

SECHSTES KAPITEL.

Z e i t e n.

§. 1.

Die Astronomen messen die Zeit im Allgemeinen durch den Winkel, den ein gleichförmig bewegter Punkt um einen unveränderlichen Mittelpunkt beschreibt. Nach der Theorie und den Beobachtungen ist die tägliche scheinbare Rotation des Himmels um die Erde, oder eigentlich die Rotation der Erde selbst um ihre Axe, eine solche äußerst gleichförmige Bewegung, daher man auch diese Bewegung vorzugsweise zur Bestimmung der Zeit gewählt hat.

Der ganze Umlauf eines jeden Punktes des Himmels wird in 24 Stunden, oder auch in 360 Grade eingetheilt. Die Verwandlung der Winkel in Zeit (der Grade in Stunden), oder umgekehrt, der Zeit in Winkel, ist also nur eine Aenderung der Art einzutheilen, und welche gleichförmige Bewegung irgend eines Gestirns man auch zur Darstellung der Zeit annehmen mag, so sind immer 24 Stunden dieses Gestirns gleich 360 Graden, also auch jede Stunde gleich 15 Graden, jede Zeitminute gleich 15 Raumminuten u. s. w.

Man unterscheidet aber im Allgemeinen drey verschiedene Zeiten.

§. 2.

Wahre Zeit ist der in Zeit verwandelte Stundenwinkel der Sonne. Der Stundenwinkel wird durch einen Bogen des Aequators gemessen; die Sonne bewegt sich aber nicht im Aequator, sondern in der Ecliptik, und zwar in der letzten Ebene, wie wir unten sehen werden, mit einer ungleichförmigen Bewegung. Aus diesen beyden Ursachen ist die wahre Zeit selbst etwas Ungleichförmiges, und daher zu einem allgemeinen Mafse nicht unmittelbar anwendbar.

Um aber doch durch die Sonne, welche sich zu diesem Zwecke besonders darbietet, ein gleichförmiges Zeitmafs zu

erhalten, denkt man sich eine andere, mittlere Sonne, S , die sich mit gleichförmiger Bewegung in der Ecliptik, und zwar so bewegt, daß sie mit der wahren Sonne zugleich durch die zwey Punkte geht, wo die wahre Sonne ihre grösste und kleinste Geschwindigkeit hat. Diese mittlere Sonne, deren Umlauf um die Erde also derselbe mit dem der wahren Sonne ist, dient zur Verbesserung der in der That Statt habenden Ungleichheiten der Bewegung der wahren Sonne. Um aber auch noch die bloß scheinbaren Ungleichheiten dieser mittlern Sonne, die von der Neigung ihrer Bahn gegen den Aequator entsteht, wegzuschaffen, denkt man sich eine zweyte mittlere Sonne, S' , die sich mit gleichförmiger Bewegung in dem Aequator, und zwar so bewegt, daß sie mit der ersten mittlern Sonne S zugleich durch die beyden Punkte der Nachtgleichen geht. Die Umlaufszeiten dieser drey Sonnen sind also gleich, aber die erste bewegt sich in der Ecliptik mit ungleichförmiger, die zweyte S in derselben Ebene mit gleichförmiger, und die dritte S' im Aequator ebenfalls mit gleichförmiger Bewegung.

Mittlere Zeit heist der in Zeit verwandelte Stundenwinkel der zweyten mittlern, im Aequator sich bewegend, Sonne S' ; Sternzeit endlich ist der in Zeit verwandelte Stundenwinkel des mittlern (von der Nutation befreiten) Frühlingspunktes. Der wahre, mittlere und der Sterntag fängt an, wenn die wahre, die zweyte mittlere Sonne, und der mittlere Frühlingspunkt durch den Meridian geht. Die Dauer des wahren, mittlern, oder des Sterntages ist die Zeit zwischen zwey nächsten Durchgängen dieser drey Punkte durch den Meridian.

§. 3.

Sey m der mittlere Sonnentag, und s der Sterntag. Legt die mittlere Sonne in irgend einem Zeitraume den Bogen μ , und der Frühlingspunkt in derselben Zeit den Bogen σ zurück, so hat man, da für gleiche Zeiten sich die Bogen wie verkehrt die Umlaufszeiten verhalten,

$$\frac{\mu}{\sigma} = \frac{s}{m} \dots (I)$$

Wenn man daher das Verhältniß $\frac{s}{m}$ kennt, so wird man mittels dieser Gleichung jeden Zeitraum, der in mittlerer Zeit ausgedrückt ist, durch Sternzeit ausdrücken können, und umgekehrt.

I. Sey VBA (Fig. 5) der Aequator, AC der Meridian, B die mittlere Sonne, V der mittlere Frühlingspunkt.

Nennt man $S = VA$ die absolute Sternzeit für irgend einen gegebenen Augenblick, $M = BA$ die entsprechende mittlere Zeit, und endlich $a = VB$ die Rectascension der zweyten mittlern, oder, was dasselbe ist, die Länge der ersten mittlern Sonne, beyde vom scheinbaren Aequinoctium gerechnet, so ist

$$S = a + M$$

Ist also a für irgend einen Augenblick bekannt, so wird man durch die letzte Gleichung für diesen Augenblick die Sternzeit finden, wenn die mittlere Zeit gegeben ist, und umgekehrt.

Es sey A die Länge der ersten mittlern Sonne für den mittlern Mittag des gegebenen Tages, vom scheinbaren Frühlingspunkte gezählt, und durch 15 dividirt, oder in Zeit ausgedrückt, und b die constante Zunahme dieser Länge in 24 Stunden mittlerer Zeit, so ist ihre Zunahme in M Stunden mittlerer Zeit gleich

$$\frac{b}{24} M,$$

also ist

$$a = A + \frac{b}{24} M$$

wodurch die letzte Gleichung wird

$$M = \frac{24}{24 + b} (S - A)$$

oder

$$S = A + \frac{24 + b}{24} M$$

welchen Gleichungen man auch folgende Gestalt geben kann:

$$\left. \begin{aligned} M &= S - A - \frac{b}{24 + b} (S - A) \\ S &= A + M + \frac{b}{24} M \end{aligned} \right\} \text{(II)}$$

da aber A durch die Tafeln oder durch die Ephemeriden als gegeben angesehen werden kann, so findet man mittels der Gleichungen II. für jede bekannte absolute Sternzeit die entsprechende mittlere Zeit und umgekehrt, wenn b bekannt ist. Es ist aber die Bewegung der ersten mittlern Sonne in 24 Stunden mittlerer Zeit

$$0^{\circ} 59' 8'' 33$$

also ist

$$b = \frac{0^{\circ} 59' 8'' 33}{15} = 0.06571$$

und da man offenbar hat

I.

[G

$$s : m = 24^h : 24^h + b$$

so ist

$$\frac{s}{m} = \frac{24}{24+b} = 0.9972695$$

$$\frac{m-s}{m} = \frac{b}{24+b} = 0.0027305$$

$$\frac{m-s}{s} = \frac{b}{24} = 0.002738$$

Die Gleichung I. ist daher auch

$$\mu = \sigma - \frac{(m-s)}{m} \sigma$$

oder

$$\sigma = \mu + \frac{(m-s)}{s} \mu$$

das heißt

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \sigma - (0.0027305) \sigma \\ \sigma &= \mu + (0.002738) \mu \end{aligned} \right\} \text{I'}$$

und eben so die Gleichungen II.

$$\left. \begin{aligned} M &= S - A - (0.0027305) (S - A) \\ S &= A + M + (0.002738) M \end{aligned} \right\} \text{II'}$$

§. 4.

Hat man eine Tafel, welche für jede Stunde $0^h.0027305 = 9''8298$, für jede Minute $c''.1638$, für jede Secunde $0''.0027$ gibt, so wird man damit die beyden ersten der Gleichungen I' und II' sehr bequem entwickeln. Für die beyden andern dieser Gleichungen könnte man eine andere Tafel entwerfen, die für jede Stunde

$$0^h.002738 = 9''8568$$

gäbe. Allein man wird mit einiger Abänderung auch die erste Tafel anwenden können. Ist nämlich

$$\frac{m-s}{m} = 0.0027305 = c,$$

so ist

$$\frac{m-s}{s} = \frac{1}{1-c} - 1 = c + c^2 + c^3 + c^4 +$$

Die Gleichung

$$\sigma = \mu + \mu \frac{(m-s)}{s}$$

kann man daher auch so darstellen,

$$\sigma = \mu + c \mu + c^2 \mu + c^3 \mu +$$

Man wird daher aus der ersten Tafel wie zuvor suchen

die erste Correction $c \mu$ mit μ ,

dann die zweyte Correction $c. c \mu$ oder $c^2 \mu$

mit der ersten Correction $c \mu$,

dann die dritte — — $c. c^2 \mu$ oder $c^3 \mu$

mit der zweyten — — $c^2 \mu$ u. s. w.,

und die Summe aller dieser Correctionen zu μ addirt, gibt σ .

Exempel. Für die Gleichungen (I)

sey die Sternzeit $\sigma = 14^h 3' 32$ gegeben.

Man drücke dasselbe Intervall in mittlerer Zeit aus.

$$14^h \dots 2' \quad 17'' 613$$

$$3' \dots \quad 0.491$$

$$32'' \dots \quad 0.087$$

$$\quad \quad \quad 2 \quad 18.191 \text{ Acceleration der Fixterne}$$

$$\sigma = 14 \quad 3 \quad 32.000 \text{ Sternzeit}$$

$$\mu = 14 \quad 1 \quad 13.809 \text{ mittlere Zeit.}$$

Sey umgekehrt

$$\mu = 100^h 24' 0'' 415$$

gegeben; man suche σ .

$$4. 24^h \text{ gibt } 15' 43'' 632$$

$$4^h \dots \quad 39.318$$

$$24' 0'' 415 \quad 3.933$$

$$c \mu = 16' 26'' 883$$

$$16' \text{ gibt } 2'' 621$$

$$26''.883 \dots 0.074$$

$$c^2 \mu = 2.695$$

$$2'' \text{ gibt } 0'',005$$

$$0'',695 \dots 0.002$$

$$c^3 \mu = 0.007$$

$$c \mu + c^2 \mu + c^3 \mu = 16^h 29'' 585$$

$$\mu = 100^h \quad 24' \quad 0.415$$

$$\sigma = 100 \quad 40 \quad 30.000$$

Für die Gleichungen (II')

1811 der 13. September in Kasan ist für den mittlern Mittag

$$A = 11^h 25' 45'' 696$$

Es sey für diesen Tag die Sternzeit

$$S = 3^h 2' 30'' 426$$

gegeben, so ist

$$S = 3^h 2' 30'' 426$$

$$A = 11 \quad 25 \quad 45. \quad 696$$

$$15 \quad 36 \quad 44. \quad 730$$

$$- 2 \quad 33. \quad 461$$

$$M = 15 \quad 34 \quad 11. \quad 269 \text{ mittl. Zeit.}$$

Um die Länge A von dem durch die Nutation afficirten Frühlingspunkte zu erhalten, muß man zu der mittlern Länge der Sonne vom mittlern Frühlingspunkte, wie sie die Sonnentafeln gewöhnlich geben, noch die Nutation in Rectascension (Cap. III. §. 6.), oder

$$- 7'' 18 \text{ Cotg Schiefe d. Ecl. Sin aufst. Knot. } \mathcal{C}$$

addiren. Wollte man es mit einigen Astronomen vorziehen, für A das Supplement dieser Gröfse zu

$$360 \text{ oder } \alpha = 24 - A$$

zu brauchen, wo α die Aequinoctialdistanz der mittlern Sonne genannt wird, so sind die Gleichungen II'

$$\left. \begin{aligned} M &= (S + \alpha) - 0.0027305 (S + \alpha) \\ S &= M + 0.002738 M - \alpha \end{aligned} \right\}$$

§. 5.

Das Vorhergehende reicht hin, für jede gegebene mittlere Zeit die Sternzeit, und umgekehrt, zu finden. Wie man aber aus der mittlern Zeit die wahre finden soll, setzt Kenntnisse voraus, welche erst im zweyten Buche gegeben werden.

Ist L , l , α die mittlere Länge, die wahre Länge und die wahre Rectascension der Sonne für irgend eine Zeit, r die Differenz der wahren Länge und der wahren Rectascension, alle diese Gröfsen vom mittlern Frühlingspunkte genommen, und bezeichnet man dieselben Gröfsen für den wahren (durch die Nutation veränderten) Frühlingspunkt durch

$$L' \ l' \ \alpha',$$

so hat man nach Cap. III. §. 6.

$$\alpha' = l + r - 7''.2 \cotg e \sin \Omega \varrho$$

und

$$L' = L - 7''.2 \frac{\sin \Omega \varrho}{\sin e}$$

wo e die Schiefe der Ecliptik, und $\Omega \varrho$ die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondesbahn in der Ecliptik ist.]

Zeitgleichung nennt man den Unterschied der wahren und mittlern Zeit, oder den Unterschied der Rectascensionen der wahren und der zweyten mittlern Sonne S' , in Theilen der mittlern Zeit ausgedrückt. Ist dt diese Zeitgleichung, so ist

$$dt = \frac{1}{15} (\alpha' - L')$$

das heifst

$$dt = \frac{1}{15} \left(l - L + r + 7''.2 \sin \Omega \varrho \left(\frac{1}{\sin e} - \frac{1}{\operatorname{Tg} e} \right) \right)$$

oder wenn man

$$e = 23^\circ 28' \text{ setzt,}$$

$$dt = \frac{1}{15} (l - L + r) + 0''.10 \sin \Omega \varrho$$

Von diesem Ausdrücke wird man den Werth der Gröfse r leicht finden, wenn man bemerkt, dafs

$$\operatorname{Tg} \alpha = \cos e \operatorname{Tg} l$$

ist, und dafs man hat

$$r = \alpha - l.$$

Man findet so nach Cap. I.

$$r = -Tg^2 \frac{e}{2} \sin 2l + \frac{1}{2} Tg^4 \frac{e}{2} \sin 4l - \frac{1}{3} Tg^6 \frac{e}{2} \sin 6l + \dots (A)$$

Nicht so leicht findet man den Werth der Gröfse $1 - L$. Wir werden im zweyten Buche sehen, dafs man hat

$$\begin{aligned} 1 - L &= \left(2a - \frac{a^3}{4}\right) \sin(L - \pi) \\ &+ \left(\frac{5}{4} a^2 - \frac{11}{24} a^4\right) \sin 2(L - \pi) \\ &+ \frac{13}{12} a^3 \sin 3(L - \pi) \\ &+ \frac{103}{96} a^4 \sin 4(L - \pi) \dots (B) \end{aligned}$$

wo für das Jahr 1800

$$a = 0.01679$$

$$\pi = 279^\circ 29' 30''$$

und

$$e = 23^\circ 27' 57''$$

Substituirt man diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdruck, so erhält man, wenn man blofs auf die vorzüglichsten Glieder Rücksicht nimmt, und in der Gleichung (A) den Werth von l durch L aus der Gleichung (B) substituirt,

$$\begin{aligned} dt &= 79'' \sin L + 436'' \cos L \\ &- 597 \sin 2L + 2 \cos 2L \\ &- 3 \sin 3L - 19 \cos 3L \\ &+ 13 \sin 4L - 0''1 \sin 5L \end{aligned}$$

und durch diesen Ausdruck kann man die Werthe von dt in eine Tafel bringen, deren Argument die mittlere Länge L der Sonne ist. Wir werden später auf diesen Gegenstand zurückkommen. Hier wird es hinreichen, zu bemerken, dafs man diese Zeitgleichung immer aus den astronomischen Ephemeriden erhalten kann, wo sie für den Mittag eines jeden Tages angegeben wird. Der Gebrauch dieser Ephemeriden, die in den Händen jedes Astronomen sind, ist zu einfach, um hier einer umständlichen Erklärung zu bedürfen; auch ist ihnen diese Erklärung gewöhnlich beygelegt. Obschon diese Ephemeriden für den Meridian ihres Ortes entworfen sind, so ist es doch leicht, daraus die Zahlen derselben für den Mittag (also auch für jede andere Stunde), eines andern Ortes, dessen Längendifferenz mit dem Orte der Ephemeriden bekannt ist, abzuleiten. So liegt z. B. Wien $0^h 13' 0'' = 0.2$ östlicher, als Berlin. Nimmt man da-

her, wie es meistens erlaubt ist, die Zahlen der Berliner Ephemeriden von einem Tage zum andern gleichförmig zu- oder abnehmend an, und ist a die Differenz der zwey nächsten Zahlen der Berliner Ephemeriden für zwey nächstfolgende Tage, so ist

$$x = \frac{0.2}{24} a = 0.00833 a$$

und diese Gröfse x wird von den Berliner Zahlen subtrahirt, wenn diese Zahlen wachsen, und umgekehrt, um die entsprechenden Zahlen für den Meridian von Wien zu erhalten. Blofs für den Mond, der seine Lage am Himmel sehr schnell ändert, darf man die aufeinanderfolgenden Zahlen der einzelnen Tage nicht mehr als gleichförmig zu- oder abnehmend annehmen, daher man, um den Ort des Mondes für andere Zeiten zu finden, die bekannten Methoden der Interpolation anwenden mufs. Da uns diese Methoden auch in der Folge sehr nützlich seyn werden, so wollen wir einige der vorzüglichsten hier kurz anzeigen.

I. Hat man eine Reihe von Zahlen

$$y, y', y'', y''' \dots$$

die zu den analogen Werthen von

$$x, x + \Delta x, x + 2 \Delta x, x + 3 \Delta x \dots$$

gehören, so ist der Werth von y , welcher zu

$$(x + n \Delta x)$$

gehört, oder so ist

$$y^n = y + n \Delta y + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \Delta^2 y + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^4 y +$$

vorausgesetzt dafs man hat

$$\Delta y = y' - y$$

$$\Delta^2 y = y'' - 2 y' + y$$

$$\Delta^3 y = y''' - 3 y'' + 3 y' - y$$

und überhaupt

$$\Delta^m y = y^m - m y^{m-1} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} y^{m-2} - \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{m-3} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} y^{m-4} - \dots$$

Eine bequeme Tafel, welche die Werthe von

$$n, \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}, \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

enthält, s. m. in Berl. Ephem. 1779. p. 141.

Ex. Man suche die Länge des Mondes für 1810. Juni 24. um 6 Uhr Abends, Berliner Zeit. Aus den Berliner Ephemeriden hat man

	x	y	= Länge des Mondes
Juni 24		y	= 15° 5' 21''.0
Mittag 25		y'	= 27 57 22
26		y''	= 40 33 11
27		y'''	= 52 56 13
18		y''''	= 65 9 19

Daraus folgt

$$\Delta y = + 12^{\circ} 52' 1''$$

$$\Delta^2 y = - 16' 12''$$

$$\Delta^3 y = + 3' 25''$$

$$\Delta^4 y = - 34''$$

Da die gleichen Intervalle

$$\Delta x = 24^h,$$

so ist

$$n = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

also

$$\begin{aligned} y & : 15^{\circ} 5' 21''.0 \\ n \Delta y & = \frac{1}{4} (12^{\circ} 52' 1'') . + 3 \ 13 \ 0.25 \\ \frac{1}{4} \left(-\frac{3}{8} \right) \left(-16' 12'' \right) & . . + 1 \ 31.13 \\ -\frac{3}{4 \cdot 8} \left(-\frac{7}{3 \cdot 4} \right) \left(3' 25'' \right) & . + 0 \ 11.21 \\ \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 4} \left(-\frac{11}{4 \cdot 4} \right) \left(-34'' \right) & . . + 1.28 \end{aligned}$$

$$y^n = 18^{\circ} 20' 4''.9 \text{ gesuchte Länge des Mondes.}$$

II. Es sey y irgend eine Function von x. Ohne diese Function selbst zu kennen, seyen doch einzelne Werthe derselben gegeben, so daß z. B.

$$y = A, B, C, D \dots$$

für

$$x = \omega, a, b, c \dots$$

bekannt ist. Man suche für jeden andern Werth von x den ihm entsprechenden Werth von y .

Man kann den gesuchten Ausdruck zwischen y und x als die Gleichung einer Curve ansehen, welche für die Abscissen

$$\omega, a, b, c \dots$$

die Ordinaten

$$A, B, C \dots$$

gibt. Die Gleichung dieser Curve wird im Allgemeinen die Form haben

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$$

Um aber den gegebenen Bedingungen Genüge zu thun, wird man haben

$$A = \alpha + \beta \omega + \gamma \omega^2 +$$

$$B = \alpha + \beta a + \gamma a^2 +$$

$$C = \alpha + \beta b + \gamma b^2 +$$

Da nun y durch x so ausgedrückt werden soll, daß

$$y \text{ gleich } A, B, C \dots$$

werde, wenn

$$x \text{ gleich } \omega, a, b \dots$$

wird, so kann man annehmen

$$y = A X + B X' + C X'' +$$

wo aber

$$X \quad X' \quad X'' \dots$$

so gewählt werden müssen, daß für $x = \omega$ sey

$$X = 1, \quad X' = 0, \quad X'' = 0 \dots$$

daß ferner für $x = a$ sey

$$X = 0, \quad X' = 1, \quad X'' = 0 \dots$$

und daß für $x = b$ sey

$$X = 0, \quad X' = 0, \quad X'' = 1 \text{ u. s. w.}$$

Diesen Bedingungen geschieht aber genug, wenn man annimmt

$$X = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\dots}{(\omega-a)(\omega-b)(\omega-c)(\omega-d)\dots}$$

$$X' = \frac{(x-\omega)(x-b)(x-c)(x-d)\dots}{(a-\omega)(a-b)(a-c)(a-d)\dots}$$

$$X'' = \frac{(x-\omega)(x-a)(x-c)(x-d)\dots}{(b-\omega)(b-a)(b-c)(b-d)\dots}$$

Substituirt man diese Werthe von X , X' . . in dem letzten Ausdruck von y , so erhält man

$$y = \frac{x-a, x-b, x-c, x-d\dots}{\omega-a, \omega-b, \omega-c, \omega-d\dots} A$$

$$+ \frac{x-\omega, x-b, x-c, x-d\dots}{a-\omega, a-b, a-c, a-d\dots} B$$

$$+ \frac{x-\omega, x-a, x-c, x-d\dots}{b-\omega, b-a, b-c, b-d\dots} C \text{ u. s. w.}$$

Andere Methoden der Interpolation findet man im Berl. Jahrb. für d. J. 1783. Hieher gehört auch die treffliche Abhandlung *Lagranges*, *Recherches sur la manière de former des tables des planetes d'après les seules observations*, in *Histoire de l'Acad. roy. des scienc.* p. 1. 1772 Vol. I.