

NEUNTES KAPITEL.

Bestimmung der geographischen Länge, des Azimuts, der Schiefe der Ecliptik u. w., aus Beobachtungen.

§. 1.

Da die Sonne in 24 Stunden wahrer Zeit (der Stern in 24 Stunden Sternzeit etc.) von Ost nach West durch alle Meridiane der Erde geht, und man an jedem Orte Mittag oder 0^h zählt, wenn die Sonne durch den Meridian dieses Ortes geht, so wird ein Ort um 1, 2, 3, Stunden eher Mittag haben, als ein anderer, wenn er um 15, 30, 45 Grade östlicher liegt, und derselbe Unterschied wird bey allen andern Zeiten des Tages an beyden Orten statt haben. Der Unterschied der geographischen Länge zweyer Orte, d. h. der Winkel ihrer Meridiane, wird also dem Unterschiede der wahren, oder der mittleren, oder der Sternzeiten proportionirt seyn, die man an beyden Orten in demselben Augenblicke zählt. Diese Zeiten findet man an jedem dieser Orte durch die Berichtigung der Uhr. (Cap. 7) Es kömmt also nur noch darauf an, zu erfahren, welche Zeit es zugleich an beyden Orten ist. Dies findet man, wenn man an beyden Orten eine Begebenheit beobachtet, die für beyde in demselben Augenblick statt hat, wie Mondsfinsternisse, Ein- und Austritte der Jupiters-Trabanten in den Schatten ihres Hauptplaneten, Feuersignale u. f., oder zweytens, wenn man an beyden Orten eine Begebenheit beobachtet, die zwar für beyde nicht genau in demselben Augenblicke statt hat, aus welcher sich aber eine solche tautochrone Erscheinung mit Verlässlichkeit durch Rechnungen ableiten läßt, wie Sonnenfinsternisse, Sternbedeckungen vom Monde, Durchgänge des Mondes durch den Meridian, Entfernung des Mondes von bekannten Fixsternen u. a., oder endlich, wenn man eine Uhr, deren Gang man vollkommen kennt, an dem einen dieser Orte nach der Zeit dieses Ortes regulirt, und dann, ohne ihren Gang zu stören, auf den andern Ort bringt, und sie hier mit der Zeit dieses zweyten Ortes unmittelbar vergleicht. Wir wollen hier einige

dieser Methoden, und unter diesen besonders jene erläutern, welchen solche tautochrone Erscheinungen zu Grunde liegen, indem wir die andern, die höhere Vorkenntnisse erfordern, im zweyten Buche nachtragen werden.

§. 2.

Man habe eine solche tautochrone Erscheinung an dem ersten Orte um die Uhrzeit T , und in dem andern um die Uhrzeit T' beobachtet, vorausgesetzt, daß beyde Uhren gleichförmig und mit derselben Geschwindigkeit gehen. Wären diese Uhrzeiten beyder Orte wahre, oder mittlere Sonnenzeiten, Sternzeiten, (und auf diese kann man jene Uhrzeiten bringen, wenn man die Correction der Uhr nach Cap. 7 sucht) so wäre der Längenunterschied beyder Orte

$$15 (T' - T)$$

und der zweyte liegt östlich vom ersten, wenn T' größer als T ist.

Diese Correction der Uhren, oder diese Verwandlung der Uhrzeiten in wahre u. f., kann man umgehen, wenn man an beyden Orten die Culmination eines Fixsterns beobachtet. Ist nämlich t die Uhrzeit der Culmination des Fixsterns an dem ersten Orte, und t' an dem zweyten, so sind von dem Augenblicke jener tautochronen Erscheinung bis zur Culmination des Sterns an dem ersten Orte $t - T$, und an dem zweyten $t' - T'$ Stunden verflossen, also ging der Stern früher durch den Meridian des ersten Orts, als durch den zweyten, um

$$(t - T) - (t' - T')$$

Stunden, und wenn $t' - T'$ größer ist, als $t - T$, so liegt der zweyte Ort östlich vom ersten. Verfließen nun von einer Culmination des Sterns bis zur nächstfolgenden an beyden Orten 24 Stunden Uhrzeit, so hat man die Längendifferenz beyder Orte

$$\frac{360}{24} ((t - T) - (t' - T'))$$

Verfließen aber von einer Culmination der wahren oder mittleren Sonne bis zur nächstfolgenden an beyden Orten 24 Stunden Uhrzeit, so hat sich die Erde in dieser Zwischenzeit in Beziehung auf die wahre oder mittlere Sonne ebenfalls einmal um ihre Axe gedreht, und es ist auch hier die Längendifferenz

$$15 ((t - T) - (t' - T'))$$

Die gewöhnlichsten Erscheinungen, die sich zu diesem Zwecke darbieten, sind die Mondsfinsternisse. Da nämlich der Mond, wenn er in den Schatten der Erde tritt, seines Lichtes für alle Erdbewohner, denen er sichtbar ist, in der That und in demselben

Augenblicken beraubt wird, so wird die Differenz der wahren, mittlern, oder Sternzeit dieser Erscheinungen für zwey Orte so gleich die Differenz der Länge dieser beyden Orte geben.

Da der Mondschatten nur sehr unvollkommen begränzt ist, so sind die Augenblicke des Ein- und Austritts des Mondes in den Schatten nicht mit Schärfe zu beobachten, daher auch die daraus geschlossene Längendifferenz oft sehr fehlerhaft ist. Etwas genauer sind die Beobachtungen der Ein- und Austritte der verschiedenen Flecken des Mondes. Auch die Güte der Fernröhre beyder Beobachter, ihre Gesichtsschärfe, die Reinheit ihrer Atmosphäre u. f., können auf die Resultate ungünstige Einflüsse haben.

Ex. Die totale Mondsfinsternis des 22. Octobers 1790 wurde beobachtet in

	Paris	Gotha	Längendifferenz
Anfang	11 ^h 7' 33" - -	11 ^h 41' 44" wah. Zeit	0 ^h 34' 11"
Copernik. I. Rand	11 29 58 - -	12 3 21 - - -	33 23
II. - -	11 32 13 - -	12 6 3 - - -	33 50
Tycho	11 30 23 - -	12 4 5 - - -	33 32
Totale Verfinst.	12 14 25 - -	12 48 4 - - -	33 39
Anf. d. Austritts	13 55 23 - -	14 28 36 - - -	33 13
Copernikus I.	14 15 23 - -	14 49 9 - - -	33 46
II.	14 18 48 - -	14 52 23 - - -	33 35

und man sieht aus diesem Beyspiele, wie wenig verläßlich diese Art von Beobachtung ist.

Besser sind die Beobachtungen der Ein- und Austritte der Jupiterssatelliten, aber auch sie gewähren nicht alle die Uebereinstimmung, die man wünschen muß. Um durch sie die Längendifferenz mit einiger Schärfe zu erhalten, muß man auf folgende Vorschriften Rücksicht nehmen.

Man muß an beyden Orten so viel möglich gleich starke Fernröhre brauchen; man muß eben so viele Eintritte, als Austritte unter einander vergleichen, und die zwey von Jupiter entferntesten Satelliten gänzlich, so wie alle Beobachtungen ausschließen, die zu nahe bey der Opposition Jupiters mit der Sonne gemacht wurden.

Ex. 1809. October:

Beobachteter Eintr. des I. Satelliten.

Austritt.

Paris mittl. Zeit $1^h 47' 5''$, $20^h 15' 30''$ -- $18^h 47' 32''$, $20^h 42' 37''$ Krakau mittl. Z. $2 57 38$, $21 25 54$ -- $19 58$ 1 , $21 52 51$ Längendifferenz $1^h 10' 33''$, $1^h 10' 24''$ -- $1^h 10' 29''$ $1^h 10' 14''$

§. 3.

Da die vorhergehenden tautochronen Erscheinungen des Himmels keiner großen Schärfe in der Beobachtung fähig sind, so hat man andere ähnliche Erscheinungen auf der Erde, welche dieser Vorwurf nicht trifft, zu demselben Zwecke zu benützen gesucht: hieher gehören Signale, Blendungen von Flammen durch Fallthüren, das Zerplatzen geworfener Raketen u. d. gl. Das einfachste und beste sind die sogenannten Pulversignale. Drey bis vier Lothe gemeines Schießpulver geben, wenn es angezündet wird, eine augenblickliche Flamme, die man mit Fernröhren von etwa zwanzigmaliger Vergrößerung selbst am hellen Tage auf fünf bis sechs deutsche Meilen sehen kann. Bey Nachtsignalen muß den Tag vorher das Rohr auf den bezeichneten Ort gestellt werden. Nach Zachs Versuchen kann man Nachtsignale von 10 bis 15 Loth Pulver bis auf dreyßig Meilen in die Runde sehen, wenn der Ort, an welchen sie gegeben werden, hoch genug liegt.

Das Wesentlichste dabey ist eine scharfe Bestimmung des Stands und Gangs der Uhr, die man sich gewöhnlich durch correspondirende Höhen des Mittags und der Mitternacht an den verschiedenen Beobachtungsorten verschafft. Da die Geschwindigkeit des Lichts für Beobachtungen dieser Art als unendlich groß angesehen werden kann, so kann man diese Erscheinungen als tautochron betrachten.

Folgende Beobachtungen wurden im Jahre 1803, den 24 Julius, angestellt.

Mittl. Zeit auf d. Ettersberg bey Weimar.	M. Z. auf d. Sternwarte Seeberg	Meridiandifferenz Seeberg westlich.
$5^h 26' 2'' 2$ - - - -	$5^h 23' 57'' 1$ - - - -	$0^h 2' 5'' 1$
5 30 59. 3	5 28 54. 8	0 2 4. 5
5 35 59. 6	5 33 55. 0	0 2 4. 6
9 11 8. 5	9 9 3. 8	0 2 4. 7
9 16 2. 6	9 13 58. 2	0 2 4. 4
9 21 2. 0	9 18 57. 3	0 2 4. 7

9 26 3. 2	9 23 58. 8	0 2 4. 4
9 31 4. 4	9 28 59. 7	0 2 4. 7
9 36 2. 7	9 33 58. 4	0 2 4. 3

§. 4.

Die große Vollkommenheit, mit welcher jetzt tragbare Uhren verfertigt werden, setzt uns in den Stand, die Zeit eines Ortes durch diese Uhren unmittelbar mit der Zeit eines andern Ortes zu vergleichen, und so die Längendifferenz beyder Orte zu bestimmen. Ein Beyspiel wird das Verfahren, welches man zu beobachten hat, deutlich machen.

1786 den 29. May fand Zach auf der Sternwarte des Grafen Brühl (London, Dowerstreet), daß sein Chronometer im Mittag dieses Tages $2'' 1$ zu wenig gegen die mittlere Zeit dieses Ortes gab, und aus vielen andern Tagen fand er, daß der Chronometer täglich $0''$, 1715 gegen mittlere Zeit zurückblieb. Den 27. Junius, also 29 Tage später, kam er mit dieser Uhr auf seiner Sternwarte Seeberg an. Die mittlere Zeit im wahren Mittag Londons für den 27. Junius ist (aus den Ephemeriden)

$$0^h 2' 34'' 3$$

Zieht man davon ab die erste Verspätung des 29. May's, oder $2'' 1$, und die Verspätung in 29 Tagen oder 29 (0.1715) = $4'' 97$, so erhält man die Uhrzeit des Chronometers den 27. Juni im wahren Mittag Londons

$$t = 0^h 2' 27'' 23$$

Allein an demselben Tage beobachtete er in Seeberg correspondirende Höhen der Sonne, und fand daraus die Uhrzeit des Chronometers den 27. Juni im wahren Mittag Seebergs

$$t' = 11^h 19' 3'' 40$$

Daher ist die Längendifferenz beyder Orte

$$t - t' = 0^h 43' 23'' 83 \text{ Seeberg östlich.}$$

M. s. Berl. Jahrb. 1806. p. 210. -

§. 5.

Wenn man an zwey Orten, die nicht in demselben Meridian liegen, die Differenz der Culmination des Mondes und eines Fixsterns beobachtet, so werden diese Differenzen nicht gleich seyn, weil die gerade Aufsteigung des Mondes sich

sehr schnell, oft bis 15 Grade in einem Tage ändert. Daraus folgt, daß man aus jenen Differenzen, wenn man die tägliche Aenderung der Rectascension des Mondes kennt, auch rückwärts auf die Längendifferenz der beyden Beobachtungsorte schliessen kann. Ein Beyspiel wird dieß deutlich machen.

Man beobachtete	Sternzeit	Sternzeit
die Culm. d. ζ in Gotha	13 ^h 47' 32" 45	in Mannh. 13 ^h 47' 53" 0
der Spica - - - - -	13 14 17. 87	13 14 17. 2
	33 14. 58	33 35. 8
		33 14. 58
		21 ^m 23

$$\text{oder } 0^{\circ} 5' 18'' 3 = a$$

Aus den Beobachtungen der vorhergehenden und nächstfolgenden Tage (oder aus den Ephemeriden durch Interpolation) fand sich die Aenderung der Rectascension des Mondes in einer Stunde Sternzeit

$$0^{\circ} 34' 44'' 998 = 0^{\circ} 579166 = b$$

Ist also x die Meridiandifferenz beyder Orte, so ist

$$b : a = 1 : x \text{ oder}$$

$$x = \frac{a}{b} = 0^h . 15266 = 0^h 9' 9'' 6$$

M. s. Monatl. Corresp. 1803 September. Ueber ähnliche Längenbestimmungen durch beobachtete Höhen des Mondes s. m. Mon. Corr. 1805 December. Berl. Jahrb. 1799. p. 92.

§. 6.

Da besonders zur See die Gelegenheit, die geographische Länge zu bestimmen, nicht oft genug gegeben werden kann, so hat man zu diesem Zwecke die Beobachtungen der Entfernung des Mondes von andern Gestirnen vorgeschlagen. Der Unterschied der Zeiten von zwey Beobachtungen, jede in der Zeit ihres Ortes ausgedrückt, für welche dieselbe geocentrische Entfernung der Mittelpunkte des Mondes von einem Gestirne statt hat, ist zugleich der Unterschied der Meridiane der Beobachter, oder ihre Längendifferenz. Die Stelle einer dieser beyden Beobachtungen kann auch die Berechnung dieser ihrer Entfernung aus den Tafeln des Mondes vertreten, da diese Tafeln nach den neuesten Berichtigungen genau genug zu diesem Zwecke sind. Daß aber hiezu allein der Mond

angewendet werden könne, ist daraus klar, weil die Bewegungen aller andern Himmelskörper viel zu langsam sind, und daher bey dem letzten kleine Fehler der Beobachtung oder der Berechnung aus den Tafeln sehr große in den gesuchten Resultaten zur Folge haben würden. So würden ähnliche Beobachtungen an der Sonne dreyzehnmal weniger genau seyn, weil die Bewegung der Sonne nahe dreyzehnmal geringer ist, als die des Mondes.

Es seyen h H die wahre, von Refraction und Parallaxe befreyte, Höhe des Mittelpunkts der Sonne und des Mondes, h' H' ihre scheinbaren oder beobachteten Höhen, δ die wahre, und δ' die scheinbare oder beobachtete Entfernung dieser Mittelpunkte.

Da die wahren und scheinbaren Orte eines jeden Gestirns in demselben Vertikalkreise liegen, so ist, wenn die gemeinschaftliche Differenz des Azimuts der beyden Gestirne ω heißt,

$$\cos \delta = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos \omega$$

$$\cos \delta' = \sin H' \sin h' + \cos H' \cos h' \cos \omega$$

woraus sofort folgt

$$\sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{\sin \frac{\delta' + H' - h'}{2} \sin \frac{\delta' - H' - h'}{2}}{\cos H' \cos h'}$$

und

$$\cos^2 \frac{\omega}{2} = \frac{\cos \frac{H' + h' + \delta'}{2} \cos \frac{H' + h' - \delta'}{2}}{\cos H' \cos h'}$$

und eben so gibt die erste der vorhergehenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta &= \cos(H-h) - 2 \cos H \cos h \sin^2 \frac{\omega}{2} \\ \cos \delta &= 2 \cos H \cos h \cos^2 \frac{\omega}{2} - \cos(H-h) \\ \cos \delta &= \cos(H-h) \cos^2 \frac{\omega}{2} - \cos(H+h) \sin^2 \frac{\omega}{2} \end{aligned} \right\} \text{I.}$$

Aus der zweyten der Gleichungen I. folgt

$$\cos \delta = 2 \frac{\cos H \cos h}{\cos H' \cos h'} \cos \frac{H' + h' + \delta'}{2} \cos \frac{H' + h' - \delta'}{2} - \cos(H+h)$$

oder auch

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \frac{\delta}{2} &= \cos^2 \frac{H+h}{2} - m \cos \frac{H'+h'+\delta'}{2} \cos \frac{H'+h'-\delta'}{2} \\ \cos^2 \frac{\delta}{2} &= \sin^2 \frac{H+h}{2} + m \cos \frac{H'+h'+\delta'}{2} \cos \frac{H'+h'-\delta'}{2} \end{aligned} \right\} \text{II.}$$

wo $m = \frac{\cos H \cos h}{\cos H' \cos h'}$ ist.

Setzt man also der bequemern Rechnung wegen

$$\sin A = \frac{1}{\cos \frac{H+h}{2}} \sqrt{m \cos \frac{H'+h'+\delta'}{2} \cos \frac{H'+h'-\delta'}{2}}$$

so folgt aus den ersten der Gleichungen II.

$$\sin \frac{\delta}{2} = \cos \frac{H+h}{2} \cos A$$

und ist eben so

$$\operatorname{Tg} B = \frac{1}{\sin \frac{H+h}{2}} \sqrt{m \cos \frac{H'+h'+\delta'}{2} \cos \frac{H'+h'-\delta'}{2}}$$

so folgt aus der zweyten der Gleichungen II.

$$\cos \frac{\delta}{2} = \sin \frac{H+h}{2} \cdot \frac{1}{\cos B}$$

Sucht man eben so aus der ersten der Gleichungen I. und auf ähnliche Art die Werthe von

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} \text{ und } \cos^2 \frac{\delta}{2},$$

so findet man noch zwey andere analoge Ausdrücke, nämlich

$$\sin C = \frac{1}{\cos \frac{H-h}{2}} \sqrt{m \sin \frac{\delta'+H'-h'}{2} \sin \frac{\delta'-H'+h'}{2}}$$

und

$$\cos \frac{\delta}{2} = \cos \frac{H-h}{2} \cdot \cos C$$

und eben so

$$\operatorname{Tg} D = \frac{1}{\sin \frac{H-h}{2}} \sqrt{m \sin \frac{\delta'+H'-h'}{2} \sin \frac{\delta'-H'+h'}{2}}$$

$$\sin \frac{\delta}{2} = \sin \frac{H-h}{2} \cdot \frac{1}{\cos D}$$

Ueberdies gibt die erste der Gleichungen I.

$$\cos \delta = \cos(H-h) - 2m \sin \frac{\delta'+H'-h'}{2} \sin \frac{\delta'-H'+h'}{2}$$

Ist aber

$$\cos E = \frac{m}{2},$$

so ist das letzte Glied dieser Gleichung

$$\begin{aligned} & 2 \cos E (\cos (H' - h') - \cos \delta) \\ & \Rightarrow \cos (E - H' + h') + \cos (E + H' - h') \\ & - \cos (E - \delta) - \cos (E + \delta) \end{aligned}$$

also auch die vorhergehende Gleichung selbst

$$\begin{aligned} \sin \text{vers } \delta &= \sin \text{vers } (H - h) + \sin \text{vers } (\delta' + E) \\ &+ \sin \text{vers } (\delta' - E) - \sin \text{vers } (H' - h' + E) \\ &- \sin \text{vers } (H' - h' - E) \end{aligned}$$

und die fünf vorhergehenden Ausdrücke für δ sind die vorzüglichsten, die man aus den Gleichungen I. ableiten kann. Die letzte derselben, welche, wenn man eine eigene Tafel der Sinus verus hat, nur Additionen und Subtractionen erfordert, ist besonders bequem für Seeleute, welche sich mit logarithmischen Rechnungen entweder nicht abgeben wollen oder können. M. s. Berl. Ephemeriden f. d. J. 1783

Nebst den vorhergehenden directen Auflösungen, welche immer die sichersten sind, hat man noch andere bloß genäherte gesucht, um die Berechnung der Gröfse δ so bequem als möglich zu machen. Ich werde zwey der vorzüglichsten hier mittheilen:

§. 7.

Sieht man die Dreyecke zwischen dem Zenith und dem wahren und scheinbaren Ort der Gestirne als geradlinicht an, und fällt man von δ auf δ' an der einen Seite, und von δ' auf δ an der andern Seite des Durchschnitts beyder Distanzen δ und δ' senkrechte Linien, so schneiden diese senkrechten Linien von δ und δ' auf der Seite des nächsten Gestirns Stücke ab, die als die Cosinus der Winkel an den Gestirnen selbst betrachtet werden können. Heißt also p der Winkel am Mond und q der Winkel an dem Stern oder der Sonne, der zwischen dem Vertikalkreise und der Distanz der Gestirne enthalten ist, so ist

$$\delta' - \delta = (H - H') \cos p - (h' - h) \cos q$$

und man hat

$$\cos p = \frac{\sin H'}{\cos h' \sin \delta'} - \text{Tg } h' \cotg \delta'$$

$$\cos q = \frac{\sin h'}{\cos H' \sin \delta'} - \text{Tg } H' \cotg \delta'$$

Setzt man der Kürze wegen

$$h' - h = d h$$

$$H - H' = d H \text{ und}$$

$$\delta - \delta' = d \delta$$

so ist

$$2 \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1 + \sin \delta' \sin d \delta - \cos \delta + 2 \cos \delta' \sin^2 \frac{d \delta}{2}$$

Substituiert man diesen Ausdruck in der ersten der Gleichungen II., oder in

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = \cos^2 \frac{H+h}{2} - m \cos \frac{h'+H'+\delta'}{2} \cos \frac{h'+H'-\delta'}{2}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} d\delta &= \frac{2 \cos^2 \frac{H+h}{2}}{\sin \delta \sin 1''} - \frac{2m}{\sin \delta' \sin 1''} \cos \frac{h'+H'+\delta'}{2} \cos \frac{h'+H'-\delta'}{2} \\ &\quad - \frac{(1 - \cos \delta)}{\sin \delta \sin 1''} - \frac{1}{2} (d\delta)^2 \sin 1'' \cotg \delta' \end{aligned}$$

Es ist aber

$$m = \frac{\cos (H'+dH) \cos (h'-dh)}{\cos H' \cos h'} =$$

$$1 - (dH \operatorname{Tg} H' - dh \operatorname{Tg} h' + \frac{1}{2} (dH)^2 \sin 1'' + \frac{1}{2} (dh)^2 \sin 1'' \sin 1'')$$

ferner ist

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \frac{H+h}{2} &= 2 \cos \frac{h'+H'+\delta'}{2} \cos \frac{h'+H'-\delta'}{2} - (1 - \cos \delta) \\ &= 2 \cos^2 \frac{H'+h'+dH-dh}{2} - 1 - \cos (h'+H') \\ &= 2 \sin (dh - dH) \cdot \sin (H'+h' + \frac{dH-dh}{2}) \end{aligned}$$

also ist auch die vorhergehende Gleichung

$$\begin{aligned} d\delta &= \frac{(dh - dH)}{\sin \delta'} \sin (h' + H' + \frac{dH-dh}{2}) \\ &\quad + 2 \frac{\cos M \cos N}{\sin \delta'} (dH \operatorname{Tg} H' - dh \operatorname{Tg} h' + (dH)^2 \operatorname{Tg} \frac{1}{2}'' + (dh)^2 \operatorname{Tg} \frac{1}{2}'') \\ &\quad - (d\delta)^2 \sin \frac{1}{2}'' \cotg \delta' \end{aligned}$$

wo der Kürze wegen

$$M = \frac{h' + H' + \delta'}{2} \text{ und}$$

$$N = \frac{h' + H' - \delta'}{2}$$

gesetzt worden ist.

Um die letzte Gleichung noch weiter zu reduzieren, sey p die Horizontalparallaxe und r die Refraction des Mondes, so ist

$$dH = p \cos (H' - r) - r$$

Ferner ist nahe genug

$$r = 57'' \cotg (H' + 3 r)$$

$$= 57'' \cotg (H' + 3 (57'') \cotg H')$$

also ist auch, wenn man

$$\cos (H' - r) = \cos H' + r \sin H' = \cos H' + 57'' \cos H'$$

setzt,

$$dH = p \cos H' + 57'' \sin p \cos H'$$

$$- 57'' \frac{(\cotg H' - \text{Tg } 171'' \cotg H')}{1 + \text{Tg } 171'' \cotg H'}$$

woraus man erhält

$$dH \cdot \text{Tg } H' = p \cdot (1 + \sin 57'') \sin H'$$

$$+ \frac{0''047253}{\sin^2 H'} - 57''$$

und eben so, wenn π die Horizontalparallaxe des andern Gestirns ist,

$$dh \text{ Tg } h' = \pi (1 + \sin 57'') \sin h'$$

$$+ \frac{0.047253}{\sin^2 h'} - 57''$$

Da aber die kleinste und größte Horizontalparallaxe des Mondes nahe 54 und 61 Minuten beträgt, so ist

$$54 \sin 57' \text{ oder } 61 \sin 57'$$

nahe gleich 1'', und $\pi \sin 57''$ noch viel kleiner, daher die obere gefundene Gleichung in folgende übergeht

$$d\delta = - \frac{(dH - dh)}{\sin \delta'} \sin (H' + h' + \frac{1}{2} (dH - dh))$$

$$+ \frac{2 \cos M \cos N}{\sin \delta'} \left((p + 1'') \sin H' + \pi \sin h' - 114'' \right)$$

$$+ \frac{2 \cos M \cos N}{\sin \delta'} \left(dH^2 \operatorname{Tg} \frac{1}{2}'' + dh^2 \operatorname{Tg} \frac{1}{2}'' + 0.047273 \left(\frac{1}{\sin^2 H'} + \frac{1}{\sin^2 h'} \right) \right) \\ - (d\delta)^2 \sin \frac{1}{2}'' \operatorname{Cotg} \delta'$$

wo man in dem letzten Gliede für $d\delta$ den aus dem vorhergehenden Gliedern schon beynahe bekannten Werth dieser Gröfse setzen kann.

Ist endlich H' und h' nicht zu klein, oder wenigstens gröfser als 10 Grade, so kann man statt der letzten Gleichung in den meisten Fällen abkürzend folgende setzen

$$d\delta = - \frac{(dH - dh)}{\sin \delta'} \sin \left(H' + h' + \frac{1}{2}(dH - dh) \right) \\ + 2 \frac{\cos M \cos N}{\sin \delta'} (p \sin H' + dH^2 \operatorname{Tg} \frac{1}{2}'' - 114'')$$

Zwey kleine Tafeln, deren die erste mit dem Argumente dH und dh die Gröfsen $dH^2 \operatorname{Tg} \frac{1}{2}''$ und $dh^2 \operatorname{Tg} \frac{1}{2}''$, und deren die zweyte mit dem Argumente H' und h' die Gröfsen

$$\frac{0.047253}{\sin^2 H'} \text{ und } \frac{0.047253}{\sin^2 h'}$$

gibt, werden die Berechnung ungemein erleichtern.

Ex. 1792 den 9. September war in Seeberg um 20^h 3' 29''. 2 wahre Zeit (Morgens)

beob. Entfernung der Ränder der $\odot$ und $\zeta = a = 67^\circ 36' 50''$

beob. Höhe des obern Randes der $\odot$ - - - - - $b = 22^\circ 58' 34''. 4$

- - - - - des ζ - - - - - $c = 55^\circ 58' 54''. 0$

Für diese Zeit der Beobachtung ist

Horiz. Parallaxe des Mondes für Seeberg $p = 54' 10'' 6$

der Sonne $\pi = 7'' 8$

Horiz. Halbmesser ζ - - $R = 14' 38'' 0$

Horiz. Halbmesser $\odot$ - - $r = 15^\circ 57'. 4$

also Höhenparallaxe des $\zeta = p' = p \cos c = 30' 30'' 3$

vergröfs. Halbm. $\zeta = R' = R(1 + p \sin c + p^2 \sin^2 c) = 15' 0'' 0$

daher ist

$$\delta = a + r + R' = 68^\circ 7' 47'' 4$$

$$h' = b - r = 22^\circ 42' 37''. 0$$

$$h = h' - \text{Refr.} + \text{Parall.} = 22^\circ 40' 29''. 2$$

$$H' = c - R' = 55^\circ 43' 54''.0$$

$$H = H' - \text{Refr.} + p' = 56\ 13\ 45.4$$

Mit diesen fünf Gröſſen findet man aus den ersten der in §. 6. gegebenen fünf Auflösungen

$$\log m = 9.9955246$$

$$\log \cos \frac{H' + h' + \delta'}{2} \cos \frac{H' + h' - \delta'}{2} = 9.4570226$$

$$A = 43^\circ 31' 55'' 3$$

$$\delta = 68^\circ 5' 11'' 0$$

Berechnet man dasselbe Beyspiel nach der letzten in diesem §. gegebenen Auflösung, so ist

$$dH = p' - \text{Refr.} = 29' 51'' 4$$

$$dh = \text{Refr.} - \pi = 2' 7'' 8$$

$$(p + 1) \sin H' = (54' 11'' 6) \sin 55^\circ 43' 54'' = 44' 47'' 1$$

$$\pi \sin H' \text{ ----- } 6.5$$

$$\text{Arg } dH \quad \quad \quad 7.8$$

$$\text{Arg } dH \quad \quad \quad 0.1$$

$$\text{Arg } H' \quad \quad \quad 0.1$$

$$\text{Arg } h' \quad \quad \quad 0.3$$

$$45' 1'' 9 = 2701'' 9$$

$$114.0$$

$$f = 2587'' 9$$

$$\log 2f = 3.7139775$$

$$\log \cos M \cos N = 9.4570226$$

$$\log (dH - dh) = 3.2210489$$

$$\log \cos p \sin \delta' = 0.0324378$$

$$\log \sin (H' + h' + dH - dh) = 9.9907411$$

$$3.2034379$$

$$2 \quad 0.0324378$$

$$3.2442278$$

$$\text{Zahl} = 1597'' 5$$

$$\text{Zahl} = 1754.8$$

$$1597.5$$

$$\delta \delta = -157'' 3 = -2' 37'' 3$$

$$\delta = 68\ 7\ 47.4$$

$$\delta = 68^\circ 5' 10'' 1$$

O

tungen in einer kleinen Zwischenzeit statt hatten, so kann man annehmen, daß die Höhen sowohl, als die Distanzen sich den Zeiten proportional ändern, und man wird durch eine einfache Proportion aus den dreyerley Gattungen Beobachtungen drey gleichzeitige ableiten. Auch kann man bloß die Distanzen beobachten, und die Höhen beyder Gestirne, für die Beobachtungszeit der Distanzen durch eine leichte Rechnung finden. Ist nämlich φ die Polhöhe, s δ h der Stundenwinkel, die Declination und die wahre Höhe des Mittelpunkts, so ist

$$\text{Tg } A = \text{Cos } s \text{ Tg } \varphi$$

$$\text{Sin } h = \frac{\text{Sin } \varphi}{\text{Cos } A} \text{ Sin } (A + \delta)$$

In dem vorhergehenden Beyspiele ist für

8^h 3' 29'' 2 wahre Zeit Seeberg

die AR $\odot = 169^\circ 9' 15''$ Decl. $+ 4^\circ 40' 15''$

AR $\zeta = 100 40 30 \quad - - \quad + 17 59 50$

68 28 45

wahre Zeit (12^h — 8^h 3' 29'' 2) in Graden $59^\circ 7' 42''$

68 28 45

Stundenwinkel des Mondes $9^\circ 21' 3'' = s$

$$\varphi = 50^\circ 56' 17''$$

also ist für die Sonne

$$A = 22^\circ 36' 30''$$

$$h = 22^\circ 40' 29''$$

$$h' = h - \text{Parall.} + \text{Refr.} = 22^\circ 42' 37''$$

und eben so für den Mond

$$A = 38^\circ 41' 15'',$$

$$H = 56^\circ 13' 46''$$

$$H' = H - \text{Parall.} + \text{Refr.} = 55^\circ 43' 54''$$

wo die Höhenparallaxe des Mondes

$$p' = \frac{p \text{ Cos } H}{1 - p \text{ Sin } H} = 30' 31''$$

vorausgesetzt ist.

Wie man bey diesen Berechnungen auf die Erhöhung des Beobachters über dem Meere Rücksicht nimmt, s. m. Berl. Jahrb. 1813. p. 200.

Einige Astronomen haben bey diesen Rechnungen auch auf die abgeplattete Gestalt der Erde Rücksicht genommen, was wohl für die Ausübung keinen Nutzen haben kann, da diese Methode ohnehin nicht die größte Schärfe gewährt, und die Fehler der Beobachtung sowohl, als die der Mondstafeln noch zu beträchtlich sind, als daß dagegen die Verbesserungen wegen der Abplattung der Erde noch in Betrachtung gezogen werden können. Über den Grad der Sicherheit dieser Methode vid. Monatl. Corresp. 1805 September. Wie man auf Reisen mit Hilfe eines Sextanten am kürzesten Zeit, Breite und Länge bestimmen kann, sehe man Mon. Corr. 1806 Januar.

§. 9.

Wir wenden uns jetzt zu andern Beobachtungen, und wählen unter diesen zuerst die Bestimmung des Azimuts eines terrestrischen Gegenstandes. Schon im vorhergehenden Kapitel wurde gezeigt, wie man aus zwey beobachteten Distanzen eines irdischen Gegenstandes von einem bekannten Gestirne die Stundenwinkel sowohl, als die Declination des ersteren finden kann, und daraus wird man dann leicht durch die bekannten Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie auch die Höhe und das Azimut des terrestrischen Gegenstandes ableiten. Es gibt aber noch eine andere einfachere Methode, das Azimut eines solchen Objectes durch Beobachtungen unmittelbar zu finden.

Ist φ die Polhöhe, δ die Declination und t der bekannte Stundenwinkel der Sonne, so findet man die Höhe h und das Azimut ω der Sonne durch folgende Gleichungen.

$$\text{Tg } M = \text{Cos } t. \text{ Cotg } \varphi$$

$$\text{Sin } h = \frac{\text{Sin } \varphi}{\text{Cos } M} \cdot \text{Sin } (M + \delta)$$

$$\text{Sin } \omega = \frac{\text{Sin } t. \text{ Cos } \delta}{\text{Cos } h}$$

oder

$$\text{Tg } N = \frac{\text{Tg } \delta}{\text{Cos } t}$$

$$\text{Tg } \omega = \frac{\text{Cos } N \text{ Tg } t}{\text{Sin } (\varphi - N)}$$

$$\text{Cos } h = \frac{\text{Cos } \delta \text{ Sin } t}{\text{Sin } \omega}$$

Aus dieser berechneten wahren Sonnenhöhe h findet man die scheinbare

$$h' = h + \text{Refr.} - \text{Höhenparallaxe},$$

wo die Refr. für die anfangs gesuchte genäherte Höhe h' (nicht für h) genommen werden muß.

Heißt dann h'' die beobachtete Höhe des terrestrischen Objectes (steht dieses unter dem Horizont, so ist h'' negativ) und Δ die beobachtete Distanz der Sonne von dem Objecte, so findet man die auf den Horizont reduzirte Distanz Δ' der Sonne von dem Objecte durch folgenden Ausdruck

$$\sin^2 \frac{\Delta'}{2} = \frac{\sin \frac{\Delta + h' - h''}{2} \sin \frac{\Delta - h' + h''}{2}}{\cos h' \cos h''}$$

Ist $\frac{\Delta'}{2}$ nahe an 90° , so wird man besser den ähnlichen Ausdruck für $\cos^2 \frac{\Delta'}{2}$ wählen, und dann ist das gesuchte Azimut ω des irdischen Objectes gleich der Summe oder Differenz der Größen ω und Δ'

Ex. Auf der Sternwarte von Hyeres wurden folgende verbesserte Abstände des entfernteren Sonnenrandes von einer Thurmspitze genommen.

Uhrzeit $5^h 36' 48'' 0$ - - Distanz $78^\circ 49' 40''$

37 30. 5 78 56 50''

38 11. 5 79 3 50''

Die Correction der Uhr gegen wahre Zeit ist $-19' 21'' 4$, der Collimationsfehler des Instruments $-5' 30''$, der Halbmesser der Sonne $16' 7''$ und die Höhe der Thurmspitze $h'' = 1^\circ 14' 0''$

Man hat daher

wahre Zeit $5^h 15' 26'' 6$ - - $\Delta = 78^\circ 28' 3''$

18 9. 1 35 12

18 50. 1 42 12

Für die erste Beobachtung ist

$\delta = -3^\circ 17' 16''$

also hat man $M = 11^\circ 9' 11'' 9$

$t = 79 21 42$

Parallaxe $8''$, Refraction $8' 57'' 5$

$\varphi = 43 7 2$

scheinb. Höhe $\odot = h' = 5^\circ 37' 3'' 8$

$\Delta = 78 28 3$

$\omega = 80^\circ 17' 36'' 4$

$\Delta' = 78^\circ 33' 3'' 4$

$\omega' = 1^\circ 44' 33'' 0$ Azimut des terrestrischen Objectes

I. Die Bestimmung des Azimuts ω hängt vorzüglich von der Zeitbestimmung ab, und da, wie man leicht sieht, in unsrer Breite ein Fehler von einer Zeitsecunde in der Uhr schon einen Fehler von nahe 10 Raumsecunden im Azimut hervorbringt, so muß man für die Zeitbestimmung eine vorzügliche Sorge tragen. — Wenn man das Azimut eines Objectes mit der größten Schärfe verlangt, so wird man, statt den Sextanten, die zu dieser Absicht genaueren Theodoliten und die Multiplicationskreise wählen, wenn diese letzten einen größeren Horizontalkreis haben, und mit diesen Instrumenten unmittelbar die Azimutaldistanz Δ' des Objectes von der Sonne messen, und aus der gegebenen Beobachtungszeit das Azimut ω der Sonne durch Rechnung ableiten, wo dann, wie zuvor, die Summe oder Differenz der Größen Δ' , ω das gesuchte Azimut des Objectes ist. Hat man mehr solcher Distanzen Δ' nach einander gemessen, oder multiplicirt der Theodolit, so kann man mit ihnen auf eine ähnliche Art verfahren, wie oben bey den Circummeridianhöhen gezeigt worden ist.

Sei t der Stundenwinkel, der zu dem Azimut ω gehört, so gehört für den Stundenwinkel $t + s$ das Azimut $\omega + \Delta$, wo man hat

$$\Delta \omega = s \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{s^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{s^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3\omega}{dt^3} +$$

Ist n die Anzahl der Beobachtungen, so ist das Mittel aller Azimute, welche zu den Stundenwinkeln

$$t + s, t + s', t + s'' \dots$$

gehört, gleich

$$\omega = \frac{s + s' + s'' +}{n} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{s^2 + s'^2 + s''^2 +}{1.2 \cdot n} \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2} +$$

Nimmt man aber auch für t den Stundenwinkel, der für die Mitte der Beobachtungszeiten gehört, so ist

$$s + s' + s'' + = 0,$$

also hat man, wenn man das vierte und die folgenden Glieder der letzten Reihe wegläßt

$$\Delta \omega = \frac{d^2\omega}{ndt^2} \cdot \sum \frac{s^2}{2}$$

Behält man die vorigen Bezeichnungen bey, so ist

$$\text{Cotg } \omega = \frac{\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \text{ Tg } \delta}{\sin t}$$

also auch

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sin \varphi - \sin \delta \sin h}{\cos^2 h} \text{ und}$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \left(\frac{2 \sin h (\sin \varphi - \sin \delta \sin h)}{\cos^3 h} - \frac{\sin \delta}{\cos h} \right) \frac{dh}{dt}$$

Aber es ist

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t,$$

also auch

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin t}{\cos h}$$

und daher

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} =$$

$$\frac{\cos \varphi \cos \delta \sin t}{2 \cos^2 h} \left((\sin \varphi + \sin \delta) \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} z - (\sin \varphi - \sin \delta) \operatorname{Cotg}^2 \frac{1}{2} z \right)$$

$$\text{wo } z = 90^\circ - h$$

Nennt man also diese Gröfse

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = M, \text{ so ist}$$

$$\Delta \omega = \frac{M}{n} \sum \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta}{\sin 1''}$$

und man wird die Gröfsen

$$\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta}{\sin 1''}, \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta'}{\sin 1''} \dots$$

aus derselben Tafel nehmen, die wir schon oben für die Circummeridianhöhen gebraucht haben. Auf diese Weise wird die Berechnung des Azimutes eben so sicher, als einfach, dahier die Reduction der beobachteten Distanz auf den Horizont, so wie alle Rücksicht auf Refraction etc. gänzlich wegfällt. Ein Beyspiel wird den Gebrauch der vorhergehenden Ausdrücke deutlich machen.

Den 22. Junius 1816 Abends wurde die Alhidade des Horizontalkreises des Instruments nach und nach auf verschiedene Grade dieses Kreises gestellt: und die Zeit der Uhr bemerkt, in welcher der Rand der Sonne den vertikalen Faden des Fernrohres berührte. Man fand so

Uhrzeit.	Horiz. Kreis
12 ^h 40' 31'' 4 - - - -	180°. 00
43 16. 2	108. 45
46 0. 5	108. 90

Uhrzeit.	Horiz. Kreis
48' 43" 7	109° 35
51 27. 7	109. 25
54 8. 6	110. 25
56 51. 3	110. 70
59 33. 3	111. 15
13 ^h 2 15. 2	111. 60
4 55. 5	112. 0,5
Mittel 12 ^h 52' 46" 3	110. 025

Vor und nach diesen Beobachtungen wurde auch der vertikale Faden auf die Spitze eines Thurms gebracht, wobey der Horizontalkreis 115°. 7292 zeigte, also ist der horizontale Abstand des Thurms von der Sonne im Mittel aus allen 10 Beobachtungen

$$5^{\circ} 70' 40'' = 5^{\circ} 42' 15'' 1 = \Delta'$$

um die Uhrzeit

$$12^h 52' 46'' 3 = T.$$

Die Uhr, welche nahe nach Sternzeit ging, gab im wahren Mittag

$$\text{den 22. Juni } 6^h 7' 0'' 4$$

$$\text{und den 23. Juni } 6^h 11' 12'' 4$$

$$\text{also ist } T - 6^h 7' 0'' 4 = 6^h 45' 45'' 9$$

die genäherte wahre Zeit der Beobachtung, und da die Uhr in einem Tag 24^h 4' 12'' 0 = 24^h 07 gab, so ist die corrigirte wahre Zeit der Beobachtung

$$\frac{24}{24.07} (6^h 45' 45'' 9)$$

$$= 6^h 44' 35'' 1$$

$$= 101^{\circ} 8' 46'' 5 = t$$

für diese Zeit ist $\delta = 23^{\circ} 27' 35'' 9$

und endlich die Polhöhe $\varphi = 45^{\circ} 28' 0'' 7$

$$\text{Halbmesser der Sonne } r = 15' 45'' 75$$

Die Differenz der Beobachtungszeiten von T gibt die Winkel $\delta 3' 3''$ in Sternzeit; aus welchen man mittels der oben erwähnten Tafel die Werthe von

$$\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta}{\sin 1''} \text{ findet,}$$

Σ Sternzeit	Σ mittl. Zeit	$\frac{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin 1''}$
— 12' 14'' 9 - - - - -	— 12' 12'' 9 - - - - -	292'' 9
— 9 30. 1	— 9 28. 5	176. 2
— 6 45. 8	— 6 44. 7	89. 3
— 4 2. 6	— 4 1. 9	31. 9
— 1 18. 6	— 1 18. 4	3. 3
1 22. 3	1 22. 1	3. 7
4 5. 0	4 4. 3	32. 6
6 47. 0	6 45. 9	2. 9
9 28. 9	9 27. 3	175. 5
12 9. 2	12 7. 2	288. 3
		$\Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin 1''} = 1183. 6$

$$\log \frac{M}{10} = 8.08012$$

$$\log \frac{\Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin 1''}}{\sin 1''} = 3.07320$$

$$\text{Log } \Delta \omega = 1.15332$$

Aus δ , t , φ findet man nach den oben gegebenen Ausdrücken

$$N = - 65^\circ 59' 22''. 4$$

$$\omega = 114^\circ 15' 34'' 2, \text{ und}$$

$$\log \cos h = 9.99441$$

Da der nächste Sonnenrand, nicht der Mittelpunkt der Sonne, beobachtet wurde, so wird man zu ω noch addiren

$$\frac{r}{\cos h} = 15' 58'' 0$$

$$\text{Es ist daher } \omega = 114^\circ 15' 34'' 2$$

$$\Delta' = 5' 42'' 15. 1$$

$$\Delta \omega = 14. 2$$

$$\frac{r}{\cos h} = 15' 58. 0$$

$$\text{Azimut des Thurms} = 120^\circ 14' 1. 5$$

II. Statt der Sonne kann man auch vorthailhaft den Polarstern oder einen andern dem Pole nahen Stern brauchen, wenn das terrestrische Object bey Nacht beleuchtet wird, daher man zu dem letzten gewöhnlich eine Argandische Lampe mit einem parabolischen Reverber wählt, welche auch auf große Distanzen noch gut sichtbar ist. Wählt man die Zeiten um die größte Digression des Polarsterns, und heist t , ω der Stundenwinkel und das Azimut des Sterns im Augenblicke dieser größten Digression, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke zwischen Stern, Pol und Zenith

$$\sin \varphi = \sin \delta \sin h,$$

$$\sin \omega = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi},$$

$$\sin t = \frac{\cos h}{\cos \varphi}$$

Substituirt man diese Werthe in I. so findet man

$$\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

$$\frac{dh}{dt} = -\cos \delta, \text{ also}$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -\frac{\sin \omega \sin \delta}{\sin t}$$

wenn man das Azimut von der Nordseite des Meridians zählt, also wieder

$$\Delta \omega = -\frac{\sin \omega \sin \delta}{n \cdot \sin t} \cdot \sum \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta}{\sin 1''}$$

wo man ω und t aus den Gleichungen findet

$$\sin \omega = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi},$$

$$\cos t = \operatorname{Tg} \varphi \operatorname{Cotg} \delta.$$

Den 1. Aprill 1817 in Mayland war in der Nähe der größten westlichen Digression des Polarsterns

Uhrzeit	Horiz. Kreis
6 ^h 45' 28''	173° 1033
50 48	173. 1042
54 48	173. 1051
Mittel 6 ^h 50' 21''	173° 1042

und als der senkrechte Faden des Fernrohrs auf denselben Thurm (N I.) gerichtet wurde, zeigte der Horizontalkreis $115^{\circ} 71' 47''$. Beyder Differenz ist daher $\Delta' = 57^{\circ} 38' 94''$

Es ist aber scheinbare Rectascension des Polarsterns

$$\alpha = 0^h 55' 21'' 1$$

$$\text{sch. Decl. } \delta = 88^{\circ} 19' 56'' 4$$

$$\text{und } \varphi = 45^{\circ} 28' 0'' 7, \text{ also}$$

$$\omega = 2^{\circ} 22' 41'' 6$$

$$t = 88^{\circ} 18' 15'' 1 = 5^h 53' 13'' 0$$

$$\alpha + t = 6^h 48' 34'' 1 = \text{Sternz. d. gröfst. Digress. d. ob.}$$

Zeich. f. westl. Digression.

$$- 2 27. 0$$

Correction der Uhr

$$T = 6 51 1. 1$$

Uhrzeit der gröfst. Digression

Die Differenz der beobachteten Uhrzeiten von T gibt die Werthe von $3 3' 3''$, also

$$\begin{array}{r} 3 - - - - - \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{\sin 1''} \\ - 5' 32'' - - - 60. 1 \\ - 0 13 \quad \quad \quad 0. 1 \\ + 3 47 \quad \quad \quad 28. 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin 1''} = 29.43, \log = 1.46879$$

$$\log \frac{\sin \omega \sin \delta}{\sin t} = 8.61801$$

$$\log \Delta \omega = 0.08680 n$$

Man hat daher

$$\omega = 2^{\circ} 22' 41'' 6$$

$$\Delta = 57 23 21. 8$$

$$\Delta \omega = - 1. 2$$

$$59 46 2. 2$$

$$180$$

$$129^{\circ} 13' 57'' 8 \text{ Azimut des Thurms.}$$

III. Man kann über diesen Gegenstand nachsehen: Mon. Corresp. 1812 Juni, Götting. Comment. XI. Band, und Sold-

ners neue Methode beobachtete Azimute zu reduzieren. München 1813 und Berl. Jahrb. 1818. p. 123. Ueber den vortheilhaftesten Ort des gewählten Gestirns zur Bestimmung des Azimuts s. m. Zeitschrift f. Astronomie III. B. Seite 82 u. f.

Ist das Azimut eines Objects genau bekannt, so ist auch dadurch die Richtung der Mittagslinie für den Beobachtungsort gegeben. Man kann diese Richtung auch unmittelbar durch einen Theodoliten finden, wenn man vor und nach der Culmination der Sonne oder eines Sterns gleiche Höhen desselben beobachtet, wo die Mitte zwischen beyden Beobachtungen, oder die Mitte des von dem Fernrohr auf dem Horizontalkreis durchlaufenen Bogens diese Richtung der Mittagslinie gibt. Bey der Sonne muß auf die Aenderung der Declination Rücksicht genommen werden. Das sicherste und bequemste Mittel zu diesem Zwecke gibt das Mittagsrohr unmittelbar. Aber auch mit bloßen Sextanten kann man die Richtung der Mittagslinie auf viele Meilen sehr genau durch eine Methode bestimmen, welche Zach im III. Bande der monat. Corresp. bekannt gemacht hat. Da dieses Verfahren für die Ausübung sehr nützlich ist, so wollen wir es hier kurz anzeigen.

In einer willkürlichen Entfernung vom Beobachtungsort stelle man in der nur beynahe bekannten Richtung des Meridians einige Signale auf, und beobachte an jedem derselben vor und nach Mittag einige correspondirende Distanzen der Sonne von den Signalen. Die Mitte je zweyer zusammengehörenden Uhrzeiten gibt den unverbesserten Mittag, welcher wegen der Aenderung der Declination der Sonne, wie die correspondirenden Sonnenhöhen, verbessert werden muß. Ist φ die Polhöhe, δ die Declination, t die halbe Zwischenzeit, und $d\delta$ die Aenderung der Declination in der Zeit t , endlich h die Höhe des Signals, so ist die Verbesserung des Mittags (Cap. VII. §. 2.)

$$\frac{d\delta}{15} \left(\frac{\text{Cotg}(\varphi + h)}{\text{Sin } t} - \text{Tg } \delta \text{ Cotg } t \right)$$

An demselben Tage beobachte man auch correspondirende Höhen der Sonne, woraus man den verbesserten wahren Mittag erhält. Es ist klar, daß der Mittag des Signals nur dann mit diesem wahren Mittage der correspondirenden Höhen übereinstimmen wird, wenn das Signal im Meridian steht, und daß jener Mittag des Signals früher fallen wird, wenn das Signal östlich vom Meridian liegt und umgekehrt. Aus diesen Unterschieden der Mittage und den bekannten Entfernungen der Signale unter einander wird man dann leicht den Punkt bestimmen, in welchem diese Signale aufgestellt werden sollen, damit sie in der Ebene des Meridians stehen. So fand Zach den 7. April 1801 in Seeberg

unverb. Mittag - - - Correction - - - verb. Mittag

I. Signal	11 ^h 55' 34" 92	+ 17. 39	11 ^h 55' 52" 31
II. - - -	11 56 1. 25	+ 17. 39	11 56 18. 64
III. - - -	11 56 31. 18	+ 17. 39	11 56 48. 57

Aus correspondirenden Sonnenhöhen aber fand sich der verbesserte wahre Mittag

11^h 56' 52" 20

also das dritte Signal am wenigsten, 3".63 vom Meridian auf der Ostseite desselben entfernt. Es war aber das erste Signal von dem dritten um 68. 6 Zolle, und das zweyte von dem dritten 36. 5 Zolle entfernt, die Mittag des ersten und dritten Signals aber sind 56. 26 und die des zweyten und dritten 29".93 untereinander verschieden. Ist also x die Entfernung des dritten Signals vom Meridian, so ist aus dem ersten und dritten

$$x = 3.63 \frac{(68.6)}{56.26} = 4.426$$

und aus dem zweyten und dritten

$$x = 3.63 \frac{(36.5)}{29.93} = 4.427$$

Im Mittel aus beyden Bestimmungen ist daher das dritte Signal

4. 4265 Zolle

östlich vom Meridian, und um so viel muß es westlich gerückt werden, um in die Mittaglinie des Beobachtungsorts zu kommen. M. s. Monatl. Corresp. 1801. Aprill, May und August und 1803 Juni.

§. 10.

Eine der wichtigsten Beobachtungen der practischen Astronomie ist die der Rectascension irgend eines ersten Gestirns, aus welcher man dann durch bloße Differenzen der Rectascensionen die geraden Aufsteigungen aller anderen Gestirne leicht ableiten kann.

I. Die absolute Rectascension der Sonne könnte man so finden.

Es sey δ die beobachtete Declination der Sonne einige Zeit nach dem Frühlingsäquinocetium, und δ' die Declination einige Zeit vor dem Herbstäquinocetium. Hat man an beyden Tagen die Differenz der Rectascension der Sonne mit demselben Fixstern, dessen Rectascension selbst unbekannt ist, beobachtet, so gibt der Unterschied dieser Differenzen, wenn auf Präcession, Nutation

und Aberration gehörig Rücksicht genommen wird, die Bewegung α der Sonne in Rectascension während der Zwischenzeit zwischen beyden Beobachtungen.

Nennt man nun die unbekannte Rectascension der Sonne selbst in der ersten Beobachtung α und in der zweyten $180 - \beta$, so ist, wenn e die Schiefe der Ecliptik bezeichnet,

$$\sin \alpha \operatorname{Tg} e = \operatorname{Tg} \delta$$

$$\sin \beta \operatorname{Tg} e = \operatorname{Tg} \delta'$$

also

$$\sin \alpha : \sin \beta = \operatorname{Tg} \delta : \operatorname{Tg} \delta',$$

woraus folgt

$$\operatorname{Tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin (\delta - \delta')}{\sin (\delta + \delta')} \operatorname{Cotg} \frac{e}{2}$$

Addirt man den so gefundenen Bogen

$$\frac{\alpha - \beta}{2} \text{ zu } \frac{\alpha + \beta}{2} = 90 - \frac{e}{2},$$

so hat man α oder die erste Rectascension, und addirt man

$$\frac{\alpha - \beta}{2} \text{ zu } 180 - \frac{\alpha + \beta}{2} = 90 + \frac{e}{2},$$

so hat man $180 - \beta$ oder die zweyte Rectascension der Sonne, und da man an beyden Tagen die Differenz der Sonne und jenes Fixsterns beobachtet hat, so kennt man auch die Rectascension des Fixsterns. M. s. Berl. Jahrb. 1791. p. 203.

Diese Methode hängt, wie man sieht, von der Polhöhe, und der Schiefe der Ekliptik ab, so, daß unrichtige Annahmen dieser beyden vorauszusetzenden Größen, so wie die unmittelbaren Beobachtungs-Fehler selbst, oft nachtheiligen Einfluß auf die zu findenden Resultate haben werden. Der Fehler der Schiefe der Ekliptik läßt sich größtentheils dadurch vermeiden, wenn man die Beobachtungen nahe bey den Nachtgleichen und in fast gleichen Entfernungen von ihnen nimmt,

II. Da die Bestimmung einer ersten absoluten Rectascension von der größten Wichtigkeit ist, und gleichsam die Basis der gesammten beobachtenden Astronomie macht, so wird es nöthig seyn, hier die vorzüglichste Methode, zu diesem Zwecke zu gelangen, umständlich vorzutragen.

Das erste Geschäft wird die Bestimmung der bloßen Differenzen der Rectascensionen mehrerer Fixsterne seyn. Zu diesem Zwecke beobachtet man so oft als möglich ihre Culminationen am Mittagsrohr. Nimmt man nun einen dieser Sterne in seiner Rectascension (aus guten Beobachtungen anderer Astro-

nomen) als vorläufig gegeben an, so wird dadurch auch die Rectascension aller übrigen bestimmt, aber alle diese Rectascensionen werden mit einem gemeinschaftlichen Fehler, nämlich dem jenes ersten Fundamentalsterns, behaftet seyn, ihre Ascensional-Differenzen aber werden, aus den vorhergehenden Beobachtungen am Mittagsrohr, als fehlerfrey vorausgesetzt. Wir wollen diesen gemeinschaftlichen Fehler der Rectascension unsers Sternkatalogs mit dA bezeichnen.

Jeder Tag, an welchem die Sonne und einer oder mehrere jener Sterne am Mittagsrohr beobachtet ist, gibt die Differenz der Rectascension der Sonne und des Sterns, und wenn man die Rectascension des Sterns aus jenem Cataloge nimmt, die Rectascension der Sonne, welche wir α nennen wollen, und die also ebenfalls mit jenem gemeinschaftlichen Fehler des Catalogs behaftet seyn wird. Aus dieser Rectascension α und der scheinbaren Schiefe e der Ekliptik findet man die Declination δ' der Sonne durch die Gleichung

$$\text{Tg } \delta' = \text{Sin } \alpha \text{ Tg } e$$

oder genauer, wenn man auf die Breite B der Sonne Rücksicht nimmt

$$\delta = \delta' + B \frac{\text{Cos } e}{\text{Cos } \delta}$$

wö δ' aus der vorhergehenden Gleichung gefunden wird. Ist aber φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, so findet man aus dem so eben bestimmten δ die wahre Zenithdistanz z der Sonne

$$z = \varphi - \delta$$

Da aber in dem Vorhergehenden α um die Gröfse dA fehlerhaft ist, und da auch die Polhöhe φ und die Schiefe e um die Gröfsen $d\varphi$, de fehlerhaft seyn kann, so wird man statt der letzten Gleichung, wie man leicht findet, eigentlich folgende haben

$$z = \varphi - \delta + d\varphi - de \cdot \frac{\text{Sin } 2\delta}{\text{Sin } 2e} - dA \cdot \frac{\text{Sin } 2\delta}{2 \text{ Tg } \alpha}$$

Hat man aber an denselben Tagen auch die Zenithdistanz z' der Sonne am Kreise unmittelbar beobachtet, so muß $z = z'$ seyn, d. h. man hat die Gleichung

$$0 = z' - (\varphi - \delta) - d\varphi + de \cdot \frac{\text{Sin } 2\delta}{\text{Sin } 2e} + dA \cdot \frac{\text{Sin } 2\delta}{2 \text{ Tg } \alpha}$$

Man erhält also so viele Bedingungsgleichungen der letzten Form, als man Tage hat, an welchen man die Sonne am Kreise und Sonne und Fixsterne am Mittagsrohr beobachtet hat. Behandelt man dann alle diese Gleichungen nach der Methode

der kleinsten Quadrate, welche weiter unten erklärt werden wird, so wird man die wahrscheinlichsten Werthe von $d\varphi$, de und dA erhalten; d. h. man wird erstens eine Prüfung der oben vorausgesetzten Polhöhe, zweytens eine Prüfung der vorausgesetzten Schiefe der Ekliptik, und endlich den gesuchten Fehler dA der Rectascensionen erhalten, der allen Sternen des obigen Cataloges zu Grunde liegt.

Das ganze Verfahren reduzirt sich demnach auf Folgendes. Jeden Tag, an welchem einer der Sterne jenes Cataloges, oder der gröfseren Sicherheit wegen mehrere derselben, zugleich mit der Sonne am Mittagsrohr, und überdiess die Sonne am Kreise beobachtet wurde, leitet man zuerst aus den Beobachtungen am Mittagsrohr die Rectascension der Sonne, und daraus durch Rechnung die Zenithdistanz der Sonne ab, und diese mit der durch den Kreis erhaltenen Zenithdistanz der Sonne verglichen, gibt die gesuchte Bedingungsgleichung dieses Tages.

Man kann aber auch umgekehrt aus den Beobachtungen am Kreise die Rectascension der Sonne durch Rechnung herleiten, und mittels dieser aus den Beobachtungen am Mittagsrohre die Rectascension des Sterns finden, und dann wird man, wenn man alle Correctionen berücksichtigt, so verfahren.

Aus der am Kreise beobachteten Zenithdistanz z der Sonne suche man (mit einer hypothetischen Polhöhe φ Refraction r und Horizontalparallaxe π der Sonne) die Declination der Sonne

$$\text{Decl.} = \text{Polh.} - \text{Zenithdistanz}$$

Aus dieser Declination der Sonne, ihrer Breite, und einer hypothetischen Schiefe e der Ekliptik suche man durch Rechnung die Rectascension α der Sonne. Es ist nämlich

$$\sin \alpha = \frac{\text{Tg } \delta}{\text{Tg } e} = \frac{\text{Tg } (\varphi - z)}{\text{Tg } e}$$

also auch

$$d\alpha = d(\varphi - z) \cdot \frac{2 \text{Tg } \alpha}{\sin 2 \delta} - de \cdot \frac{2 \text{Tg } \alpha}{\sin 2 e}$$

Aus dieser Rectascension der Sonne und der an denselben Tagen am Mittagsrohre beobachteten Rectascensionsdifferenz der Sonne und eines jener Sterne suche man die Rectascension dieses Sternes. Gesetzt man habe auf diese Art die Rectascension dieses Sternes gleich a gefunden, so ist eigentlich die wahre Rectascension dieses Sterns, wie man leicht findet

$$= a + (d\varphi + d\pi \sin z - dr - dz) \cdot \frac{2 \text{Tg } \alpha}{\sin 2 \delta} - de \cdot \frac{2 \text{Tg } z}{\sin 2 e}$$

wo dr der Fehler der hypothetisch vorausgesetzten Refraction,

$d e$ der Fehler der Schiefe der Ecliptik,
 $d \varphi$ der Fehler der Polhöhe
 $d \pi$ der Fehler der Horizontalparallaxe der Sonne, und
 $d z$ der Fehl. (Theil- oder Beobachtungsfehler) des Kreises ist.

Ein zweyter ähnlicher Beobachtungstag in dem entgegengesetzten Zeichen der Ecliptik unter derselben Zenithdistanz der Sonne, gibt, da jetzt die Rectascension der Sonne

$$180 - \alpha$$

ist, die wahre Rectascension jenes Fixsterns, wenn man sie durch Präcession, Aberration und Nutation) auf den ersten Beobachtungstag zurückführt.

$$a' - (d \varphi + d \pi \sin z - d r' - d z') \frac{2 \operatorname{Tg} \alpha}{\sin 2 \delta} + d e \frac{2 \operatorname{Tg} \alpha}{\sin 2 e}$$

Die halbe Summe beyder ist

$$\frac{a+a'}{2} + (d r' - d r + d z' - d z) \frac{\operatorname{Tg} \alpha}{\sin 2 \delta}$$

und in dem letzten Ausdrücke verschwinden die Correctionen

$$d \varphi, d \pi, d e.$$

Sind also an beyden Beobachtungstagen die Fehler der Refraction und die des Instruments dieselben, oder ist

$$d r' - d r + d z' - d z = 0$$

so ist die halbe Summe beyder oben gefundenen Rectascensionen

$$\frac{a + a'}{2}$$

die gesuchte wahre Rectascension des Sterns:

Dies setzt also voraus, daß die an den beyden Tagen beobachteten Zenithdistanzen der Sonne gleich groß, oder doch nahe gleich groß sind, weil sonst die Voraussetzung

$$d r' = d r, \text{ und } d z' = d z$$

nicht angeht. Setzt man aber

$$d r' + d z' = d r + d z$$

voraus, so ist die Differenz der eben gegebenen beyden Ausdrücke

$$0 = (a - a') + (d \varphi + d \pi \sin z - d r - d z) \frac{4 \operatorname{Tg} \alpha}{\sin 2 \delta} - d e \frac{4 \operatorname{Tg} \alpha}{\sin 2 e}$$

oder

I.

P

$$\begin{aligned} d\varphi + dr - dz &= - \frac{(a-a')}{2} \cdot \frac{\sin 2\delta}{2 \operatorname{Tg} \alpha} \\ &+ de \cdot \frac{\sin 2\delta}{\sin 2e} - d\pi \sin z \end{aligned}$$

und mittels dieser Gleichung, in welcher

$$\frac{a - a'}{2}$$

immer als bekannt und $d\pi = 0$ angenommen werden kann, findet man aus bloßen Beobachtungen der Sonne die Fehler

$$d\varphi, de, dr \text{ und } dz,$$

III. Hat man so die Rectascension eines Gestirns gefunden, so wird man aus den leicht zu beobachtenden Rectascensionsunterschieden desselben mit den übrigen auch die absoluten geraden Aufsteigungen dieser letzten finden.

Auch kann man, wenn einmal mehrere Sterne ihrer Lage nach bekannt sind, durch bloße beobachtete Distanzen derselben von andern die Rectascension und Declination der letzten finden, eine Methode, die man, wenn man z. B. bloß mit einem Sextanten versehen ist, auf Kometen leicht anwenden wird, wenn man ihre Distanz von zwey bekannten Fixsternen beobachtet. Aus diesen Distanzen und den beyden Beobachtungszeiten die Rectascension und die Declination des Kometen zu finden, führt auf die oben Cap. VIII. §. 12 vorgetragene Auflösung der Aufgabe, in welcher wir aus zwey Zenithdistanzen eines seiner Lage nach bekannten Sterns und den Beobachtungszeiten die Polhöhe und den Stand der Uhr gesucht haben.

Die Alten haben den Ort der Kometen häufig durch Alignements angegeben, das heißt, durch zwey größte Kreise, deren jeder durch zwey bekannte Sterne und durch den Kometen zu gehen scheint. Es seyen a, a' die Rectascensionen oder Längen der beyden ersten Sterne, mit welchen der Komet in einem größten Kreise steht, und d, d' ihre Declinationen oder Breiten. Dieselben Größen für die beyden anderen Sterne seyen α, α' und δ, δ' und für den Kometen selbst endlich A und D . Dies vorausgesetzt, hat man für die Durchschnittspunkte der beyden größten Kreise mit dem Aequator oder mit der Ecliptik folgende Ausdrücke

$$\operatorname{Tg} \left(\omega + \frac{a' - a}{2} \right) = \operatorname{Tg} \frac{a' - a}{2} \cdot \frac{\sin (d' + d)}{\sin (d' - d)}$$

$$\operatorname{Tg} \left(\omega' + \frac{\alpha' - \alpha}{2} \right) = \operatorname{Tg} \frac{\alpha' - \alpha}{2} \cdot \frac{\sin (\delta' + \delta)}{\sin (\delta' - \delta)}$$

und es sind die Rectascensionen oder Längen dieser Durchschnittspunkte

$$N = d - \omega, \text{ und}$$

$$N' = \alpha - \omega',$$

und die Neigungen dieser beyden Kreise gegen den Aequator oder die Ecliptik

$$\text{Tg } n = \frac{\text{Tg } d}{\text{Sin } \omega},$$

$$\text{Tg } n' = \frac{\text{Tg } \delta}{\text{Sin } \omega'}$$

Ist aber

$$N' - N = 2 C$$

und

$$\text{Tg } x = \frac{\text{Sin } (n' + n)}{\text{Sin } (n' - n)} \cdot \text{Tg } C$$

so hat man sofort

$$A = N + C + x = N' - C + x \text{ und}$$

$$\text{Tg } D = \text{Tg } n \text{ Sin } (C + x) = \text{Tg } n' \text{ Sin } (C - x)$$

M. s. Berl. Jahrbuch 1821 p. 170 und 1822 p. 232

$$\text{Ex. } a = 70^\circ 58' 42'' \quad d = 10^\circ 24' 50''$$

$$a' = 129 \quad 29 \quad 59 \quad d' = 49 \quad 40 \quad 10$$

$$\alpha = 82^\circ 53' 22'' \quad \delta = 66^\circ 3' 50''$$

$$\alpha' = 104^\circ 34' 25'' \quad \delta' = 10 \quad 4 \quad 35$$

$$\text{woraus folgt } \omega = 3^\circ 14' 35''.5$$

$$\omega' = 156^\circ 30' 51''.5$$

$$N = 62^\circ 44' 6''.5$$

$$N' = 286^\circ 22' 30''.5$$

$$C = 111 \quad 49 \quad 12. \quad 0$$

$$n = 52^\circ 2' 30''$$

$$n' = 79 \quad 58 \quad 6$$

und

$$x = 284^\circ 9' 48''$$

$$A = 98^\circ 43' 6''.5$$

$$D = 36^\circ 59' 7''.0$$

§. 11.

Eine andere sehr wichtige Beobachtung ist die der Schiefe der Ecliptik. Ist h die Höhe der Sonne zur Zeit des Sommer-

solstitiums, δ die größte Declination derselben und φ die Polhöhe, so ist

$$h = 90 - \varphi + \delta$$

und eben so für das Wintersolstitium

$$h' = 90 - \varphi - \delta$$

also ist die halbe Summe

$$\frac{h + h'}{2}$$

beyder Höhen gleich der Höhe des Aequators und die halbe Differenz

$$\frac{h - h'}{2}$$

ist gleich $\delta = e$ der Schiefe der Ecliptik

Um diese Methode gehörig anzuwenden, bemerke man, daß die Sonnenwende selten so nahe an dem Mittage eintritt, daß man die nächste Mittagshöhe der Sonne auch zugleich als die Solstitialhöhe annehmen könnte, also muß man die am Mittag gemachte Beobachtung auf die Zeit des Solstitiums reduzieren. Ferner ändert sich diese Schiefe wegen ihrer Säcularabnahme und wegen der Nutation, daher man bey der Verbindung zweyer nächsten Solstitien auf diese Aenderungen Rücksicht nehmen muß.

Die Reduction der beobachteten Declination auf die Declination des Solstitiums kann man aus der Gleichung

$$\text{Tg } \delta = \text{Tg } e \sin \alpha$$

nehmen, wo δ die beobachtete Declination, und α die dazu gehörige Rectascension der Sonne ist. Diese Gleichung gibt (Cap. I.) für die Reduction auf das Solstitium

$$e - \delta = s^2 \sin 2e - \frac{s^4}{2} \sin 4e + \frac{s^6}{2} \sin 6e -$$

oder auch

$$e - \delta = s^2 \sin 2\delta + \frac{s^4}{2} \sin 4\delta + \frac{s^6}{3} \sin 6\delta +$$

$$\text{wo } s = \text{Tg } \frac{90 - \alpha}{2}$$

Der erste dieser Ausdrücke ist bequemer. Will man die Reduction $e - \delta$ von der wahren Länge λ der Sonne abhängig machen, so hat man

$$\sin \delta = \sin e \sin \lambda$$

also auch

$$\frac{\sin e - \sin \delta}{\cos e} = 2 \operatorname{Tg} e \sin^2 \frac{90 - \lambda}{2}$$

Vergleicht man dies mit dem Ausdrucke

$$\frac{\sin a - \sin b}{\cos a} = z$$

des §. 5. Cap. VII. so hat man

$$e - \delta = z - \frac{z^2}{1.2} \operatorname{Tg} e + \frac{z^3}{1.2.3} (1 + 3 \operatorname{Tg}^2 e)$$

$$- \frac{z^4}{1.2.3.4} (9 \operatorname{Tg} e + 15 \operatorname{Tg}^3 e) +$$

$$\text{wo } z = 2 \operatorname{Tg} e \sin^2 \frac{90 - \lambda}{2}$$

Als Beispiel wollen wir die Beobachtungen wählen, welche ich im Sommer des Jahres 1818 mit einem dreifüßigen Multiplikationskreise von Reichenbach in Ofen gemacht habe.

Die zweyte Columnne enthält die beobachtete Zenithdistanz des Mittelpunkts der Sonne nahe am Meridian, die dritte die Reduction der ersten auf den Meridian, die vierte die Refraction nach Carlini und die Höhenparallaxe, die fünfte endlich die Reduction auf die Sommerwende nach der ersten der oben gegebenen Gleichungen. Ist nämlich $e = 23^\circ 27' 54'' 7$, so ist diese Reduction

$$5. 1780600 z^2 - 5. 0124084 z^4 + 4. 6381232 z^6$$

wo

$$z = \operatorname{Tg} \frac{90 - \alpha}{2}$$

und die numerischen Coefficienten schon Logarithmen sind,

Addirt man die Zahlen dieser vier Columnen mit ihren Zeichen, so erhält man die letzte Columnne, oder die Solstitial-Zenithdistanz des Mittelpunkts der Sonne.

1818 Z. D. Red. auf Merid.

Juni 19	24°	2' 32. 53	— 8. 30
20		1 33. 75	— 2. 97
21		1 4. 12	— 2. 97
22		1 0. 18	— 3. 17
23		1 32. 25	— 4. 34
24		2 6. 94	— 2. 42

Ref. und Par.		Red. auf Solstit.	Solstit. Z D
Juni 19	20.93	— 1' 27" 31	24° 1' 17' 85
20	20.68	— 0 33. 91	17. 55
21	20.47	— 0 5. 30	16. 32
22	20.28	— 0 1. 49	15. 80
23	20.20	— 0 28. 47	19. 64
24	21.02	— 1 8. 25	17. 29
Mittel aus 6 Beob.			24° 1' 17" 41
Polhöhe			47 29 12. 50
scheinbare Schiefe			23° 27' 55" 09

Bringt man daran die Nutation der Schiefe (Cap. II, § 6.) oder $9'' 65 \cos \Omega \zeta$ mit verkehrten Zeichen an, so erhält man die mittlere Schiefe der Ecliptik. Es ist

$$\Omega \zeta = 35^\circ 58' \text{ also } 9.65 \cos \Omega \zeta = 7.'' 81$$

und daher die mittlere Schiefe

$$23^\circ 27' 47.'' 28$$

§. 12.

Wir wollen uns nur mit den Methoden beschäftigen, durch welche man auch die Entfernung der himmlischen Körper von der Erde oder ihre Parallaxe finden kann.

Das einfachste Mittel, welches sich zu diesem Zwecke darbietet, ist die Beobachtung desselben Gestirns aus zwey ihrer Lage nach bekannten sehr entfernten Orten der Erde, die beynahe in demselben Meridian liegen.

Setzt man die Erde als ein Sphäroid voraus, welches durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist, und nennt man für den ersten Ort die beobachtete Zenithdistanz z , die beobachtete Polhöhe φ , und die geocentrische Polhöhe $\varphi - \alpha$, den Erdhalbmesser für diesen Punkt r und endlich x den Winkel der Gesichtslinie mit der Linie, welche die Mittelpunkte des Gestirns und der Erde verbindet, und bezeichnet man für den andern Ort dieselben Größen mit einem Striche, so findet man leicht für die Entfernung R der Mittelpunkte des Gestirns und der Erde folgenden doppelten Ausdruck:

$$R = \frac{r \sin(z-\omega)}{\sin x} = \frac{r' \sin(z'-\omega')}{\sin x'}$$

und überdiess

$$x + x' = (z + z') - (\varphi + \varphi') = m$$

Aus diesen beyden Gleichungen folgt

$$\operatorname{Tg} x = \frac{r' \sin(z-\omega) \sin m}{r' \sin(z'-\omega') + r \sin(z-\omega) \cos m}$$

$$\operatorname{Tg} x' = \frac{r' \sin(z'-\omega') \sin m}{r \sin(z-\omega) + r' \sin(z'-\omega') \cos m}$$

Ist dann π die Horizontalparallaxe des Gestirns für den Aequator der Erde, und A der Halbmesser des Aequators, so ist

$$\sin \pi = \frac{A}{R}$$

oder sehr nahe

$$\pi = \frac{A \cdot m}{r \sin(z-\omega) + r' \sin(z'-\omega')}$$

Dieser Ausdruck setzt voraus, daß beyde Beobachter auf verschiedenen Seiten des Aequators sind. Sind sie auf derselben Seite, so ist die kleinere Polhöhe als negativ zu betrachten, so wie ihr ω . Ist das Gestirn für beyde Beobachter auf derselben Seite des Zeniths, so ist die kleinere der beyden Zenithdistanzen ebenfalls negativ. Liegen endlich beyde Beobachtungsorte nicht genau in demselben Meridian, so muß man, da die Beobachtungen nicht mehr gleichzeitig sind, für die Änderung der Declination in der Zwischenzeit Rechnung tragen.

Auf diese Art bestimmte Lacaille am Vorgebirge der guten Hoffnung und Lalande in Berlin die Parallaxe des Mondes, und die des Mars. Eine andere Methode, solche Beobachtungen zu berechnen, gab Dusejour in den *Mémoires de l'Acad. des sciences*, Année 1782 p. 321, und 1783 p. 263.

§. 13.

Man kann aber auch, wenn das Gestirn von der Erde nicht zu sehr entfernt ist, aus Beobachtungen an einem und demselben Orte die Parallaxe desselben ableiten.

Sind $\alpha \delta$ die wahre Rectascension und Declination des Mondes, und $\alpha' \delta'$ die scheinbare, von der Parallaxe afficirte Rectascension desselben, A die gerade Aufsteigung des Zeniths, φ die geocentrische Polhöhe und r die Entfernung des Beobachters

vom Mittelpunkt der Erde, den Halbmesser des Aequators zur Einheit angenommen, so ist bekanntlich

$$\alpha - \alpha' = r. p. \sin (A - \alpha') \frac{\cos \varphi}{\cos \delta}$$

wo p die Horizontalparallaxe am Aequator ist.

Ist also

$$r \sin (A - \alpha') \frac{\cos \varphi}{\cos \delta} = b \text{ und}$$

$$\alpha - \alpha' = d \alpha, \text{ so ist}$$

$$d \alpha = b. p$$

und eben so für eine zweyte Beobachtung

$$d \alpha' = b'. p$$

also auch

$$p = \frac{d \alpha' - d \alpha}{b' - b} \dots (I.)$$

und in der letzten Gleichung ist

$$d \alpha' - d \alpha$$

oder der Unterschied der Parallaxen der Rectascension aus den Beobachtungen bekannt, also kann man aus ihr den Werth von p finden.

Man sucht nämlich in beyden Beobachtungen die Differenz der Rectascension des Mondes von einem ihm nahen Fixstern, woraus man die scheinbaren Rectascensionen des Mondes findet, deren Differenz m' seyn soll. Aus den Mondstafeln aber findet man die Bewegung des Mondes in Rectascension während der Zwischenzeit, oder die Differenz m der beyden wahren Rectascensionen des Mondes, und es ist

$$d \alpha' - d \alpha = m' - m.$$

Aus dem allgemeinen Ausdruck für b sieht man, daß diese Methode dann am vortheilhaftesten ist, wenn δ so groß als möglich, und wenn die beyden Beobachtungen auf entgegengesetzten Seiten des Meridians und zwar in der Nähe der ersten Vertikalkreise gemacht werden, dadurch wird nämlich b' und b so groß als möglich, und eines derselben negativ.

Bey den Beobachtungen selbst muß man den Faden des Mikrometers, welcher dem Parallelkreis entspricht, mit der Richtung des Sterns, nicht mit der des Mondes parallel nehmen, weil die Declination des Mondes sich zu schnell ändert, und die Richtung seiner Bewegung dem Aequator nicht mehr als parallel angenommen werden kann.

Um zu sehen, welcher Genauigkeit diese Methode fähig ist, wollen wir die Beobachtungen als Beyspiel nehmen, die T. Mayer 1748 den 15. August in Nürnberg gemacht hat. Er verglich an diesem Tage den Mond mit neun Sternen, und da die Differenzen der Rectascensionen dieser Sterne bekannt waren, so reduzirte er alle neun Beobachtungen auf die einzige der γ Pleiaden oder Alcyone. Er fand so viermal

Beob. - - - wah. Zeit. d. Durchg. - - Diff. d. Uhrz. zwisch.
des Mondes γ und d. folg. Mondsr.

1	11 ^h 59' 34"	0 ^h 8' 51" 7
2	12 12 52	0 8 23. 6
3	12 28 37	0 7 50. 5
4	12 41 25	0 7 24. 0

Um 15^h 30' 16" wurde Taigeta vom Monde bedeckt, der Mittelpunkt des Mondes war 2' 14" südlicher, als der Stern, der scheinbare Halbmesser des Mondes aber war 15' 23", also ergibt sich daraus durch Rechnung eine fünfte Beobachtung

5	15 ^h 30' 16"	0 ^h 16' 36" 0
---	-------------------------	--------------------------

Der Gang der Uhr war 23^h 56' 29" Uhrzeit auf 360° des Aequators, und der Halbmesser des Mondes in Rectascension war 16' 38", woraus sich daher für die vorhergehenden fünf Beobachtungen findet

scheinbare AR des Mittelpunktes des Mondes

1	50° 39' 48"
2	50 46 49
3	50 55 6
4	51 1 45
5	52 18 39

also ist die scheinbare Bewegung des Mondes in Rectascension zwischen den Beobachtungen

1	und 5	1° 38' 51"
2	5	1 31 50
3	5	1 23 33
4	5	1 16 54

Aus den Tafeln aber fand man die wahre Bewegung des Mondes in Rectascension

zwischen den Beobachtungen

1	5	1° 56' 6''
2	5	1 48 48
3	5	1 40 8
4	5	1 33 4

also die Wirkung der Parallaxe

17' 15''

16 58

16 35

16 10

Ferner ist die wahre Declination des Mondes für die Beobachtung

1	23° 38'
2	23 39
3	23 41
4	23 43
5	24 2

Sucht man endlich die Rectascension des Zeniths und subtrahirt davon die scheinbare Rectascension des Mondes, so ist der scheinbare Stundenwinkel des Mondes

1 - - - - -	85° 6'
2	81 53
3	78 4
4	74 58
5	33 57

und daraus fand sich mit der Polhöhe

$$\varphi = 49^{\circ} 27' 10''$$

aus der Beobachtung 1 der Werth von $d\alpha = 0.7088$ p

2	0.7044 p
3	0.6964 p
4	0.6876 p
5	0.3985 p

also gibt die Gleichung I. aus der ersten und fünften Beobachtung

$$p = \frac{17' 15''}{0.3103} = 55' 38''$$

Eben so gibt die zweyte und letzte

$$p = 55' 30''$$

und die dritte und letzte

$$p = 55' 34'' \text{ u. s. w.}$$

Ueber die Methoden, die Parallaxe oder die Entfernung der Meteore u. dgl. aus Beobachtungen zu bestimmen, s. m. Berl. Jahrb. 1783 p. 156, und 1806 p. 211.

§. 14.

Die Parallaxe der Sonne oder ihre Entfernung von der Erde, von welcher, wie wir sehen werden, unsere Kenntniß der absoluten Entfernungen aller Planeten und Kometen von der Sonne und unter einander abhängen, kann ihrer zu großen Entfernung von der Erde wegen, durch keine der vorhergehenden Methoden bestimmt werden, sondern sie fordert eigene Betrachtungen, auf welche wir im zweyten Buche zurückkommen werden. Nicht weniger interessant ist die Parallaxe der Fixsterne, mit deren Beobachtung man sich besonders in unsern Zeiten so sehr beschäftigte, ohne bisher zu einem sicheren Resultate zu gelangen. Es ist sehr wahrscheinlich, daß diese Parallaxe der Fixsterne nicht über 3 bis 4 Secunden beträgt, ja, daß sie bey den meisten Sternen noch viel kleiner ist, daher zu ihrer Bestimmung die genauesten Instrumente gehören. Man sehe darüber Piazzis Abhandlung im 12. Theile della societa Italiana della Scienze. Calandrellis Opuscoli Astronom. Herschel Phil. Transact. 1782 und Schubert Berl. Jahrb. 1796.

Am vorteilhaftesten ist es, die Parallaxe der Fixsterne aus ihren in verschiedenen Jahreszeiten beobachteten Rectascensionen und Declinationen abzuleiten. Ist π die Entfernung R der Sonne von der Erde dividirt durch die Entfernung r der Sonne von dem des Sterns, ferner $\alpha \delta$ die wahre Rectascension und Declination des Sterns, und sind

$$\alpha + d\alpha, \delta + d\delta$$

dieselben scheinbaren Größen, so wie AD die Rectascension und Declination der Sonne, so findet man leicht durch die Betrachtungen, welche wir schon im fünften Capitel zu Grunde gelegt haben, folgende Ausdrücke

$$\operatorname{Tg}(\alpha + d\alpha) = \frac{r \sin \alpha \cos \delta + R \sin A \cos D}{r \cos \alpha \cos \delta + R \cos A \cos D} \text{ und}$$

$$\text{Tg } (\delta + d\delta) = r \sin \delta + R \sin D$$

$$\sqrt{(r \cos \alpha \cos \delta + R \cos A \cos D)^2 + (r \sin \alpha \cos \delta + R \sin A \cos D)^2}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\beta = \frac{R}{r} \cdot \frac{\cos D}{\cos \delta} = \pi \frac{\cos D}{\cos \delta}$$

so wird der erste dieser Ausdrücke

$$\text{Tg } (\alpha + d\alpha) = \frac{\sin \alpha + \beta \sin A}{\cos \alpha + \beta \cos A}$$

Es ist aber

$$\alpha + d\alpha = \frac{1}{2 \sqrt{-1}} \cdot \log \frac{1 + \text{Tg } (\alpha + d\alpha) \cdot \sqrt{-1}}{1 - \text{Tg } (\alpha + d\alpha) \cdot \sqrt{-1}}$$

und wenn man in der letzten Gleichung den Werth von

$$\text{Tg } (\alpha + d\alpha)$$

aus der vorletzten substituirt, so hat man

$$\alpha + d\alpha = \frac{1}{2 \sqrt{-1}} \cdot \log \frac{e^{\alpha \sqrt{-1}} + \beta e^{A \sqrt{-1}}}{e^{-\alpha \sqrt{-1}} + \beta e^{-A \sqrt{-1}}}$$

wo Log nat. $e = 1$ ist,

oder auch, da

$$\alpha = \frac{1}{2 \sqrt{-1}} \cdot \log e^{2\alpha \sqrt{-1}} \text{ ist,}$$

$$d\alpha = \frac{1}{2 \sqrt{-1}} \cdot \log \frac{1 + \beta e^{(A-\alpha) \sqrt{-1}}}{1 + \beta e^{-(A-\alpha) \sqrt{-1}}}$$

woraus man leicht findet

$$d\alpha = \beta \sin (A - \alpha) - \frac{1}{2} \beta^2 \sin 2 (A - \alpha) + \frac{1}{3} \beta^3 \sin 3 (A - \alpha) - \dots \text{ (I.)}$$

Eben so könnte man die zweyte der vorhergehenden Gleichungen behandeln. Bleibt man bey der ersten Potenz von π stehen, so erhält man

$$d\delta = \sin (D - \delta) + 2 \cos D \sin \delta \sin^2 \frac{A - \alpha}{2} = \pi (\sin D \cos \delta - \cos D \sin \delta \cos (A - \alpha)) \dots \text{ (II.)}$$

I. Bezeichnet man durch L , ω die Länge der Sonne und

die Schiefe der Ecliptik, so ist die zweyte der vorhergehenden Gleichungen auch

$$\operatorname{Tg}(\delta + d\delta) = \frac{\pi \sin L \sin \omega + \sin \delta}{\pi \cos L + \cos \alpha \cos \delta} \cos(\alpha + d\alpha)$$

Differentiirt man

$$\operatorname{Tg}(\delta + d\delta)$$

in Beziehung auf L und setzt das Differential dieser Tangente gleich Null, so ist, da π immer sehr klein ist,

$$\operatorname{Tg} L = -\cos \alpha \cotg \delta \sin \omega$$

und diese Gleichung gibt die Länge der Sonne, also auch den Tag des Jahres, wo die Parallaxe der Declination ein Maximum oder ein Minimum ist. Die Parallaxe der Rectascension aber hat, wie aus der Gleichung I folgt, ihren größten und kleinsten Werth für

$$A - \alpha = 90^\circ \text{ oder für } A - \alpha = 270^\circ$$

So gibt z. B. γ Pegasi

$$\alpha = 0^\circ 44', \delta = 14^\circ 4', \omega = 23^\circ 28'$$

also

$$L = 10^\circ 2' \text{ oder } 4^\circ 2'$$

oder der größte und kleinste Werth der Declination fällt in den 22. Januar und den 25. Julius; der größte und kleinste Werth der Rectascension aber in den 22. Junius und 22. Dezember.

Aus den Gleichungen I. und II. folgt, daß die Parallaxe der Declination immer kleiner ist, als die absolute Parallaxe π , daß aber die Parallaxe der Rectascension oft beträchtlich größer als π werden kann. Es ist daher im allgemeinen vorthellhafter, Beobachtungen der Rectascensionen zur Bestimmung der Parallaxe zu wählen. Am besten wird es seyn, solche zwey Sterne zu wählen, die in Rectascension nahe 180° verschieden sind. Ist α und α' die Rectascension und $d\alpha$ die Parallaxe r der Rectascension, die man für beyde Sterne gleich annimmt, so wird durch die ersten Beobachtungen die Rectascension des einen

$$\alpha + d\alpha$$

und die des andern

$$\alpha - d\alpha$$

also ihre Differenz

$$\alpha - \alpha' + 2 d\alpha$$

seyn.

Nach einem halben Jahre wird diese Differenz

$$\alpha - \alpha' = 2 d \alpha$$

seyn, wodurch man demnach die doppelte Summe beyder Parallaxen erhält, wenn man beyde Sterne zur Zeit ihrer größten und kleinsten Rectascensionsparallaxe beobachtet. Setzt man die absolute Parallaxe gleich der Einheit, so findet man z. B. für

	Maxim. von $d \alpha$	Maxim. von $d \delta$
γ Pegasi	0'' 9	0'' 4
α Arietis	1. 0	0. 4
α Tauri	1. 0	0. 2
α Aurigae	1. 4	0. 4
α Can. maj.	1. 0	0. 6
α Cor. bor.	1. 1	0. 7
α Lyrae	1. 3	0. 9

§. 15.

Da man aufer der Präcession, Nutation und Aberration an bey nahe jedem Fixstern noch eine andere geringe Bewegung bemerkt hat, deren Gesetze man nicht kennt, deren Richtungen aber nach der Meinung einiger Astronomen etwas gemeinschaftliches haben, so glaubten diese, ihre Ursache nicht in einer eigenen Bewegung dieser Sterne, sondern in einer Bewegung der Sonne und ihres ganzen Planetensystemes suchen zu müssen. M. s. Berl. Ephem. 1787 p. 224.

Wenn unser Sonnensystem, welches bey diesen Untersuchungen als ein Punkt betrachtet werden kann, während einem Jahrhundert den Bogen AA' seiner sehr großen Bahn um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt vielleicht von Tausenden von Sonnensystemen beschreibt, einen Bogen, der hier als eine gerade Linie angesehen werden kann, und wenn C ein Stern ist, der in diesem Punkte als unbeweglich gedacht wird, so wird man diesen Stern in beyden Lagen unsers Systemes, von der Sonne oder der Erde aus in S und S' sehen.

Es sey

$$ACA' = \pi$$

die säculäre Parallaxe unsers Systemes, und der Winkel

$$CA'B = m,$$

ferner $AA' = r$ und $AC = \rho$, so ist

$$\sin \pi = \frac{r}{\rho} \sin m$$

wo π den größten Werth hat, wenn $C A'$ senkrecht auf AB ist.

In dieser Gleichung sind aber r und ρ unbekannt, und werden es wohl immer bleiben. Es ist daher unmöglich, den absoluten Werth der Parallaxe π zu finden, aber die Richtung der Linie AB wird sich vielleicht doch durch Beobachtungen ausmitteln lassen.

Zu diesem Zwecke kann man zuerst suchen, ob die Richtungen der Linien

$$AC, A'C, A''C \dots$$

welche die scheinbaren Gesichtslinien ausdrücken, alle von einer einzigen Linie AB geschnitten werden, oder nicht.

Ist $\alpha \delta \varsigma$ die Rectascension und Declination und die Distanz des Sterns von der Erde oder von der Sonne, und bezieht man seine Lage gegen die Sonne auf drey senkrechte Coordinaten $x y z$, von denen x in der Linie der Nachtgleichen, und $x y$ in der Ebene des Aequators liegen, so ist

$$x = \varsigma \cos \delta \cos \alpha$$

$$y = \varsigma \cos \delta \sin \alpha$$

$$z = \varsigma \sin \delta$$

Beobachtet man z. B. nach hundert Jahren wieder denselben Stern, und nennt $\alpha' \delta' r'$ die dann erhaltene Rectascension, Declination und Distanz des Sterns durch Präcession auf die erste Epoche zurückgeführt, so ist wieder

$$x' = r' \cos \delta' \cos \alpha'$$

$$y' = r' \cos \delta' \sin \alpha'$$

$$z' = r' \sin \delta'$$

wobey also vorausgesetzt wird, daß $\alpha' \delta'$ von $\alpha \delta$ bloß wegen der Bewegung unseres Planetensystemes verschieden sind.

Sind nun $X Y Z$ die analogen Coordinaten des Punktes des Himmels, gegen welchen die Bewegung unsers Planetensystemes gerichtet ist, welchen Punkt wir der Kürze wegen den Polennen wollen, und legt man durch das Auge des Beobachters und durch jene zwey scheinbaren Orte des Sterns eine Ebene, so wird diese Ebene auch durch jenen Pol gehen. Ist die Gleichung dieser Ebene

$$z = M x + N y$$

so sind die Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken, daß diese Ebene durch jene zwey Orte des Sterns und durch den Pol geht, folgende:

$$z = M x + N y$$

$$z' = M x' + N y'$$

$$Z = M X + N Y$$

Eliminirt man daraus die Größen M und N , und setzt der Kürze wegen

$$P = \frac{X}{Z}$$

$$\text{und } Q = \frac{Y}{Z}$$

so erhält man

$$(z' y - z y') P - (z' x - z x') Q = x' y - x y' \quad \text{--- (I)}$$

Der Aufgabe gemäß sollen alle Sterne denselben Werth von P und Q geben, und da zwey Sterne hinreichen, diese zwey Größen zu bestimmen, so werden dann alle andern Sterne dazu dienen, diese Voraussetzung zu bestätigen, oder zu widerlegen. Substituirt man in der Gleichung I. für $x y$. . ihre vorhergehenden Werthe, und für $\delta \delta'$ ihre Complemente $p p'$ zu 90° oder die Poldistanzen der Sterne, so hat man, da

$$p' - p \text{ und } \alpha' - \alpha$$

sehr klein sind,

$$P. ((p' - p) \sin \alpha + (\alpha' - \alpha) \sin p \cos p \cos \alpha)$$

$$- Q. ((p' - p) \cos \alpha - (\alpha' - \alpha) \sin p \cos p \sin \alpha) - (\alpha' - \alpha) \sin^2 p \quad \text{(II.)}$$

Nennt man aber ADR die Rectascension und Declination und die Entfernung des Pols, so ist

$$X = R \cos D \cos A$$

$$Y = R \cos D \sin A$$

$$Z = R \sin D$$

also auch

$$P = \cotg D \cos A,$$

$$Q = \cotg D \sin A$$

und substituirt man diese Werthe in II., so ist

$$(p' - p) \cotg D \sin (\alpha - A)$$

$$= (\alpha' - \alpha) (\sin^2 p - \sin p \cos p \cotg D \cos (\alpha - A)) \quad \text{--- (III.)}$$

und diese Gleichung ist sehr bequem, das Verhältniß der Bewegungen

$$\frac{p' - p}{\alpha' - \alpha}$$

aller Sterne zu bestimmen, wenn man einmal A und D kennt. Indem man daher die letzte Gleichung für mehrere Sterne entwickelt, wird man sehen, ob die Resultate der Beobachtungen mit der vorausgesetzten Hypothese übereinstimmen, oder nicht.

Ex. Im Jahre 1760 wurde von α Aurigae beobachtet

$$\alpha = 74^{\circ} 44' 59'' 5; p = 44^{\circ} 16' 27'' 5$$

Bringt man an diesen Zahlen die Präcession für 42 Jahre, oder

$$+ 46' 1'' 243 \text{ und } - 3' 35'' 604$$

an, so erhält man für das Jahr 1802

$$\alpha = 75^{\circ} 31' 0'' 743$$

$$\text{und } p = 44^{\circ} 12' 51'' 896$$

Aber in demselben Jahre 1802 beobachtete man

$$\alpha' = 75^{\circ} 31' 14'' 400$$

$$\text{und } p' = 44^{\circ} 13' 12'' 40$$

also ist für 42 Jahre

$$p' - p = + 20'' 504$$

$$\text{und } \alpha' - \alpha = + 13'' 657$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung II. und setzt im Mittel

$$\alpha = 75^{\circ} 8'$$

$$\text{und } p = 44^{\circ} 15'$$

so erhält man

$$20'' 085 P + 1'' 732 Q - 6'' 649 = 0$$

Eben so fand man aus Sirius $49.072 P + 12.479 Q + 16.139 = 0$

$$\text{Procyon } 40.428 P + 12.774 Q + 28.621 = 0$$

$$\text{Arctur } 29.073 P - 78.312 Q - 43.222 = 0$$

$$\text{Aldebaran } 4.960 P + 0.062 Q - 7.250 = 0$$

$$\text{Wega } 12.216 P - 6.466 Q - 1.900 = 0$$

$$\text{Pollux } 5.177 P + 12.213 Q + 24.391 = 0$$

Um P und Q mit einiger Sicherheit zu finden, muß man die Sterne wählen, deren scheinbare Bewegung am größten ist. Die Summe der Gleichungen für Sirius und Procyon gibt

$$89.500 P + 25.253 Q = -44.760$$

und wenn man diese Gleichung mit der für Arctur verbindet, so erhält man

$$P = \text{Cotg } D \cos A = -0.311738$$

$$Q = \text{Cotg } D \sin A = -0.667604$$

also auch $A = 244^\circ 58'$

$$D = 53^\circ 37'.$$

und der Werth von A ist nur einige Minuten, der von D aber um 13 Grade von denen verschieden, die Herschel für diese beyden Größen angegeben hat. Allein damit harmoniren die übrigen Gleichungen für die andern Sterne so wenig, daß sich aus dem Systeme der vorhergehenden Gleichungen keine Werthe von P und Q finden lassen, welche ihnen allen auch nur einigermaßen genug thun. Ein anderes Verfahren s. m. Berl. Jahrb. 1789. p. 214.

Es ist also wohl nichts anders übrig, als die beobachteten Ortsveränderungen der Fixsterne eigenen Bewegungen derselben zuzuschreiben, und diese selbst anhaltend zu beobachten, bis es vielleicht unsern spätern Nachkommen gelingen wird, ihre Ursache zu entdecken. Eine andere bisher noch nicht erklärte Erscheinung mancher Fixsterne ist die Veränderlichkeit ihres Lichtes, über die man Lindenaus und Bohnenbergers Zeitschrift f. Astronomie II. B. p. 181. nachsehen kann.

§. 16.

Man bemerkt häufig an der Oberfläche der Sonne dunkle Stellen, Flecken, und andere, welche mit einem helleren Lichte, als die übrige Oberfläche der Sonne glänzen, oder Fackeln. So viel Unregelmäßigkeit man auch in ihrer Gestalt und Dauer beobachtet, so kommen doch die meisten derselben darin überein, daß sie am östlichen Rande der Sonne erscheinen, und in nahe 14 Tagen sich bis zum westlichen Rande bewegen, wo sie verschwinden, und oft nach andern 14 Tagen auf dem vorigen östlichen Rande wieder erscheinen. Die Linien, welche diese Flecken auf der Oberfläche der Sonne zu beschreiben scheinen, sind im Junius und December nahe gerade Linien, die sich in den diesen folgenden Monaten immer mehr krümmen, bis sie in den Monaten März und September ihre größte Krümmung erreichen.

Diese Erscheinungen lassen sich daher durch die Voraussetzung darstellen, daß diese Flecken mit der Oberfläche der Sonne unveränderlich verbunden sind, und daß die Sonne selbst in nahe 28 Tagen sich um eine Axe drehe, die mit der Ebene der Ecliptik irgend einen Winkel bildet. Denkt man sich eine Ebene senkrecht auf diese Axe durch den Mittelpunkt der Sonne, welche Ebene wir den Sonnenäquator nennen wollen, so werden die Ebenen, in welchen sich die Flecken bewegen, mit diesem Sonnenäquator parallel seyn, und der letzte wird die Ecliptik in zwey Punkten schneiden, in welchen sich die Sonne im Junius und December befindet.

I. Die Differenzen $d\alpha$, $d\delta$ der geocentrischen Rectascension und Declination des Fleckens und des Mittelpunkts der Sonne findet man sehr leicht aus unmittelbaren Beobachtungen der Durchgänge beyder durch Fäden, die dem Aequator parallel und senkrecht sind. Wir werden weiter unten auf diese Beobachtungen zurückkommen.

Daraus findet man die Differenzen $d\lambda$, $d\beta$ der geocentrischen Längen und Breiten des Mittelpunkts der Sonne und des Fleckens durch folgende Ausdrücke (Cap. I.)

$$d\lambda = d\delta \sin \pi + d\alpha \cos \pi \cos D$$

$$d\beta = d\delta \cos \pi - d\alpha \sin \pi \cos D$$

wo D die Declination der Sonne und π der Winkel des Breitenkreises der Sonne mit dem Declinationskreise derselben ist, wo man also hat

$$\operatorname{Tg} \pi = \cos \odot \operatorname{Tg} \omega,$$

wenn $\odot$ und ω die Länge der Sonne, und die Schiefe der Ecliptik bezeichnet.

Hat man so die geocentrische Länge und Breite $\lambda\beta$ des Fleckens gefunden, so muß man daraus die aus dem Mittelpunkte der Sonne gesehene, oder die heliocentrische Länge und Breite $l\,b$ des Fleckens ableiten. Es sey r die Entfernung des Fleckens vom Mittelpunkte der Sonne, oder der Halbmesser der Sonne, und R die Entfernung der Erde vom Mittelpunkte der Sonne, so wie ζ die Entfernung der Erde von dem Flecken, endlich $L = 180^\circ + \odot$ die heliocentrische Länge der Erde.

Denkt man sich von dem Flecken F eine senkrechte Linie auf die Ebene der Ekliptik, welche diese Ebene in f treffen soll, so ist offenbar

$$Ff = r \sin b = \zeta \sin \beta$$

und da sehr nahe

$$\zeta = R$$

ist, so hat man

$$\sin b = \frac{R}{r} \sin \beta \dots (I)$$

und diese Gleichung gibt die helioc. Breite des Fleckens.

Verbindet man aber in der Ebene der Ecliptik den Punkt f mit dem Orte S der Sonne, und dem T der Erde, so erhält man ein ebenes Dreyeck, dessen Seiten

$$ST = R$$

$$Sf = r \cos b = r'$$

$$Tf = \varrho \cos \beta = \varrho'$$

sind, und worin man hat

$$\sin f = \frac{R}{r'} \sin T \quad \sin S = \frac{\varrho'}{r'} \sin T$$

Es ist aber $f = l - \lambda$

$$S = L' - l \text{ und}$$

$$T = 180 - (L - \lambda)$$

und daher, wenn man wieder $\varrho = R$ setzt,

$$\left. \begin{aligned} \sin(l - \lambda) &= \frac{R}{r \cos b} \sin(L - \lambda) \\ \sin(L - l) &= \frac{R \cos \beta}{r \cos b} \sin(L - \lambda) \end{aligned} \right\} \text{ II.}$$

aus welchen beyden Gleichungen man die heliocentrische Länge l des Flekens findet. Da in den Gleichungen I. und II. die Gröfser gegen R sehr klein ist, so sieht man, dafs ein geringer Fehler in den Gröfsen $\lambda \beta$ schon sehr beträchtliche in den Resultaten l b zur Folge haben kann.

Kürzer kann man diese Aufgabe auf folgende Weise auflösen. Ist $\lambda' \beta'$ und $l' b'$ die Differenz der durch die Beobachtungen bekannten geocentrischen, und der gesuchten heliocentrischen Längen und Breiten des Flekens und des Mittelpunkts der Sonne, so sey x die geocentrische Entfernung des Flekens vom Mittelpunkte der Sonne und y der Winkel, welchen x mit der durch den Mittelpunkt der Sonne gehenden Ebene der Ecliptik bildet. Dies vorausgesetzt hat man

$$\operatorname{Tg} y = \frac{\beta'}{\lambda'} \text{ und}$$

$$x = \frac{\lambda'}{\cos y} = \frac{\beta'}{\sin y}$$

Ist aber so x und y bekannt, so ist sofort

$$\sin b' = \sin x \sin y$$

$$\operatorname{Tg} l' = \operatorname{Tg} x \cos y$$

§. 17.

Es sey also in einer ersten Beobachtung l b die heliocentrische Länge und Breite des Fleckens. Eine zweyte und dritte Beobachtung desselben Fleckens gebe eben so l' b' und l'' b'' .

Um daraus die Lage des Sonnenäquators und die Zeit der Rotation der Sonne um ihre Axe zu finden, sey (Fig. 19.) B der Pol des Sonnenäquators, und C der der Ekliptik, A A' A'' die drey Orte des beobachteten Fleckens.

Man nenne die Winkel

$$BAC, BA'C, BA''C$$

nach der Ordnung

$$a \quad a' \quad a'',$$

so ist

$$- CAA' + CA'A$$

$$= - (CAA' - BAA') + (CA'A - BAA')$$

$$= a + a'$$

weil $BAA' = BA'A$ ist.

Man hat daher nach den Nepper'schen Analogien

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Tg} \frac{a' + a}{2} &= \frac{\sin \frac{b' - b}{2}}{\cos \frac{b' + b}{2}} \operatorname{Cotg} \frac{l' - l}{2} \\ \operatorname{Tg} \frac{a'' + a}{2} &= \frac{\sin \frac{b'' - b}{2}}{\cos \frac{b'' + b}{2}} \operatorname{Cotg} \frac{l'' - l}{2} \\ \operatorname{Tg} \frac{a'' + a'}{2} &= \frac{\sin \frac{b'' - b'}{2}}{\cos \frac{b'' + b'}{2}} \operatorname{Cotg} \frac{l'' - l'}{2} \end{aligned} \right\} I.$$

Es sey ferner

$$BCA = m, BCA' = m', BCA'' = m''$$

und λ die Länge des Pols des Sonnenäquators, so ist

$$l = \lambda + m,$$

$$l' = \lambda + m',$$

$$l'' = \lambda + m''.$$

Da man aber hat

$$BA = BA' = BA'',$$

so ist auch

$$\frac{\sin m}{\sin a} = \frac{\sin m'}{\sin a'} = \frac{\sin m''}{\sin a''}$$

woraus folgt

$$\frac{\sin m' + \sin m}{\sin m' - \sin m} = \frac{\sin a' + \sin a}{\sin a' - \sin a} \text{ oder}$$

$$\operatorname{Tg} \frac{m'+m}{2} \operatorname{Cotg} \frac{m'-m}{2} = \operatorname{Tg} \frac{a'+a}{2} \operatorname{Cotg} \frac{a'-a}{2}$$

Substituirt man in dieser Gleichung für

$$\operatorname{Tg} \frac{a' + a}{2}$$

seinen Werth aus der ersten der Gleichungen I., und bemerkt, daß

$$m' - m = l' - l$$

ist, so hat man

$$\operatorname{Tg} \frac{m'+m}{2} = \frac{\sin \frac{b'-b}{2}}{\cos \frac{b'+b}{2}} \operatorname{Cotg} \frac{a'-a}{2} \dots (II.)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} (l+l') - \frac{1}{2} (m+m')$$

nebst zwey andern ähnlichen Gleichungen für

$$\operatorname{Tg} \frac{m''+m}{2} \text{ und } \operatorname{Tg} \frac{m''+m'}{2}$$

Ist endlich in dem Dreyecke BAC die Seite $BC = \psi$, und $AB = \pi$, und

$$M = \frac{\pi + \psi}{2}, N = \frac{\pi - \psi}{2}$$

so ist wieder nach den Nepperschen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \text{Cotg } M &= \frac{\cos \frac{1-\lambda+a}{2}}{\cos \frac{1+\lambda-a}{2}} \text{Cotg } \frac{90-b}{2} \\ \text{Tg } N &= \frac{\sin \frac{1-\lambda-a}{2}}{\sin \frac{1-\lambda+a}{2}} \text{Tg } \frac{90-b}{2} \end{aligned} \right\} \text{ (III.)}$$

und daher

$$\pi = M + N$$

$$\psi = M - N$$

nebst noch zwey Paaren anderer ähnlicher Gleichungen, die aus analogen Behandlungen der Dreyecke $BA'C$ und $BA''C$ folgen.

Das ganze Verfahren reduzirt sich demnach auf Folgendes:

Sucht man

$$a \ a' \ a''$$

aus I., so erhält man

$$\frac{m' + m}{2}$$

und daher die Länge des Pols

$$\lambda \text{ aus II.}$$

und die Neigung

$$90 - \psi$$

des Sonnenäquators gegen die Ecliptik, so wie die Declination

$$90 - S$$

des Fleckens aus III.

Um noch die Rotationszeit zu bestimmen, hat man nach einer der vier Gauß'schen Gleichungen (Cap. I.)

$$\sin \frac{AA'}{2} = \frac{\cos \frac{1-l''}{2} \sin \frac{b-b''}{2}}{\sin \frac{a+a''}{2}}$$

und

$$S \frac{ABA''}{2} = \frac{\sin \frac{AA'}{2}}{\sin \pi}$$

Ist also

$$\beta = ABA''$$

die Differenz der Rectascension in der ersten und letzten Beobachtung, so ist

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{\sin \frac{b-b''}{2} \cos \frac{l-l''}{2}}{\sin \frac{a+a''}{2} \sin \pi}$$

und ist t die zu ϑ gehörige Zeit, oder die Zeit zwischen der ersten und letzten Beobachtung, so ist die Zeit der ganzen Revolution der Sonne um ihre Axe

$$T = 360. \frac{t}{\vartheta}$$

Man wird von selbst bemerken, daß diese Aufgabe dieselbe mit der ist, wo man aus den Zeiten, in welchen drey gegebene Sterne dieselbe übrigens unbekannte Höhe erreichen, die Polhöhe den Stand der Uhr, und den Collimationsfehler des Instruments sucht, eine Aufgabe, welche wir Cap. 8. §. 13 auf eine zweyfache Art aufgelöst haben.

Dieselbe Aufgabe läßt sich noch auf folgende Art entwickeln. Man suche für die erste heliocentrische Länge und Breite die drey rechtwinklichten Coordinaten

$$x = r \cos l \cos b,$$

$$y = r \sin l \cos b,$$

$$z = r \sin b$$

wo r der Halbmesser der Sonne ist; für die zweyte und dritte Beobachtung bezeichne man diese Größen mit einem und zwey Strichen. Dies vorausgesetzt, ist die Gleichung des Parallelkreises des Fleckens

$$z = A x + B y + D$$

$$z' = A x' + B y' + D$$

$$z'' = A x'' + B y'' + D$$

Sucht man aus diesen Gleichungen die Größen $A B D$, so ist

$$\operatorname{Tg} n = \sqrt{A^2 + B^2},$$

$$\operatorname{Tg} k = - \frac{A}{B} \quad \text{und}$$

$$\sin d = \frac{D}{r} \cos n$$

wo n die Neigung des Sonnenäquators gegen die Ecliptik, k die Länge des aufsteigenden Knotens des Sonnenäquators und

d die heliocentrische Declination des Fleckens ist. Ist endlich C die Chorde zwischen der ersten und dritten Beobachtung, oder

$$C = \sqrt{(x''-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

so ist, da

$$r \cos d$$

der Radius des Parallelkreises ist, wenn α den Winkel bezeichnet, den der Flecken in Beziehung auf den Mittelpunkt der Sonne zwischen den zwey äußersten Beobachtungen beschrieben hat,

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{C}{2 r \cos d}$$

Ist also t die beobachtete Zwischenzeit und T die der ganzen Rotation der Sonne, so ist

$$T = 360. \frac{t}{\alpha}$$

Ex. 1775 wurde aus Beobachtungen eines Sonnenfleckens gefunden

14 Junius	l = 7 ^s	8° 33'	b = —	0° 38'
18	l' = 9	5 56	b' = —	7 31
21	l'' = 10	18 58	b'' = —	11 35

Die Gleichungen I. geben

$$\frac{a' + a}{2} = - 6^{\circ} 15' 31'' 57$$

$$\frac{a'' + a}{2} = - 4 \ 34 \ 10. \ 55$$

$$\frac{a'' + a'}{2} = - 5 \ 12 \ 52. \ 04$$

also $a = - 5^{\circ} 37' 50'' 08$

$$a' = - 6 \ 55 \ 13. \ 06$$

$$a'' = - 3 \ 30 \ 31. \ 02$$

Daraus folgt

$$\frac{m' + m}{2} = 79^{\circ} 24' 25'' 96$$

$$\lambda = 167^{\circ} 50' 4'' 04 \text{ Länge des Pols des Sonnenäquators}$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ \hline 257^{\circ} 50' 4'' 04 \end{array} \text{ Länge des aufsteigenden Knotens} \\ \text{des Sonnenäquators in der Ecliptik.}$$

$$M = 43^{\circ} 58' 52'' 73$$

$$N = 51 \quad 14 \quad 0 \quad 37$$

$$\pi = 95 \quad 12 \quad 53. \quad 10$$

$$\psi = 7 \quad 15 \quad 7. \quad 64$$

also die südliche Declination des Fleckens

$$5^{\circ} 12' 53'' 10$$

und die Neigung des Sonnenäquators gegen die Ecliptik

$$7^{\circ} 15' 7'' 64$$

Man sehe hierüber *Mémoires de l'Acad. des sav. étrangers*, Tom. X. p. 467.

§. 18.

Da, wie bereits bemerkt wurde, geringe Fehler der Beobachtung der Sonnenflecken sehr groſse in den daraus abgeleiteten Resultaten, der Lage des Sonnenäquators und der Rotationszeit, zur Folge haben, so muſs man, die letzten Gröſsen mit mehr Sicherheit zu erhalten, eine gröſsere Anzahl von Beobachtungen jenen Bestimmungen zu Grunde legen. Drey vollständige Beobachtungen lösen zwar die Aufgaben vollkommen theoretisch auf, allein diese Auflösung wird in der Anwendung keine groſse Verläſslichkeit gewähren, wenn nicht andere Beobachtungen zu Hilfe genommen, und dadurch die wahrscheinlichen Beobachtungsfehler so viel möglich vermindert werden. So bald man aber mehr Beobachtungen zu Grunde legt, als unumgänglich nöthig sind, so erhält man mehr Gleichungen, als unbekannte Gröſsen, und die Aufgabe wird ein mehr als bestimmtes Problem. Da solche Probleme in der ausübenden Astronomie bey vielen anderen Untersuchungen öfters vorkommen, so wollen wir hier das vorzüglichste über ihre Auflösung zusammen stellen.

Um zuerst zu zeigen, auf welche Weise man in unserm besondern Fall die Beobachtungen zu behandeln habe, um zu bequemen Ausdrücken für die gesuchte Lage des Sonnenäquators zu gelangen, so kann man die Lage des Sonnenfleckens gegen den Mittelpunkt der Sonne durch drey rechtwinklichte Coordinaten x y z bestimmen. Die Ebene, in welcher der Flecken sich bewegt, wird dann die Gleichung haben

$$z = Ax + By + D$$

wo A B D die zu bestimmenden Gröſsen sind. Man sieht schon aus dieser Gleichung, daſs drey Beobachtungen eines Fleckens hinreichen, die Lage jener Ebene vollständig zu bestimmen.

Eine zweyte Beobachtung desselben Fleckens gibt eben so

$$z' = A x' + B y' + D$$

und beyder Gleichungen Differenz ist

$$z - z' = A (x - x') + B (y - y')$$

Wenn die schon aus andern Beobachtungen beynahe gefundenen Werthe von A und B vollkommen richtig wären, so müßte auch der letzten Gleichung durch jede zwey andern Beobachtungen Genüge geschehen, wenn man in ihr jene Werthe von A und B substituirt. Sind aber diese Gröfsen selbst unrichtig, oder noch nicht genau bekannt, so seyen die wahren Werthe derselben

$$A + dA \text{ und } B + dB,$$

und man hat

$$z - z' = (A + dA) (x - x') + (B + dB) (y - y')$$

oder wenn man der Kürze wegen die bekannte Gröfse

$$z - z' - A (x - x') - B (y - y') = C$$

setzt, folgende Gleichung

$$C = (x - x') dA + (y - y') dB \text{ --- (I)}$$

und die Gleichung (I) ist eine der gesuchten Bedingungsgleichungen. Jedes Paar von Beobachtungen wird eine ähnliche Bedingungsgleichung geben, und es wird dann noch darauf ankommen, aus allen diesen Gleichungen die wahrscheinlichsten Werthe der Gröfsen

$$dA \text{ und } dB$$

zu finden. Hat man diese gefunden, und setzt dann

$$A' = A + dA, B' = B + dB$$

so ist die Tangente der Länge des Knotens des Sonnenäquators auf der Ecliptik gleich

$$-\frac{A'}{B'}$$

und die Tangente der Neigung des Sonnenäquators gegen die Ebene der Ecliptik gleich

$$\sqrt{A'^2 + B'^2}$$

§. 19.

Das gewöhnliche Verfahren, welches die Astronomen früher angewendet haben, solche Gleichungen aufzulösen, deren Anzahl

die Zahl der in ihnen enthaltenen unbekannten Gröſſen übertrifft, bestand darin, daſs man, um jede dieser unbekannten Gröſſen am vortheilhaftesten zu bestimmen, alle gegebenen Gleichungen so unter einander combinirte, daſs der Factor dieser zu bestimmenden Gröſſe so groſs als möglich, und im Gegentheile die Factoren aller übrigen so klein als möglich wurden. Dann haben nämlich kleine Fehler, die etwa in der Bestimmung der andern unbekannten Gröſſen noch übrig sind, auf die Bestimmung dieser ersten nur einen sehr verminderten Einfluss, weil erstens die andern unbekannten Gröſſen, wenn dies angeht, nur in sehr kleine Factoren multiplicirt sind, und zweytens, weil ihr gemeinschaftlicher Divisor, der Factor der ersten unbekannten Gröſſe, so groſs als möglich ist. Um aber diese Combinationen zu erhalten, verändert man die sämtlichen Zeichen aller Gleichungen so, daſs der Factor der ersten unbekannten Gröſſe in allen Gleichungen dasselbe Zeichen habe, während die andern alle in ihren Zeichen abwechseln. Die Summe aller dieser so veränderten Gleichungen gibt die gesuchte Combination. Eben so wird man für die zweyte, dritte ... unbekannte Gröſſe verfahren, und dadurch so viel Gleichungen als unbekannte Gröſſen erhalten, in deren jeder eine dieser Gröſſen vorzüglich begünstigt wurde, und daher die Werthe der Gröſſen selbst aus diesen Gleichungen durch Elimination bestimmen.

Es seyen z. B. die Gleichungen gegeben

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 3 - x + y - 2z \\ 0 &= 5 - 3x - 2y + 5z \\ 0 &= 21 - 4x - y - 4z \\ 0 &= 14 + x - 3y - 3z \end{aligned} \right\}$$

Um die Gleichung für x zu erhalten, setzt man statt der letzten Gleichung

$$0 = -14 - x + 3y + 3z$$

so gibt die Summe aller vier Gleichungen

$$0 = 15 - 9x + y + 2z$$

Eben so erhält man für y

$$0 = 37 - 5x - 7y$$

und endlich für z

$$0 = 33 - x - y - 14z$$

und eliminirt man aus den drey letzten Gleichungen die Werthe von x y z , so erhält man nahe

$$x = 2,486$$

$$y = 3,517$$

$$z = 1,928$$

und diese Werthe nimmt man als die wahrscheinlichsten Werthe von $x y z$ an. Diese Werthe geben aber folgende Fehler unserer vorhergehenden Gleichungen

Für die erste 0, 175 statt 0

zweyte 0, 148

dritte — 0, 173

vierte 0, 151.

§. 20.

Die vorhergehende Methode hat aber offenbar etwas zu Willkührliches, und man hat keinen hinreichenden Grund zu behaupten, daß die so erhaltenen Werthe der unbekannten Gröfsen unter allen die wahrscheinlichsten oder diejenigen seyn werden, welche den gegebenen Gleichungen am besten entsprechen. Die Geometer haben daher eine andere weniger unbestimmte Auflösung dieser schweren Aufgabe gesucht, von welcher ich hier kurz das Nothwendigste vortragen werde.

Man habe eine Anzahl Gleichungen der Form

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= m + a x + b y + c z + \\ \Delta' &= m' + a' x + b' y + c' z + \\ \Delta'' &= m'' + a'' x + b'' y + c'' z + \text{u. s. w.} \end{aligned} \right\} (A)$$

in welcher die Zahl der unbekannten Gröfsen

$$x y z \dots$$

kleiner ist, als die Zahl dieser Gleichungen. Man bestimme die wahrscheinlichsten Werthe dieser unbekannten Gröfsen.

So ist z. B. die Länge des Sekundenpendels für die geographische Breite φ bekanntlich gleich

$$440,39 - 1,25 \cos 2 \varphi$$

Pariser Linien. Da aber diese zwey Zahlen noch etwas unrichtig seyn können, so wollen wir annehmen

$$440,39 = x$$

$$1,25 = y$$

und

$$\cos 2 \varphi = b$$

so ist für jede Breite die aus dieser Gleichung berechnete Pendellänge m' gleich

$$m' = x - b y$$

Ist aber die an demselben Orte beobachtete Pendellänge m , so sollte wenn x und y richtig sind, $m - m' = 0$ seyn, d. h. es sollte seyn

$$0 = m - x + b y$$

Sind aber die vorausgesetzten Werthe von x , y oder ist die Beobachtung selbst fehlerhaft, so wird auch die letzte Gleichung nicht genau statt haben, sondern man wird statt ihr eine andere der Form erhalten

$$\Delta = m - x + b y$$

und jede andere Beobachtung an einem anderen Orte wird eine der letzten ähnliche Gleichung

$$\Delta' = m' - x + b' y$$

geben, aus welchen Gleichungen allen dann die wahrscheinlichsten Werthe von x und y zu finden sind

Gesetzt also, man habe für den Ausdruck der ersten unserer Gleichungen

$$m + a x + b y + c z + \dots$$

durch Rechnung den Werth V gefunden, durch Beobachtung aber den Werth M , so ist

$$\Delta = V - M$$

der Fehler dieser Gleichung. Eben so erhält man für die zweyte

$$\Delta' = V' - M',$$

für die dritte

$$\Delta'' = V'' - M'' \text{ u. s.}$$

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler der ersten Beobachtung in der That Δ sey, durch $\phi \Delta$ bezeichnen, da diese Wahrscheinlichkeit offenbar irgend eine Funktion von Δ seyn muß. Eben so sey

$$\phi \Delta', \phi \Delta'' \dots$$

die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler der zweyten, dritten.. Beobachtung Δ' , $\Delta'' \dots$ ist.

Die Wahrscheinlichkeit also, daß aus der ersten Beobachtung für V der Werth M folge, ist

$$\phi (M - V) = \phi \Delta$$

die Wahrscheinlichkeit, daß aus der zweyten Beobachtung für V' der Werth M' folge, ist

$$\varphi (M' - V') = \varphi \Delta' \text{ u. f.}$$

so, daß die Wahrscheinlichkeit, daß aus beyden Beobachtungen die Fehler Δ , Δ' folgen, gleich

$$(\varphi \Delta \varphi \Delta')$$

seyn wird u. s. w. Allgemein also ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Fehler aller Beobachtungen nach der Reihe Δ , Δ' , $\Delta'' \dots$ sind, gleich

$$W = \varphi \Delta \cdot \varphi \Delta' \cdot \varphi \Delta'' \dots$$

wo $V = \Delta + M$ also auch Δ , Δ' , $\Delta'' \dots$ Funktionen von $x y z \dots$ sind.

Die Funktion $\varphi \Delta$ läßt sich zwar jetzt noch nicht bestimmen, doch ist leicht zu übersehen, daß sie der Art seyn muß, daß sie ein Kleinstes und zwar Null wird, wenn Δ ein Größtes ist; daß sie im Gegentheil ein Größtes wird, wenn Δ ein Kleinstes oder gleich Null ist, und daß endlich diese Funktion für gleiche entgegengesetzte Werthe von Δ auch im allgemeinen gleiche Werthe erhält. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler der ersten Beobachtung zwischen den unendlich nahen Gränzen Δ und $d \Delta$ liegt, wird also gleich

$$\varphi \Delta \cdot d \Delta$$

seyn, daher wird auch die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Gränzen D und D' liege, gleich

$$\int \varphi \Delta \cdot d \Delta$$

seyn, das Integral von $\Delta = D$ bis $\Delta = D'$ genommen. Dies Integral aber, von dem größten negativen Werth von Δ bis zu dem größten positiven Werth von Δ' , oder allgemein von $\Delta = -\infty$ bis $\Delta = +\infty$ genommen, wird gleich der Einheit seyn.

Die annehmbarsten Werthe von $x y z \dots$ oder die Werthe dieser Größen, welche die Fehler $\Delta \Delta' \Delta'' \dots$ in der That hervorbringen, werden offenbar diejenigen seyn, für welche die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Fehler statt habe, ein Größtes, d. h. für welche die Gröfse W selbst ein Maximum ist. Da nun W eine Funktion von $x y z \dots$ ist, so werden die wahrscheinlichsten Werthe von $x y z \dots$ in den Gleichungen

$$\left(\frac{dW}{dx} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{dW}{dy} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{dW}{dz} \right) = 0 \dots$$

enthalten seyn. Um aber diese Gleichungen zu entwickeln, muß man zuerst die Function $\varphi \Delta$ kennen. Es sey

$$\frac{d. \varphi \Delta}{\varphi \Delta} = \varphi' \Delta. d \Delta$$

Man suche $\varphi' \Delta$.

Ist im Allgemeinen eine Gröfse aus mehreren gleich guten Beobachtungen zu bestimmen, so wird das sogenannte arithmetische Mittel aus der Summe der Resultate jeder einzelnen Beobachtung den wahrscheinlichsten Werth für diese Gröfse geben. Aus der Annahme dieses allgemein bekannten Grundsatzes folgt, dafs man, wenn μ die Anzahl der Beobachtungen, und

$$\psi = \frac{1}{\mu} (M + M' + M'' + \dots)$$

ist, haben wird

$$0 = \varphi' (M - \psi) + \varphi' (M' - \psi) + \varphi' (M'' - \psi) + \dots$$

Ist ferner

$$M' = M'' = M''' \dots = M - \mu N,$$

so ist

$$\psi = M - (\mu - 1) N,$$

wodurch die vorhergehende Gleichung wird

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi' (M - M + (\mu - 1) N) \\ &+ \varphi' (M - \mu N - M + (\mu - 1) N) \\ &+ \varphi' (M - \mu N - M + (\mu - 1) N) \\ &+ \varphi' (M - \mu N - M + (\mu - 1) N) + \dots \end{aligned}$$

oder

$$0 = \varphi' (\mu - 1) N + \varphi' (-N) + \varphi' (-N) + \varphi' (-N) + \dots$$

das heifst

$$0 = \varphi' (\mu - 1) N + (\mu - 1) \varphi' (-N)$$

Es ist daher, wie aus der letzten Gleichung folgt, die Gröfse φ' so beschaffen, dafs man hat

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi' (\Delta) + \varphi' (-\Delta) \\ 0 &= \varphi' (2\Delta) + 2 \varphi' (-\Delta) \\ 0 &= \varphi' (3\Delta) + 3 \varphi' (-\Delta) \text{ u. f.} \end{aligned}$$

und daraus folgt, dafs $\varphi' (\Delta)$ gleich dem Produkte einer beständigen Gröfse x in die Gröfse Δ selbst, oder dafs

$$\varphi'(\Delta) = k \cdot \Delta$$

seyn muß.

Es war aber

$$\varphi' \Delta = \frac{d. \varphi \Delta}{\varphi \Delta \cdot d \Delta}$$

also ist auch

$$\frac{d. \varphi \Delta}{\varphi \Delta} = k \Delta \cdot d \Delta \text{ oder}$$

$$\log \varphi \Delta = \frac{1}{2} k \cdot \Delta^2 + \log x$$

wo x die Constante der Integration bezeichnet.

Ist also $\log \text{nat } e = 1$, so ist

$$\varphi \Delta = x \cdot e^{\frac{1}{2} k \Delta^2}$$

und daher auch wenn $\frac{1}{2} k = -h^2$ ist

$$\int \varphi \Delta \cdot d \Delta = x \int e^{-h^2 \Delta^2} d \Delta$$

Um x zu bestimmen, so ist nach dem Vorhergehenden $\int \varphi \Delta d \Delta$ von $\Delta = -\infty$ bis $\Delta = +\infty$ genommen, gleich der Einheit; das Integral

$$\int e^{-h^2 \Delta^2} d \Delta$$

aber, ebenfalls von $\Delta = -\infty$ bis $\Delta = +\infty$ genommen, ist bekanntlich gleich

$$\frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

wo π die halbe Peripherie bezeichnet, deren Halbmesser die Einheit ist. Daraus folgt

$$x = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

also ist auch die vorhergehende Gleichung

$$\varphi \Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \Delta^2}$$

Der oben gegebene Ausdruck für W wird daher in folgenden übergehen

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 (\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \dots)}$$

d. h. die wahrscheinlichsten Werthe der Größen $x, y, z, \dots$ sind die, für welche die Summe der Quadrate der Differenzen der

I.

R

berechneten und der beobachteten Werthe der Functionen $V \ V' \ V'' \dots$ ein Kleinstes ist.

Setzt man daher nach dem Vorhergehenden das Differential dieses Werthes von W in Beziehung auf x gleich Null, so hat man

$$\left(\frac{dW}{dx}\right) = 0, \text{ oder}$$

$$\Delta \left(\frac{d\Delta}{dx}\right) + \Delta' \left(\frac{d\Delta'}{dx}\right) + \Delta'' \left(\frac{d\Delta''}{dx}\right) + \dots = 0$$

und da

$$\left(\frac{d\Delta}{dx}\right) = a,$$

$$\left(\frac{d\Delta'}{dx}\right) = a',$$

$$\left(\frac{d\Delta''}{dx}\right) = a'' \text{ ist,}$$

so ist diese Gleichung

$$\Delta a + \Delta' a' + \Delta'' a'' + \dots = 0 \dots (1.)$$

Eben so gibt

$$\left(\frac{dW}{dy}\right) = 0$$

die Gleichung

$$\Delta b + \Delta' b' + \Delta'' b'' + \dots = 0 \dots (2.)$$

und

$$\left(\frac{dW}{dz}\right) = 0$$

gibt

$$\Delta c + \Delta' c' + \Delta'' c'' + \dots = 0 \text{ u. s. w. } \dots (3.)$$

und da dieser Gleichungen 1, 2, 3 --- so viele, als der unbekannten Gröfsen $x \ y \ z \dots$ sind, so wird man die letzten aus ihnen auf dem gewöhnlichen Weg der Elimination bestimmen, und die so erhaltenen Werthe von $x \ y \ z \dots$ werden die wahrscheinlichsten Werthe dieser Gröfsen seyn, weil sie die Summe der Quadrate der Fehler $\Delta \ \Delta' \ \Delta'' \dots$ ein Kleinstes geben.

Setzt man der Kürze wegen

$$\int a m = a m + a' m' + a'' m'' + \dots$$

$$\int a a = a a + a' a' + a'' a'' + \dots$$

$$\int a b = a b + a' b' + a'' b'' + \dots \text{ u. f.}$$

so kann man den Gleichungen 1, 2, 3 --- auch folgende Gestalt geben

$$\left. \begin{aligned} 0 &= f a m + x f a a' + y f a b + z f a c + \\ 0 &= f b m + x f b a + y f b b + z f b c + \\ 0 &= f c m + x f c a + y f c b + x f c c + \end{aligned} \right\} (B)$$

und aus ihnen wird man die gesuchten wahrscheinlichsten Werthe von $x y z$ --- durch Elimination finden.

Für unser Beyspiel ist

$$m = 3, a = -1, b = 1, c = -2 \text{ u. f.}$$

$$\text{also } f a m = -88;$$

$$f a a' = 27,$$

$$f a b = 6,$$

$$f a c = 0 \text{ u. f.}$$

also die Gleichungen (B)

$$0 = -88 + 27x + 6y$$

$$0 = -70 + 6x + 15y + z$$

$$0 = -107 + y + 54z$$

und aus diesen Gleichungen folgt

$$x = 2, 479$$

$$y = 3, 551$$

$$z = 1, 916$$

§. 21.

Das Vorhergehende enthält die Grundlage der Méthode der kleinsten Quadrate, von Gauß, über deren weitere Ausführung man nachsehen wird, desselben Theor. mot. Corp. Coel. p. 205. Mon. Corresp. Vol. XXIV. Zeitschrift für Astronomie I. Vol. p. 185, und Laplace Theorie anal. des probabilités. Einige besonders für die Ausübung wichtige Folgerungen aus dem Vorhergehenden werde ich hier kürzlich ohne Beweise zusammenstellen, die man in den angeführten Werken nachsehen wird.

I. Die gegebene Methode ist eigentlich unmittelbar bloß auf solche Gleichungen anwendbar, in welcher nur die ersten Potenzen von $x y z$ --- enthalten sind. Man wird aber das Vorgetragene leicht auch auf solche Gleichungen ausdehnen, in welchen $x y z$ ---

höhere Exponenten haben. Sind nämlich XYZ .. die schon genäherten Werthe von xyz -- die man z. B. durch die Methode des §. 19 gefunden hat, so wird man statt den unbekannten Gröfsen $x y z \dots$ in den gegebenen Gleichungen (A) die Werthe

$$x = X + \xi$$

$$y = Y + \nu,$$

$$z = Z + \zeta$$

substituiren, und da die Gröfsen XYZ schon bekannt, die unbekannten Gröfsen $\xi \nu \zeta$ aber sehr klein sind, so wird man die Quadrate und höheren Potenzen der letzten vernachlässigen können, und dadurch die gesuchten lineären Gleichungen zwischen $\xi \nu \zeta$.. erhalten, auf welche sich die vorhergehende Methode unmittelbar anwenden läßt.

II. Diese Methode setzt ferner, wie man aus dem §. 20 sieht, voraus, daß die Güte der Beobachtungen, die Wahrscheinlichkeit ihrer Richtigkeit, bey allen gleich groß ist. Sind aber die Beobachtungen selbst unter einander von ungleichem Werthe, und ist z. B. der respective Werth derselben nach der Ordnung h, h', h'' , so ist das eben so viel, als hätte man durch Beobachtungen, die alle denselben Werth unter einander haben, die Fehler

$$h \Delta, h' \Delta', h'' \Delta'' \dots$$

gefunden, also wird man die Werthe der unbekannten Gröfsen aus der Voraussetzung bestimmen, daß

$$h^2 \Delta^2 + h'^2 \Delta'^2 + h''^2 \Delta''^2 +$$

ein Kleinstes ist. Ist z. B. in unserem Beyspiele der Werth der zweyten Beobachtung doppelt so groß, als der der ersten, so wird man statt

$$0 = 5 - 3x - 2y + 5z$$

annehmen

$$0 = 10 - 6x - 4y + 10z$$

und so mit den übrigen, aus welchen Gleichungen man dann wie zuvor, die Gleichungen B sucht.

III. Ueberhaupt kann die Gröfse h des §. 20 als das Maafs der Genauigkeit jeder einzelnen Beobachtung angesehen werden. Ist nämlich die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Δ in irgend einer Reihe von Beobachtungen, wie vorhin,

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}$$

so wird diese Wahrscheinlichkeit in einer anderen Beobachtungsreihe

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2 \Delta^2}$$

seyn, und die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler für irgend eine der ersten Beobachtungen zwischen $-\delta$ und $+\delta$ liege, wird

$$\int \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta$$

so wie die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler irgend einer Beobachtung der zweyten Reihe zwischen $-\delta'$ und $+\delta'$ falle,

$$\int \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2 \Delta'^2} d\Delta'$$

seyn wird, das erste Integral von $\Delta = -\delta$ bis $+\delta$, und das zweyte von $\Delta' = -\delta'$ bis $+\delta'$ genommen. Beyde Integralien sind aber offenbar gleich, wenn

$$h \delta = h' \delta'$$

ist. Ist also z. B.

$$h' = 2 h,$$

so kann in der zweyten Reihe eben so leicht ein doppelter, als in der ersten ein einfacher Fehler begangen werden, oder wie man dies gewöhnlich ausdrückt, die Beobachtungen der ersten Reihe haben den doppelten Werth, das doppelte Gewicht, von den Beobachtungen der zweyten Reihe.

IV. Die auf diese Art erhaltenen Werthe der unbekannten Größen $x y z \dots$ werden selbst unter einander einen verschiedenen Grad ihrer Güte, ihrer verhältnißmäßigen Wahrscheinlichkeit haben, oder, nicht jede dieser Größen wird mit gleicher Sicherheit bestimmt seyn. Da es oft interessant seyn kann, den Grad der Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen dieser Bestimmungen zu kennen, so wird man aus dem Vorhergehenden, in Verbindung mit der Theorie der Eliminationen, sich leicht von dem Folgenden überzeugen.

Sucht man aus den Gleichungen (A) wie zuvor die Größen

$$\left. \begin{aligned} X &= f a \Delta = a \Delta + a' \Delta' + a'' \Delta'' + \\ Y &= f b \Delta = b \Delta + b' \Delta' + b'' \Delta'' + \\ Z &= f c \Delta = c \Delta + c' \Delta' + c'' \Delta'' + \end{aligned} \right\} I,$$

so ist jede der Gleichungen I. eine Function von $x y z \dots$ und da dieser Gleichungen so viele sind, als der unbekannten Größen $x y z \dots$ so kann man aus ihnen durch Elimination die Werthe von $x y z \dots$ in $X Y Z$ suchen, wodurch man andere Gleichungen der Form erhält:

$$\left. \begin{aligned} x &= L + A X + B Y + C Z + \\ y &= L' + A' X + B' Y + C' Z + \\ z &= L'' + A'' X + B'' Y + C'' Z + \end{aligned} \right\} \text{II.}$$

Hat man die Gleichungen II. entwickelt, so sind, wie zuvor, die wahrscheinlichsten Werthe von $x y z$ ---

$$x = L$$

$$y = L'$$

$$z = L'' \text{ u. f.}$$

und der Grad der resp. Wahrscheinlichkeit dieser letzten Werthe von $x y z$ --- die der Beobachtungen gleich der Einheit vorausgesetzt, ist

$$\text{für } x = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{B'}}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{C''}}$$

In unserm Beispiele hat man

$$a = 1, a' = 3, a'' = 4,$$

$$a''' = -1, b = -1, b' = 2 \text{ u. s. w. also}$$

$$a \Delta = -3 + x - y + 2z$$

$$a' \Delta' = -15 + 9x + 6y - 15z$$

$$a'' \Delta'' = -84 + 16x + 4y + 16z$$

$$a''' \Delta''' = 14 + x - 3y - 3z$$

$$\left. \begin{aligned} \text{woraus folgt } X &= -88 + 27x + 6y \\ Y &= -70 + 6x + 15y + z \\ Z &= -107 + y + 54z \end{aligned} \right\} \text{I.}$$

Aus diesen drey Gleichungen findet man durch Elimination

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{49154 + 809 X - 324 Y + 6 Z}{19899} \\ y &= \frac{2617 - 12 X + 54 Y - Z}{737} \\ z &= \frac{12707 + 2 X - 9 Y + 123 Z}{6633} \end{aligned} \right\} \text{II.}$$

Daher sind die wahrscheinlichsten Werthe von $x y z$ --- wie vorhin

$$x = \frac{49154}{19899} = 2.470$$

$$y = \frac{2617}{737} = 3.551$$

$$z = \frac{12707}{6633} = 1.916$$

und der Grad der Wahrscheinlichkeit dieser Bestimmungen die der einzelnen Beobachtungen gleich 1 gesetzt,

$$\text{für } x \text{ --- } \sqrt{\frac{19899}{809}} = 4.96 = \xi$$

$$y \text{ --- } \sqrt{\frac{737}{54}} = 3.69 = \nu$$

$$z \text{ --- } \sqrt{\frac{6633}{123}} = 7.34 = \zeta$$

oder z ist von allen am schärfsten, und y am wenigsten genau bestimmt, so daß y nur halb so sicher, als z ist.

V. Es sey

$$\psi \Delta = \int \frac{e^{-\Delta^2}}{\sqrt{\pi}} d\Delta$$

das Integral von $\Delta = 0$ angerechnet. Wenn Δ gegen die Einheit nicht groß ist, so hat man die einfache Reihe

$$\psi \Delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\Delta - \frac{1}{3} \Delta^3 + \frac{1}{9} \cdot \frac{\Delta^5}{1 \cdot 2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{\Delta^7}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \right)$$

Aus diesem Ausdrucke findet man leicht, daß

$$\psi \Delta = \frac{2}{3}$$

ist, wenn

$$\Delta = 0.476936$$

ist. Eben so findet man

$$\psi \Delta' = 0.8427 \text{ für } \Delta' = 1 = 2.0967 \Delta$$

$$\psi \Delta'' = 0.9900 \text{ für } \Delta'' = 1.82139 = 3.81893 \Delta'' \text{ u. f.}$$

so daß $\psi \Delta$ mit Δ wächst.

Wir haben aber oben gesehen, daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler einer Beobachtung zwischen den Grenzen D und D' liege, durch

$$\int \varphi \Delta. d\Delta = \int \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta$$

ausgedrückt werde, das Integral von $\Delta = D$ bis $\Delta = D'$ genommen, also doppelt so groß, als dieses Integral, wenn es von $\Delta = 0$ bis $\Delta = D'$ genommen wird, d. h. also, die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler einer Beobachtung zwischen 0 und Δ liege, ist gleich

$$\psi. h. \Delta$$

So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler nicht unter

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{0.476936}{h}$$

ist, gleich $\frac{1}{2}$ oder diese Wahrscheinlichkeit ist zugleich der Wahrscheinlichkeit des Gegentheiles gleich. Wir wollen daher diese GröÙe

$$A = \frac{\Delta}{h}, \text{ oder } A = \frac{0.476936}{h}$$

den wahrscheinlichen Fehler nennen.

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler über 2. 0967 Δ herausgehe, nur 0. 1573 und daß er über 3. 81893 herausgehe, nur $\frac{1}{100}$ u. s. w.

Wir wollen nun annehmen, daß bey N wirklich angestellten Beobachtungen die Fehler der einzelnen Beobachtungen nach der Reihe $\alpha \beta \gamma \dots$ begangen wurden, und untersuchen, was sich daraus in Beziehung auf den Werth von h und A schließen lasse. Man findet leicht, daß die Wahrscheinlichkeit jedes Werthes von h der GröÙe

$$z = h^N e^{-h^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots)}$$

proportional ist, daß also auch der wahrscheinlichste Werth von h der ist, für welchen diese GröÙe z ein Größtes ist. Differentiirt man diesen Ausdruck in Beziehung auf h und z und setzt dann $dz = 0$, so ist

$$N h^{N-1} - 2 h^{N+1} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots) = 0, \text{ oder}$$

$$h = \sqrt{\frac{N}{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots)}}$$

also ist der wahrscheinlichste Werth von A oder der wahrscheinlichste Fehler

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Delta}{h} = \frac{\Delta \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots)}}{\sqrt{N}} \\ &= 0.6744897 \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots}{N}} \end{aligned}$$

Daraus folgt ferner, daß die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Werth von h zwischen $H - \lambda$ und $H + \lambda$ liege, gleich

$$\downarrow \left(\frac{\lambda}{H} \sqrt{N} \right)$$

sey, daß also diese Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{2}$ werde, wenn

$$\frac{\lambda}{H} \sqrt{N} = \Delta = 0.476936$$

ist, oder wenn

$$\lambda = \frac{H \Delta}{\sqrt{N}} \text{ ist.}$$

Es ist also 1 gegen 1 zu wetten, daß der wahre Werth von h zwischen

$$H \left(1 - \frac{\Delta}{\sqrt{N}} \right) \text{ und } H \left(1 + \frac{\Delta}{\sqrt{N}} \right)$$

falle, also auch, daß der wahre Werth von A zwischen

$$\frac{\Delta}{H \left(1 - \frac{\Delta}{\sqrt{N}} \right)} \text{ und } \frac{\Delta}{H \left(1 + \frac{\Delta}{\sqrt{N}} \right)}$$

oder endlich annähernd zwischen

$$A \left(1 + \frac{\Delta}{\sqrt{N}} \right) \text{ und } A \left(1 - \frac{\Delta}{\sqrt{N}} \right)$$

falle.

Setzt man daher der Kürze wegen

$$B = \frac{A \Delta}{N}$$

und

$$S = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 +$$

gleich der Summe der Quadrate der Fehler der einzelnen Beobachtungen, so ist der wahrscheinlichste Werth des Fehlers einer einzelnen Beobachtung

$$A = 0.67449 \sqrt{\frac{S}{N}} \dots I.$$

und die wahrscheinliche Gränze dieses Beobachtungsfehlers

$$A \pm B = A \left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}} \right) \dots (II.)$$

$$\text{wo } B = 0.47694 \frac{A}{\sqrt{N}}$$

die wahrscheinlichste Unsicherheit von A bezeichnet.

Umständlicher findet man dies ausgeführt im I. Band der Zeitschrift für Astronomie. Es versteht sich von selbst, daß die Anwendung dieser Methode desto sicherer ist, je größer die Anzahl der Beobachtungen, und je größer ihre absolute Genauigkeit ist, und daß andere constante Fehler des Instrumentes etc. mit aller Sorgfalt vermieden werden müssen.

Exempel. Für die Polhöhe der Ofner Sternwarte erhielt ich folgende zehn Resultate

$$47^{\circ} 29' 11''. 5$$

$$12. 2$$

$$12. 8$$

$$11. 2$$

$$11. 7$$

$$12. 3$$

$$11. 5$$

$$11. 9$$

$$12. 4$$

$$12. 5$$

Mittel

$$47^{\circ} 29' 12''. 00$$

Die Fehler $\alpha \beta \gamma$ jeder einzelnen Beobachtung kann man gleich der Differenz jeder Beobachtung von diesem Mittel annehmen. So ist für

$$\text{die erste } \alpha = 12. 0 - 11. 5 = (0. 5)$$

$$\text{die zweyte } \beta = 12. 0 - 12. 2 = (- 0. 2)$$

$$\text{also } S = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots = 2. 42, N = 10$$

und daher wahrscheinlicher Fehler einer jeden Beobachtung gleich

$$A = 0.67449 \sqrt{\frac{2.42}{10}} = 0''. 33$$

wahrscheinliche Unsicherheit von A gleich

$$B = 0.47694 \frac{A}{\sqrt{10}} = 0''. 016$$

und daher der wahrscheinliche Fehler des Endresultates

$$47^{\circ} 29' 12'' 00$$

gleich

$$\frac{A}{\sqrt{N}} = \frac{6.33}{\sqrt{10}} = 0''.104$$

Ist überhaupt f der Fehler von einer, und F der Fehler des Resultats von p Beobachtungen, oder auch ist g die Präcision von einer, und G die des Resultats von p Beobachtungen so ist,

$$F = \frac{f}{\sqrt{p}} \quad \text{und}$$

$$G = g \cdot \sqrt{p}$$

VI. Um das Vorhergehende auf Gleichungen der Form

$$0 = m + a \cdot x$$

$$0 = m' + a' \cdot x$$

$$0 = m'' + a'' \cdot x \text{ u. f.}$$

anzuwenden, welche nur eine unbekannte Gröfse enthalten, so ist in der Voraussetzung, daß alle Beobachtungen gleichen Werth haben, der wahrscheinlichste Werth von x oder

$$X = \frac{-\sum m a}{\sum a^2} = \frac{-(m a + m' a' + m'' a'' + \dots)}{a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots}$$

und die Präcision ξ dieses letzten Werthes X von x ist, wenn die Präcision der unmittelbaren Beobachtung gleich der Einheit gesetzt wird,

$$\xi = \sqrt{\sum a^2} = \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots}$$

so wie der wahrscheinlichste Fehler dieses Werthes X

$$\frac{0.67449 \sqrt{\frac{S}{N}}}{\sqrt{\sum a^2}}$$

wo S , N die Bedeutung der N. V. hat.

Eben so ist für Gleichungen

$$0 = m + a \cdot x + b \cdot y$$

$$0 = m' + a' \cdot x + b' \cdot y$$

$$0 = m'' + a'' \cdot x + b'' \cdot y \text{ u. f.}$$

zwischen zwey veränderlichen Gröfsen der wahrscheinlichste Werth

$$\text{von } x = X = - \frac{(\sum m a \cdot \sum b b - \sum m b \cdot \sum b a)}{(\sum a a \cdot \sum b b - \sum b a \cdot \sum a a)}$$

$$\text{und von } y = Y = - \frac{(\sum m b \cdot \sum a a - \sum m a \cdot \sum b a)}{(\sum a a \cdot \sum b b - \sum b a \cdot \sum a a)}$$

und die Präcision jenes Werthes von X gleich

$$\xi = \sqrt{\frac{f_{aa} \cdot f_{bb} - f_{ba} \cdot f_{ba}}{f_{bb}}}$$

so wie die Präcision jenes Werthes Y gleich

$$\eta = \sqrt{\frac{f_{aa} \cdot f_{bb} - f_{ba} \cdot f_{ba}}{f_{aa}}}$$

und so für Gleichungen mehrerer unbekannten Gröfsen.

Uebrigens ist, wie bereits bemerkt wurde, für sich klar, daß alle diese Bestimmungen der Wahrheit desto näher kommen werden, je größer die Anzahl N der Beobachtungen oder die der gegebenen Gleichungen ist. Ist aber diese Anzahl sehr groß, so wird man sich die unbequeme Berechnung derselben sehr erleichtern, wenn man diese Gleichungen in Klassen einteilt, indem man z. B. die Summe von je zehn dieser Gleichungen, als eine einzige betrachtet, der man den Werth 10 gibt. Es sey

$o = m + a x$ das Mittel aus p Beobachtungen

$o = m' + a' x$ - - - - - p'

$o = m'' + a'' x$ - - - - - p''

so findet man aus dem Vorhergehenden leicht, daß der wahrscheinlichste Werth von x ist

$$X = - \frac{f_{map}}{f_{aap}}$$

und die Präcision dieser Bestimmung

$$\xi = \sqrt{\frac{f_{aap}}{f_{aap}^2}} = \sqrt{a^2 p + a'^2 p' + a''^2 p'' + \dots}$$

Ist eben so

$o = m + a x + b y$ das Mittel aus p Beobachtungen

$o = m' + a' x + b' y$ - - - - - p'

$o = m'' + a'' x + b'' y$ - - - - - p''

so ist der wahrscheinlichste Werth von x und y

$$X = - \frac{(f_{map} \cdot f_{bbp} - f_{mbp} \cdot f_{bap})}{(f_{aap} \cdot f_{bbp} - f_{bap} \cdot f_{bap})}$$

$$Y = - \frac{(f_{mbp} \cdot f_{aap} - f_{map} \cdot f_{bap})}{(f_{aap} \cdot f_{bbp} - f_{bap} \cdot f_{bap})}$$

und die Präcision dieser Bestimmungen für X und Y

$$\xi = \sqrt{\frac{f_{aap} \cdot f_{bbp} - f_{hap} \cdot f_{bap}}{f_{bbp}}}$$

$$\nu = \sqrt{\frac{f_{aap} \cdot f_{bbp} - f_{hap} \cdot f_{bap}}{f_{aap}}}$$

und so fort für ähnliche Fälle.

Endlich muß noch bemerkt werden, daß durch die Anwendung dieser Methode zwar die verschiedenen oft zufälligen Fehler der Beobachtung, der Theilung u. f. aber nicht andere constante Fehler, oder solche, welche allen Beobachtungen gemeinschaftlich sind, verbessert werden können.