

ACHTES KAPITEL.

Bestimmung der Polhöhe aus Beobachtungen.

§. 1.

Die Polhöhe läßt sich erstens aus jeder willkürlichen Höhe eines bekannten Sternes finden, wenn man die Zeit der Beobachtung, d. h. den Stundenwinkel des Sterns kennt. Ist nämlich in der Gleichung

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos s$$

nur die GröÙe φ unbekannt, so sey

$$\operatorname{Tg} x = \cos s \operatorname{Cotg} \delta$$

und man hat

$$\sin (\varphi + x) = \frac{\cos x \sin h}{\sin \delta}$$

Hat man correspondirende Höhen genommen, so geben diese die Zeit der Culmination des Sterns und die Stundenwinkel, welche zu jeder Höhe gehören, also die zu der Auflösung dieser Aufgabe nothwendigen Stücke.

Differentiirt man die erste Gleichung in Beziehung auf h s φ , so erhält man

$$d \varphi = \frac{-d h - d s \cos \varphi \sin \omega}{\cos \omega}$$

wo ω das Azimut ist, woraus folgt, daß man die Höhenbeobachtung so nahe als möglich bey dem Meridian nehmen muß.

§. 2.

Hat man also die Höhe des Gestirns in dem günstigsten Augenblicke, im Meridian selbst, beobachtet, so ist, wenn z die

von dem Fehler des Instruments, von Refraction und Parallaxe corrigirte Zenithdistanz, und δ die scheinbare (von Präcession, Aberration und Nutation afficirte) Declination des Gestirns ist,

auf der Südseite des Zeniths

$$\varphi = z + \delta,$$

wo südliche δ negativ sind,

und auf der Nordseite des Zeniths

$$\text{in der obern Culmination } \varphi = \delta - z$$

$$\text{untern } \varphi = 180 - \delta - z$$

Bey der Sonne und andern Gestirnen von einem beträchtlichen Halbmesser beobachtet man die Höhe des obern oder untern Randes, weil der Mittelpunkt derselben nicht mit Verlässlichkeit genommen werden kann.

Ex. 1809, Febr. 8. in Krakau:

Beobachtete Zenithdistanz des obern Sonnenrandes

$$64^{\circ} 50' 54'' 28$$

$$\text{Collim. Fehler} \quad \text{---} \quad 3 \quad 13. \quad 4$$

$$64^{\circ} 47' 40.88$$

$$\text{Bar. } 27^3 6^L 5 \text{ Par. } \text{corrig Refraction} + 2 \quad 9.00$$

$$\text{Therm Réaum. --- } 4^{\circ} 0. \quad \text{Halbm. (Ephem.)} + 16 \quad 15.36$$

$$\text{Höhenparallaxe} \quad \text{---} \quad 7.78$$

$$z = 65^{\circ} 5' 57'' 46$$

$$\delta = \text{---} 15 \quad 2 \quad 16.70 \text{ südl.}$$

$$\varphi = 50 \quad 3 \quad 40'' 76$$

§. 3.

Ist nebst der Polhöhe φ auch der Collimationsfehler a des Instrumentes unbekannt, so braucht man zwey Beobachtungen auf verschiedenen Seiten des Zeniths, um beyde Größen zu bestimmen.

Ist z δ die Zenithdistanz und die Declination des auf der Südseite des Zeniths beobachteten Gestirns, und z' δ' für das auf der Nordseite, so hätte man, nach dem Vorhergehenden, wenn der Collimationsfehler Null ist,

$$\varphi = z + \delta$$

$$\varphi' = \delta' - z'$$

die letzte Gleichung für obere Culminationen; für untere muß man

$$180 - \delta' \text{ statt } \delta'$$

setzen.

Gibt aber z. B. das Instrument alle Zenithdistanzen um die constante Größe a zu klein, wo also a der Collimationsfehler ist, so ist, wenn Φ die corrigirte Polhöhe ist,

$$\Phi = z + a + \delta$$

$$\Phi = \delta' - (z' + a)$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen a , so ist

$$\Phi = \frac{\varphi' + \varphi}{2}$$

und eliminirt man Φ , so ist

$$a = \frac{\varphi' - \varphi}{2}$$

oder die wahre Polhöhe ist die halbe Summe, und der Collimationsfehler die halbe Differenz der oben gefundenen unverbesserten Polhöhen.

Zur Erläuterung dieser in der Anwendung sehr brauchbaren Methode mag folgendes Beyspiel dienen.

1808. Sept. 30. in Krakau, im südl. Theil des Meridians

Beob. Z. D.	scheinb. Decl. α
30 δ Adler 47 20 52.1 . .	$2^\circ 44' 57'' 3$
38 μ Adler 43 6 31.7	6 59 23. 3
γ Adler 39 56 6.2	10 9 47. 9

Barometer $27^3 \text{ 1}^L 6$ Paris

Thermometer $+ 8^\circ 0$ Réaumur

October 2. desselben Jahres, im nördlichen Theil des Meridians

δ kleiner Bär 36 33 24.9 . .	$86^\circ 34' 38'' 1$
50 Drache 25 11 43.0	75 12 31. 7
52 α Drache 21 1 58.5	71 2 51. 1

Barometer $27^{\circ} 5^{\text{L}}.6$

Thermometer $+4^{\circ}.8$

Die erste Beobachtung gibt

$$\begin{array}{r}
 47^{\circ} 20' 52'' 1 \\
 \text{corrig. Refraction} \quad 1 \quad 0.4 \\
 \hline
 2 \quad 44 \quad 57.3 \\
 \text{Polhöhe} \quad 50^{\circ} 6' 49'' 8 \text{ u. f.}
 \end{array}$$

also hat man aus den drey ersten

$$\begin{array}{r}
 \text{Polhöhe} \quad 50^{\circ} 6' 49'' 8 \\
 47. \quad 0 \\
 40. \quad 6 \\
 \hline
 \text{Mittel } \varphi = 50^{\circ} 6' 45'' 8
 \end{array}$$

und eben so aus den drey letzten

$$\begin{array}{r}
 \text{Polhöhe} \quad 50^{\circ} 0' 30'' 6 \\
 21. \quad 7 \\
 30. \quad 5 \\
 \hline
 \text{Mittel } \varphi' = 50^{\circ} 0' 27'' 6
 \end{array}$$

also ist wahre Polhöhe

$$\varphi = \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^{\circ} 3' 36'' 7$$

$$\text{Collimationsfehler } a = \frac{\varphi' - \varphi}{2} = -3' 9''.1$$

und die Gröfse a muß von allen $Z. D.$ subtrahirt werden.

Die Anwendung dieser Methode ist am einfachsten und sichersten, wenn die südlichen und nördlichen Höhen gleich groß sind, weil dann auch die Unsicherheit in der gebrauchten Refraction verschwindet; sie läßt sich aber auch, wie man aus dem gewählten Exempel sieht, für ungleiche Höhen, besonders wenn diese nicht zu klein sind, anwenden.

§. 4.

Beobachtet man denselben Stern zweymal mit umgewendetem Instrumente, so daß der eingetheilte Rand desselben, in

der ersten Beobachtung z. B. gen Ost, und in der zweyten gen West steht, so hat in beyden Beobachtungen der Collimationsfehler offenbar denselben Werth, aber entgegengesetzte Zeichen, daher zwey solche Beobachtungen hinreichen, diesen Fehler, aber noch nicht die wahre Polhöhe zu bestimmen, welche letzte auch die Kenntniß der Declination voraussetzt.

Es seyen z. B. h h' die beobachteten Höhen des Sterns bey entgegengesetzten Lagen des Instruments, beyde in der untern Culmination genommen, so ist die wahre Polhöhe, wenn a der Collimationsfehler ist,

$$\varphi = h - a + (90 - \delta)$$

$$\varphi' = h' + a + (90 - \delta)$$

woraus man den Collimationsfehler

$$\frac{h - h'}{2}$$

und die wahre Polhöhe

$$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = \frac{h + h'}{2} + 90 - \delta \dots I.$$

erhält, vorausgesetzt, daß δ in beyden Beobachtungen denselben Werth hat.

Um nun auch die Polhöhe unabhängig von der Declination zu erhalten, seyen H H' zwey andere Höhen desselben Sterns in entgegengesetzten Lagen des Instruments, und beyde in der obern Culmination genommen, so ist wieder

$$\Phi = H - a - (90 - \delta)$$

$$\Phi' = H' + a - (90 - \delta)$$

also der Collimationsfehler

$$\frac{H - H'}{2}$$

und die Polhöhe

$$\frac{\Phi + \Phi'}{2} = \frac{H + H'}{2} - (90 - \delta) \dots II.$$

Verbindet man diese Resultate mit den vorhergehenden, so ist im Mittel aus allen vier Beobachtungen der Collimationsfehler

$$a = \frac{(H - H') + (h - h')}{4}$$

und die wahre Polhöhe

$$A = \frac{(H + H') + (h + h')}{4}$$

Culminirt das Gestirn über dem Pole auf der südlichen Seite des Zeniths, so wird man statt den beobachteten Höhen ihre Complementary zu 180° nehmen, und diese mit H, H' bezeichnen. Auf eine Aenderung der Declination in der Zwischenzeit der Beobachtungen wird gehörig Rücksicht genommen.

Ex. Auf der Sternwarte des Grafen Brühl (Doverstreet in London) wurden folgende Höhen der Capella beobachtet

1794. Junius 27. unter dem Pol $7^\circ 29' 30'' 25$

über 84 9 29. 00

28 unter 7 28 29. 25

über 84 10 17. 00

Barom. 30. 9 Therm. Fahrenheit $60^\circ 0$

engl. 31. 2 69. 5

29. 75 60. 5

30. 00 68. 0

Bey den beyden ersten Beobachtungen war der eingetheilte Rand des Instruments gen Ost, bey der andern aber gegen West gekehrt.

Die wahren Refractionen für diese Höhen sind

$7' 0'' 90$

5. 85

6 45. 90

5. 79

und da die Ziege über dem Pole auf der Südseite des Zeniths culminirt, so ist

$h = 7^\circ 22' 29'' 35$ unt. Ost

$h' = 7^\circ 21' 43. 35$ unt. West

$H = 95^\circ 50' 36'' 85$ ober Ost

$H' = 95^\circ 49' 48. 79$ ober West.

Die scheinbare Abweichung des Sterns ist

$\delta = 45^\circ 45'' 58'' 09,$

also

$$A = \frac{(H+H') + (h+h')}{4} = 51^\circ 36' 9'' 585 \text{ wahre Polhöhe}$$

$$a = \frac{(H-H') + (h-h')}{4} = 23'' 515 \text{ wahrer Collimationsfehler.}$$

Daraus folgt ferner die scheinbare Declination des Sterns (aus Gleichung I. oder II.)

$$\delta = 45^\circ 45' 56'' 765$$

Daraus läßt sich endlich auch die Richtigkeit der oben angenommenen Refraction untersuchen. Es ist nämlich die wahre Höhe unter dem Pol

$$A - (90 - \delta) = 7^\circ 22' 6.350$$

Aber man hat

Beob. Höhe unter dem Pol $7^\circ 29' 30'' 25 \dots 7^\circ 28' 29'' 25$

Collimationsfehler $\quad \quad \quad - 23.51 \dots \quad \quad \quad 23.51$

wahre beobachtete Höhe $7\ 29. \ 6. \ 74 \quad \quad \quad 7\ 28\ 52. \ 76$

$7\ 22. \ 6. \ 35 \quad \quad \quad 7\ 22 \ 6. \ 35$

wahre Refraction $7' \ 0'' 39 \dots \quad \quad \quad 6' \ 46'' 41$

oben angenommen $7\ 0. \ 90 \quad \quad \quad 6' \ 45 \ 90$

$0. \ 51 \quad \quad \quad 0. \ 51$

oder die angenommene Refraction für die Höhe $7^\circ 29'$ ist um $0'' 51$ fehlerhaft.

Die Circumpolarsterne sind die vortheilhaftesten zur Bestimmung der Polhöhe, weil man, wie man aus dem Vorhergehenden sieht, von der Declination des Sterns unabhängig ist, wenn man ihn in seinen beyden Culminationen beobachtet, und selbst von dem Collimationsfehler, wenn man ihn in den entgegengesetzten Lagen des Instruments beobachtet. Besonders ist der Polarstern (α des kleinen Bären) unter den größern Sternen der nächste am Pol, und also zur Bestimmung der Polhöhe am vortheilhaftesten zu brauchen, weil seine Höhenänderung in der Nähe des Meridians so äußerst gering, und die Differenz der Refractionen in beyden Culminationen nur wenig beträchtlich ist, so daß ein kleiner Fehler in dem gewählten Augenblick der Culmination nur einen geringen Einfluß auf die gesuchte Polhöhe hat. Sind die Beobachtungen der obern und untern Culmination mehrere Tage von einander entfernt, so daß die Declination des Sterns nicht mehr für beyde Beobachtungen als constant angesehen werden kann, so muß man auf diese Aenderung

der Declination Rücksicht nehmen. Am besten ist es, jede der einzelnen Beobachtungen mit der ihr entsprechenden scheinbaren Declination zu berechnen, wodurch man so viele Resultate für die Polhöhe erhält, als Beobachtungen sind, so daß man mit einem Blicke die Uebereinstimmung der einzelnen Resultate übersehen kann. Der Fehler, der dabey durch eine unrichtig vorausgesetzte Declination entsteht, und der dey dem Polarstern, dessen Declination man bereits sehr wohl kennt, nur sehr gering seyn kann, hat auf das Endresultat, oder auf die halbe Summe der aus der obern und untern Culmination abgeleiteten Polhöhe keinen Einfluß, da er in dieser halben Summe, seiner entgegen gesetzten Zeichen wegen verschwindet.

Hat man nur eine, z. B. die obere Culmination eines Circumpolarsterns mit verkehrtem Instrumente beobachtet, so ist, wenn z die beobachtete Zenithdistanz, und r die Refraction bezeichnet,

$$\text{Das Instrument gen West} \dots z + a + r = \delta - \varphi$$

$$\text{Ost} \quad z' - a + r = \delta - \varphi$$

also

$$\varphi = \delta - \left(\frac{z' + z}{2} + r \right)$$

und

$$a = \frac{z' - z}{2}$$

Eben so ist für die untere Culmination

$$\text{Das Instrument gen West} \dots Z + a + R = 180 - D - \varphi$$

$$\text{Ost} \quad Z' - a + R = 180 - D - \varphi$$

also

$$\varphi = 180 - D - \left(\frac{Z' + Z}{2} + R \right)$$

und

$$a = \frac{Z' - Z}{2}$$

und obschon jedes dieser φ von der Declination abhängt, so ist doch das Mittel aus beyden nur von der Differenz der Declination in der Zwischenzeit abhängig, da man hat

$$\varphi = 90 - \frac{1}{2} \left(\frac{Z + Z' + z + z'}{2} + R + r \right) + \frac{1}{2} (\delta - D)$$

Wenn man aber dieselbe Culmination in den beyden entgegengesetzten Lagen des Instruments beobachten will, so kann

I.

K

man das Gestirn nicht mehr in der Ebene des Meridians beobachten. Wir werden aber unten sehen, wie man eine nahe an dem Meridian beobachtete Zenithdistanz auf die Meridian-Zenithdistanz durch eine einfache Rechnung bringen kann.

Den 12. Januar 1821 wurde in Wien mit einem sechszehnzölligen Kreis die obere und untere Culmination des Polarsterns beobachtet.

Die obere gab

Der Kreis westlich $z = 40^{\circ} 8' 41'' 25$ beob. Z. D.

östlich $z' = 40 \quad 7 \quad 50 \quad 55$

Barometer $27^{\circ} 10^L 10^P$ Wien, Maß

Thermometer Réaumur $+ 7.0$

Die untere aber gab

Der Kreis westlich $Z = 43^{\circ} 25' 13'' 8$

östlich $Z' = 43 \quad 24 \quad 28. \quad 30$

Barometer $= 27 \quad 11 \quad 5$

Thermometer $= + \quad 6.0$

Daraus folgt für die ersten Beobachtungen die wahre Refraction

$$r = 48'' 05,$$

für die zweyte

$$R = 54'' 20$$

und für alle, da sich die scheinbare Declination in der Zwischenzeit nicht änderte,

$$\delta = D = 88^{\circ} 21' 38'', 29.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in den vorhergehenden Ausdrücken, so ist für die obere Culmination

$$\varphi = 48^{\circ} 12' 35'', 3$$

$$a = - \quad 25'', 3$$

und für die untere

$$\varphi = 48^{\circ} 12' 36'', 5$$

$$a = - \quad 22'', 8$$

Bessel beobachtete 1814 in Königsberg folgende Zenithdistanzen des Polarsterns in der obern Culmination

16. April = $33^{\circ} 34' 56'' 6$ das Instr. gen Ost

33 35 47. 3 - - - - West

33 35 21.95

Refractive Index 37.30

$$z = 33 \quad 35 \quad 59.25$$

scheinb. Poldistanz $p = 1419.30$

$$90 - \varphi = 35 \quad 17 \quad 8.5$$

Den 18. April 33 3 $\frac{1}{4}$ 56. 2 Ost

33 35 53. 9 West

33 35 25.05

R = 37.40

$$p = 1419.65$$
$$90 - \phi = 35 \quad 17 \quad 12. \quad 1$$

Den 19. April 33 34 56. 3 Ost

33 35 48. 2 West

33 35 22.25

$$R = 36,8$$

p = 1.41 10.15

$$90 - \varphi = 35 \text{ } 17 \text{ } 9.2$$

An demselben Tage wurden auch folgende Zenithdistanzen der untern Culmination genommen:

16. April 36° 57' 9. 1 Ost

36 58 o. 9 West

36 57 35. a

$$R = 43.4$$

p = - 1 41 9. 3

$$90 - \varphi = 35 \quad 17 \quad 9. \quad 1$$

18. April $36^{\circ} 57' 12.55''$ Ost $36^{\circ} 58' 2.1''$ West $36^{\circ} 57' 37.32''$ $R = 43.40$ $p = 1^{\circ} 41' 9.65''$ $90 - \varphi = 35^{\circ} 17' 11.07''$ 19. April. $36^{\circ} 57' 22.6''$ Ost $36^{\circ} 57' 50.35''$ West $36^{\circ} 57' 36.47''$ $R = 43.4$ $p = 1^{\circ} 41' 10.15''$ $90 - \varphi = 35^{\circ} 17' 9.72''$

Man hat daher folgende Werthe von Aequatorhöhen;

aus der obern Culmination

 $35^{\circ} 17' 8.5''$ 12.1 9.2 Mittel $35^{\circ} 17' 9.93'' = 90 - \varphi$

aus der untern

 $35^{\circ} 17' 9.1''$ 11.07 9.72 $35^{\circ} 17' 9.96'' = 90 - \varphi'$

und die Uebereinstimmung der beyden Mittel zeigt, daß die gewählte Declination des Sterns richtig ist. Wäre die Declination ganz unbekannt, so würde jedes Paar von Beobachtungen geben

in der obern Culmination $\varphi = \delta - z$ untern $\varphi = 180 - \delta - z'$

also die wahre Aequatorhöhe

$$\frac{z + z'}{2}$$

und die wahre Poldistanz

$$\frac{z - z'}{2}$$

So geben die Beobachtungen des 16. Aprils

$$z = 33\ 35\ 59.25$$

$$z' = 36\ 58\ 18.40$$

also $\frac{z+z'}{2} = 35^\circ\ 17'\ 8''\ 82$ Aequatorhöhe des Beobachtungsortes,

$$\frac{z-z'}{2} = 1^\circ\ 41'\ 9''\ 57 \text{ Poldistanz des Sterns}$$

Auf einen andern sehr ausgedehnten Gebrauch des Polarsterns zur Bestimmung der Polhöhe werden wir unten zurückkommen.

§. 5.

Besonders vortheilhaft zur Bestimmung der Polhöhe ist die Methode der sogenannten Circummeridianhöhen, das heisst, der nahe am Meridian beobachteten Höhen, deren man eine große Anzahl vor und nach der Culmination an einem Tage beobachten kann. Reduzirt man diese beobachteten Höhen auf diejenige, welche im Augenblicke der Culmination selbst statt hat, so erhält man dadurch eben so viele mittägliche Höhen, d. h. eben so viele Bestimmungen der Polhöhe, als man Höhenbeobachtungen hat. Diese Reduction auf den Meridian kann auf verschiedne Weise vorgenommen werden: wir wollen die vorzüglichsten derselben angeben.

Es sey

$$\frac{\sin a - \sin b}{\cos a} = z,$$

so ist auch

$$z = \frac{\sin a + \sin(a-b) \cos a - \cos(a-b) \sin a}{\cos a}$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für

$$\sin(a-b) \text{ und } \cos(a-b)$$

ihre Werthe durch die Potenzen von $(a-b)$, so erhält man

$$\begin{aligned}
z &= (a-b) + \frac{(a-b)^2}{1 \cdot 2} \operatorname{Tg} a \\
&- \frac{(a-b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(a-b)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \operatorname{Tg} a \\
&+ \frac{(a-b)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{(a-b)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \operatorname{Tg} a +
\end{aligned}$$

und wenn man diese Reihe umkehrt, so ist

$$\begin{aligned}
a-b &= z - \frac{z^2}{1 \cdot 2} \operatorname{Tg} a + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (1 + 3 \operatorname{Tg}^2 a) \\
&- \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (9 \operatorname{Tg} a + 15 \operatorname{Tg}^3 a) \\
&+ \frac{z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (105 \operatorname{Tg}^4 a + 90 \operatorname{Tg}^2 a + 9) \\
&- \frac{z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (945 \operatorname{Tg}^5 a + 1050 \operatorname{Tg}^3 a + 225 \operatorname{Tg} a) +
\end{aligned}$$

Die Höhe h eines Gestirns, zu welchem der Stundenwinkel s , die Polhöhe φ und die Declination δ gehört, wird bekanntlich durch folgende Gleichung gegeben

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos s$$

Ist aber h' die mittägliche Höhe und die mittägliche Declination dieses Gestirns, und

$$h' - h = dh$$

so ist

$$h = h' - dh = 90 - \varphi + \delta - dh$$

also die vorhergehende Gleichung

$$\cos(\varphi - \delta + dh) = \cos(\varphi - \delta) - 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{s}{2}$$

oder auch

$$\frac{\cos(\varphi - \delta) - \cos(\varphi - \delta + dh)}{\sin(\varphi - \delta)} = \frac{2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{s}{2}}{\sin(\varphi - \delta)}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorhergehenden

$$\frac{\sin a - \sin b}{\cos a} = z$$

so ist

$$a = 90 - \varphi + \delta$$

$$b = 90 - \varphi + \delta' - d \quad h$$

$$z = 2m \sin^2 \frac{s}{2}$$

$$\text{wo } m = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)}$$

also hat man auch

$$dh \sin 1'' = (\delta' - \delta) \sin 1'' + 2m \sin^2 \frac{s}{2}$$

$$- 2m^2 \sin^4 \frac{s}{2} \cotg (\varphi - \delta)$$

$$+ 4m^3 \sin^6 \frac{s}{2} \left(\frac{1}{3} + \cotg^2 (\varphi - \delta) \right)$$

$$- 2m^4 \sin^8 \frac{s}{2} (3 \cotg (\varphi - \delta) + 5 \cotg^3 (\varphi - \delta))$$

$$+ m^5 \sin^{10} \frac{s}{2} (28 \cotg^4 (\varphi - \delta) + 24 \cotg^2 (\varphi - \delta) + \frac{12}{5})$$

$$- m^6 \sin^{12} \frac{s}{2} (84 \cotg^5 (\varphi - \delta) + \frac{280}{3} \cotg^3 (\varphi - \delta) - 20 \cotg (\varphi - \delta)) + \dots \text{I.}$$

und dies ist der gesuchte Werth der Reduction d h der aufser dem Meridian beobachteten Höhe auf die mittägliche Höhe. Er gilt unverändert, wenn das Gestirn auf der Südseite des Zeniths culminirt.

Culminirt es zwischen Pol und Zenith, so ist

$$h' = 90 + \varphi - \delta$$

$$m = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)}$$

also für $\delta' = \delta$

$$dh \sin 1'' = 2m \sin^2 \frac{s}{2} - 2m^2 \sin^4 \frac{s}{2} \cotg (\delta - \varphi)$$

$$+ 4m^3 \sin^6 \frac{s}{2} \left(\frac{1}{3} + \cotg^2 (\delta - \varphi) \right) \dots \text{II.}$$

Culminirt es endlich unter dem Pol, so ist

$$h' = \varphi + \delta - 90$$

$$m = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi + \delta)}$$

also für $\delta' = \delta$

$$dh \sin 1'' = 2m \sin^2 \frac{s}{2} - 2m^2 \sin^4 \frac{s}{2} \cotg (\varphi + \delta)$$

$$+ 4m^3 \sin^6 \frac{s}{2} \left(\frac{1}{3} + \cotg^2 (\varphi + \delta) \right) + \dots \text{III.}$$

und dieser Werth von dh wird in (I.) und (II.) zu h addirt, im (III.) aber von h subtrahirt, um die mittägliche Höhe h' zu erhalten.

Die Gröfse

$$(\delta' - \delta) \text{ in (I.)}$$

aber ist vor Mittag negativ und nach Mittag positiv, wenn die Poldistanz des Gestirns wächst, und umgekehrt vor Mittag positiv, und nach Mittag negativ, wenn die Poldistanz des Gestirns abnimmt.

Sind die Höhen nahe am Mittag genommen, so reichen gewöhnlich die zwey ersten Glieder von dh und meistens schon das erste allein hin.

Man wird aber das erste Glied dieser Gleichung

$$2 m \sin^2 \frac{s}{2}$$

sehr bequem berechnen, wenn man sich eine Tafel entwirft, die mit dem Argumente s die Gröfse

$$\left\{ \frac{2 \sin^2 \frac{s}{2}}{\sin 1''} \right\}$$

gibt, so wie das zweyte Glied, wo es nöthig ist, durch eine andere kleine Tafel, die mit demselben Argumente die Gröfse

$$\left\{ \frac{2 \sin^4 \frac{s}{2}}{\sin 1} \right\}$$

gibt. Statt endlich jede dieser Reductionen dh an ihre entsprechende Höhe h anzubringen, wird man kürzer die Summe aller dh an die Summe aller h anbringen, und diese letzte Summe durch die Anzahl der Beobachtungen dividiren, wie wir unten durch ein Beyspiel zeigen werden. Man wird nämlich mit dem Argumente

$$s = t = \frac{s}{2} \text{ (Stundenwinkel in Zeit)}$$

die jeder Beobachtung entsprechende Zahl der ersten Tafel suchen, und ihre Summe durch $\frac{m}{n}$ multiplizieren, wo

$$m = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)}$$

und n die Anzahl der Beobachtungen ist, das so erhaltene Pro-

dukt wird das erste Glied der Gleichung I. seyn. Eben so wird man mit demselben Argumente die Summe der Zahlen der zweyten Tafel suchen, und diese Summe durch

$$\frac{m^2}{n} \cotg(\varphi - \delta)$$

multiplizieren, und das so erhaltene Produkt wird das zweyte Glied der Gleichung I. seyn. In den meisten Fällen wird es hinreichen, den Werth dieses zweyten Gliedes nur für einige Beobachtungen zu berechnen, und aus ihnen ihre Werthe für die zwischenliegenden Beobachtungen durch eine einfache Interpolation herzuleiten.

Bey Fixsternen fällt der Theil $(\delta' - \delta)$ weg, so wie die Parallaxe und der Halbmesser; für sie wird man am bequemsten Sternuhren brauchen, und die Zeit zwischen der Uhrzeit der Beobachtung und der Uhrzeit der Culmination als den Stundenwinkel nehmen. Braucht man eine mittlere Uhr, so wird man diese Zwischenzeit für Fixsterne durch 1.00274 multiplizieren. Auch kann man diese Correction bequemer noch an dem Factor dh anbringen. Ist nämlich a die tägliche Acceleration der Uhr in Secunden gegen die Zeit des Gestirns (für Retardationen ist a negativ) so muß dh noch durch

$$1 - \frac{2a}{24 \cdot 60^2} = 1 - (0.0000231) a$$

multipliziert werden. Beobachtet man z. B. die Sonne an einer Sternuhr, so ist nahe

$$a = 236''$$

also jener Factor von dh gleich 0.9945. Beobachtet man aber Fixsterne an einer mittlern Uhr, so ist jener Factor 1.0055

Erhält man endlich auf diese Art von einem Circumpolarstern in der Nähe der obern Culmination die mittägliche Höhe H, und in der Nähe der untern die mittägliche Höhe H', so ist

$$\frac{1}{2} (H + H')$$

die Polhöhe des Beobachtungsortes, und

$$\frac{1}{2} (H - H')$$

die Poldistanz des Gestirns, wenn auf Refraction gehörig Rücksicht genommen wird.

Ohne einer solchen Tafel endlich ist folgender Ausdruck von dh zur numerischen Entwicklung der bequemste. Es ist nämlich

$$\sin \frac{s}{2} = \left(\frac{s}{2}\right) \sin 1'' - \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 1'' + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 1'' -$$

also erhält man, wenn man diese Reihe bis

$$\left(\frac{s}{2}\right)^9$$

fortsetzt, statt der Gleichung I.

$$\begin{aligned} dh &= (\delta' - \delta) + (0.2930294) mt^2 \\ &- (0.9706047 - 6) m^2 t^4 \cotg (\varphi - \delta) \\ &- (0.4934834 - 6) mt^4 \\ &+ (0.9492095 - 11) m^3 t^6 \left(\frac{1}{3} + \cotg^2 (\varphi - \delta)\right) \\ &+ (0.4720883 - 11) m^2 t^6 \cotg (\varphi - \delta) \\ &+ (0.2959970 - 12) mt^6 \end{aligned}$$

wo t in Minuten der Zeit, dh in Sekunden des Bogens, und wo die numerischen Coefficienten schon Logarithmen sind.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir auf das bisher vortragene ein Beyspiel anwenden.

1794. Göttingen den 11. März. Uhrzeit des wahren Mittags aus correspondirenden Sonnenhöhen

$$0^h 1' 19'' 2$$

Abweichung der Sonne im wahren Mittag

$$\delta' = - 3^\circ 30' 38''$$

Änderung der Abweichung in einer Zeitminute

$$d\delta = 0''.9792$$

abnehmend. Vorläufige Polhöhe

$$\varphi = 51^\circ 32' 4''$$

$$\log m = \log \frac{\cos \varphi \cos \delta'}{\sin (\varphi - \delta')} = 9.8794023$$

Die Beobachtungen waren folgende:

Uhrzeit der Beobachtung	Höhe ob. Rand ☉ v. Coll. Fehl. befreyt	Stundenwinkel in Zeit
23 ^h 51' 38	35° 12' 8"	9' 687
53 0	35 12 48	8. 320
54 40	35 13 30	6. 653
56 3	35 13 53	5. 270
57 30	35 14 15	3. 820
58 32	35 14 28	2. 787
59 25	35 14 40	1. 903
0 1 0	35 14 40	0. 320
3 25	35 14 33	2. 087
4 28	35 14 25	3. 147
5 55	35 14 10	4. 597
7 28	35 13 48	6. 140

Für diese Beobachtungen ist nach der Ordnung:

Refract. - - - -	$\delta' - \delta$ - - -	Reduction d h	Mittägl. Höhe d. obern Randes
- 30'' 6	+ 9'' 5	+ 139'' 6	35° 13' 16'' 5
80. 5	8. 1	103. 0	18. 6
80. 5	6. 5	65. 8	21. 8
80. 5	5. 2	41. 3	19. 0
80. 5	3. 7	21. 7	19. 9
80. 5	2. 7	11. 5	21. 7
80. 4	1. 9	5. 4	26. 9
80. 4	+ 0. 3	0. 1	20. 0
80. 4	- 2. 0	6. 5	17. 1
80. 5	- 3. 1	14. 7	16. 1
80. 5	- 4. 5	31. 4	16. 4
80. 5	- 6. 0	56. 1	17. 6

Schließt man die siebente Beobachtung aus, so ist das Mittel der 11 Zahlen der zweyten Columnne, durch 11 dividirt, oder

beob. Höhe des obern Randes	35° 13' 52" 5
Mittel der vierten Columne Refraction	— 80. 5
fünften - - - $\delta' - \delta$	+ 1. 8
sechsten - - dh	+ 44. 7
siebenten mitt. Höhe d. ob. Randes	35° 13' 18" 6
Man hat daher	35° 13' 18" 6
Halbmesser	— 16' 8. 1
Höhenparallaxe	6. 8
Abweichung im Mittag	+ 3 30 38. 0
Aequatorhöhe	38 27 55. 3
Polhöhe	51 32 4. 7

Bey diesem Verfahren, wo jede mittägliche Höhe besonders berechnet wird, hat man den Vortheil, die Uebereinstimmung der einzelnen Resultate zu übersehen. Bequemer aber wird man das Mittel der Reductionen zu dem Mittel der beobachteten Höhe (zweyte Columnen) setzen, und so verfahren:

$$\text{Stundenwinkel} - - - \left\{ \frac{2 \sin^2 \frac{s}{2}}{\sin 1''} \right\}$$

9' 41"	184" 1
8 19	135. 8
6 39	86. 8
5 16	54. 5
3 49	28. 6
2 47	15. 2
0 19	0. 2
2 5	8. 5
3 9	19. 3
4 36	41. 5
6 8	73. 9
Mittel	58". 9454

$$\text{Dessen Logar.} = 1.7704499$$

$$\log m = 9.8794023$$

$$1.6498522 = \log 44'' 7$$

Dies vorausgesetzt, ist

$$\frac{1}{11} \text{ der beob. Höhen} - 35^\circ 13' 52'' 5 \text{ dafür Refract.} - 1' 20'' 5$$

$$\text{Reduction} - 44. 7 \text{ Halbmessser} - 16 \ 8. \ 1$$

$$\text{Höhenparallaxe} \quad 6. \ 8 \quad \underline{17' \ 28'' 6}$$

$$\delta' - \delta \quad 1. \ 8$$

$$\text{Abweichung im Mittag} \quad 3 \ 30 \ 38. \ 0$$

$$\underline{38 \ 45 \ 23. \ 8}$$

$$- 17 \ 28. \ 6$$

$$\text{Aequatorhöhe} \quad 38 \ 27 \ 55. \ 2 \text{ wie zuvor.}$$

Eben so wird man die Correction der beobachteten Zenithdistanz wegen der Aenderung der Declination auf folgende Art bequemer finden.

Ist A die Summe der Stundenwinkel vor, und B nach dem Mittag, beyde in Zeitminuten ausgedrückt; dp die Zunahme der Poldistanz der Sonne in einer Zeitminute (dp negativ, wenn die Poldistanz abnimmt); endlich N die Anzahl der Beobachtungen, so ist

$$\text{Corrigirtes } z = z + (A - B) \cdot \frac{dp}{N}$$

Die Höhenparallaxe der Sonne kann man gleich $8'' 7 \sin z$ annehmen.

§. 6.

Wir wollen nun noch einige andere merkwürdige Ausdrücke für die Reduction dh suchen. Ist

$$\pi = 90 - \delta, \psi = 90 - \varphi,$$

und z die mittägliche Zenithdistanz des Gestirns, x endlich die Reduction der beobachteten Zenithdistanz auf die mittägliche, so ist

$$\cos(z + x) = \cos \pi \cos \psi + \sin \pi \sin \psi \cos s$$

Aus dieser Gleichung läßt sich x auf verschiedene Weise finden, und da Ausdrücke dieser Art bey astronomischen Untersuchungen so oft vorkommen, so wird es nützlich seyn, hier einige der vorzüglichsten kurz anzuzeigen.

II. Alle vorhergehenden Ausdrücke setzen aber, wie gesagt,

$$x = \frac{\sin x}{\sin 1}$$

voraus. Folgende Ausdrücke sind von dieser Voraussetzung frey, und gelten für jeden Werth von x .

Heißt man

$$p = \sin \pi \sin \psi \operatorname{Cosec} z \text{ und}$$

$$q = \operatorname{Cotg} z, \text{ so ist}$$

$$\operatorname{Tg} \frac{x}{2} = p z^2 - p^2 z^4$$

$$+ (1 + \frac{4}{2} q^2) p^3 z^6 - \left(\frac{4}{2} \cdot 2 + \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 3} q^2 \right) p^4 q z^8$$

$$+ \left(\frac{4}{2} + \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot 3 q^2 + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^4 \right) p^5 z^{10} -$$

welche Reihe sich leicht fortsetzen läßt.

Allgemeiner, wenn n was immer für eine Zahl ist,

$$\operatorname{Tg} \frac{n x}{2} = (p z^2)^n + n (p z^2)^{n+1} (p z^2 - q)$$

$$+ \frac{n \cdot n+3}{1 \cdot 2} (p z^2)^{n+2} (p z^2 - q)^2$$

$$+ \frac{n \cdot n+4 \cdot n+5}{1 \cdot 2 \cdot 3} (p z^2)^{n+3} (p z^2 - q)^3 +$$

Setzt man in den letzten Ausdrücken für n nach der Ordnung 1, 3, 5, 7... und substituirt man die so erhaltenen Ausdrücke in der Gleichung

$$\frac{x}{2} = \operatorname{Tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{Tg}^5 \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{Tg}^7 \frac{x}{2} -$$

so erhält man

$$\frac{x}{2} = p z^2 - q p^2 z^4$$

$$+ \left(\frac{2}{3} + 2 q^2 \right) p^3 z^6$$

$$- (3 q + 5 q^3) p^4 z^8$$

$$+ \left(\frac{6}{5} + 12 q^2 + 14 q^4 \right) p^5 z^{10} -$$

und dies ist der im vorigen §. gefundene Ausdruck.

Hat man so

$$\operatorname{Tg}^n \frac{x}{2}$$

für $n = 1, 2, 3 \dots$

entwickelt, so kann auch die Reihe für

$$\frac{\sin}{\cos} \left) \frac{x}{2} \text{ oder für } \frac{\sin}{\cos} \right) x \text{ u. s. w.}$$

darstellen, denn es ist

$$\sin \frac{x}{2} = t - \frac{1}{2} t^3 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} t^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} t^7 + \dots$$

wo $t = \operatorname{Tg} \frac{x}{2}$

und eben so

$$\cos \frac{x}{2} = 1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} t^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} t^6 + \dots$$

$$\sin x = 2 t (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots)$$

$$\cos x = 1 - 2 t^2 + 2 t^4 - 2 t^6 + \dots$$

$$\operatorname{Tg} x = t (1 + t^2 + t^4 + t^6 + \dots)$$

bey deren Entwicklung ich mich nicht weiter aufhalte.
Sucht man auch hier zur bequemerem Berechnung die Logarithmen, so ist

$$\log \operatorname{Tg} \frac{x}{2} = \log (p s^2) - p q s^2 + (1 + \frac{3}{2} q^2) p^2 s^4$$

$$- (\frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3} q^2) p^3 q s^6$$

$$(\frac{3}{2} + \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3} \cdot 3 q^2 + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^4) p^4 s^8$$

$$- (\frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3} \cdot 3 + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 4 q^2 + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} q^4) p^5 q s^{10} + \dots$$

wovon das Gesetz des Fortganges deutlich ist.

Endlich ist noch

$$\operatorname{Tg} \frac{x}{2} = p s^2$$

$$\frac{1 + (p s^2 - q) p s^2}{1 + (q s^2 - q) p s^2}$$

$$\frac{1 + (p s^2 - q) p s^2}{1 + (q s^2 - q) p s^2}$$

$$\frac{1 + (p s^2 - q) p s^2}{1 + (q s^2 - q) p s^2}$$

$$- 1 + \text{etc.}$$

III. Merkwürdiger sind die Auflösungen der oben angeführten Gleichung, die sich, wie es bey den Circummeneridianhöhen der Fall ist, auf eine Anzahl mehrerer aufeinander folgenden Beobachtungen beziehen. Behält man nämlich die vorhergehenden Bezeichnungen bey, und setzt

$$m = \operatorname{Tg} \frac{\pi}{2} \operatorname{Tg} \frac{\psi}{2},$$

so ist, wenn z die beobachtete Zenithdistanz ist, (nach Capitel I)

$$\begin{aligned} \log \operatorname{Cos} \frac{z}{2} &= \log \operatorname{Cos} \frac{\pi}{2} \operatorname{Cos} \frac{\psi}{2} + m \operatorname{Cos} s \\ &- \frac{m^2}{2} \operatorname{Cos} 2s + \frac{m^3}{3} \operatorname{Cos} 3s - \frac{m^4}{4} \operatorname{Cos} 4s + \end{aligned}$$

Ist aber ζ die mittägliche Zenithdistanz, für welche im allgemeinen $s = 0$ ist, so folgt aus dem vorhergehenden Ausdrucke

$$\begin{aligned} \log \operatorname{Cos} \frac{\zeta}{2} &= \log \operatorname{Cos} \frac{\pi}{2} \operatorname{Cos} \frac{\psi}{2} \\ &+ m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4} + \end{aligned}$$

und beyder Reihen Differenz ist

$$\begin{aligned} \log \operatorname{Cos} \frac{\zeta}{2} &= \log \operatorname{Cos} \frac{z}{2} \\ &+ 2 \left(m \operatorname{Sin}^2 \frac{s}{2} - \frac{m^2}{2} \operatorname{Sin}^2 \frac{2s}{2} + \frac{m^3}{3} \operatorname{Sin}^2 \frac{3s}{2} - \right) \end{aligned}$$

Für eine zweyte, dritte Beobachtung u. f. bezeichnet man in dem letzten Ausdrucke z, s mit einem, zwey Strichen u. f.

Diese Reihen sind aber erstens sehr unbequem zu berechnen, und zweytens schliessen sie die einzelnen Gröfsen $z, z', z'' \dots$ ein, die bey Beobachtungen mit Multiplicationskreisen, wenn man nicht bey jeder Beobachtung abliest, unbekannt sind.

Man kann aber diesen Ausdruck auch so darstellen:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{Cos} \frac{\zeta}{2} &= \log \operatorname{Cos} \frac{z}{2} \\ &+ 2 \operatorname{Sin}^2 \frac{s}{2} \left\{ m - \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{2s}{2}}{\operatorname{Sin}^2 \frac{s}{2}} + \frac{1}{3} m^3 \frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{3s}{2}}{\operatorname{Sin}^2 \frac{s}{2}} - \right\} \end{aligned}$$

I. L

und da im allgemeinen $\frac{\pi}{2}$ nur ein kleiner Winkel ist, so kann man im zweyten Gliede dieser Reihe, welches schon in die sehr kleinen Factoren

$$\sin^2 \frac{s}{2} \text{ und } m^2$$

multipliziert ist, die Gröfse

$$\frac{\sin^2 \frac{2s}{2}}{\sin^2 \frac{s}{2}}$$

ohne merklichen Fehler gleich 2² setzen. Dasselbe gilt für die höheren Glieder, in welche zwar

$$\frac{3s}{2}, \frac{4s}{2} \dots$$

immer gröfser, aber dagegen

$$m^3, m^4, \dots$$

in einem viel stärkern Verhältnisse immer kleiner werden, wenn man, wie man es zu Breitenbestimmungen immer thun wird, Sterne nahe am Pol wählt, für welche

$$\text{Tg } \frac{\pi}{2}$$

und daher auch m sehr klein ist. Nach dieser Bemerkung wird also die vorhergehende Reihe in folgende übergehen

$$\log \cos \frac{\xi}{2} = \log \cos \frac{z}{2}$$

$$+ 2 \sin^2 \frac{s}{2} (m - 2m^2 + 3m^3 - 4m^4 +)$$

Da aber

$$m - 2m^2 + 3m^3 \dots = \frac{m}{(1+m)^2}$$

und

$$m = \text{Tg } \frac{\pi}{2} \text{Tg } \frac{\psi}{2} \text{ ist,}$$

so hat man

$$\log \cos \frac{\xi}{2} = \log \cos \frac{z}{2} + 2 \sin^2 \frac{s}{2} \cdot \frac{\sin \pi \sin \psi}{4 \cos^2 \frac{\pi - \psi}{2}}$$

oder bequemer zur Berechnung mit Logarithmen, wenn $\pi = 0.4342945$ ist

$$\log \text{vulg} \cos \frac{\zeta}{2} = \log \text{vulg} \cos \frac{z}{2} \\ + \mu \sin 1'' \left\{ \frac{2 \sin^2 \frac{s}{2}}{\sin 1''} \right\} \frac{\sin \pi \sin \psi}{4 \cos^2 \frac{\pi - \psi}{2}}$$

Eben so hat man für eine zweyte Beobachtung

$$\log \cos \frac{\zeta}{2} = \log \cos \frac{z'}{2} \\ + \mu \sin 1'' \left\{ \frac{2 \sin^2 \frac{s'}{2}}{\sin 1''} \right\} \frac{\sin \pi \sin \psi}{4 \cos^2 \frac{\pi - \psi}{2}} \text{ u. s. w.}$$

Sucht man nun aus der in dem vorigen §. erwähnten Tafel, für jeden Stundenwinkel die entsprechende Zahl

$$\frac{2 \sin^2 \frac{s}{2}}{\sin 1''}$$

und nennt A die Summe aller dieser Zahlen, dividirt durch die Anzahl n der Beobachtungen, so hat man, wenn man alle vorhergehenden Ausdrücke addirt, für die ganze Reihe aller Beobachtungen

$$\log \cos \frac{\zeta}{2} = \frac{\log \left(\cos \frac{z}{2} \cos \frac{z'}{2} \cos \frac{z''}{2} \dots \right)}{n} \\ + A \mu \sin 1'' \frac{\sin \pi \sin \psi}{4 \cos^2 \frac{\pi - \psi}{2}}$$

Es ist daher nur noch übrig, das Glied

$$\frac{\log \left(\cos \frac{z}{2} \cos \frac{z'}{2} \cos \frac{z''}{2} \dots \right)}{n}$$

zum Gebrauche bequemer zu machen. Zu diesem Zwecke sey Z die Summe aller Zenithdistanzen, oder

$$Z = z + z' + z'' + \dots$$

und der Kürze wegen

$$z^0 = \frac{1}{n} \cdot Z,$$

Sey ferner

$$\log \cos \frac{z}{2} = \log \cos \frac{z^0}{2} + a$$

$$\log \cos \frac{z'}{2} = \log \cos \frac{z^0}{2} + a'$$

$$\log \cos \frac{z''}{2} = \log \cos \frac{z^0}{2} + a'' \text{ u. s. w.,}$$

so ist

$$a = \log \cos \frac{z}{2} - \log \cos \frac{z^0}{2}$$

$$= \Delta \log \cos \frac{z^0}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \Delta z \operatorname{Tg} \frac{z^0}{2}$$

$$\text{wo } \Delta z = z - z^0$$

Ist eben so

$$\Delta z' = z' - z^0,$$

$$\Delta z'' = z'' - z^0 \text{ u. s. w.,}$$

so ist auch

$$a' = -\frac{1}{2} \Delta z' \operatorname{Tg} \frac{z^0}{2},$$

$$a'' = -\frac{1}{2} \Delta z'' \operatorname{Tg} \frac{z^0}{2} \text{ u. s. w., also}$$

$$\log \left(\cos \frac{z}{2} \cos \frac{z'}{2} \cos \frac{z''}{2} \dots \right) = \log \cos \frac{z^0}{2} + \frac{1}{n} (a + a' + a'' + \dots)$$

$$= \log \cos \frac{z^0}{2} - \frac{1}{2n} \operatorname{Tg} \frac{z^0}{2} (\Delta z + \Delta z' + \Delta z'' + \dots)$$

$$= \log \cos \frac{z^0}{2}$$

$$\text{weil } \Delta z + \Delta z' + \Delta z'' + \dots$$

$$= (z - z^0) + (z' - z^0) + (z'' - z^0) + \dots$$

$$= Z - n z^0$$

das heißt $= Z - Z = 0$ ist, so lange man bloß auf die ersten Differenzen Rücksicht nimmt.

Nach dieser Bemerkung wird daher der vorhergehende Ausdruck

$$\log \cos \frac{\zeta}{2} = \log \cos \frac{z^o}{2} + A \mu \sin 1'' \frac{\sin \pi \sin \psi}{4 \cos^2 \frac{\pi - \psi}{2}} \dots (1)$$

und auf eine ähnliche Art findet man

$$\log \sin \frac{\zeta}{2} = \log \sin \frac{z^o}{2} - A \mu \sin 1'' \frac{\sin \pi \sin \psi}{4 \sin^2 \frac{\pi - \psi}{2}} \dots (2)$$

woraus endlich

$$\log \operatorname{Tg} \frac{\zeta}{2} = \log \operatorname{Tg} \frac{z^o}{2} - A \mu \sin 1'' \frac{\sin \pi \sin \psi}{\sin^2 \frac{\pi - \psi}{2}} \cos \pi - \psi \dots (3)$$

und in allen diesen Ausdrücken hat man

$$\operatorname{Log} (\mu \sin 1'') = 4.3233592$$

Der erste derselben ist dem zweyten vorzuziehen, wenn

$$\operatorname{Tg} \frac{\pi}{2}$$

sehr klein, der zweyte, wenn

$$\operatorname{Tg} \frac{\pi}{2}$$

sehr groß ist. M. s. Berl. Jahrb. 1817. p. 138.

Wendet man darauf das vorhergehende Beyspiel an, so ist

$$\pi = 93^\circ 30' 38'' 0$$

$$z^o = 54 \quad 46 \quad 7.455$$

$$\psi = 38 \quad 27 \quad 56, \quad 0$$

$$A = 58.9454$$

und daher (Gleichung I.)

$$\log \frac{\sin \pi \sin \psi}{4 \cos^2 \frac{\pi - \psi}{2}} = 9.2952651$$

$$\log A \mu \sin 1 = 6.0938091$$

$$5.3890742 = \log 0.0000245$$

$$\log \cos \frac{z^o}{2} = 9.9483843$$

$$\log \cos \frac{\zeta}{2} = 9.9484083, \text{ woraus}$$

$$\zeta = 54^{\circ} 45' 22'' 57$$

$$\text{Refr.} \quad 1 \quad 20. \quad 4$$

$$\text{Halbmess.} \quad 16 \quad 8. \quad 1$$

$$\text{Parall.} \quad - \quad 6. \quad 8$$

$$d\delta \quad - \quad 1. \quad 8$$

$$55^{\circ} 2' 42'' 47$$

$$93 \quad 30 \quad 38. \quad 0$$

$$\text{Aequatorhöhe} \quad 38^{\circ} 27' 55'' 53 = \psi;$$

eben so findet man nach der Gleichung (2.)

$$\text{Log Sin } \frac{\zeta}{2} = 9.6627178 - 0.0000902$$

$$= 9.6626276$$

$$\text{also } \zeta = 54^{\circ} 45' 23'' 1,$$

$$\psi = 38^{\circ} 27' 55'' 1$$

und nach der Gleichung (3.)

$$\text{Log Tg } \frac{\zeta}{2} = 9.7143337 - 0.0001147$$

$$= 9.7142190$$

$$\text{also } \zeta = 54^{\circ} 45' 22'' 94,$$

$$\phi = 38^{\circ} 27' 55'' 2$$

Folgendes Beyspiel der Beobachtung eines Fixsterns ist aus der Base du Systeme métrique. II. p. 275. Delambre beobachtete in Dünkirchen 1796 den 20. Januar, die vierundzwanzigfache Zenithdistanz des Polarsterns in der Nähe seiner obern Culmination gleich

$$892^{\circ} 1826$$

also dessen vierundzwanzigster Theil

$$37^{\circ} 174275 = 37^{\circ} 10' 27'' 39 = z$$

Die Stundenwinkel der Beobachtungen waren nach der Ordnung

$$0^h 16' 53''$$

$$14 \quad 52$$

$$13 \quad 35$$

$$12 \quad 6$$

$$0^h 5' 41''$$

$$4 \quad 7$$

$$2 \quad 53$$

$$1 \quad 25$$

$$0^h 5' 46''$$

$$7 \quad 43$$

$$9 \quad 19$$

$$11 \quad 57$$

11 3	0 8	13 9
9 52	0 57	14 51
8 31	2 18	15 57
6 49	4 16	17 50

Zu diesen Stundenwinkeln gehören die Zahlen

$$\frac{2 \sin^2 \frac{s}{2}}{\sin 1''}$$

aus der ersten der oben erwähnten Tafel

559'' 4	63'' 4	65'' 3
433. 8	33. 3	116. 9
362. 2	16. 3	170. 4
287. 4	3. 9	280. 4
239. 7	0. 0	339. 4
191. 1	1. 8	432. 8
142. 4	10. 4	499. 2
91. 2	35. 7	624. 1

Die Summe aller letzten Zahlen ist

$$5000'' 4,$$

also deren vierundzwanzigster Theil

$$A = 208'' 35$$

Mit der vorläufigen Polhöhe

$$\varphi = 51^\circ 2'$$

und der Declination

$$\delta = 38^\circ 13' 20'' 3, \text{ ist}$$

$$Am = A \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\delta - \varphi)} = 6'' 72$$

Barom. 27^z 4^L. 5 franz,

Therm. + 3°. 7 Réaum.

Man hat daher nach §. 5.

$$z = 37^{\circ} 10' 27'' 39.$$

Corr. Refraction 44 21 nach Carlini

$$Am = \quad \quad \quad 6 \quad 72$$

scheinb. Poldistanz 1 46 39 70

$$\text{Aequatorhöhe } \psi = 38^{\circ} 57' 44'' 58$$

$$\text{Polhöhe } \varphi = 51^{\circ} 2' 15'' 42$$

Nach §. 6. Gleichung (1) ist aber

$$Z = 892.1826$$

$$\frac{Z}{24} = z^{\circ} = 37.174275$$

$$A = 208.35$$

$$\pi = 1^{\circ} 46' 39'' 7$$

$$\text{Vorläufiges } \psi = 38^{\circ} 57' 44''$$

$$\log \frac{A \mu \sin 1'' \sin \pi \sin \psi}{4 \cos^2 \frac{\pi - \psi}{2}} = 4.3815855 = \log 0.0000024$$

$$\log \cos \frac{z^{\circ}}{2} = 9.9767350$$

$$\log \cos \frac{\xi}{2} = 9.9767374$$

$$\zeta = 37^{\circ} 10' 20'' 6$$

$$\text{Refraction für } z^{\circ} \quad 43.4$$

$$\text{scheinb. Poldistanz } 1 \quad 46 \quad 39.7$$

$$\psi = 38^{\circ} 57' 43'' 7, \text{ wie zuvor.}$$

IV. Um überhaupt die Brauchbarkeit der Methode der Circummeridianhöhen und die Grenzen derselben in der Anwendung zu untersuchen, wollen wir bloß die Fehler des ersten, als des beträchtlichsten Gliedes der Reihe §. 5. suchen, die aus irgend einem Fehler in den drey Gröößen

$$s, \delta, \varphi$$

entstehen, denn die Fehler der folgenden Glieder jener Reihe werden ungleich geringer seyn.

Setzt man also

$$dh = \frac{2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{s}{2}}{\sin (\varphi - \delta) \sin 1''}$$

so erhält man für einen fehlerhaften Stundenwinkel

$$d^2 h = dh \cdot ds \cdot \text{Cotg } \frac{1}{2} s$$

für eine fehlerhafte Declination

$$d^2 h' = + \frac{dh^2 \cdot d\delta \sin 1}{2 \cos^2 \delta \sin^2 \frac{s}{2}}$$

und für eine fehlerhaft vorausgesetzte Polhöhe

$$d^2 h'' = + \frac{dh^2 \cdot d\varphi \sin 1''}{2 \cos^2 \varphi \sin^2 \frac{s}{2}}$$

das obere Zeichen der beyden letzten Ausdrücke für die Reihe I. §. 5., die untern für II. und III.

Daraus sieht man, daß man nebst der genauesten Sorge für die Zeitbestimmung noch auf beyden Seiten des Meridians eine so viel möglich gleich große Anzahl von Höhen beobachten muß, weil nach der Culmination

$$\text{Cotg } \frac{s}{2} \text{ also auch } d^2 h$$

in der ersten der drey vorhergehenden Gleichungen ihr Zeichen ändert, wodurch demnach jedes positive $d^2 h$ durch ein ihm nahe gleiches negatives aufgehoben wird.

Da übrigens der gemeinschaftliche Factor jedes der drey Fehler die Größe dh , bey den beyden letzten sogar dh^2 ist, so ist es rathsam, zu große Stundenwinkel, wo sie schaden können, wegzulassen. Will man z. B. die Reihe der Beobachtungen so weit fortsetzen, bis eine Zeitsecunde die Reduction dh um eine Bogensecunde ändert, so hätte man für den größten Stundenwinkel

$$\sin s = \frac{1}{15. m}$$

Ist also z. B. φ nahe 50° , so folgt daraus, daß man desto größere Stundenwinkel brauchen darf, je größer die südliche oder die nördliche Declination des Sterns ist, besonders die letzte, da die dem Pole nächsten Sterne zur Bestimmung der Polhöhe die vortheilhaftesten sind. Je näher aber die nördliche Declination an der Polhöhe ist, desto kürzer wird auch der brauchbare Stundenwinkel, so daß man Gestirne, für welche $\delta = \varphi$ ist, am besten gänzlich vermeidet.

§. 7.

Die Gleichung

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos s$$

gibt überhaupt: wenn man alles in ihr veränderlich setzt

$$d\varphi = -\frac{dh}{\cos \omega} - d s \frac{\cos \varphi \sin \omega}{\cos \omega} + d\delta \frac{\cos \pi}{\cos \omega}$$

wo π der Winkel des Declinationskreises mit dem Vertikalkreise ist, woraus folgt: daß die Polhöhe am sichersten aus Beobachtungen in der Nähe des Meridians bestimmt wird, wie bereits oben bemerkt wurde.

Setzt man in der vorhergehenden Gleichung das Differential von $\sin h$, in Beziehung auf s und δ genommen, gleich Null, so hat man

$$\sin s = \frac{d\delta}{ds} (\operatorname{Tg} \varphi - \operatorname{Tg} \delta \cos s)$$

Ist ds eine Secunde, so ist

$$\frac{d\delta}{ds}$$

die Aenderung der Declination in einer Secunde. Da aber die Gröfse

$$\frac{d\delta}{ds}$$

so wie der Stundenwinkel s der größten Höhe nur sehr klein seyn kann, so ist, wenn Ds der Stundenwinkel der größten Höhe ist

$$\begin{aligned} Ds &= \frac{d\delta}{ds} (\operatorname{Tg} \varphi - \operatorname{Tg} \delta) \\ &= \frac{d\delta}{ds} \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \varphi \cos \delta} \end{aligned}$$

Diejenigen Gestirne also, deren Declination veränderlich ist, erreichen eigentlich ihre größte Höhe nicht in, sondern außer dem Meridian, für den Stundenwinkel Ds . Für die Sonne kann dieser Stundenwinkel mehrere Secunden betragen, aber der daraus folgende Unterschied der mittäglichen und der größten Höhe der Sonne ist, wie man leicht sieht, immer unbedeutend. Für den Mond aber kann dieser Stundenwinkel auch vier bis fünf Zeitminuten, und die daraus folgende Differenz der Höhen bis dreißig Raumsecunden betragen.

Die oben vorgetragene Mittagsverbesserung der correspondirenden Höhen der Sonne, die Δs seyn soll, ist

$$\Delta s = \frac{d\delta}{\sin s} (\operatorname{Tg} \varphi - \operatorname{Tg} \delta \cos s)$$

Sind also diese correspondirenden Höhen selbst nahe am Mittag genommen worden, so ist s sehr klein, und gleich ds , also

$$\Delta s = \frac{d\delta}{ds} \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \varphi \cos \delta}$$

Man hat also

$$\Delta s = D s$$

oder die Zeit der größten Höhe der Sonne ist gleich der Zeit des unverbesserten Mittags aus correspondirenden Höhen, wenn diese letzten nahe am Meridian genommen würden.

§. 8.

Aus §. 5. folgt, daß für kleine Stundenwinkel, für welche

$$\frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)}$$

constant ist, das Quadrat des Stundenwinkels sich wie die Differenz der beobachteten und der mittäglichen Höhe verhält. Sind also

H, h, h' drey Höhen, und

T, t', t'' ihre Zeiten

so ist, wenn H die Höhe des Mittags T ist,

$$(T - t')^2 \cdot (H - h) = (T - t)^2 \cdot (H - h')$$

also

$$H = \frac{h(T - t')^2 - h'(T - t)^2}{(T - t')^2 - (T - t)^2}$$

und so findet man durch die bloße Uhrzeit des Mittags, und durch die Uhrzeiten zweyer beobachteten Höhen und durch diese beobachteten Höhen selbst, die mittägliche Höhe oder die Polhöhe, ohne diese Polhöhe, oder die Abweichung vorher beyläufig zu kennen.

I. Dieß Verfahren läßt sich noch beträchtlich vereinfachen.

Sind die drey beobachteten Höhen mit ihren Uhrzeiten

$$h \quad h + \alpha \quad h + \alpha'$$

$$T \quad T + \beta \quad T + \beta'$$

und ist H die mittägliche Höhe, und $T + t$ die Uhrzeit des Mittags, so ist

$$H - h = B t^2$$

$$H - (h + \alpha) = B (t - \beta)^2$$

$$H - (h + \alpha) = B (t - \beta')^2$$

wo B eine constante Gröfse ist.

Eliminirt man daraus diese Gröfse B, so ist

$$\alpha t^2 = (H - h) (2 t \beta - \beta^2)$$

$$\alpha' t^2 = (H - h) (2 t \beta' - \beta'^2)$$

und wenn man aus diesen beyden Gleichungen H eliminirt, so ist

$$t = \frac{\alpha \beta'^2 - \alpha' \beta^2}{2 (\alpha \beta' - \alpha' \beta)} \dots (A)$$

und dieser Werth von t in einer der zwey vorletzten Gleichungen substituirt, gibt

$$H = h + \frac{(\alpha \beta'^2 - \alpha' \beta^2)^2}{4 \beta \beta' (\beta' - \beta) (\alpha \beta' - \alpha' \beta)} \dots (B)$$

Die Gleichung (B) gibt die mittägliche Höhe, und (A) den Stundenwinkel t, also die Uhrzeit des Mittags

$$T + t.$$

Die Gleichung (B) hat den Vortheil, dafs man durch sie die Mittagshöhe aus einer Höhe h und die Differenzen

$$\alpha', \alpha,$$

von zwey andern Höhen, und den Differenzen

$$\beta, \beta'$$

ihrer Uhrzeiten findet. Man braucht dazu weder die Abweichung, noch die Polhöhe, noch die Uhrzeit des Mittags, die gewöhnlich durch die correspondirenden Höhen gesucht wird, welche eben so beschwerlich als wegen der Witterung ungewifs sind, noch selbst die absoluten Uhrzeiten der Beobachtungen, sondern nur ihre Differenzen zu kennen, wozu man also auch eine Uhr anwenden kann, die blofs einige Minuten richtig geht, wenn man nicht eine grofse Genauigkeit in den Resultaten verlangt. M. s. Berl. Jahrb. 1799. p. 148.

§. 9.

Es ist bereits oben erinnert worden: dafs die dem Pole nahen Sterne sich besonders zu Breitenbestimmungen eignen, und dafs unter diesen vorzüglich der Polarstern, α Ursae minoris, zu diesem Zwecke gebraucht werde. Obschon nun im allgemei-

nen die Beobachtungen dieser Gestirne im Meridian die vortheilhaftesten zur Bestimmung der Polhöhe sind, so lassen sich doch auch die Höhenbeobachtungen der Circumpolarsterne in allen andern Punkten ihres Parallelkreises mit Nutzen anwenden. Ist nämlich δ nahe gleich 90° oder $\cos \delta$ nahe gleich Null, so wird die im Anfange des §. 7. gegebene Differentialgleichung sehr nahe folgende seyn,

$$d\varphi = dh \cdot \frac{\cos h}{\cos \varphi \sin \delta} + ds \cdot \sin s \cotg \delta + d\delta \cdot \cos s$$

und man sieht daraus, daß ein Fehler in der beobachteten Höhe sehr nahe denselben Fehler in der Polhöhe hervorbringen wird, wie bey den Beobachtungen im Meridian selbst. Dasselbe hat, bey Culminationen auch für einen Fehler in der Declination statt, nicht so hier, wo dieser Fehler in größern Entfernungen vom Meridian, in seiner Wirkung auf die Polhöhe immer beträchtlich vermindert, und in keinem Falle vergrößert wird. Was endlich den Fehler der Zeit betrifft, so wollen wir annehmen, daß dieser Fehler eine ganze Zeitsecunde betrage, und daß für den Polarstern

$$\delta = 88^\circ 20'$$

ist. Daraus folgen für die Stundenwinkel

$$0^h, 2^h, 4^h, 6^h$$

die Fehler der Polhöhe

$$0'' 0, 0'' 2, 0'' 4, 0'' 5.$$

Allein auch diese geringen Fehler lassen sich noch beynahe ganz wegschaffen, wenn man eine zweyte ähnliche Beobachtung auf der andern Seite des Meridians in beynahe gleicher Entfernung von ihm anstellt, wo dieselben Fehler entgegengesetzte Zeichen erhalten. Dieses Verfahren hat noch den wesentlichen Vortheil, daß dessen Anwendung nicht wie die Beobachtung der Culminationen, von einem bestimmten Zeitmomente abhängt, und daher oft von Wolken für den ganzen Tag vereitelt wird, daß es vielmehr zu jeder willkührlichen Stunde der Nacht, und bey stärkern Fernröhren, auch des Tages vorgenommen werden kann. Auch den reisenden Astronomen muß es willkommen seyn, eine Methode zu besitzen, durch welche er in irgend einer der bequemen Abend- oder Morgenstunden durch einige wenige Beobachtungen die Polhöhe seines Ortes genauer bestimmen kann, als durch selbst mehrere Tage fortgesetzte Circummeridianhöhen der Sonne. Was endlich die große Anzahl der Multiplicationen mit wiederholenden Kreisen betrifft, durch welche manche Beobachter gerade den Zweck, den sie dadurch erreichen wollen, größere Güte und Verläßlichkeit der Resultate zu verfehlen pflegen, so

läßt sich dieses nicht geringe Hinderniß bey dieser Methode völlig vermeiden, ohne dadurch der gewünschten größern Zahl der Beobachtungen, die immer wünschenswerth bleibt, einen Eintrag zu thun. Man braucht nämlich nur nach jedem vierten oder fünften Paare von Beobachtungen abzulesen, und gleich darauf ein neues Set von Beobachtungen anzufangen, wodurch man in einer einzigen Nacht ohne Mühe sehr viele Beobachtungen machen, und sich so von seiner Polhöhe völlig versichern kann.

Ich will daher hier kurz zeigen, wie man diesen Vorschlag am besten auf Beobachtungen mit Multiplicationskreisen anwenden kann. Ist

$$p = 90 - \delta, \quad \psi = 90 - \varphi,$$

und z das arithmetische Mittel des durchlaufenen Bogens, und endlich t der Stundenwinkel, der für die Mitte der Beobachtungszeiten gehört, so setze man der Kürze wegen

$$t = \frac{1}{15} s \text{ und}$$

$$m = \frac{\sin p \sin \psi}{\sin z} \cdot \sin t$$

$$n = \frac{\sin p \sin \psi}{\sin z} \cdot \cos t = m \cotg t$$

wo t für östliche Stundenwinkel negativ ist.

Wenn man annehmen könnte, daß die Veränderung der Zenithsdistanzen der Zeit proportionirt sind, eine Annahme, die immer sehr nahe wahr seyn wird, wenn man nur nicht die Beobachtungen zu unmäßig ausdehnt, so würde die Auflösung unserer Aufgabe sich darauf reduciren, daß man den Werth von ψ aus der Gleichung

$$\cos z = \cos \psi \cos p + \sin \psi \sin p \cos t$$

suchte, was sich auf mehr als eine Art bequem thun läßt. Da aber streng genommen jene Voraussetzung unrichtig ist, so wollen wir annehmen, daß nicht z , sondern $z - dz$ die Zenithdistanz ist, die zu dem Stundenwinkel t der Mitte der Zeiten gehört. Diese GröÙe dz läßt sich auf eben so verschiedene Weise finden wie die §. 5 und 6 gegebene Reduction auf den Meridian. Wählt man die Methode des §. 5, so ist

$$dz = m \cdot 2 \sin \frac{s}{2} + A \cdot 2 \sin \frac{s}{2} - B \cdot 2 \sin^3 \frac{s}{2} + C \cdot 2 \sin^5 \frac{s}{2} - \dots$$

wo s die Differenz der Beobachtungszeit und die Mitte aller Beobachtungszeiten ist, und wo man hat

$$A = n - m^2 \cotg z$$

$$B = \frac{m}{2} + 2mn \operatorname{Cotg} z - \frac{2}{3} m^3 - 2m^3 \operatorname{Cotg}^2 z$$

$$C = 2m^2 n - (n^2 - m^2 + 3m^4) \operatorname{Cotg} z \\ + 6m^2 n \operatorname{Cotg}^2 z - 5m^4 \operatorname{Cotg}^3 z$$

Die Entwicklung dieser Ausdrücke für jede einzelne Beobachtung würde aber das ganze Verfahren sehr unbequem und zum täglichen Gebrauche ungeschickt machen. Folgende Betrachtungen werden es abkürzen.

Sind

$$z, z', z'',$$

jene Differenzen der Zeiten v or, und

$$z, z', z'', \dots$$

nach dem Mittel der Beobachtungszeiten, so ist das erste Glied von $d z$ gleich

$$\frac{2m}{N} \left(\sin \frac{z}{2} + \sin \frac{z'}{2} + \dots - \sin \frac{z'}{2} - \sin \frac{z''}{2} - \dots \right)$$

wo N die Zahl der Beobachtungen bezeichnet. Da aber, wenn die ganze Beobachtungszeit nicht groß ist, und ihre Ausdehnung steht immer in der Willkür des Beobachters, die Größen

$$\frac{z}{2}, \frac{z'}{2}, \dots$$

nur klein seyn können, so wird man in den vorhergehenden Ausdrücken für die Sinus die Bogen derselben substituiren können, um so mehr, da der gemeinschaftliche Factor m derselben immer sehr klein ist, selbst in den ungünstigsten Orten des Sterns, in seinen größten Digressionen vom Meridian, wo er sehr nahe dem Sinus der Poldistanz des Gestirns gleich wird. Man wird also für dieses erste Glied haben

$$\frac{m}{N} (z + z' + z'' \dots - z' - z'' - z''' \dots)$$

ein Ausdruck, der gleich Null ist, weil sein positiver Theil seinem negativen gleich ist. Eine ähnliche Bemerkung gilt auch für den dritten Theil des Ausdrucks, für $d z$, dessen Coefficient B , besonders wenn der Stundenwinkel nicht zu groß ist, noch kleiner wird. Was endlich das letzte Glied betrifft, so ist es in allen Fällen so klein, daß es immer ohne alle merklichen Folgen, gänzlich vernachlässigt werden kann. Es bleibt daher bloß das zweyte Glied übrig, und das ganze Verfahren reduziert sich auf folgende einfache Ausdrücke:

Man suche $d z$ und x aus den Gleichungen

$$dz = (n - m^2 \cotg z) \cdot \frac{1}{N} \cdot \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{z}{2}}{\sin 1''}$$

$$\text{Tg } x = \text{Tg } p \cos t$$

so findet man die wahre Aequatorhöhe ψ aus der Gleichung

$$\cos(\psi - x) = \frac{\cos x \cos(z - dz)}{\cos p}$$

In diesem Ausdrucke ist Σ das bekannte Summenzeichen, und die Gröfse

$$\frac{2 \sin^2 \frac{z}{2}}{\sin 1''}$$

findet man aus der Tafel, deren in §. 5. u. f. schon Erwähnung gethan wurde.

Ex. 1816 den 23. September war

scheinb. AR Polarstern $0^h 56' 40'' 73$

scheinb. Poldistanz $p = 1^\circ 40' 19.65$

Für drey aufeinanderfolgende Aggregate von zehnfachen Zenithdistanzen in Ofen war

	I.	II.	III.
Uhrzeit der Mitte ..	$1^h 32' 58'' 7$	$1^h 46' 52.8$	$2^h 25' 29.7$
Uhrz. d. Culmination o	$55 \quad 3.5$		
t =	$0^h 37' 55'' 2$	$0^h 51' 49'' 3$	$1^h 30' 26'' 2$
Mittel des durchlaufenen Bogens ..	$40^\circ 51' 3'' 9$	$40^\circ 52' 17'' 9$	$40^\circ 57' 34.0$
wahre Refraction	49.1	49.1	49.3
dz	$— 0.4$	$— 0.3$	$— 0.3$
z — dz =	$40^\circ 51' 52'' 6$	$40^\circ 53' 6.7$	$40^\circ 58' 23.0$

woraus sofort die Aequatorhöhe

$$\psi = 42^\circ 30' 47'' 2 \quad \dots \quad 42^\circ 30' 48'' 0 \quad \dots \quad 42^\circ 30' 47'' 0$$

§. 10.

Wir wollen jetzt noch zu denjenigen Methoden übergchen, in welchen man zugleich die Zeit und die Polhöhe bestimmt. Die vorzüglichsten dieser Methoden lassen sich auf folgende zwey Probleme zurückführen.

1. Aus der beobachteten Höhe zweyer Sterne und der Zwischenzeit, die Zeiten der Beobachtungen und die Polhöhe finden. Diese Aufgabe wird einfacher, wenn a die beyden Höhenbeobachtungen an demselben Stern (Dowes Methode) oder wenn b die beyden Beobachtungen an verschiedenen Sternen, aber gleichzeitig, gemacht worden sind.

2. Aus drey Sternen und den Zwischenzeiten die Zeit, die Polhöhe und noch ein unbekanntes Element z. B. den Collimationsfehler des Instruments, oder die Declination des Sterns etc. finden.

Für mehr als drey Sterne, oder mehr als drey Beobachtungen an einem Sterne werden die analytischen Ausdrücke zu verwickelt und auch überflüssig, da man mit zwey oder drey Beobachtungen, wie man sehen wird, alle hierhergehörigen wahrhaft nützlichen Aufgaben vollständig auflösen kann.

§. 11.

Aus zwey Höhen zweyer Sterne und der Zwischenzeit der Beobachtungen die Zeit und die Polhöhe finden.

Es seyen $\alpha \alpha'$ die scheinbaren Rectascensionen, $\delta \delta'$ die Declinationen, $h h'$ die beobachteten (von Refraction etc.) gereinigten Höhen beyder Sterne, und t die Zwischenzeit in Graden. Sey (in einer leicht zu entwerfenden Figur) Z das Zenith, P der Pol des Aequators, a und β der Ort der beyden Sterne.

I. Man stelle sich vor, daß bey der ersten Beobachtung das erste Gestirn in a , und ein anderes zu gleicher Zeit in b ist. In der Zwischenzeit t beyder Beobachtungen soll das zweyte Gestirn von b nach β gehen, so ist bekannt

$$b P \beta = t, \text{ und}$$

$$b P a = \alpha' - \alpha,$$

also ist auch bekannt

$$\beta P a = t + \alpha' - \alpha,$$

$$P a = 90 - \delta,$$

$$P \beta = 90 - \delta',$$

und daher findet man aus dem Dreyecke $a P \beta$ die dritte Seite $\beta a = x$ und einen der anliegenden Winkel $P \beta a = y$.

In dem Dreyecke $Z \beta a$ kennt man alle drey Seiten

$$\beta a = x, a Z = 90 - h, \beta Z = 90 - h'$$

also findet man den Winkel

I.

M

$$Z \beta a = z$$

und daher auch den Winkel

$$Z \beta P = y + z.$$

In dem Dreyecke $Z P \beta$ endlich kennt man

$$Z \beta P = y + z, Z \beta = 90 - h', P \beta = 90 - \delta',$$

also findet man den Winkel $Z P \beta$ oder die Zeit der Beobachtung und die Seite $P Z$ oder die Polhöhe.

Dies ist die geometrische Auflösung unserer Aufgabe. Wir wollen nun sehen, wie sich diese Betrachtungen etwa einfacher analytisch ausdrücken lassen, da sich die gegebene Auflösung auf die vollständige Entwicklung dreier sphärischer Dreyecke gründet, und also für die Ausübung beschwerlich ist.

II. Sind $\gamma \gamma'$ die in Grade verwandelten Sternzeiten der Beobachtungen, also

$$\gamma - \alpha = t,$$

$$\gamma' - \alpha' = t - s$$

die Stundenwinkel, wo

$$s = (\alpha' - \alpha) - (\gamma' - \gamma)$$

bekannt ist, weil $\gamma' - \gamma$, die in Grade verwandelte Sternzeit der Zwischenzeit ist.

Bezeichnet φ die Polhöhe, so hat man

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t \dots (1)$$

$$\sin h' = \sin \delta' \sin \varphi + \cos \delta' \cos \varphi \cos (t-s) \dots (2)$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} & (\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t)^2 \\ & + (\cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos t)^2 \\ & = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos^2 t, \end{aligned}$$

also wird die Gleichung (1)

$$\begin{aligned} & (\cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos t)^2 \\ & + \cos^2 \varphi \sin^2 t - \cos^2 h = 0 \end{aligned}$$

Ist also

$$\cos c = \frac{\cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos t}{\cos h}$$

so ist

$$\sin t \cos \varphi = \cos h \sin c$$

und wenn man in der vorletzten Gleichung den Werth

$$\frac{\sin h - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos t}$$

für $\cos \varphi$ aus (1) substituirt, oder auch, wenn man in derselben Gleichung den Werth

$$\frac{\sin h - \cos \delta \cos \varphi \cos t}{\sin \delta}$$

für $\sin \varphi$ substituirt, so erhält man

$$\sin \varphi = \sin \delta \sin h + \cos \delta \cos h \cos c,$$

oder

$$\cos \varphi \cos t = \cos \delta \sin h - \sin \delta \cos h \cos c$$

Die Gleichung (2) gibt ferner

$$\sin h' = \sin \delta' \sin \varphi$$

$$+ \cos \vartheta \cos \delta' \cos \varphi \cos t + \sin \vartheta \cos \delta' \cos \varphi \sin t,$$

und wenn man in dieser Gleichung die vorhergehenden Werthe von

$$\sin \varphi, \cos \varphi \cos t, \cos \varphi \sin t$$

substituirt, und

$$\operatorname{Tg} a = \frac{\sin \vartheta \cos \delta'}{\cos \delta \sin \delta' - \sin \delta \cos \delta' \cos \vartheta} \dots (3)$$

setzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \sin h' &= \sin h \sin \delta \sin \delta' - \sin h \cos \vartheta \cos \delta \cos \delta' \\ &= \cos h \sin \vartheta \cos \delta' (\cos c \operatorname{Cotg} a + \sin c) \end{aligned}$$

Setzt man also

$$a - c = b,$$

so ist

$$\cos b =$$

$$\frac{\sin a (\sin h' - \sin h \sin \delta \sin \delta' - \sin h \cos \vartheta \cos \delta \cos \delta')}{\cos h \sin \vartheta \cos \delta'} \dots (4)$$

Hat man aber so die Werthe von a und b gefunden, so kennt man auch $c = a - b$ und sonach t durch die Gleichung

$$\operatorname{Tg} t = \frac{\cos h \sin c}{\cos \delta \sin h - \sin \delta \cos h \cos c} \dots (5)$$

woraus man

$$\gamma = \alpha + t$$

oder die Sternzeit der Beobachtung, und endlich die Polhöhe φ durch die Gleichung findet

$$\operatorname{Tg} \varphi = \frac{\sin t}{\cos h \sin c} (\sin \delta \sin h + \cos \delta \cos h \cos c) \dots (6)$$

Die Gleichungen (3) bis (6) enthalten die Auflösung unserer Aufgabe. Man kann sie durch Einführung zweyer Hülfswinkel A und B zur Rechnung bequemer machen. Ist nämlich

$$\operatorname{Tg} A = \frac{\operatorname{Tg} \delta'}{\operatorname{Cos} \vartheta}$$

$$\operatorname{Tg} a = \frac{\operatorname{Cos} A \operatorname{Tg} \vartheta}{\operatorname{Sin} (A - \delta)}$$

$$\operatorname{Cos} b = \frac{\operatorname{Cos} a \operatorname{Tg} h}{\operatorname{Tg} (A - \delta)} \cdot \left(\frac{\operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} h'}{\operatorname{Sin} h \operatorname{Sin} \delta' \operatorname{Cos} (A - \delta)} - 1 \right)$$

und

$$\operatorname{Tg} B = \frac{\operatorname{Tg} h}{\operatorname{Cos} (a - b)}$$

so hat man

$$\operatorname{Tg} t = \frac{\operatorname{Cos} B \operatorname{Tg} (a - b)}{\operatorname{Sin} (B - \delta)}$$

$$\operatorname{Tg} \varphi = \operatorname{Cos} t \operatorname{Cotg} (B - \delta)$$

Man bemerke noch, daß $\operatorname{Sin} t$ dasselbe Zeichen mit $\operatorname{Sin} (a - b)$ haben, und daß

$$\operatorname{Sin} a, \operatorname{Sin} b$$

dieselben, oder entgegengesetzte Zeichen haben muß, nachdem der Vertikalkreis des ersten Sterns dem des zweyten rechts oder links liegt.

Die Verlässlichkeit dieser Methode zu prüfen, wollen wir die Fehler aufsuchen, die in der Bestimmung der Zeit sowohl, als der Polhöhe, durch die Fehler in den beobachteten Höhen entstehen. Nimmt man zu diesem Zwecke in der Gleichung (1) die Größen

$$h, \varphi, t$$

als veränderlich an, so ist, wenn ω das Azimut des ersten Sterns ist,

$$d h = - d \varphi \operatorname{Cos} \omega - d t \operatorname{Sin} \omega \operatorname{Cos} \varphi$$

und eben so

$$d h' = - d \varphi \operatorname{Cos} \omega' - d t \operatorname{Sin} \omega' \operatorname{Cos} \varphi$$

und aus diesen beyden Gleichungen erhält man

$$d \varphi = \frac{d h \operatorname{Sin} \omega'}{\operatorname{Sin} (\omega - \omega')} - \frac{d h' \operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Sin} (\omega - \omega')}$$

$$d t = \frac{d h \operatorname{Cos} \omega'}{\operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} (\omega' - \omega)} - \frac{d h' \operatorname{Cos} \omega}{\operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} (\omega' - \omega)}$$

Man wird also solche Sterne vermeiden, bey denen ($\omega' - \omega$) nahe an 0 oder 180° ist, oder deren Vertikalkreise einander sehr nahe oder beynahe gegenüber liegen. Berl. Jahrb. 1812 p. 129.

III. Die vorhergehende Auflösung ist allerdings bequemer, als die in I. gegebene, sie ist aber noch immer für die Ausübung etwas umständlich. — Da aber die Polhöhe des Beobachtungsortes in beynahe allen Fällen schon als nahe bekannt vorausgesetzt werden kann, so werden wir dieser Voraussetzung gemäß, noch eine indirecte Auflösung dieser Aufgabe geben, welche für die Ausübung viel bequemer ist.

Sey

$$p = 90 - \delta$$

die Poldistanz,

$$a = 90 - h$$

die von dem Collimationsfehler, der Refraction etc. gereinigte Zenithdistanz,

$$y \text{ und } \omega$$

der Stundenwinkel und das Azimut (beyde negativ auf der Ostseite des Meridians); für einen zweyten Stern seyen diese Größen p' , a' . . . Endlich seyen wie vorhin γ , γ' die Rectascensionen des Zeniths zur Zeit beyder Beobachtungen.

Nennt man

$$y' = y - \mathfrak{z}$$

so ist

$$\gamma - \alpha = y; \gamma' - \alpha' = y' \text{ also } y - y'$$

oder

$$\mathfrak{z} = (\alpha' - \alpha) - (\gamma' - \gamma)$$

so dafs also, wie zuvor, $\mathfrak{z}$ bekannt ist.

Es sey nun die beynahe bekannte Höhe des Aequators x ,
so ist

$$\cos \frac{1}{2} y = \frac{\sin \frac{p+x+a}{2} \sin \frac{p+x-a}{2}}{\sin p \sin x}$$

$$\cos \frac{1}{2} y' = \frac{\sin \frac{p'+x+a'}{2} \sin \frac{p'+x-a'}{2}}{\sin p' \sin x}$$

Ist x gut gewählt, so ist

$$\gamma = \alpha + y = \alpha + y' + \mathfrak{z} \text{ und}$$

$$\gamma' = \alpha' + y' = \alpha' + y - \mathfrak{z}$$

Ist aber x fehlerhaft, so werden auch die beyden für γ und γ' gegebenen Ausdrücke nicht gleich seyn.

Wir wollen annehmen, daß dx der unbekannte Fehler von x sey, so hat man

$$dy = dx \frac{\cotg \omega}{\sin x} = A dx,$$

$$dy' = dx \frac{\cotg \omega'}{\sin x} = A' dx$$

und die Rectascension des Zeniths wird seyn

$$\gamma = \alpha + y + A dx = \alpha + y' + z + A' dx$$

$$\gamma' = \alpha' + y' + A' dx = \alpha' + y - z + A dx$$

und aus beyden folgt

$$dx = \frac{y' - y + z}{A - A'}$$

Daraus entspringt also folgende Auflösung:

Man suche zuerst y und y' aus den beyden obigen Gleichungen, und dann bloß in Minuten die Werthe von ω , ω' durch die Ausdrücke

$$\sin \omega = \frac{\sin p \sin y}{\sin a}, \quad \sin \omega' = \frac{\sin p' \sin y'}{\sin a'}$$

so ist

$$A = \frac{\cotg \omega}{\sin x}, \quad A' = \frac{\cotg \omega'}{\sin x}$$

und

$$dx = \frac{y' - y + z}{A - A'}$$

also die wahre Aequatorhöhe gleich

$$x + dx$$

und die wahre Rectascension des Zeniths

$$\gamma = \alpha + y + A dx = \alpha + y' + z + A' dx$$

$$\gamma' = \alpha' + y' + A' dx = \alpha' + y - z + A dx$$

Verwandelt man dann γ , γ' in Sternzeit, so geben sie unmittelbar die wahren Sternzeiten der Beobachtungen, also auch die mittlern oder wahren Zeiten, d. h. die Correction der Uhr. Berl. Jahrb. 1817. p. 136.

Ex. 1809 May 17. in Göttingen

Uhrzeit	Höhe	Fehl. des Instr.
α Bootis 16 ^h 8' 25'' . .	50° 5' 0'' West. .	+32''.5
α Aquilae 16 37 49 . .	33 35 0 Ost	
$h = 50^\circ 3' 38'' 7$		
$h' = 33 33 0. 0$		

Die scheinbaren Rectascensionen und Declinationen sind

$$\begin{aligned}\alpha &= 211^\circ 44' 54'' 83 \\ \alpha' &= 295 \quad 22 \quad 17. \quad 50 \\ \delta &= 20^\circ 10' 56'' 02 \\ \delta' &= 8 \quad 22 \quad 35 \quad 45 \\ \gamma' - \gamma &= 0^h 29' 24'' = 7^\circ 21' 0'' \\ s &= 76^\circ 16' 22'' 62\end{aligned}$$

Daraus folgt, nach N. II.

$$A = 31^\circ 49' 14'' 13$$

$$a = 86 \quad 40 \quad 51. \quad 11$$

$$b = 56 \quad 2 \quad 46. \quad 29$$

$$B = 54 \quad 13 \quad 46. \quad 73$$

$$t = 31 \quad 43 \quad 42. \quad 45, \quad t + \gamma = 16^h 13' 54'' 49 = \gamma$$

$$\begin{array}{r} 16 \quad 8 \quad 25. \quad 00 \\ \hline \end{array}$$

$$90 - \varphi = 38^\circ 27' 54'' 47 \quad \begin{array}{r} 0^h. \quad 5' 29'' 49 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \text{Verspät. d. Uhr} \\ \text{gen Sternzeit} \end{array}$$

und eben so

$$\begin{aligned}\gamma' &= \alpha' - \alpha - s + \gamma = 16^h 43' 18'' 49 \\ &\quad \begin{array}{r} 16 \quad 37 \quad 49 \\ \hline \end{array} \\ &\quad \begin{array}{r} 0^h \quad 5' 29 \quad 49 \end{array}\end{aligned}$$

Dasselbe Beyspiel gibt nach N. III.

$$a = 39^\circ 56' 21'' 3$$

$$a' = 56 \quad 27 \quad 0. \quad 0$$

$$p = 69^\circ 49' 3'' 98$$

$$p' = 81 \quad 37 \quad 24. \quad 55$$

Sey $x = 38^\circ 28' 10''$ so ist

$$y = 31^{\circ} 44' 3'' 34$$

$$\omega = 50^{\circ} 15' 9$$

$$A = 1.3362$$

$$y' = -44^{\circ} 32' 57'' 02$$

$$\omega' = -56^{\circ} 23' 09$$

$$A' = -1.0686$$

$$d x = -\frac{37.74}{2.4048} = -15'' 69352,$$

also wahre Aequatorhöhe

$$x - 15'' 69 = 38^{\circ} 27' 54'' 31$$

$$\gamma = 243^{\circ} 28' 37'' 25$$

in Zeit $16^h 13' 54'' 48$

$$16 \quad [8 \quad 25]$$

Corr. der Uhr $+ 5' 29'' 48$

$$\gamma' = 250^{\circ} 49' 37'' 25$$

$$16^h 43' 18'' 48$$

$$16 \quad 37 \quad 49$$

$$+ 5' 29'' 48 \quad \text{wie zuvor.}$$

IV. Wollte man voraussetzen, daß heyde Höhen in demselben Augenblicke genommen wurden, so wird man damit für die Ausübung nichts gewinnen, da zwey Beobachter, zwey Instrumente und zugleich die genaueste Uebereinstimmung in den Beobachtungen gefordert wird, und da die Auflösung nur wenig einfacher wird. Die Ausdrücke des N. II. gelten nämlich auch hier unverändert, wenn man

$$\gamma = \gamma' \text{ oder } \vartheta = \alpha' - \alpha$$

setzt, und dasselbe gilt von N. III. Für die Voraussetzung gleicher Höhen zweyer Sterne sehe man Berl. Ephem. 1787. Für die gleicher Stundenkreise endlich ibid. 1797.

V. Setzt man aber voraus, daß beyde Höhen an einem und demselben Stern genommen wurden, so wird die Auflösung in der That einfacher, aber, wie wir unten sehen werden, man muß in den meisten Fällen eine beträchtliche Zwischenzeit zwischen den Beobachtungen annehmen, oder sich auf den Gang der Uhr durch mehrere Stunden genau verlassen können.

§. 12.

Aus zwey Höhen eines Sternes und der Zwischenzeit der Beobachtungen die Zeit und die Polhöhe finden.

I. Der Stern sey in den beyden Beobachtungen in a und in b (vorige Figur). Man suche wieder in dem Dreyecke P b a, wo $P a = P b$ ist, die Seite ab und den Winkel P b a, so kennt man in dem Dreyecke Z a b alle Seiten, also auch den Winkel Z b a und daher auch

$$Z b P = Z b a - P b a.$$

In dem Dreyecke Z b P endlich kennt man

$$Z b P, Z b, P b$$

also findet man Z P b oder die Zeit, und P Z oder die Polhöhe.

II. Setzt man in §. 11. II.

$$\alpha = \alpha' \text{ und } \delta = \delta'$$

so erhält man für die gegenwärtige Aufgabe, wenn man die Bezeichnungen des angeführten Orts beybehält,

$$\operatorname{Tg} a = \frac{\operatorname{Cotg} \frac{\mathfrak{z}}{2}}{\sin \delta}$$

wo $\mathfrak{z}$ die in Grade verwandelte Zwischenzeit ist.

$$\cos b = \cos a \left\{ \frac{2 \cos \frac{h' + h}{2} \sin \frac{h' - h}{2}}{\cos h \sin 2 \delta \sin^2 \frac{1}{2} \mathfrak{z}} + \operatorname{Tg} h \operatorname{Cotg} \delta \right\}$$

$$\operatorname{Tg} t = \frac{\sin (a - b)}{\operatorname{Tg} h \cos \delta - \sin \delta \cos (a - b)}$$

$$\operatorname{Tg} \varphi = \frac{\cos h \sin (a - b)}{\sin t}$$

III. Auch lassen sich die Vorschriften des N. I. am kürzesten in folgende analytische Ausdrücke bringen, wo

$$ab = A, abZ = B, Pba = C$$

und $\mathfrak{z}$ die in Grade verwandelte Zwischenzeit ist

$$\sin \frac{A}{2} = \cos \delta \sin \frac{1}{2} \mathfrak{z}$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{h+h'+A}{2} \sin \frac{h-h'+A}{2}}{\cos h \sin A}}$$

$$\cotg C = \sin \delta \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \mathfrak{S},$$

$$\operatorname{Tg} D = (C \mp B) \cotg \delta$$

$$\sin \varphi = \frac{\sin \delta \sin (h+D)}{\cos D}$$

Ist $\varphi > \delta$, so ist $C - B$,

und ist $\varphi < \delta$ so ist $C + B$

in der vorletzten Gleichung zu nehmen.

Endlich kann man auch so verfahren

$$A = \cos \frac{h+h'}{2} \sin \frac{h-h'}{2}$$

$$B = - \sin \frac{h+h'}{2} \cos \frac{h-h'}{2}$$

$$\sin m = \frac{A}{\cos \delta \sin \frac{\mathfrak{S}}{2}}$$

$$\operatorname{Tg} \beta = \frac{\operatorname{Tg} \delta}{\cos \frac{1}{2} \mathfrak{S}}$$

$$\operatorname{Tg} \gamma = \frac{B \cos \beta}{\cos \delta \cos m \cos \frac{1}{2} \mathfrak{S}}$$

Dies vorausgesetzt, hat man

$$\sin \varphi = \cos m \cos (\beta - \gamma)$$

oder

$$\sin \varphi = - \cos m \cos (\beta + \gamma)$$

und man erhält hier sowohl, als in allen vorhergehenden Auflösungen eine doppelte Polhöhe, deren jede der Aufgabe Genüge thut, und aus denen man die wahre für seinen Beobachtungsort immer leicht finden wird. Endlich ist

$$\sin (t + \frac{1}{2} \mathfrak{S}) = \frac{\sin m}{\cos \varphi}$$

woraus man den Stundenwinkel beyder Beobachtungen, also die Correction der Uhr findet.

Aber alle diese Auflösungen unserer Aufgabe sind, wie man sieht, nur wenig bequemer, als die Auflösung der allgemeinen

Aufgabe des §. 11., und stehen daher jener um so mehr nach, da man bey der allgemeinen die Zwischenzeit so kurz als möglich wählen kann, welches bey mittelmässigen Uhren ein gröfser Vortheil ist. — Wir wollen nun auch sehen, ob die indirecten Auflösungen der gegenwärtigen Aufgabe bequemer sind.

IV. Sind wieder h, h' die Höhen, t, t' die Stundenwinkel, δ die scheinbare Abweichung, und φ die vorläufig angenommene Polhöhe, so ist, wie man leicht findet,

$$\sin \frac{t' + t}{2} \sin \frac{t' - t}{2} = \frac{\cos \frac{h + h'}{2} \sin \frac{h - h'}{2}}{\cos \varphi \cos \delta}$$

Liegen die beyden Höhen auf entgegengesetzten oder auf denselben Seiten des Meridians, so ist im ersten Falle

$$\frac{t + t'}{2}$$

und im zweyten

$$\frac{t' - t}{2}$$

als die halbe Zwischenzeit, bekannt, also kann man in beyden Fällen mittels der vorhergehenden Gleichung die Gröfse t und t' finden, und es ist klar, dafs im allgemeinen ein Fehler der vorläufig angenommenen Polhöhe auf die Bestimmung der Zeit t, t' nur einen sehr verminderten Einflufs äufsern wird, wenn die eine Höhe nahe am Meridian, und die andere sehr weit vom Meridian beobachtet worden ist. Hat man also auf diese Art t und t' gefunden, so findet man die wahre Polhöhe φ' aus

$$\begin{aligned} \cos (\varphi' - \delta) &= \sin h' + 2 \sin^2 \frac{1}{2} t' \cos \varphi \cos \delta \\ &= \sin h + 2 \sin^2 \frac{1}{2} t \cos \varphi \cos \delta \end{aligned}$$

oder aus

$$\begin{aligned} \cos (\varphi' + \delta) &= 2 \cos^2 \frac{1}{2} t' \cos \varphi \cos \delta - \sin h' \\ &= 2 \cos^2 \frac{1}{2} t \cos \varphi \cos \delta - \sin h \end{aligned}$$

wo man den letzten Gleichungen zur Rechnung folgende bequemere Gestalt geben kann

$$\sin h = \operatorname{Tg} A$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} t \cos \varphi \cos \delta = \operatorname{Tg} B$$

$$\cos (\varphi' - \delta) = \frac{\sin (A + B)}{\cos A \cos B}$$

oder

$$\sin h = \operatorname{Tg} A'$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} t \cos \varphi \cos \delta = \operatorname{Tg} B'$$

$$\cos (\varphi + \delta) = \frac{\sin (B' - A')}{\cos B' \cos A'}$$

Ex. 1793. 28. September, in der Nähe von Gotha

Uhrzeit corrig. Höh. d. Sonne

$$21^h \ 1' \ 19'', \ 2 \quad 36^\circ 41' \ 11.8 = h'$$

$$23 \ 37 \ 4. \ 0 \quad 26 \ 33 \ 21.0$$

Die Zwischenzeit der Beobachtungen ist

$$2^h \ 36' \ 44''. \ 8$$

wozu $1'' \ 7$ addirt werden muß, weil die Uhr in 24 Stunden um $15'' \ 59$ gegen wahre Zeit zurück blieb. Da beyde Höhen auf derselben Seite des Meridians genommen wurden, so ist

$$\frac{t-t'}{2} = 19^\circ \ 28' \ 18'' \ 7$$

Die Abweichung der Sonne in der Mitte beyder Beobachtungen ist

$$\delta = -2^\circ \ 14' \ 9''$$

und die vorläufige Breite sey

$$\varphi = 51^\circ \ 10' \ 50''$$

Daraus folgt also

$$\frac{t+t'}{2} = 21^\circ \ 6' \ 16'' \ 2$$

$$\frac{t-t'}{2} = 19 \ 28 \ 18. \ 7$$

$$t' = 1 \ 37 \ 57'' \ 5$$

und daraus folgt

$$\varphi' = 51^\circ \ 0' \ 50''$$

Diese Methode, die Zeit und die Polhöhe zu finden, wurde von Douwes vorgeschlagen. M. s. Bodes astr. Jahrb. erster Supplementband S. 42. und Bohnenbergers Anleitung zur Ortsbestimmung p. 283. Berl. Jahrb. 1798. p. 176. Eine vorzüglich für Schiffer brauchbare Auflösung dieses Problems s. m. in B. Zachs Correspond. astronomique. 1820. März.

I. Nach der ersten Differentialgleichung des §. 7. hat man für die erste Beobachtung, wenn man die h , h' als richtig voraussetzt

$$dt = - \frac{d\varphi}{\cos \varphi \operatorname{Tg} \omega}$$

und für die zweyte

$$d\varphi' = - dt' \cos \varphi \operatorname{Tg} \omega'$$

Setzt man also für einen gleichförmigen Gang der Uhr beyde Werthe von dt , dt' einander gleich, so ist

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = \frac{\operatorname{Tg} \omega'}{\operatorname{Tg} \omega}$$

Ist daher

$$\operatorname{Tg} \omega' = \operatorname{Tg} \omega$$

wenn beyde Beobachtungen in gleichen Entfernungen vom Meridian genommen wurden, so ist auch

$$d\varphi' = d\varphi$$

und man erhält immer wieder die alte hypothetische Polhöhe

$$\varphi' = \varphi$$

Ist aber

$$\operatorname{Tg} \omega' < \operatorname{Tg} \omega$$

so wird

$$d\varphi' < d\varphi$$

seyn, und ist endlich

$$\operatorname{Tg} \omega' > \operatorname{Tg} \omega$$

so wird auch

$$d\varphi' > d\varphi$$

seyn, oder jede neue Hypothese wird sich immer mehr und mehr von der Wahrheit entfernen.

§. 13.

Wir wollen nun noch sehen, wie man aus drey Beobachtungen von drey Sternen die Gröfse φ , t und noch irgend ein willkührliches Element bestimmen kann.

Es seyen α α' α'' die scheinbaren Rectascensionen, δ δ' δ'' die Declinationen dieser Sterne, die man in derselben Höhe h zu den Uhrzeiten s s' s'' beobachtet hat.

Geht die Uhr nach Sternzeit, und ist k die Voreilung derselben vor Sternzeit, so sind

$$s = k + s - \alpha$$

$$s' = k + s' - \alpha'$$

$$s'' = k + s'' - \alpha''$$

in Bogen verwandelt ($15^\circ = 1^h$) die Stundenwinkel der Sterne, also ist, wenn

$$\begin{aligned} s - \alpha &= p, \quad s' - \alpha' = p', \quad s'' - \alpha'' = p'' \text{ ist,} \\ \left. \begin{aligned} \sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (p - k) \\ \sin h &= \sin \varphi \sin \delta' + \cos \varphi \cos \delta' \cos (p' - k) \\ \sin h &= \sin \varphi \sin \delta'' + \cos \varphi \cos \delta'' \cos (p'' - k) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Zieht man die erste dieser Gleichungen von der zweyten ab, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Tg} \varphi &= \cos \frac{p' - p}{2} \operatorname{Tg} \frac{\delta' + \delta}{2} \cos \left(\frac{p' + p}{2} - k \right) \\ &+ \sin \frac{p' - p}{2} \operatorname{Cotg} \frac{\delta' - \delta}{2} \sin \left(\frac{p' + p}{2} - k \right) \end{aligned}$$

Es sey daher

$$A \sin B = \sin \frac{p' - p}{2} \operatorname{Cotg} \frac{\delta' - \delta}{2}$$

$$A \cos B = \cos \frac{p' - p}{2} \operatorname{Tg} \frac{\delta' + \delta}{2} \text{ und}$$

$$C = \frac{p' + p}{2} - B$$

so ist die letzte Gleichung

$$\operatorname{Tg} \varphi = A \cos (C - k) \dots (1)$$

Auf dieselbe Art erhält man

$$A' \sin B' = \sin \frac{p'' - p}{2} \operatorname{Cotg} \frac{\delta' - \delta}{2}$$

$$A' \cos B' = \cos \frac{p'' - p}{2} \operatorname{Tg} \frac{\delta'' + \delta}{2}$$

$$C' = \frac{p'' + p}{2} - B'$$

$$\operatorname{Tg} \varphi = A' \cos (C' - k) \dots (2)$$

Beide Werthe von $\operatorname{Tg} \varphi$ geben

$$0 = A \cos (C - k) - A' \cos (C' - k) \text{ oder}$$

$$0 = ((A' - A) - (A' + A)) \cos (C - k)$$

$$+ ((A' - A) + (A' + A)) \cos (C' - k)$$

oder

$$\begin{aligned} 0 &= (A' - A) (\cos (C - k) + \cos (C' - k)) \\ &- (A' + A) (\cos (C - k) - \cos (C' - k)) \end{aligned}$$

oder endlich

$$\begin{aligned} 0 &= (A' - A) \cos \left(\frac{C + C'}{2} - k \right) \cos \left(\frac{C' - C}{2} \right) \\ &- (A' + A) \sin \left(\frac{C + C'}{2} - k \right) \sin \frac{C' - C}{2} \end{aligned}$$

Setzt man also

$$\frac{A}{A'} = \operatorname{Tg} x, \text{ so ist}$$

$$\frac{A' - A}{A' + A} = \operatorname{Tg} (45^\circ - x)$$

und setzt man

$$\operatorname{Tg} y = \operatorname{Tg} (45^\circ - k) \operatorname{Cotg} \frac{C' - C}{2}$$

$$\text{so ist} \quad k = \frac{1}{2} (C' + C) - y \dots (3)$$

Die Gleichung (1) oder (2) gibt die Polhöhe, und (3) die Voreilung der Uhr.

Mit φ und k kann man aus einer der drey ersten Gleichungen die wahre Höhe h berechnen, und dann ist

$$h + \text{Refraction}$$

die scheinbare Höhe der Rechnung, die mit der durch den Collimations-Fehler verbesserten beobachteten Höhe verglichen den Theilungs-Fehler des Instrumentes gibt.

Bey der Wahl der Sterne hat man vorzüglich darauf zu sehen, daß die Azimute derselben so viel als möglich verschieden sind, oder daß ihre Vertikalkreise am Zenith nicht zu kleine Winkel bilden.

I. Eine andere vorzügliche Auflösung dieser Aufgabe ist in folgenden Ausdrücken enthalten.

Sind wieder s, s', s'' die Uhrzeiten der gemeinschaftlichen Höhe h , und k die Voreilung der Uhr vor Sternzeit, die ich für alle drey Beobachtungen als constant annehme. (Ist das nicht der Fall, geht z. B. die Uhr nach mittlerer Zeit, so kann k die Voreilung der Uhr bey der ersten Beobachtung seyn, und dann muß man die Zeiten s, s'' gehörig verändern, also z. B. vermindern, wenn die Uhr schneller als Sternzeit geht). Sind ferner wieder

$$s = s' - k - \alpha$$

$$s' = \zeta' - k - \alpha'$$

$$s'' = \zeta'' - k - \alpha''$$

die Stundenwinkel, und

$$\zeta - \alpha = p,$$

$$\zeta' - \alpha' = p'$$

$$\zeta'' - \alpha'' = p'',$$

so sey in einer leicht zu entwerfenden Zeichnung Z das Zenith, P der Pol des Aequators und A A' A'' die drey Orte des Sterns,

Ferner seyen die parallactischen Winkel

$$Z A P = a$$

$$Z A' P = a',$$

$$Z A'' P = a''$$

so ist

$$- P A A' + P A' A$$

$$= - (P A A' - Z A A') + (P A' A - Z A A')$$

$$= a + a'$$

weil

$$Z A A' = Z A' A \text{ ist,}$$

also ist nach den Nepperschen Ausdrücken (Cap. I.)

$$\operatorname{Tg} \frac{a' + a}{2} = \frac{\sin \frac{\delta' - \delta}{2}}{\cos \frac{\delta' + \delta}{2}} \operatorname{Cotg} \frac{p' - p}{2}$$

und eben so

$$\operatorname{Tg} \frac{a'' + a}{2} = \frac{\sin \frac{\delta'' - \delta}{2}}{\cos \frac{\delta'' + \delta}{2}} \operatorname{Cotg} \frac{p'' - p}{2} \quad \left. \vphantom{\operatorname{Tg} \frac{a'' + a}{2}} \right\} \text{ I.}$$

$$\operatorname{Tg} \frac{a'' + a'}{2} = \frac{\sin \frac{\delta'' - \delta'}{2}}{\cos \frac{\delta'' + \delta'}{2}} \operatorname{Cotg} \frac{p'' - p'}{2}$$

Weiter ist,

da Z P und Z A = Z A' = Z A'' beständig sind,

$$\frac{\sin s}{\sin a} = \frac{\sin s'}{\sin a'} = \frac{\sin s''}{\sin a''}$$

also aus den beyden ersten

$$\frac{\sin s' + \sin s}{\sin s' - \sin s} = \frac{\sin a' + \sin a}{\sin a' - \sin a}$$

oder

$$\operatorname{Tg} \frac{s' + s}{2} \operatorname{Cotg} \frac{s' - s}{2} = \operatorname{Tg} \frac{a' + a}{2} \operatorname{Cotg} \frac{a' - a}{2}$$

Substituirt man in dem letzten Ausdrucke für

$$\operatorname{Tg} \frac{a' + a}{2}$$

aus I. seinen Werth, und bemerkt man, daß

$$\frac{p' - p}{2} = \frac{s' - s}{2}$$

ist, so erhält man, wenn man

$$A'' = \frac{s' + s}{2}$$

$$A' = \frac{s'' + s}{2}$$

$$A = \frac{s'' + s'}{2}$$

setzt, folgende Ausdrücke

$$\operatorname{Tg} A'' = \frac{\sin \frac{\delta' - \delta}{2}}{\cos \frac{\delta' + \delta}{2}} \operatorname{Cotg} \frac{a' - a}{2} \text{ und}$$

$$k = -A'' + \frac{p'' + p}{2}$$

und eben so

$$\operatorname{Tg} A' = \frac{\sin \frac{\delta'' - \delta}{2}}{\cos \frac{\delta'' + \delta}{2}} \operatorname{Cotg} \frac{a'' - a}{2} \text{ und} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{II.}$$

$$k = -A' + \frac{p'' + p}{2}$$

und eben so

$$\operatorname{Tg} A = \frac{\sin \frac{\delta'' - \delta'}{2}}{\cos \frac{\delta'' + \delta'}{2}} \operatorname{Cotg} \frac{a'' - a}{2} \text{ und}$$

$$k = -A + \frac{p'' + p'}{2}$$

Endlich ist in dem Dreyecke ZAP nach denselben Nepperschen Sätzen

I.

N

$$\left. \begin{aligned} \text{Tg } B &= \frac{\cos \frac{p-k+a}{2}}{\cos \frac{p-k-a}{2}} \cotg \frac{90-\delta}{2} \\ \text{Tg } C &= \frac{\sin \frac{p-k-a}{2}}{\sin \frac{p-k+a}{2}} \text{Tg } \frac{90-\delta}{2} \end{aligned} \right\} \text{III.}$$

wo $B = \frac{\varphi+h}{2}, \quad C = \frac{\varphi-h}{2}$

also $\varphi = B + C$
 $h = B - C$

Eben so erhält man in dem Dreyecke $ZA'P$

$$\left. \begin{aligned} \text{Tg } B' &= \frac{\cos \frac{p'-k+a'}{2}}{\cos \frac{p'-k-a'}{2}} \cotg \frac{90-\delta}{2} \\ \text{Tg } C' &= \frac{\sin \frac{p'-k-a'}{2}}{\cos \frac{p'-k+a'}{2}} \text{Tg } \frac{90-\delta}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varphi &= B' + C' \\ h &= B' - C' \end{aligned}$$

und endlich in dem Dreyecke $ZA''P$

$$\left. \begin{aligned} \text{Tg } B'' &= \frac{\cos \frac{p''-k+a''}{2}}{\cos \frac{p''-k-a''}{2}} \cotg \frac{90-\delta''}{2} \\ \text{Tg } C'' &= \frac{\sin \frac{p''-k-a''}{2}}{\sin \frac{p''-k+a''}{2}} \text{Tg } \frac{90-\delta''}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varphi &= B'' + C'' \\ h &= B'' - C'' \end{aligned}$$

Die vorhergehenden Ausdrücke enthalten alle Auflösungen der Aufgabe. Wir wollen sie nun auf ein Beyspiel anwenden.

1808 August 27. in Göttingen wurde der Sextant auf die Höhe

$$52^{\circ} 39' 27'' 5$$

gestellt, und die Zeiten der Sternuhr für den Durchgang folgender Sterne beobachtet

$$\alpha \text{ Andromedae} \dots 21^h 33' 26''$$

α kleiner Bär 21 47 30

α Leyer 22 5 21

für diese Zeit der Beobachtung ist

scheinb. AR - - - - - sch. Declination

α Andromedae 23^h 58' 33" 33 - - 28° 2' 14" 8

α kl. Bär 0 55 4. 7 88 17 5. 7

α Leyer 18 30 28. 96 38 37 6. 6

also ist $p = 21^h 34' 52'' 67 = 323^\circ 43' 10'' 05$

$p' = 20 52 25. 30 = 313. 6 19 50$

$p'' = 3 34 52. 04 = 53 43 0. 60$

$\text{Log } A = 0. 2072029 \quad \text{Log } A' = 0. 8836657$

$B = 354^\circ 19' 22'' 04 \quad B' = 266^\circ 30' 55'' 07$

$C = -35^\circ 54' 37'' 27 \quad C' = -77 47 49. 75$

$x = 11^\circ 53' 41'' 28 \quad y = -59^\circ 35' 14'' 71$

$k = +2^\circ 44' 1'' 20 = 0^h 10' 56'' 08$ Voreilung der Uhr

$C - k = -38^\circ 38' 38'' 47$

$C' - k = -80^\circ 31' 50'' 95$ also

$\varphi = 51^\circ 31' 51'' 51$

Mit diesem Werthe von φ und k findet man aus den drey ersten Gleichungen

wahre Höhe $h = 52^\circ 37' 21'' 3$

Refr. 42. 7

52 38 4. 0

Höhe des Instr. 52 39 27. 5

Collimationsfehler 1 45. 0

schein. beob. Höhe 52° 37' 42" 5

also Fehl. d. Einth. — 0' 21" 5

Nach Nr. I. ist dieses Beyspiel

$$\frac{a' + a''}{2} = 142^\circ 2' 50'' 70$$

$$\frac{\bar{a} + a''}{2} = 6^\circ 17' 51'' 34$$

$$\frac{a + a'}{2} = 95 \ 34 \ 36 \ 24$$

woraus $a = - \ 40^{\circ} \ 10' \ 23'' \ 13$

$$a' = \ 231 \ 19 \ 35.60$$

$$a'' = \ 52 \ 46 \ 5.80$$

also $A'' = 315^{\circ} \ 40' \ 43'' \ 55$

$$H = \ 2^{\circ} \ 44' \ 1'' \ 23$$

$$\varphi = \ 51 \ 31 \ 51.33$$

$$h = \ 52 \ 37 \ 21.37$$

M. s. Monatl. Corresp. Octob. 1808. und Jan. 1809, und Mayl. Ephem. f. d. J. 1810. Wie man aus drey verschiedenen Höhen eines Sterns die Polhöhe bestimmt, s. m. Berl. Jahrb. 1790. Vergleiche Berl. Jahrb. 1803. p. 117.