delta \sin \psi \cos z$$

Läfst man also die vierten Potenzen von ε weg, so ist

$$\frac{OM}{OB} = \varepsilon^2 (\cos \psi - \cos \psi')$$

$$= \varepsilon^2 \delta (\sin \psi \cos z + \frac{\delta}{2} \cos \psi)$$

Weiter ist

$$\text{Tg O B M} = \frac{\frac{\text{O M}}{\text{O B}} \sin \psi'}{1 + \frac{\text{O M}}{\text{O B}} \cos \psi'}$$

oder da

$$\cos \psi' = \cos (\psi + \delta \cos z)$$

$$\sin \psi' = \sin \psi + \delta \cos \psi \cos z \text{ ist,}$$

$$\text{Tang. O B M} =$$

$$\varepsilon^2 \delta (\sin \psi \cos z + \frac{\delta}{2} \cos \psi) (\sin \psi + \delta \cos \psi \cos z)$$

und daher

$$\text{O B M} = \varepsilon^2 \delta \sin^2 \psi \cos z$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{2} \sin \psi \cos \psi (1 + 2 \cos^2 z) \dots 1.$$

und diese GröÙe muß zu dem Werthe von ψ' des vorigen §. addirt werden, um das elliptische ψ' zu erhalten.

Man ziehe aus B mit einem willkürlichen Halbmesser z. B. mit B A die Kreisbogen, $A\alpha$, $A\beta$, $\alpha\beta$. Das bisher betrachtete Azimut ist

$$A\alpha\beta = 180 - z'$$

oder der Winkel, welchen die Ebenen B A M, O B M in ihrer Durchschnittsline MB bilden. Das elliptische Azimut z'' aber ist der Winkel, den die Ebene O B A mit der verlängerten Ebene O B M in der Durchschnittsline O B bildet d. h. es ist

$$A\beta\alpha = 180 - (180 - z'') = z''$$

Weiter ist

$$\alpha\beta = d\psi' = - \varepsilon^2 \delta \sin^2 \psi \cos z$$

und $A\alpha$, welches sehr nahe gleich $A\beta$ ist, ist der Winkel der Normale O B mit der geradlinichten Chorde B A, also

$$A\alpha = A\beta = 90 - \frac{\delta}{2}$$

Das sphärische Dreyeck $A\alpha\beta$ gibt aber

$$\text{Tg } \beta = \frac{\sin \alpha}{\text{Cotg } A\alpha \sin \alpha\beta - \cos \alpha\beta \cos \alpha}$$

das heißt

$$\begin{aligned}\operatorname{Tg} z'' &= \frac{\sin z'}{\cos z' \cos d \psi' + \operatorname{Tg} \frac{\delta}{2} \sin d \psi'} \\ &= \frac{\operatorname{Tg} z'}{1 - \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{2} \sin^2 \psi}\end{aligned}$$

also auch

$$z'' - z' = \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{2} \sin^2 \psi \sin z \cos z \dots (II):$$

und diese Correction muß zu dem z' des vorigen § addirt werden; um das elliptische Azimut zu erhalten. Was endlich die Gröfse u betrifft, so sieht man leicht, daß sie keiner von der Ellipticität der Erde abhängigen Correction bedarf, wenn man die dritten und höheren Potenzen von ε vernachlässiget.

Die Gröfse δ aber, welche den Winkel AMB bezeichnet, wird aus der gegebenen Entfernung $Ab = \Delta$, wie der Winkel eines gegebenen Kreisbogens, durch die Division dieses Bogens mit seinem Halbmesser abgeleitet. Da hier dieser Halbmesser die Normale

$$AM = \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \psi}}$$

ist, so ist

$$\delta = \frac{\Delta}{a} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 \psi\right)$$

oder auch

$$= \delta \frac{\Delta}{b} \left(1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \psi\right)$$

$$\delta = \frac{\Delta b}{a^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \psi\right)$$

welche Ausdrücke noch mit

$$R'' = \frac{1}{\sin 1''}$$

multipliziert werden müssen, um δ in Secunden zu erhalten.

Setzt man also der Kürze wegen

$$p = \varepsilon^2 \delta \sin^2 \psi \cos z, \text{ so ist}$$

$$\text{elliptisches } \psi' = \psi' + p + \frac{p \delta}{2R''} \frac{\operatorname{Cotg} \psi}{\cos z} (1 + 2 \cos^2 z)$$

$$\text{elliptisches } z' = z' + \frac{p \delta}{2R''} \sin z$$

Exempel I.:

$$\psi = 70^\circ,$$

$$z = 45^\circ,$$

$$\Delta = 100\,000 \text{ Toisen.}$$

Nimmt man an

$$\log \varepsilon^2 = 7,7766329,$$

$$\log \frac{b}{a^2} R'' = 8,7984182$$

so ist $\frac{\varepsilon^2}{2} \sin \psi = 0,0026398212,$

$$\log \delta = 3,7995632$$

Die Gleichungen des §. 9 geben

$$\frac{z' + u}{2} = -68^\circ 22' 14'' 28$$

$$\frac{z' - u}{2} = -67 \quad 3 \quad 47. \quad 56$$

$$u = -1^\circ 18' 26'' 72$$

$$z' = 224 \quad 33 \quad 58. \quad 16$$

$$\psi' = 71 \quad 14 \quad 34. \quad 14$$

und daraus folgt

$$\text{ellipt. } \psi' = 71^\circ 14' 58'' 04$$

$$\text{ellipt. } z' = 224 \quad 33 \quad 58. \quad 41$$

Exempel II.

$$\psi = 50^\circ,$$

$$z = 30^\circ,$$

$$\Delta = 150\,000 \text{ Toisen}$$

gibt

$$\log \delta = 3,9750457$$

$$\log \text{Tg} \frac{z' + u}{2} = 0,6266476 \text{ n}$$

$$\log \text{Tg} \frac{z' - u}{2} = 0,5647105 \text{ n}$$

$$\omega = -1^\circ 56' 54'' 92$$

$$\text{ellipt. Azim} = 208^\circ 31' 56'' 11 + 0'' 23$$

$$= 208^{\circ} 31' 56'' 3 = z'$$

$$\text{ellip. Aequatorhöhe} = 42^{\circ} 17' 17'' 4 + 20'' 20 + 0'' 40$$

$$= 42^{\circ} 17' 38'' 0 = \psi'.$$

§. 11.

Wenn die Werthe von δ nicht zu groß sind, so lassen sich die Gleichungen des §. 9 in sehr convergirende Reihen auflösen. So ist z. B.

$$\cos \psi' = \cos \psi \cos \delta - \sin \psi \sin \delta \cos z,$$

also

$$\frac{\cos \psi - \cos \psi'}{\sin \psi} = 2 \cotg \psi \sin^2 \frac{\delta}{2} + \sin \delta \cos z$$

Löst man diese Gleichung nach Cap. 8, §. 5 auf, und setzt

$$x = \sin \delta \cos z + 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \cotg \psi$$

$$= \delta \cos z + \frac{\delta^2}{2} \cotg \psi - \frac{\delta^3}{6} \cos z$$

so hat man

$$\psi' - \psi = x - \frac{x^2}{2} \cotg \psi + \frac{x^3}{6} (1 + 3 \cotg^2 \psi)$$

$$- \frac{x^4}{24} (9 \cotg \psi + 15 \cotg^3 \psi) + \dots$$

oder

$$\psi' = \psi + \delta \cos z + \frac{\delta^2}{2R''} \sin^2 z \cotg \psi$$

$$- \frac{\delta^3}{6R''} \cos z \sin^2 z (1 + 3 \cotg^2 \psi) - \dots$$

Ist in diesem und den folgenden Ausdrücken $\psi' < \psi$, so ist δ negativ.

Eben so ist

$$\cotg z' = \frac{\cotg \psi \sin \delta + \cos \delta \cos z}{\sin z}$$

also

$$\cotg (z' - z) =$$

$$1 + \cos \delta \cotg^2 z + \frac{\sin \delta \cotg \psi \cotg z}{\sin z}$$

$$2 \cotg z \sin^2 \frac{\delta}{2} - \frac{\cotg \psi \sin \delta}{\sin z}$$

woraus man nach einigen leichten Veränderungen findet

$$\begin{aligned} z' = 180 + z - \delta \operatorname{Cotg} \psi \sin z + \frac{\delta^2}{2R''} \sin z \cos z (1 + 2 \operatorname{Cotg}^2 \psi) \\ - \frac{\delta^3}{3R''^2} \sin z \cos^2 z \operatorname{Cotg} \psi (3 + 4 \operatorname{Cotg}^2 \psi) \\ + \frac{\delta^3}{6R''^2} \sin z \operatorname{Cotg} \psi (1 + 2 \operatorname{Cotg}^2 \psi) \dots \text{--- (II)} \end{aligned}$$

Substituirt man endlich diesen Ausdruck von z' in der Gleichung

$$\sin u = \frac{\sin \delta \sin z'}{\sin \psi}$$

und setzt $u = \sin u + \frac{1}{6} \sin^3 u$, so ist

$$\begin{aligned} u = \frac{\sin z}{\sin \psi} \left(\delta - \frac{\delta^2}{R''} \cos z \operatorname{Cotg} \psi \right) \\ + \frac{\sin z}{\sin \psi} \left(\frac{\delta^3}{3R''^2} \cdot \frac{\cos^2 z}{\sin^2 \psi} (1 + 3 \cos^2 \psi) - \frac{\delta^3}{3R''^2} \operatorname{Cotg}^2 \psi \right) \dots \text{--- (III)} \end{aligned}$$

und die Gleichungen I, II, III, geben die Werthe von ψ' , z' , u für die Kugel. Um sie für das Ellipsoid zu erhalten, muß man zu der Gleichung I hinzusetzen

$$+ p + \frac{p \delta}{2R''} \cdot \frac{\operatorname{Cotg} \psi}{\cos z} (1 + 2 \cos^2 z)$$

und zu der Gleichung II ..

$$+ \frac{p \delta}{2R''} \sin z.$$

Die Gleichung I endlich gibt $\psi' - \psi$ oder die einzelnen Theile des Meridians, die Differenz der Parallelen der verschiedenen Signale. Sucht man so alle diese Differenzen der Parallelen, sowohl von den Signalen, welche dem Meridian zur rechten, als auch von denen, welche ihm zur linken stehen, so erhält man, wenn man sie addirt, eine doppelte Bestimmung der Länge des ganzen Meridians.

I. Die vorhergehenden Gleichungen sind für die Ausübung beschwerlich; auch ist das Gesetz, nach welchem diese Reihen fortgehen, nicht leicht zu entwickeln. Man kann aber mit Hilfe der Cap. I. §. 2. V gegebenen Ausdrücke andere Reihen finden, welche jener doppelte Vorwurf nicht trifft. Setzt man nämlich dort nach der Ordnung

$$ABC, \alpha\beta\gamma, \dots$$

gleich

$$180 - z', u, z = 180, \psi, \delta, \psi'$$

so erhält man

$$\frac{z' + u}{2} = -90^\circ + \frac{z}{2} - m \sin z$$

$$\frac{m^2}{2} \sin 2z - \frac{m^3}{3} \sin 3z + \frac{m^4}{4} \sin 4z -$$

$$\frac{z' - u}{2} = -90 + \frac{z}{2} + n \sin z$$

$$+ \frac{n^2}{2} \sin 2z + \frac{n^3}{3} \sin 3z + \frac{n^4}{4} \sin 4z +$$

$$\log \sin \frac{\psi'}{2} = \log \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\delta}{2}$$

$$+ \mu (m \cos z - \frac{m^2}{2} \cos 2z + \frac{m^3}{3} \cos 3z - \frac{m^4}{4} \cos 4z +$$

oder

$$\log \cos \frac{\psi'}{2} = \log \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\delta}{2}$$

$$- \mu (n \cos z + \frac{n^2}{2} \cos 2z + \frac{n^3}{3} \cos 3z + \frac{n^4}{4} \cos 4z +)$$

$$\text{wo } m = \operatorname{Tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{Cotg} \frac{\psi}{2},$$

$$n = \operatorname{Tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{Tg} \frac{\psi}{2},$$

$$\text{und } \mu = 0.4342945$$

und diesen ψ' und z' werden wieder die vorigen elliptischen Correctionen hinzugefügt.

$$\text{Ex. } \psi = 40^\circ, z = 30^\circ, \Delta = 150000 \text{ Toisen gibt}$$

$$\log \delta = 3.9750457$$

$$\text{also die Gleichung I. ... } \delta \cos z = 8176'' 67$$

$$64. 38$$

$$- 0. 71$$

$$- 3. 04$$

$$+ 20. 20$$

$$+ 0. 40$$

} ell. Corr.

$$\text{Summe} = 8257'' 90 = 2^\circ 17' 37'' 9$$

$$40$$

$$\psi' = 42 17 37. 9$$

und die Gleichung III

$$\left. \begin{array}{r} \frac{\sin z}{\sin \psi} \delta \dots 7344.26 \\ - 346.96 \\ + 3.85 \\ + 21.85 \\ - 7.28 \end{array} \right\}$$

$$u = 70.5'' \quad 73 = 1^\circ 56' 55'' 73$$

Nach N. I. aber ist dieses Beyspiel

$$\log \delta = 3.9750457, \text{ woraus } \delta = 2^\circ 37' 21'' 602$$

$$\log m = 8.7986005$$

$$\log n = 7.9207323$$

$$\left. \begin{array}{l} \log \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\delta}{2} = 9.5339380 \\ \mu m \cos z = 0.0236546 \\ - 0.0004295 \\ + 0.0000008 \end{array} \right\}$$

$$\log \sin \frac{\psi'}{2} = 9.5571639$$

$$\psi' = 42^\circ 17' 17'' 4$$

$$\left. \begin{array}{r} 20.2 \\ 0.4 \end{array} \right\} \text{ellipt.}$$

$$\text{ell. } \psi' = 42^\circ 17' 38'' 0$$

$$\left. \begin{array}{l} m \sin z = 6486.28 \\ \frac{m^2}{2} \sin 2z = 353.29 \\ 17.10 \\ 0.70 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} n \sin z = 859.27 \\ \frac{n^2}{2} \sin 2z = 6.20 \\ 0.04 \end{array} \right\}$$

woraus

$$\frac{z' + u}{2} = - 76^{\circ} 42' 29'' 39$$

$$\frac{z' - u}{2} = - 74 \quad 45 \quad 34 \quad 49$$

$$z' = 308^{\circ} 31' 56'' 12$$

$$u = 1^{\circ} 56' 54'' 90$$

Umständlicher findet man diesen Gegenstand abgehandelt in den Mayl. Ephemeriden f. d. J. 1807 und 1808, und in der monatlichen Correspondenz 1804 September, und 1805 Januar und Juni.

§. 12.

Liegt der gesuchte Ort in demselben Meridian mit dem gegebenen, so ist

$$z = 0, \text{ also } \delta = x$$

und die Gleichung I des §. 11., wenn die Aequatorhöhe des gesuchten Ortes ψ , heisst,

$$\psi' = \psi + x + \varepsilon^2 x \sin^2 \psi + \frac{3 \varepsilon^2 x^2}{2 R''} \sin \psi \cos \psi.$$

Liegt aber der gesuchte Ort in einer Linie, die auf dem Meridian des gegebenen Ortes senkrecht durch den gegebenen Ort geht, so ist $z = 90^{\circ}$, also $\delta = y$ und daher dieselben Gleichungen I, II, III des §. 11, wenn die Aequatorhöhe des gegebenen Ortes ψ , ist

$$\psi' = \psi + \frac{y^2}{2 R''} \cotg \psi + \frac{\varepsilon^2 y^2}{2 R''} \sin \psi \cos \psi,$$

$$u = \frac{y}{\sin \psi} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{3 R''^2} \cotg^2 \psi\right)$$

$$z' = 270 - y \cotg \psi + \frac{y^3}{3 R''^2} \cotg \psi \left(\frac{1}{2} + \cotg^2 \psi\right)$$

Ist also z das Azimut, ψ die Aequatorhöhe eines gegebenen Ortes, und sind $X Y$ die rechtwinklichten Coordinaten eines unbekannten Ortes, dessen Aequatorhöhe ψ' ist, so findet man ψ' sowohl, als das Azimut z' , als die Längendifferenz u des unbekannten Ortes durch folgende Gleichungen, in welchen die Hilfsgröfse ψ , die Aequatorhöhe des Fußpunkts der Ordinate Y ist

$$x = \frac{R'' \cdot X}{a} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 \psi\right)$$

$$= \frac{bR''}{a^2} \cdot X \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \psi\right)$$

$$y = \frac{R'' \cdot Y}{a} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 \psi\right)$$

$$= \frac{bR''}{a^2} \cdot Y \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \psi\right)$$

$$\psi' = \psi + x \left(1 + \varepsilon^2 \sin^2 \psi + \frac{3\varepsilon^2 x}{4R''} \sin 2\psi\right)$$

$$\psi' = \psi + \frac{y^2}{2R''} \cotg \psi \left(1 + \varepsilon^2 \sin^2 \psi\right)$$

$$u = \frac{y}{\sin \psi} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{3R''^2} \cotg^2 \psi\right)$$

$$z' = 270^\circ - y \cotg \psi + \frac{y^3}{3R''^2} \cotg \psi \left(\frac{1}{2} + \cotg^2 \psi\right)$$

(A)

Diese Gleichungen lassen sich durch einige einfache Veränderungen zur Ausübung bequemer machen. Ist nämlich

$$\xi = \frac{bR''}{a^2} \cdot X \quad \text{und}$$

$$v = \frac{bR''}{a^2} \cdot Y$$

$$n = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \psi, \quad \text{und}$$

$$m = 1 + \frac{3\varepsilon^2}{2} \sin^2 \left(\psi + \frac{1}{2}\xi\right)$$

so sind die vorhergehenden Ausdrücke

$$\psi' = \psi + m \xi$$

$$\psi' = \psi + \frac{n^2 v^2}{2R''} \cotg \psi,$$

$$u = \frac{n v}{\sin \psi} - \frac{v^3 \cos^2 \psi}{3R''^2 \sin^3 \psi},$$

$$z' = 270^\circ - n v \cotg \psi + \frac{v^3}{3R''^2} \cotg \psi \left(\frac{1}{2} + \cotg^2 \psi\right)$$

(B)

Bringt man die Größen m, n in zwey, oder blofs die Größe

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 x$$

in eine kleine Tafel, in die man zweymal mit dem Argumente

$$x = \psi \quad \text{und} \quad x = \psi + \frac{1}{2}\xi$$

eingeht, so wird dadurch die Entwicklung dieser Gleichungen sehr erleichtert.

$$\text{Ex. } \psi = 41^\circ 28' 50'',$$

$$X = -3737.97 \text{ Toisen, Nord}$$

$$Y = +54647.8 \text{ Toisen, Ost}$$

$$\text{Es ist } \log \frac{bR''}{a^2} = 8.7984183, \log \varepsilon^2 = 7.7766329$$

$$\text{also } \log \xi = 2.3710541, \xi = 235''0, \log n = 0.0005692$$

$$\log v = 3.5359910$$

$$\log m = 0.0017033$$

$$m \xi = 0^\circ 3' 55'' 92$$

$$\frac{n^4 v^2}{2 R''} \cotg \psi = 32.61$$

$$41 \quad 28 \quad 50$$

$$\psi' = 41^\circ 25' 26'' 69$$

$$\psi = 41^\circ 24' 54'' 08$$

$$\frac{nv}{\sin \psi} = 5200''.304$$

$$\frac{v^3 \cotg^2 \psi}{3R''^2 \sin \psi} = \frac{0.617}{5199.687} = 1^\circ 26' 39'' 69 = u.$$

Bohnenberger findet für dieses Beyspiel (Monatl. Corr. 1802 Julius) aus anderen Ausdrücken

$$\psi' = 41^\circ 25' 26'' 7$$

$$u = 1^\circ 26' 39'' 66$$

§. 13.

Wenn, wie wir gesehen haben, die Correctionen, welche von der Ellipticität der Erde abhängen, für kleine Distanzen δ in den meisten Fällen nur klein sind, so werden ohne Zweifel die Verbesserungen noch viel geringer seyn, welche von der Abweichung der Oberfläche der Erde von der des bisher betrachteten Sphäroids abhängen. Um aber bey der Auflösung dieser interessanten Aufgabe nichts zu wünschen übrig zu lassen, wollen wir, ohne der Erde irgend eine bestimmte geometrische Gestalt zu geben, die sie vielleicht auch nicht hat, bloß den Beobachtungen gemäß voraussetzen, daß ihre Gestalt von der einer Kugel nur wenig verschieden sey. Die Gleichung der Kugel, deren Halbmesser die Einheit ist, ist bekanntlich

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

daher soll die Gleichung der Oberfläche der Erde seyn

$$\omega = 0 = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha u - 1$$

wo α eine gegen die Einheit kleine Gröfse ist, deren Quadrat wir vernachlässigen wollen, und wo u als eine Function von x und y angesehen werden kann.

Die angenommene Gleichung gibt

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = 2x - 2\alpha \left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right) = 2y - 2\alpha \left(\frac{du}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d\omega}{dz}\right) = 2z$$

Substituirt man diese Werthe in den Gleichungen II. des §. 6., das heifst, in den Gleichungen der kürzesten Linie zwischen zwey gegebenen Punkten auf der Oberfläche der Erde, so hat man

$$\left. \begin{aligned} x d^2 y - y d^2 x &= \alpha \left(\frac{du}{dx}\right) d^2 y - \alpha \left(\frac{du}{dy}\right) d^2 x \\ x d^2 z - z d^2 x &= \alpha \left(\frac{du}{dx}\right) d^2 z \\ y d^2 z - z d^2 y &= \alpha \left(\frac{du}{dy}\right) d^2 z \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Es sey r der von dem Mittelpunkte der Erde an seiner Oberfläche gezogene Halbmesser, ϑ der Winkel dieses Halbmessers mit der Umdrehungsaxe der z , und λ der Winkel der Axe der x mit dem in der Ebene der xy projecirten Halbmesser, so ist

$$x = r \sin \vartheta \cos \lambda$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \lambda$$

$$z = r \cos \vartheta$$

Die Differentialien dieser Ausdrücke in Beziehung auf r , ϑ , λ geben

$$x dy - y dx = r^2 d\lambda \sin^2 \vartheta$$

$$x dz - z dx = r^2 (d\lambda \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \lambda - d\vartheta \cos \lambda)$$

$$z dy - y dz = r^2 (d\lambda \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \lambda + d\vartheta \sin \lambda)$$

also auch

$$(x dz - z dx) \cos \lambda + (y dz - z dy) \sin \lambda = -r^2 d\vartheta$$

und endlich

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 d\lambda^2 \sin^2 \vartheta$$

I. Man suche nun zuerst das Verhältniß von $d\vartheta$ und ds .

Man kann in allen Ausdrücken, deren Factor a ist, für r die Einheit und für ϑ die Gröſſe $90 - \varphi$ setzen, wo φ die beobachtete, und $90 - \vartheta$ die geocentrische Polhöhe ist. Unter dieser Voraussetzung ist

$$x = \cos \varphi \cos \lambda$$

$$y = \cos \varphi \sin \lambda$$

$$z = \sin \varphi$$

Da aber u eine Function von x und y ist, so hat man

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy$$

und da, nach den letzten Gleichungen, u auch eine Function von φ und λ ist, so hat man eben so

$$du = \left(\frac{du}{d\varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{du}{d\lambda}\right) d\lambda$$

Wir werden aber unten sehen, daß es zu unserem Zwecke hinreicht, u bloß als eine Function von φ anzusehen, wodurch

$$\left(\frac{du}{d\lambda}\right)$$

gleich Null wird. Setzt man also die beyden vorhergehenden Ausdrücke von du gleich, so ist

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy = \left(\frac{du}{d\varphi}\right) d\varphi \quad (1)$$

Die letzten Werthe von x und y aber geben

$$dx = -d\varphi \sin \varphi \cos \lambda - d\lambda \cos \varphi \sin \lambda$$

$$dy = -d\varphi \sin \varphi \sin \lambda + d\lambda \cos \varphi \cos \lambda$$

Multiplirt man die erste dieser Gleichungen durch $\cos \lambda$, und die zweyte durch $\sin \lambda$, so ist ihre Summe

$$d\varphi = -\frac{(x dx + y dy)}{\sin \varphi \cos \varphi}$$

und wenn man diesen Werth von $d\varphi$ in der Gleichung (1) substituirt, und die Factoren von dx und dy einzeln gleich Null setzt, so ist

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = -\left(\frac{du}{d\varphi}\right) \frac{\cos \lambda}{\sin \varphi}$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = -\left(\frac{du}{d\varphi}\right) \frac{\sin \lambda}{\sin \varphi}$$

Multiplieirt man die erste dieser Gleichungen durch $d^2 y$, und die zweyte durch $-d^2 x$, so gibt ihre Summe

$$\left(\frac{du}{dx}\right) d^2 y - \left(\frac{du}{dy}\right) d^2 x = -\left(\frac{du}{d\varphi}\right) \cdot \frac{x d^2 y - y d^2 x}{\sin \varphi \cos \varphi} \dots (2)$$

Vernachlässigt man aber die Gröfsen der Ordnung α , so sind die Gleichungen (A)

$$\left. \begin{aligned} x d^2 y - y d^2 x &= 0 \\ x d^2 z - z d^2 x &= 0 \\ y d^2 z - z d^2 y &= 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

und die erste dieser Gleichungen zeigt an, daß das letzte Glied der Gleichung (2) gleich Null ist. Es ist daher

$$\left(\frac{du}{dx}\right) d^2 y - \left(\frac{du}{dy}\right) d^2 x = 0$$

und wenn man dies in der ersten der Gleichungen A substituirt, so ist wie zuvor

$$x d^2 y - y d^2 x = 0$$

wovon das Integral

$$x dy - y dx = c. ds \text{ das heißt}$$

$$r^2 d\lambda \sin^2 \varphi = c. ds \text{ ist.}$$

Multiplieirt man ferner die zweyte der Gleichungen (3) durch xz , und die dritte durch yz , so ist ihre Summe

$$d^2 z = \frac{z (x d^2 x + y d^2 y)}{x^2 + y^2}$$

Aber, wenn man die Gleichung der Kugel zweymal differentiirt, so erhält man

$$x d^2 x + y d^2 y = -ds^2 - z d^2 z$$

also wird die vorhergehende Gleichung

$$d^2 z = -\frac{z (ds^2 + z d^2 z)}{x^2 + y^2}, \text{ oder}$$

$$(1 - z^2) d^2 z = -z ds^2 - z^2 d^2 z \text{ oder endlich}$$

$$d^2 z = -z ds^2$$

Substituirt man diesen Werth von $d^2 z$ in den zwey letzten der Gleichungen A, so erhält man

$$x d^2 z - z d^2 x = -\alpha \left(\frac{du}{dx}\right) \sin \varphi. ds^2$$

$$y d^2 z - z d^2 y = -\alpha \left(\frac{du}{dy} \right) \cdot \sin \varphi \cdot ds^2$$

Substituirt man hier für

$$\left(\frac{du}{dx} \right), \left(\frac{du}{dy} \right)$$

ihre oben gegebenen Werthe und integrirt, so ist

$$x dz - z dx = -c' ds + \alpha ds \int ds \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \cos \lambda$$

$$y dz - z dy = -c'' ds + \alpha ds \int ds \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \sin \lambda$$

Multiplieirt man endlich die erste dieser Gleichungen durch $\cos \lambda$, und die zweyte durch $\sin \lambda$, so ist ihre Summe nach dem Vorhergehenden gleich

$$-r^2 d\varphi$$

das heisst, es ist

$$r^2 d\varphi = c' ds \cos \lambda + c'' ds \sin \lambda$$

$$-\alpha ds \cos \lambda \int ds \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \cos \lambda - \alpha ds \sin \lambda \int ds \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \sin \lambda \dots (B)$$

und dieser Ausdruck gibt das gesuchte Verhältniß der Gröfsen $d\varphi$, ds .

II. Wir wollen nun zuerst den Fall betrachten, wo das erste Element der geodätischen Linie senkrecht auf die Ebene xz des Meridians ist.

Denkt man sich von dem Endpunkte dieses Elements ein Loth auf die Ebene der xz , und nennt p die gerade Linie in dieser Ebene, welche die beyden Punkte verbindet, in welchen das Loth und das verlängerte Element diese Ebene trifft, so ist

$$\frac{p}{ds}$$

der Cosinus des Winkels des Elements mit dieser Ebene. Da aber p in der Ebene der xz liegt, so ist

$$p = \sqrt{dx^2 + dz^2}$$

also jener Cosinus gleich

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{ds}$$

und da die geodätische Linie senkrecht auf der Ebene xz steht,

so ist im Anfange dieser Linie jener Cosinus gleich Null, d. h. es ist

$$d x = 0 \text{ und } d z = 0$$

also auch

$$d. (r \sin \vartheta \cos \lambda) = 0 \text{ und}$$

$$d. (r \cos \vartheta) = 0$$

Differentiirt man diese Gleichungen und eliminirt $d r$, so ist

$$r d \vartheta = r d \lambda \sin \vartheta \cos \vartheta \operatorname{Tg} \lambda$$

Es war aber

$$d s^2 = d r^2 + r^2 d \vartheta^2 + r^2 d \lambda^2 \sin^2 \vartheta$$

wofür man, da in einer auf $x z$ senkrechten Linie die Größen

$$d r, d \vartheta \text{ gegen } d \lambda$$

verschwinden, annehmen kann

$$d s = r d \lambda \sin \vartheta$$

also wird die vorhergehende Gleichung

$$\frac{d \vartheta}{d s} = \frac{\cos \vartheta \operatorname{Tg} \lambda}{r}$$

Die Constante c' der Gleichung B ist offenbar der Werth von

$$x d z - z d x$$

im Anfangspunkte der krummen Linie. Da aber, wie wir gesehen haben, für diesen Punkt dx und dz Null sind, so ist auch c' Null, oder die Gleichung B gibt für den Anfangspunkt

$$\frac{d \vartheta}{d s} = \frac{c''}{r^2} \sin \lambda$$

Vergleicht man diese beyden Ausdrücke von

$$\frac{d \vartheta}{d s}$$

und bemerkt dafs λ ein Winkel der Ordnung α , also nahe

$$\operatorname{Tg} \lambda = \sin \lambda$$

ist, so hat man

$$c'' = r' \cos \vartheta'$$

wo r' , ϑ' die Werthe von r und ϑ am Anfangspunkte sind.

Wenn aber die Linie senkrecht auf $x z$ ist, so ist offenbar die Gröfse $d s$ für den Anfangspunkt gleich Null, oder es ist

$$\frac{d\vartheta'}{ds'} = 0.$$

Die Gleichung B gibt ferner, da λ von der Ordnung α ist,

$$r^2 d\vartheta = c'' \lambda ds - z ds / ds \left(\frac{du}{d\varphi} \right)$$

Differentiirt man diese Gleichung, und setzt für c'' den vorhergehenden Werth, so hat man

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} = \frac{d\lambda'}{ds} \cdot \frac{\cos \vartheta'}{r'} - \alpha \left(\frac{du'}{d\varphi} \right) \dots (C)$$

wo die Striche anzeigen, daß die damit bezeichneten Größen für den Anfangspunkt der Linie gehören.

III. Die krumme Linie der Erdmeridiane mag seyn, welche sie wolle, wenn sie nur eine ebene Krumme ist, und als eine solche kann man sie immer annehmen, so ist der Winkel z , welchen der Radius r und die Normale in dem Orte des Beobachters bilden, gleich

$$(90 - \vartheta - \varphi.)$$

Ferner ist die Tangente des Winkels, welchen r mit der geometrischen Tangente des Meridians bildet, gleich

$$\frac{r \, d\varphi}{dr}$$

und da dieser Winkel gleich $90 - z$ ist, so ist

$$\text{Tg } z = \frac{dr}{r \, d\varphi}$$

oder endlich, da z immer sehr klein, und r der Einheit sehr nahe ist,

$$z = \frac{dr}{d\varphi}, \text{ das heißt}$$

$$\vartheta = 90 - \varphi - \frac{dr}{d\varphi}.$$

Wir hatten aber oben

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{r \sin \vartheta}$$

und da man statt ϑ die Größe $90 - \varphi$ und statt r die Einheit setzen kann, so wird die Gleichung C (N. II.)

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} = \text{Tg } \varphi' - \alpha \left(\frac{du'}{d\varphi} \right)$$

Weiter findet man leicht

$$\left(\frac{d^2 u}{ds^2}\right) = - \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \cdot \frac{d^2 \vartheta}{ds^2}$$

also auch

$$\alpha \left(\frac{d^2 u}{ds^2}\right) = - \alpha \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \operatorname{Tg} \varphi'$$

Entwickelt man aber φ nach den Potenzen der auf die Ebene xz senkrechten Linie s , so ist

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi' + s \cdot \frac{d\varphi'}{ds} + \frac{s^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 \varphi'}{ds^2} + \\ &= \varphi' - s \cdot \frac{d\vartheta'}{ds} - \frac{s^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 \vartheta'}{ds^2} - \end{aligned}$$

Es war

$$\frac{d\vartheta}{ds} = 0, \text{ und}$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{ds^2} = \operatorname{Tg} \varphi - \alpha \left(\frac{du}{d\varphi}\right)$$

also ist auch

$$\varphi = \varphi' - \frac{s^2}{2} (\operatorname{Tg} \varphi - \alpha \left(\frac{du}{d\varphi}\right)) \dots (D)$$

Eben so hat man

$$\lambda = \lambda' + s \cdot \frac{d\lambda'}{ds} + \frac{s^2}{2} \cdot \frac{d^2 \lambda'}{ds^2} +$$

Aber

$$\frac{d\lambda'}{ds} = \frac{1}{r' \operatorname{Sin} \vartheta'},$$

also wenn man

$$r' = 1 + \alpha u', \text{ und}$$

$$\operatorname{Sin} \vartheta' = \operatorname{Cos} \left(\varphi + \frac{dr}{d\varphi}\right) \text{ setzt,}$$

$$\frac{d\lambda'}{ds} = \frac{1}{\operatorname{Cos} \varphi'} (1 - \alpha u' + \alpha \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) \operatorname{Tg} \varphi')$$

und daher die vorhergehende Reihe

$$\lambda = \lambda' + \frac{s}{\operatorname{Cos} \varphi'} (1 - \alpha u' + \alpha \left(\frac{\varphi' p}{du'}\right) \operatorname{Tg} \varphi') \dots (a)$$

Um endlich noch den Winkel zu erhalten, den das letzte

Element des Bogens s mit seinem Meridian bildet, so ist in dem Dreyecke, dessen Winkel der Pol, das erste und das letzte Element des Bogens s ist, der Cosinus jenes Winkels gleich

$$\sin \varphi \sin (\lambda - \lambda')$$

Da aber jener Winkel sehr nahe ein rechter ist, so sey n das, was ihm noch zu einem rechten Winkel fehlt, also

$$\sin n = \sin \varphi \sin (\lambda - \lambda')$$

oder

$$n = (\lambda - \lambda') \sin \varphi.$$

Da sonach das Azimut des letzten Elements gleich $90 - n$ d. h. gleich

$$90 - (\lambda - \lambda') \sin \varphi$$

ist, so ist nach der Gleichung (a) dieses Azimut

$$z' = 90 - s \operatorname{Tg} \varphi' (1 - \alpha u' + \alpha \left(\frac{du'}{d\varphi} \right) \operatorname{Tg} \varphi') \dots (b)$$

Anmerkung. Zur gröfseren Genauigkeit der Gleichungen a, b kann man ihnen noch die Glieder addiren, deren Factor s^3 ist, und die von α unabhängig sind. Man erhält diese Glieder unter der Voraussetzung einer kugelförmigen Erde, für welche man mittels der sphärischen Trigonometrie hat

$$\operatorname{Tg} (\lambda - \lambda') = \frac{\operatorname{Tg} s}{\cos \varphi'}, \text{ und}$$

$$\operatorname{Tg} n = \operatorname{Tg} \varphi' \sin s$$

Die erste dieser Gleichungen gibt

$$(\lambda - \lambda') + \frac{1}{3} (\lambda - \lambda')^3 = \frac{s + \frac{1}{3} s^3}{\cos \varphi'},$$

woraus

$$\lambda - \lambda' = \frac{s}{\cos \varphi} - \frac{1}{3} s^3 \frac{\operatorname{Tg}^2 \varphi}{\cos \varphi}$$

und die zweyte gibt

$$n + \frac{1}{3} n^3 = \operatorname{Tg} \varphi' (s - \frac{1}{3} s^3)$$

woraus

$$n = s \operatorname{Tg} \varphi' - \frac{1}{3} s^3 \operatorname{Tg} \varphi' \left(\frac{1}{3} + \operatorname{Tg}^2 \varphi' \right),$$

so dafs die beyden Gleichungen a und b in folgende übergehen

$$\left. \begin{aligned} \lambda - \lambda' &= \frac{s}{\cos \varphi} (1 - \alpha u' + \alpha \left(\frac{du'}{d\varphi} \right) \operatorname{Tg} \varphi' - \frac{1}{3} s^2 \operatorname{Tg}^2 \varphi) \\ z' &= 90 - s \operatorname{Tg} \varphi' (1 - \alpha u' + \alpha \left(\frac{du'}{d\varphi} \right) \operatorname{Tg} \varphi' \\ &\quad - \frac{1}{3} s^2 (\frac{1}{2} + \operatorname{Tg}^2 \varphi')) \end{aligned} \right\} (E)$$

III. Wir wollen nun noch kürzlich eben so den Fall betrachten, wenn das erste Element der geodätischen Linie mit der Ebene der xz parallel ist. Bezeichnet $d\sigma$ das Element dieser Linie, so war

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 d\lambda^2 \sin^2 \vartheta$$

oder, da dr und $d\lambda$ gegen $d\vartheta$ verschwinden

$$d\sigma = -r d\vartheta$$

vorausgesetzt, daß σ vom Aequator gegen den Pol wächst.

Es war aber

$$\vartheta = 90 - \varphi - \left(\frac{dr}{d\varphi} \right) \text{ und}$$

$$r = 1 + \alpha u,$$

$$dr = \alpha du,$$

also ist

$$d\vartheta = -d\varphi - \alpha d\varphi \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right)$$

und daher

$$d\sigma = d\varphi \left(1 + \alpha u + \alpha \left(\frac{u^2 d}{d\varphi^2} \right) \right).$$

Ist der Kürze wegen

$$1 + \alpha u + \alpha \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) = f(\varphi),$$

also auch

$$d\sigma = d\varphi \cdot f(\varphi)$$

so ist das Integral dieses Ausdrucks zwischen den Grenzen φ und φ' bekanntlich

$$\sigma = (\varphi - \varphi') f(\varphi) + \frac{(\varphi - \varphi')^2}{1.2.} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} + \frac{(\varphi - \varphi')^3}{1.2.3.} \frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} +$$

woraus man durch Umkehrung findet

$$\varphi - \varphi' = \sigma - \alpha \sigma \left(u + \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) \right) - \frac{\alpha \sigma}{2} \left(\left(\frac{du}{d\varphi} \right) + \left(\frac{du}{d\varphi^3} \right) \right) \dots (F)$$

und die Gleichungen D, E, F sind die gesuchten.

IV. Um die gefundenen Gleichungen mit den in den vorhergehenden gegebenen Ausdrücken zu vergleichen, ist der Krümmungshalbmesser einer krummen Linie von doppelter Krümmung Cap. X. §. 6. III.

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}$$

welcher Ausdruck $ds = \text{Const.}$ voraussetzt.

Die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2\alpha u$$

gibt nach einer doppelten Differentiation

$$xd^2x + yd^2y + zd^2z = \alpha d^2u - ds^2$$

Addirt man aber zu dem Quadrate dieser Gleichung die Quadrate der drey Gleichungen (A), so erhält man, wenn man wieder α^2 vernachlässiget, zur Summe aller vier Quadrate

$$(x^2 + y^2 + z^2)(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) \\ = ds^4 - 2\alpha ds^2 d^2u$$

also ist

$$\varrho = \frac{ds^2 \sqrt{1 + 2\alpha u}}{\sqrt{ds^4 - 2\alpha ds^2 d^2u}} = 1 + \alpha u + \frac{\alpha d^2u}{ds^2}$$

Ist die geodätische Linie s senkrecht auf den Meridian, (die Ebene der xz) so ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{d^2u}{ds^2} = - \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \text{Tg } \varphi'$$

also auch

$$\varrho' = 1 + \alpha u - \alpha \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \text{Tg } \varphi'$$

Ist aber die geodätische Linie σ der Ebene der xz parallel, so ist (nach III)

$$d\sigma = -r d\varphi = (1 + \alpha)u d\varphi \text{ also}$$

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{d^2u}{d\varphi^2}, \text{ also auch}$$

$$\varrho'' = 1 + \alpha u + \alpha \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} \right)$$

Setzt man in N. III.

$$\frac{\sigma}{\varrho''} = \tau,$$

so ist die Gleichung F, wenn

$$\alpha = \frac{\epsilon^3}{2}$$

gesetzt wird,

$$\varphi' = \varphi - x \left(1 + \frac{\epsilon^2 x}{4} \left(\frac{du}{d\varphi} \right) + \frac{\epsilon^2 x}{4} \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) \right)$$

und setzt man in N. II.

$$\frac{s}{\rho'} = y,$$

so sind die Gleichungen D und E, wenn man φ , für jenes φ setzt,

$$\varphi' = \varphi + \frac{1}{2} y^2 \left(\text{Tg } \varphi - \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \right)$$

$$\lambda - \lambda' = \frac{y}{\text{Cos } \varphi'} \left(1 - \frac{1}{2} y^2 \text{Tg}^2 \varphi' \right)$$

$$z' = \varphi_0 - y \text{Tg } \varphi' + \frac{1}{2} y^3 \text{Tg } \varphi' \left(\frac{1}{2} + \text{Tg}^2 \varphi' \right)$$

und aus den letzten vier Gleichungen wird man, so wie in §. 12. die Polhöhe φ' , die Längendifferenz $\lambda - \lambda'$ und das Azimut z' eines Ortes finden, wenn dessen Coordinaten xy gegen einen andern Ort, dessen Polhöhe φ ist, gegeben sind.

V. Um aber die letzten Gleichungen zur Anwendung brauchbar zu machen, muß man zuvor irgend eine Hypothese für die Gestalt der Erde, d. h. für die Größe u annehmen.

Die Gleichung des Körpers, der durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe b entsteht, ist

$$a^2 z^2 + b^2 (y^2 + x^2) = a^2 b^2$$

Setzt man

$$a\epsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$$

so ist diese Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - \epsilon^2 (x^2 + y^2 - 1) = 0$$

wofür man auch setzen kann

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 + \epsilon^2 z^2 = 0$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der im Anfange dieses §. angenommenen allgemeinen Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - \epsilon^2 u = 0$$

so ist

$$u = -z^2$$

das heißt

$$u. = -\sin^2 \varphi$$

also auch

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right) = -\sin 2\varphi,$$

$$\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) = -2 \cos 2\varphi,$$

$$\left(\frac{d^3u}{d\varphi^3}\right) = 4 \sin 2\varphi,$$

und wenn man diese Werthe in den vorhergehenden Ausdrücken substituirt, so erhält man erstens

$$\varphi' = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \varphi$$

$$\varphi'' = 1 - \varepsilon^2 + \frac{3\varepsilon^2}{2} \sin^2 \varphi$$

$$x = \sigma \left(1 + \varepsilon^2 - \frac{3\varepsilon^2}{2} \sin^2 \varphi\right)$$

$$y = s \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \varphi\right)$$

und zweytens für die vier letzten Gleichungen der N. IV.

$$\varphi_1 = \varphi - x \left(1 + \frac{3\varepsilon^2 x}{4} \sin^2 \varphi\right)$$

$$\varphi' = \varphi_1 + \frac{y^2}{2} \operatorname{Tg} \varphi_1 (1 + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi_1)$$

$$\lambda - \lambda' = \frac{y}{\cos \varphi_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} y^3 \operatorname{Tg}^2 \varphi_1\right)$$

$$z' = 90 - y \operatorname{Tg} \varphi_1 + \frac{1}{3} y^3 \operatorname{Tg} \varphi_1 \left(\frac{1}{2} + \operatorname{Tg}^2 \varphi_1\right)$$

und von diesen Gleichungen sind die drey letzten die Gleichungen (A) des §. 12, weil die Werthe von y in beyden Fällen identisch sind. Aber man sieht leicht, daß auch der Werth von φ_1 aus der ersten dieser vier Gleichungen mit dem übereinstimmt, der aus der ersten der Gleichungen (A) folgt. Man wird noch bemerken, daß φ' φ'' die zwey Halbmesser der Krümmung der beyden krummen Linien sind, die auf einander senkrecht stehen, und von denen die eine die größte, die andere die kleinste Krümmung unter allen Curven hat, die in derselben Oberfläche durch denselben Durchschnittspunkt jener beyden Curven können gezogen werden. Für das abgeplattete Sphäroid ist der Krümmungshalbmesser der erzeugenden Curve oder φ'' der kleinste aller Krümmungshalbmesser, für das längliche Sphäroid aber ist der der erzeugenden Curve von allen der größte.

Wir haben in dem Vorhergehenden gezeigt, wie man aus dem gegebenen Dreyecknetze die Länge und Breite der Signalpunkte ableiten könne. Zur vollständigen Bestimmung dieser Punkte fehlt noch die dritte Coordinate, oder die Höhe dieser Punkte über der Meeresfläche. Um aber aus den gegenseitig beobachteten Zenithdistanzen dieser Punkte die wahre Höhe derselben zu finden, muß offenbar bey jeder Beobachtung der Mittelpunkt des Instruments in dem Signalpunkte des Beobachtungsortes selbst stehen, oder doch die außer diesem Punkte beobachtete Zenithdistanz auf ihn zurückgebracht werden. Da bey diesen Zenithdistanzen es nichts schadet, wenn auch der Beobachtungspunkt den Signalen seitwärts liegt, wenn er nur in einerley Horizontallinie mit ihm ist, so sey $d h$ der Unterschied beyder Horizontalebenen, des Beobachtungspunktes und des Signalpunktes, e die Entfernung beyder Signalpunkte, und z die aus dem Beobachtungsorte gemessene, so wie ζ die corrigirte oder die aus dem Signalpunkte zu messende Zenithdistanz, so ist, wie man leicht sieht,

$$\operatorname{Tg} \zeta = \frac{d h \sin z}{e - d h \cos z}$$

also

$$\begin{aligned} \zeta = z + \left(\frac{d h}{e}\right) \frac{\sin z}{\sin 1''} \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{d h}{e}\right)^2 \frac{\sin 2 z}{\sin 1''} + \frac{1}{3} \left(\frac{d h}{e}\right)^3 \frac{\sin 3 z}{\sin 1''} \end{aligned}$$

In diesem Ausdrücke ist e nicht der Bogen oder die Chorde zwischen beyden Gegenständen, sondern die gerade Linie, welche die Signalpunkte vereinigt. Es ist aber klar, daß man für e auch ohne merklichen Fehler den Bogen brauchen kann, da $d h$ gegen e meistens sehr klein ist. Auch reicht das erste Glied dieser Correction meistens hin.

Es seyen also z und z' die beyden so corrigirten Zenithdistanzen der Signalpunkte, die übrigens noch ihre Refractionen r und r' enthalten. Sind A, B (Fig. 27) die beyden Signalpunkte, und ist ω der Mittelpunkt der Erde, so ist

$$Z A B = z + r$$

die wahre Zenithdistanz an dem Orte A , dessen Höhe über dem Meere bekannt seyn soll, und

$$Z' B A = z' + r'$$

die wahre Zenithdistanz an dem Orte B , dessen Höhe gesucht wird.

Man sieht leicht, daß

$$ZAB + Z'BA = 180^\circ + \omega \text{ ist.}$$

Ist $A\omega = b\omega$, so ist $Bb = dH$ die gesuchte Höhendifferenz beyder Signale und $Ab = \Delta$ die horizontale Entfernung oder die Chorde beyder Signale. Wir haben also die zwey Gleichungen

$$z + r + z' + r' = 180 + \omega$$

$$\frac{dH}{\Delta} = \frac{\sin BAb}{\sin ABb}$$

I. Die terrestrische Refraction r, r' ist, wie man gewöhnlich annimmt, bloß eine Function des Winkels ω . Sind also beyde Beobachtungen gleichzeitig, oder unter denselben Umständen angestellt, so ist $r = r'$ und wenn man

$$n = \frac{r}{\omega}$$

setzt, so ist

$$n = \frac{90 + \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2}(z' + z)}{\omega}$$

und man fand aus den Beobachtungen n nahe gleich 0.08.

Man wird daher die Refraction bestimmen können, wenn man die zwey analogen Zenithdistanzen z, z' aus unmittelbaren Beobachtungen kennt. Was aber den Winkel ω betrifft, so ist Δ gleich ω multiplicirt mit dem Krümmungshalbmesser, oder

$$\omega = \frac{\Delta}{a \sin 1''} \cdot (1 - \varepsilon^2 - \frac{3}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)$$

$$\text{wo } \log a = 6.5147151.$$

Sey der Kürze wegen

$$\frac{1}{a \sin 1''} (1 - \varepsilon^2 - \frac{3}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \varphi) = m$$

so daß

$$\omega = m \Delta \text{ ist,}$$

II. Es ist

$$\omega Ab = 90 - \frac{\omega}{2},$$

$$BAb = 180 - ZAB - \omega Ab = 90 + \frac{\omega}{2} - z - r$$

und

$$ABb = z + r - \omega$$

also die zweyte der vorhergehenden beyden Gleichungen

$$dH = \frac{\Delta \cos(z+r-\frac{\omega}{2})}{\sin(z+r-\omega)}$$

und dadurch findet man dH aus z , wenn r bekannt ist.

Da

$$z+r=180+\omega-z'-r$$

so ist auch

$$dH = - \frac{\Delta \cos(z'+r-\frac{\omega}{2})}{\sin(z'+r)}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Gröfse

$$r = 90 + \frac{\omega - z' - z}{2}$$

so ist

$$dH = \frac{\Delta \sin \frac{z'-z}{2}}{\cos \frac{z'-z+\omega}{2}}$$

und dadurch findet man dH aus den beyden Zenithdistanzen, ohne dafs man r kennt. Ist $z' < z$, so ist dH negativ, oder deren unbekannter Ort liegt unter dem bekannten.

Exempel: $\Delta = 100000$ Toisen, $\frac{z'-z}{2} = 0^\circ 20' 0''$

$$\log m = 8.7997100$$

5.

$$\log \omega = 3.7997100$$

$$\omega = 1^\circ 45' 5'' 36$$

$$\frac{z'-z+\omega}{2} = 1^\circ 12' 32'' 68$$

also gibt der letzte Ausdruck für dH

$$dH = 581.9027 \text{ Toisen.}$$

III. Dieselbe Gleichung dient auch, aus z , z' und dH die horizontale Entfernung Δ zweyer Orte zu finden. Es ist nämlich

$$\Delta = dH \frac{\cos \frac{z'-z+\omega}{2}}{\sin \frac{z'-z}{2}}$$

wo man $(z' - z)$ aus den beobachteten Zenithdistanzen, und dH etwa durch Barometermessungen erhält. Es ist klar, daß dieser Ausdruck für Δ in der Ausübung keiner großen Schärfe fähig ist. Um diese Gleichung, in welcher die GröÙe

$$\omega = m \Delta$$

noch unbekannt ist, aufzulösen, kann man so verfahren.

$$\text{Sey } \log dH = 2.7648504, \text{ und } \frac{z' - z}{2} = 0^\circ 20' 0''$$

$$\log \sin \frac{z' - z}{2} = \frac{7.7647537}{5.0000967} \quad \log m = 8.7997100$$

$$\log \cos \frac{z' - z}{2} = 9.9999927$$

$$\log \Delta = 5.0000894 \quad \text{---} \quad \log dH = 5.0000967$$

$$\frac{8.7997100}{\sin \frac{z' - z}{2}}$$

$$\log \omega = 3.7997994 \quad \log \cos \frac{z' - z}{2} + \omega = 9.9999033$$

$$\omega = 6307''$$

$$\log \Delta = 5.0000000 \text{ wie zuvor.}$$

§. 15.

Wir wollen nun sehen, was sich aus den bisher gemessenen Breitengraden für die GröÙe und Gestalt der Erde ergibt. Die vorzüglichsten dieser Messungen sind

Mittlere Breite des gemessenen Bogens	Länge des Breiten-grades	Ort und Beobachter.
45° 4' 17''	57012 Toisen	Frankreich, Delambre u. Mechain.
66 20 10	57196	Lappland, Svanberg.
12 32 20	56763	Bengalen, Lambton.
1 31 0	56737	Peru, Bouguer.
52 2 20	57069	England, Mudge.
39 12 0	56888	Pensilvanien, Mason
33 18 0 Südl.	57037	Vorgeb. d. gut. Hoffnung, Lacaille.
43 1 0	56979	Italien, Boscovich.

Von diesen sind die vier ersten die verläßlichsten. Sucht man aus je zweyen derselben nach §. 5. I die Excentricität

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}$$

und daraus die Abplattung in Beziehung auf a oder

$$= \frac{a-b}{a} = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{8} \varepsilon^4 + \frac{1}{16} \varepsilon^6 +$$

so findet man

$$\text{Frankreich, Peru } a = \frac{1}{310.6}$$

$$- - - \text{Bengalen} = \frac{1}{311.3}$$

$$- - - \text{Lappland} = \frac{1}{315.2}$$

$$\text{Lappland, Bengalen} = \frac{1}{312.9}$$

$$\text{Aequator} = \frac{1}{312.4}$$

Im Mittel aus diesen wohl übereinstimmenden Resultaten

$$a = \frac{1}{312.5} = 0.0032 \text{ und}$$

$$\varepsilon = 0.0799$$

Aus dieser Abplattung und der französischen Messung folgt der Quadrant des Erdmeridians

$$Q = 5131117 \text{ Toisen}$$

$$\text{Halbmesser des Aequators } 3271812$$

und der der mittleren Breite von 45 Graden entsprechende Breitengrad

$$g = 57011876 \text{ Toisen}$$

woraus die Größe g' jedes andern Breitengrades, zu dem die mittlere Breite φ gehört, folgt

$$g' = g \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2 - \varepsilon^2} \cos 2 \varphi \right) - \frac{3}{2}$$

Die andern Messungen gewähren nicht dieselbe Uebereinstimmung, woran Beobachtungsfehler, Anziehung benachbarter Gebirge auf das Bleylath, oder Unregelmäßigkeiten in der Oberfläche der Erde selbst, deren Gestalt sich von jener eines Ellipsoids beträchtlich entfernen kann, Schuld seyn mögen.

I. Genauer würde man verfahren, wenn man für jede der vorhergehenden Messungen ihren Breitengrad

$$g = x + y \sin^2 \varphi$$

setzte, wo φ die mittlere Breite des gemessenen Bogens ist; und wenn man dann aus diesen acht Bedingungsgleichungen die wahrscheinlichsten Werthe von x und y nach der Methode der kleinsten Quadrate (Cap. IX.) entwickelte. M. s. Delambres *Astronomie*; dessen *Base du système métrique*, und Laplaces *Expos. du système du monde*.

§. 16.

Endlich muß hier noch folgende Methode, die Gestalt des Erdmeridians aus geodätischen Messungen zu bestimmen, ihrer Wichtigkeit wegen angezeigt werden.

Ist a der Halbmesser des Erdäquators, b die halbe kleine Axe, r die Entfernung eines Punktes der Oberfläche vom Mittelpunkt und ψ der Winkel der Linie b und r , so folgt aus den über die Gestalt flüssiger Körper angestellten Untersuchungen, denn als einen solchen setzt man auch die Erde in ihrem ursprünglichen Zustande voraus, daß die Gestalt des Erdmeridians durch folgende Gleichung ausgedrückt werden kann

$$r = b (1 + m \sin^2 \psi + n \sin^4 \psi)$$

wo m eine sehr kleine Gröfse von der Ordnung der Abplattung, und wo n von der Ordnung m^2 ist. Heißt diese Abplattung

$$\alpha = \frac{a - b}{b}$$

so ist, da $r = a$ für

$$\psi = 90^\circ \text{ ist, } m + n = \alpha.$$

Für den Fall, wo die Gestalt der Meridiane rein elliptisch ist, hat man, wenn man die Abscisse x auf der großen Axe vom Mittelpunkte, und die Ordinate y darauf senkrecht nimmt,

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

Es ist aber

$$y = r \cos \psi,$$

$$x = r \sin \psi$$

also auch

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}$$

Setzt man in diesem Ausdrucke für a die Größe $b (1 + \alpha)$ und vernachlässigt man α^3 , so ist

$$r = b (1 + (\alpha - \frac{3}{2} \alpha^2) \sin^2 \psi + \frac{3}{2} \alpha^2 \sin^4 \psi)$$

woraus folgt, daß die oben angenommene Gleichung in die der Ellipse übergeht, wenn

$$m = \sqrt{\frac{2n}{3}}$$

ist. Es sey nun s ein Bogen des Meridians zwischen den zwey Halbmessern a und r , so ist

$$ds = - \sqrt{r^2 d\psi^2 + dr^2}$$

also auch, da dr von der Ordnung α ist

$$ds = -r d\psi - \frac{dr^2}{2rd\psi}$$

oder, wenn man für r und dr ihre Werthe aus der vorhergehenden Gleichung substituirt,

$$ds = -b d\psi (1 + m \sin^2 \psi + n \sin^4 \psi + 2m^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi)$$

Integrirt man diesen Ausdruck, und bestimmt die Constante der Integration so, daß $s = 0$ für $\psi = 90$ wird, so erhält man

$$s = b (1 + \frac{m}{2} + \frac{3n}{8} + \frac{m^2}{4}) (90 - \psi)$$

$$+ \frac{b}{4} (m + n) \sin 2\psi + \frac{b}{32} (2m^2 - n) \sin 4\psi$$

Ist aber φ die beobachtete Polhöhe, oder der Winkel der Normale mit a , so ist bekanntlich

$$\operatorname{Tg} (\varphi + \psi - 90) = \frac{dr}{r d\psi}$$

also auch, wenn man wieder die dritten und höheren Potenzen von α vernachlässiget

$$\varphi + \psi - 90 = \frac{dr}{r d\psi}$$

woraus man erhält

$$\begin{aligned} \varphi &= 90 - \psi + 2 \sin \psi \cos \psi (m + (2n - m^2) \sin^2 \psi) \\ &= 90 - \psi + (m + n - \frac{m^2}{2}) \sin 2\psi \\ &\quad + \frac{1}{4} (m^2 - 2n) \sin 4\psi \end{aligned}$$

und daraus durch Reversion

$$\psi = 90 - \varphi + \left(m + n - \frac{m^2}{2}\right) \sin 2\varphi \\ - \frac{1}{4} (5m^2 - 2n) \sin 4\varphi$$

Substituirt man diesen Werth von ψ in dem vorhergehenden Ausdrücke von s , so erhält man

$$s = b \left(1 + \frac{m}{2} + \frac{3n}{8} + \frac{m^2}{4}\right) \varphi \\ - \frac{3}{4} b (m + n) \sin 2\varphi \\ + \frac{1}{32} b (30m^2 - 15n) \sin 4\varphi$$

Ist also Q der Quadrant des Meridians, so ist, wenn man

$$\varphi = 90 = \frac{\pi}{2} \text{ setzt,}$$

$$Q = b \left(1 + \frac{m}{2} + \frac{3n}{8} + \frac{m^2}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

also auch

$$s = Q \cdot \left(\frac{2\varphi}{\pi} - \frac{3}{2\pi} (m + n - \frac{1}{2}m^2) \sin 2\varphi + \frac{15}{8\pi} (m^2 - \frac{1}{2}n) \sin 4\varphi\right)$$

und eben so, wenn s' ein anderer Bogen des Meridians ist, zu welchem die Breite φ' gehört

$$s' - s = \frac{2Q}{\pi} (\varphi' - \varphi) - \frac{3Q}{2\pi} (m + n - \frac{1}{2}m^2) (\sin 2\varphi' - \sin 2\varphi) \\ + \frac{15Q}{8\pi} (m^2 - \frac{1}{2}n) (\sin 4\varphi' - \sin 4\varphi)$$

und dies ist die Gleichung, welche das Verhältniß irgend eines Bogens

$$s' - s$$

des Meridians und der Differenz

$$\varphi' - \varphi$$

der Breiten seiner Endpunkte gibt. Kennt man die Größen m und n , so wird man aus dieser Gleichung auch die Länge Q des Meridianquadranten erhalten.

Sey der Kürze wegen

$$p = \frac{3}{2\pi} (m + n - \frac{1}{2}m^2)$$

$$q = \frac{15}{8\pi} (m^2 - \frac{1}{2}n)$$

so ist die vorhergehende Gleichung

$$\frac{s' - s}{Q} = \frac{2}{\pi} (\varphi' - \varphi) - p (\sin 2 \varphi' - \sin 2 \varphi) \\ + q (\sin 4 \varphi' - \sin 4 \varphi)$$

in welcher p und q die unbekannten Gröfsen sind. Da aber q viel kleiner ist, als p , so kann man in einer ersten Näherung die Gröfse q vernachlässigen, und dann werden je zwey der angestellten Messungen eine Gleichung

$$\frac{s' - s}{Q} = \frac{2}{\pi} (\varphi' - \varphi) - p (\sin 2 \varphi' - \sin 2 \varphi)$$

geben, und aus allen diesen Gleichungen wird man durch die Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe von Q und p finden. Heilst man diese ersten genäherten Werthe Q^0 und p^0 , und die verbesserten

$$Q = Q^0 \cdot (1 + x)$$

$$Qp = Q^0 p^0 (1 + y)$$

und endlich

$$Qq = Q^0 \cdot z$$

so hat man, wenn man diese Werthe von Q , Qp , Qq in der vorhergehenden allgemeinen Gleichung substituirt,

$$\frac{s' - s}{Q^0} = \frac{2}{\pi} (\varphi' - x) (1 + x) \\ - p^0 (1 + y) (\sin 2 \varphi' - \sin 2 \varphi) \\ + z (\sin 4 \varphi' - \sin 4 \varphi)$$

und wenn man von dieser Gleichung die vorletzte abzieht,

$$0 = \frac{2}{\pi} (\varphi' - x) \cdot x - (\sin 2 \varphi' - \sin 2 \varphi) \cdot y \\ + (\sin 4 \varphi' - \sin 4 \varphi) \cdot z$$

so dafs also jedes Paar von Beobachtungen eine Gleichung der Form

$$0 = Ax - By + Cz$$

gibt, wenn man x^2 vernachlässigt. Aus diesen Gleichungen wird man dann die wahrscheinlichsten Werthe der Gröfsen

$$x \quad y \quad z$$

bestimmen können. Kennt man diese, so ist der wahre Werth von

$$Q = Q^0 (1 + x)$$

$$p = \frac{p^0 (1+y)}{1+x}, \text{ oder nahe}$$

$$p = p^0 (1+y-x)$$

$$q = \frac{z}{1+x}, \text{ oder nahe}$$

$$q = z$$

Setzt man endlich

$$k = \pi \left(\frac{2}{3} p + \frac{1}{15} q \right)$$

so hat man

$$m = k - \frac{3}{2} k^2$$

$$n = 2 m^2 - \frac{1}{15} q \pi$$

woraus die Abplattung

$$\alpha = m + n \text{ folgt.}$$

Ist dann

$$n - \frac{3}{2} m^2 = \frac{1}{2} m^2 - \frac{1}{15} q \pi = 0$$

so ist der Meridian eine reine Ellipse. Ist endlich

$$b = \frac{2 Q}{\left(1 + \frac{m}{2} + \frac{3n}{8} + \frac{m^2}{4} \right) \cdot \pi}$$

so ist die Gleichung des Meridians

$$r = b (1 + m \sin^2 \psi + n \sin^4 \psi)$$

Eine andere Behandlung dieses Gegenstandes findet man in der Mon. Corresp. 1806. September.

§. 17.

Ein anderes Mittel, die Abplattung der Erde zu finden, gibt die Länge des einfachen Secundenpendels. Wie man diese aus Beobachtungen an zusammengesetzten Pendeln ableitet, kann man in Delambres Astronomie, oder in Biots Traité d'astronomie physique III. B. nachsehen. Hier ist es genug zu bemerken, daß für jede Breite φ die Länge l des einfachen Secundenpendels durch die Gleichung ausgedrückt wird

$$l = A + B \sin^2 \varphi \dots (I)$$

wo A B zwey Constanten sind, deren die erste die Länge des Secundenpendels am Aequator ausdrückt, wo $\varphi = 0$ ist, und wo

I,

Y

$$B = A \left(\frac{5}{578} - \alpha \right)$$

und $\alpha = \frac{a-b}{a}$ die Abplattung ist.

In Paris fand man unter der Breite $\phi = 48^\circ 50' 14''$ in der Höhe von 80 Meter über der Meeresfläche die Länge des einfachen Pendels, welches eine Schwingung in einer Decimalsecunde vollendet, gleich

0.7419076, Meter

also die auf die Meeresfläche reduzirte Länge

$l = 0.7419262$ Meter,

also gibt die Gleichung I für Paris

$$0.74192620 - A - 0.56677210 B = 0$$

Eben so erhielt man

$$0.7420865 - A - 0.6045628 B = 0 \quad \text{für Dünkirchen.}$$

$$0.7417157 - A - 0.5136117 B = 0 \quad \text{Clermont.}$$

$$0.7416151 - A - 0.4972122 B = 0 \quad \text{Bordeaux.}$$

$$0.7416243 - A - 0.4932370 B = 0 \quad \text{Figeac.}$$

$$0.74125171 - A - 0.3903417 B = 0 \quad \text{Formentera}$$

$$0.7400531 - A - 0.1001576 B = 0 \quad \text{Petitgoave}$$

$$0.7397671 - A - 0.0276208 B = 0 \quad \text{Portobello}$$

$$0.7396332 - A - 0.0000000 B = 0 \quad \text{Peru am Aequator.}$$

Sucht man aus diesen neun Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe der Größen A und B (Cap. IX) so findet man

$$0.74107447 - A - 0.35483510 B = 0$$

$$0.29606599 - 0.399189492 A - 0.20052344 B = 0$$

also $A = 0.739648316$ Meter

$$B = 0.0040109736$$

$$\alpha = \frac{5}{578} - \frac{B}{A} = \frac{1}{309.7}$$

welche Abplattung nahe genug mit der übereinstimmt, die wir §. 15 aus den gemessenen Graden gefunden haben.

Will man aus beyden Resultaten das Mittel nehmen, so hat man nahe

$$\alpha = 31\frac{1}{2}$$

und wenn man die allgemeine Pendellänge durch diese Abplattung und durch die mit gröfser Schärfe beobachtete Pendellänge in Paris ausdrücken will; so ist

$$l = A + A \left(\frac{5}{578} - \alpha \right) \sin^2 \varphi$$

wo

$$l = 0.7419262 \text{ Meter, und}$$

$$\varphi = 48^\circ 50' 14''$$

ist, also ist allgemein die Länge des Decimalsecundenpendels

$$l = 0.73964376 + 0.004027648 \sin^2 \varphi \text{ in Metern}$$

oder die Länge des Sexagesimalsecunden - Pendels

$$l = 439.2266955 + 2.39176070 \sin^2 \varphi \text{ in Linien der Toise}$$

ausgedrückt.

Eben so geben die Pendelbeobachtungen, welche die spanischen Seefahrer Malaspina, Espinosa und Bausa in der südlichen Halbkugel angestellt haben, für die Abplattung jener Halbkugel

$$\frac{1}{311.5}$$

woraus zu folgen scheint, daß die Erdmeridiane gleiche und ähnliche Ellipsen sind; obschon sich andere unmittelbare Gradmessungen, so wie selbst die Pendelmessung Lacailles am Vorgebirge der guten Hoffnung mit diesem Resultate nicht vereinigen lassen. Endlich gibt es noch unter den Gleichungen, welche die Störungen der elliptischen Bewegung des Mondes durch die Erde ausdrücken, zwey, deren die eine

$$a \sin \Omega \mathcal{C}$$

und die zweyte

$$b \sin \text{Länge } \mathcal{C}$$

ist. Die erste fand schon T. Mayer bloß aus Beobachtungen, und er nahm a gleich vier Secunden an. Laplace zeigte zuerst, daß nach der Theorie der allgemeinen Schwere eine solche Ungleichheit der Mondbewegung statt finde, und daß der Werth der Gröfse a von der Abplattung der Erde abhängt. Neuere Beobachtungen gaben

$$a = 6'' 8$$

woraus die Abplattung

$$\frac{a-b}{b} = \frac{1}{305}$$

folgt. Wäre die Abplattung der Erde, wie mehrere Astronomen fanden, gleich $\frac{1}{230}$, so müßte $a = 11''.5$ seyn. Für die zweyte Gleichung, welche die Breite des Mondes, so wie jene erste die Länge desselben ändert, fand Laplace, daß der Werth von b ebenfalls von der Abplattung der Erde abhängt, und da aus den Beobachtungen $b = -8''.0$ gefunden wurde, so folgt daraus die Abplattung $\frac{1}{304.6}$. Wäre diese Abplattung $\frac{1}{230}$, so müßte $b = -13''.5$ seyn. Diese beyden Bestimmungen der Abplattung der Erde aus der Theorie des Mondes, stimmen nahe genug mit jener überein, welche wir oben aus den Gradmessungen und aus den beobachteten Pendellängen gefunden haben. Der Mond gibt uns daher durch die Beobachtungen seiner Bewegungen die Ellipticität der Erde, wie er die ersten Astronomen durch die Beobachtung seines runden Schattens bey den Mondsfinsternissen die Kugelgestalt der Erde kennen lehrte. Diese Störungsgleichungen der Länge des Mondes enthalten noch eine dritte, welche die Form

$$e. \sin (\odot - \odot)$$

hat, und in welcher der Werth des Factors e von der Gröfse der Sonnenparallaxe abhängt. Schon T. Mayer hat daraus die Gröfse dieser Parallaxe gleich $7''.8$ gefunden, genauer, als man sie vor ihm kannte. Neuere Beobachtungen gaben den Werth von e gleich $122''.1$, woraus die Sonnenparallaxe $8''.6$, also nahe dieselbe folgt, welche aus dem letzten Durchgange der Venus vor der Sonne gefunden wurde.

Ist ferner T die siderische Umlaufszeit der Erde um die Sonne, l die Länge des einfachen Secundenpendels, R der Halbmesser der Erde am Aequator, M und m die Masse der Erde und des Mondes, und endlich p die Horizontalparallaxe des Mondes unter dem Aequator, so gibt die Theorie zwischen diesen Gröfsen folgende Gleichung

$$\sin^3 p = 1.005 \left(\frac{4}{l} \frac{R}{T^2} \right) \cdot \frac{M}{M+m}$$

und da nach dem Vorhergehenden die Parallaxe p durch Beobachtungen des Mondes selbst aus einem einzigen Beobachtungsort gefunden werden kann, so wird man durch diese Gleichung den Werth von R oder die Gröfse der Erde bestimmen. Nach den Beobachtungen ist

$$p = 57' 0'', \frac{1}{3}$$

$$T = 365, 256383 \text{ Tage,}$$

$$l = 0.510437 \text{ Toisen}$$

$$\frac{M}{m} = 69.75$$

$$\text{also } R = 3271691 \text{ Toisen,}$$

welches nahe genug mit den durch unmittelbare Messungen erhaltenen Resultaten übereinstimmt.

Endlich hängt auch, wie wir im zweyten Buche sehen werden, die mittlere Bewegung des Mondes in der Länge, so wie die mittlere Bewegung der grossen Axe und der Knotenlinie der Mondbahn von der Grösse der Excentricität der Erdbahn ab, und da die Aenderungen dieser drey Bewegungen, vorzüglich die der ersten gross genug ist, um sie schon nach einigen Jahrhunderten aus den Beobachtungen mit Sicherheit zu bestimmen, so liess sich auch umgekehrt aus dieser Bestimmung die Aenderung der Excentricität der Erdbahn ableiten. Laplace fand diese Excentricität für den Anfang dieses Jahrhunderts gleich 0.01679435, die halbe grosse Axe der Erdbahn gleich der Einheit vorausgesetzt, und die Abnahme dieser Excentricität in hundert Jahren gleich 0.000 041632. Diese Abnahme der Excentricität der Erdbahn, welche seit den ältesten uns bekannten Finsternissen die Mittelpunktsgleichung der Erde noch nicht um acht Minuten geändert hat, hat in der Länge des Mondes eine Aenderung von $1^{\circ} 48'$ und in der mittlern Anomalie desselben sogar eine Aenderung von sieben Graden hervorgebracht, so dass die äusserst geringen Veränderungen der Gestalt unserer Erdbahn in jener des Mondes, gleichsam wie von einem Hohlspiegel reflectirt, viel grösser erscheinen. Die Beobachtungen des Mondes, welche den ersten Astronomen die kugelförmige Gestalt der Erde zeigten, haben daher ihren Nachfolgern auch die Grösse der Erde und ihre Abplattung, so wie die Entfernung der Erde von der Sonne, und endlich die Aenderung der Gestalt der Erdbahn kennen gelehrt, ohne dass es nöthig gewesen wäre, diese Kenntnisse, wie jene der Sonnenparallaxe, erst durch weite und beschwerliche Reisen in entfernte Gegenden, einzusammeln.

§. 18.

Wir haben in dem Vorhergehenden (§. 14) gesehen, wie man aus den beobachteten Zenithdistanzen terrestrischer Objecte die Höhe derselben über der Meeresfläche ableiten könne. Es gibt aber noch ein anderes, sehr einfaches Mittel, diese Höhen zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke wollen wir in der die Erde umgebenden Atmosphäre eine cylindrische vertikale Luftsäule betrachten. Man setze voraus, dass die diesen Cylinder umgebende Luft fest

wird, so daß jene Luftsäule gleichsam in die festen Wände eines Cylinders eingeschlossen sey. Wenn die ganze Masse der Atmosphäre im Gleichgewichte angenommen wird, so wird dieses Gleichgewicht durch jene Voraussetzung nicht gestört. Zu diesem Gleichgewichte der Atmosphäre wird aber erfordert, daß, wenn man diese Atmosphäre in der Erde concentrische Schichten zerlegt, jede dieser Schichten gleiche Dichtigkeit, also auch gleichen Druck und gleiche Temperatur habe. Sey z die Entfernung einer dieser Schichten von der Oberfläche der Erde, dz die Höhe oder Dicke derselben, endlich Δ , x und g' die Dichte, die Temperatur und die Schwere dieser Schichte, wo die Richtung der Schwere senkrecht auf die Schichte, oder parallel mit dem oben betrachteten Cylinder wirkt. Diese Schichte wird von jenem Cylinder einen Theilabschneiden, von welchem der Druck an seiner untern Basis gleich p , also an seiner obern gleich $p + d p$ seyn soll. Der Unterschied beyder, oder $d p$, wird daher dem Gewichte jenes Theiles gleich seyn, und da dies Gewicht

$$g' \cdot \Delta \cdot dz$$

ist, da überdiß z wächst, wenn p abnimmt, so ist

$$- d p = g' \cdot \Delta \cdot dz$$

Da aber nach dem, was in dem Cap. von der Refraction gesagt wurde, jedes Volum der atmosphärischen Luft für einen Grad des hunderttheiligen Thermometers sich um seinen 0.004^{ten} Theil ausdehnt, so daß dieses Volum für die Temperatur x gleich

$$1 + (0.004) x$$

ist, wenn es für $x = 0$ der Einheit gleich ist; da überdiß die elastische Kraft der Luft, oder der Druck, welchen sie ausübt, der Dichte Δ derselben und der Temperatur proportional ist, so hat man

$$p = a \Delta \cdot (1 + (0.004) x)$$

wo a das Verhältniß des Druckes zur Dichtigkeit der Luft für die Temperatur Null bezeichnet. Substituirt man diesen Werth von Δ in der vorhergehenden Gleichung, und setzt der Kürze wegen $\alpha = 0.004$, so hat man

$$\frac{d p}{p} = - \frac{g' dz}{a (1 + \alpha x)}$$

Ist endlich r der Halbmesser der Erde, und g die Schwere auf der Oberfläche der Erde, so ist, da sich die Kraft der Schwere wie verkehrt das Quadrat der Entfernung verhält

$$g' = \frac{g \cdot r^2}{(r + z)^2}$$

und daher die vorhergehende Gleichung

$$\frac{d p}{p} = \frac{-g r^2 dz}{a (1 + \alpha x) (r + z)^2} \dots (I)$$

Diese Gleichung läßt sich nicht vollständig integrieren, wenn der Werth von x in einer Function von z nicht gegeben ist, das heißt, wenn das Gesetz der Wärmeabnahme für die verschiedenen Höhen der Luftschichten nicht bekannt ist. Obschon aber dieses Gesetz unbekannt ist, so kann man doch, da der Werth von α sehr klein ist, mit einer in den meisten Fällen hinreichenden Genauigkeit voraussetzen, daß diese Temperatur x in jeder Schichte constant ist, wenn man nur für x in jedem gegebenen einzelnen Falle die mittlere Temperatur der zwey Schichten wählt, in welchen man die Beobachtungen anstellt. Ist daher x eine beständige Gröfse, so ist das Integral der vorhergehenden Gleichung

$$\log p = \frac{\mu \cdot g r^2}{a (1 + \alpha x)} \cdot \frac{1}{r + z} + C$$

wo

$$\mu = 0.43429448$$

der Factor der natürlichen Logarithmen ist, durch welchen man sie in die gemeinen Logarithmen verwandelt, und wo C die Constante der Integration bezeichnet. Um diese letzte zu bestimmen, sey P der Werth von p für $z = 0$, so ist

$$\log P = \frac{\mu \cdot g r}{a (1 + \alpha x)} + C,$$

also die vorhergehende Gleichung

$$\log \frac{P}{p} = \frac{\mu \cdot g r}{a (1 + \alpha x)} \cdot \frac{z}{r + z} \dots (II)$$

Diese Gleichung, verbunden mit der vorhin gefundenen,

$$\Delta = \frac{p}{a (1 + \alpha x)}$$

wird die Werthe von p und Δ in einer Function von z geben, oder diese beyden Gleichungen werden das Gesetz der Dichtigkeit und des Druckes der Luft enthalten, welches für das Gleichgewicht der Atmosphäre statt haben muß.

§. 19.

Nehmen wir nun an, daß man in derselben Höhe z über der Oberfläche der Erde die Höhe h' der Quecksilbersäule eines Barometers beobachtet habe, und daß h die Höhe des Barometers an der Oberfläche der Erde sey.

Da das Quecksilber für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers sich bekanntlich um seinen $\frac{1}{5412}$ ten Theil ausdehnt, so wird man der größeren Genauigkeit wegen beyde Barometerhöhen auf einerley Temperatur bringen. Ist T' der Thermometerstand des Barometers in der Höhe z , und T der des Barometers an der Oberfläche der Erde, so wird man, um jenen auf diesen zu bringen, die Gröfse h' durch den Factor

$$1 + \frac{T - T'}{5412}$$

multipliciren. Wir wollen diese Multiplication in der Gröfse h' schon als geschehen voraussetzen. Uebrigens versteht es sich von selbst, daß hier die beyden Thermometer vorausgesetzt werden, welche mit ihren Barometern in einerley Temperatur stehen, und zu diesem Zwecke gewöhnlich an der Fassung des Barometers befestiget sind. Wir wollen sie die inneren Thermometer nennen.

Ist aber, wie zuvor, g die Schwere an der Oberfläche der Erde, D die Dichte des Quecksilbers, und h die Höhe des Barometers, so ist der Druck des Theiles der Quecksilbersäule, welche in der größeren verschlossenen Röhre des Barometers, über dem Niveau des Quecksilbers in der kleineren offenen Röhre des Barometers steht, offenbar gleich

$$g D. h$$

und eben so ist der Druck des anderen Barometers in der Höhe z gleich

$$g' D. h'$$

und da dieser Druck des Quecksilbers in beyden Barometern dem Drucke der äußern Luft gleich seyn muß, so ist

$$P = g D. h \text{ und}$$

$$p = g' D. h' = \frac{g r^2}{(r+z)^2} D. h'$$

oder

$$\log \frac{P}{p} = \log \frac{h}{h'} + 2 \log \left(1 + \frac{z}{r}\right)$$

Sind endlich t' und t die äußeren Thermometer in der Höhe z und an der Oberfläche der Erde, welche also die Temperatur der äußern Luft anzeigen, so wird man nach dem Vorhergehenden haben

$$x = \frac{t + t'}{2}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{2(t + t')}{1000}$$

Substituirt man dann diese Werthe von

$$\log \frac{P}{p} \text{ und } \alpha \times$$

in der Gleichung (II), so ist

$$z = \frac{a}{\mu g} \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000} \right) \left(\log \frac{h}{h'} + 2 \log \left(1 + \frac{z}{r} \right) \right) \left(1 + \frac{z}{r} \right). \text{(III)}$$

In diesem Ausdrücke wird man den unbekannten Factor

$$\frac{a}{\mu g}$$

am sichersten durch eine aus trigonometrischen Messungen bekannte Höhe z bestimmen. Aus vielen solchen Bestimmungen fand Ramond

$$\frac{a}{\mu g} = 18336 \text{ Meter}$$

für die geographische Breite von 45 Graden. Da dieser Factor die Gröfse g enthält, und der Werth dieser Gröfse für die verschiedenen Breiten nach dem Vorhergehenden verschieden ist, so wird man für die Breite φ haben

$$\frac{a}{\mu g} = 18336 (1 + 0.00284 \cos 2\varphi)$$

Mittels der Gleichung (III) wird man also, wenn für zwey Beobachtungsorte die Barometer- und Thermometerstände bekannt sind, leicht die Höhe z des einen über den anderen ableiten. Bey der numerischen Entwicklung derselben kann man zuerst die Gröfse $\frac{z}{r}$ vernachlässigen, da $r = 6366200$ Meter, also $\frac{z}{r}$ immer sehr klein ist, und dann bey einer zweyten Berechnung den ersten genäherten Werth von z in dem Ausdrücke $\frac{z}{r}$ substituiren. Vernachlässigt man aber die zweyten und höheren Potenzen von $\frac{z}{r}$, und setzt

$$2 \log \left(1 + \frac{z}{r} \right) = 0.868589 \left(\frac{z}{r} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{r^2} \right)$$

so wird jene Gleichung

$$z = 18336 (1 + 0.00284 \cos 2\varphi) \times \left(\left(1 + \frac{z}{r} \right) \log \frac{h}{h'} + 0.868589 \frac{z}{r} \right) \dots \text{(IV)}$$

welcher Ausdruck mit demjenigen identisch ist, den Laplace, *Mec. céleste. Livre X. Chap. IV.* gegeben hat.

I. Ist also die Höhe des Barometers, des äußeren und inneren Thermometers in der untern Station h t T und in der oberen h' t' T' , und die Höhendifferenz beyder Stationen z , so ist

$$\alpha = 18336 + 52 \cos 2 \varphi$$

$$\beta = 1 + 0.002 (t + t')$$

$$\gamma = \log \frac{h}{\left(1 + \frac{T - T'}{5412}\right) h'}$$

$$\text{und } z = \alpha. \beta. \gamma.$$

oder genauer

$$z' = z + 0.0000001364 \alpha \beta z \\ + 0.0000001571 z^2$$

wo die beyden Thermometer hunderttheilige Quecksilberthermometer, und z z' in Metern ausgedrückt sind.

II. Sind aber die Thermometer achtzigtheilige Réaumur, und z z' in Toisen, so ist

$$\alpha = 9407.7244 + 26.6798 \cos 2 \varphi$$

$$\beta = 1 + 0.0025 (t + t')$$

$$\gamma = \log \frac{h}{(1 + 0.00023 (T - T')) h'}$$

$$\text{und } z = \alpha. \beta. \gamma,$$

oder genauer

$$z' = z + 0.0000002659 \alpha \beta z \\ + 0.0000003061 z^2$$

III. Dieselben Ausdrücke geben auch, wenn man bloß an einer Station beobachtet hat, die Höhe dieser Station über der Meeresfläche, wenn man in I setzt,

$$h = 0.7629 \text{ Meter}$$

$$t = 12^\circ 8 \text{ Centigr.}$$

$$T - T' = t - t'$$

oder wenn man in II setzt

$$h = 338.2 \text{ Par. Linien}$$

$$t = 10^{\circ}.24 \text{ Réaum.}$$

$$T - T' = t - t'$$

Exempel. Für Genf ist aus einer grossen Anzahl von Beobachtungen die mittlere Barometerhöhe $h' = 0.7266$ Meter, und die mittlere Temperatur $t' = 12.0$ Centigr.

$$\text{Setzt man daher } h = 0.7629$$

$$t = 12.8$$

$$T - T' = t - t' = 0.8$$

$$\text{und } \varphi = 46^{\circ} 12'$$

$$\text{so ist } \gamma = \log \frac{h}{\left(1 + \frac{0.83}{5412}\right) h'} = 0.0211124$$

$$\text{also } \log \alpha = 4.2632530$$

$$\log \beta = 0.0210238$$

$$\log \gamma = 8.3245376$$

$$\log z = 2.6088144, \quad z = 406.27$$

$$1.07$$

$$0.03$$

$$z = 407.37 \text{ Meter}$$

Höhe Genfs über der Meeresfläche.

Unter der diesem Werke beygefügtten Sammlung von Tafeln findet man eine, durch welche sich die vorhergehenden Rechnungen eben so sicher als bequem machen lassen.

IV. Vernachlässigt man endlich in den vorhergehenden Ausdrücken die Grösse $\frac{z}{r}$ gänzlich, so erhält man

$$z = \frac{a}{\mu g} \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right) \log \frac{h}{h'}$$

ein Ausdruck, der in allen Fällen bequem gebraucht werden kann, wo keine grosse Schärfe gefordert wird, wenn man bemerkt, daß, nach Ramonds Versuchen, dieser Ausdruck mit den Beobachtungen am besten übereinstimmt, wenn man für den Factor $\frac{a}{\mu g}$ nicht den oben gegebenen Werth 18336, sondern

18393 Meter oder 9436. 97 Toisen setzt, und wie zuvor, die Gröfse h' der obern Station durch $1 + \frac{T - T'}{5412}$ multipliziert.

Man hat so in I

$$z = 18393 (1 + 0.002 (t + t')) \log \frac{h}{\left(1 + \frac{T - T'}{5412}\right) h'}$$

und in II.

$$z = 9436.97 (1 + 0.0025 (t + t')) \log \frac{h}{(1 + 0.00023 (T - T')) h'}$$
