

FÜNFTES KAPITEL.

P a r a l l a x e.

§. 1.

Bey den bisherigen Untersuchungen wurde auf den Ort des Beobachters in der Oberfläche der Erde keine Rücksicht genommen, oder dieser Ort wurde als der Mittelpunkt der Erde vorausgesetzt, weil in der That die Entfernung der meisten Gestirne von der Erde so groß ist, daß der Durchmesser der Erde gegen jene Entfernung völlig verschwindet. Da es aber auch mehrere Himmelskörper gibt, die uns so nahe sind, daß der aus ihnen beobachtete Durchmesser der Erde nicht mehr als eine verschwindende Größe angenommen werden kann, daß also auch die aus der Oberfläche der Erde beobachteten oder scheinbaren Orte dieser Himmelskörper mit dem aus dem Mittelpunkte der Erde gesehenen, den wahren oder geocentrischen Orten der Gestirne, nicht mehr dieselben sind, so wird es nothwendig, den Unterschied beyder Orte, welchen man die tägliche Parallaxe nennt, für jede Entfernung und Lage dieser Körper angeben zu können, wodurch man dann alle Beobachtungen, die in verschiedenen Punkten der Oberfläche der Erde gemacht worden sind, auf einen gemeinschaftlichen Ort, den Mittelpunkt der Erde, zurückführt, ein Verfahren, welches einer Vergleichung dieser Beobachtungen vorausgehen muß.

Wir wollen zu diesem Zwecke die Erde als einen Körper annehmen, der durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist. Sey A die halbe große, B die halbe kleine Axe des Erdsphäroids, R die Entfernung des Himmelskörpers vom Mittelpunkte der Erde, R' desselben Entfernung von irgend einem Punkte der Oberfläche der Erde, welcher von dem Mittelpunkte der Erde um die Größe r absteht.

Ist der Beobachter in dem Aequator, und das Gestirn im Horizont des Beobachters, und p die aus dem Gestirne gesehene scheinbare Größe von A , so ist

$$\sin p = \frac{A}{R}$$

und p heisst die Horizontalparallaxe des Aequators.

Ist aber π die aus dem Gestirne gesehene scheinbare Grösse von r , so ist eben so

$$\sin \pi = \frac{r}{R}$$

also auch

$$\sin \pi = \frac{r}{A} \cdot \sin p$$

und π heisst die Horizontalparallaxe des Beobachtungsortes.

§. 2.

Sey φ' der Winkel, den r mit A bildet, und φ der Winkel, den die Normale in dem Orte des Beobachters mit A macht. Man fälle ein Loth y von dem Beobachtungsorte senkrecht auf A , und nenne x das Stück der grossen Axe zwischen dem Mittelpunkte und dem Lothe y , und endlich z das Stück der grossen Axe zwischen der Normale und dem Lothe, so ist offenbar

$$z = \frac{B^2}{A^2} x$$

$$\operatorname{Tg} \varphi' = \frac{y}{x}$$

und

$$\operatorname{Tg} \varphi = \frac{y}{z} = \frac{A^2 y}{B^2 x}$$

also auch

$$\operatorname{Tg} \varphi' = \frac{B^2}{A^2} \operatorname{Tg} \varphi \quad \cdot \cdot (I)$$

Die Gleichung der Ellipse aber ist

$$A^2 B^2 = A^2 y^2 + B^2 x^2$$

und da man hat

$$y = \frac{B^2}{A^2} x \operatorname{Tg} \varphi,$$

so ist

$$x = \frac{A^2}{\sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{Tg}^2 \varphi}}$$

also auch

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1 + \operatorname{Tg}^2 \varphi'}{1 + \operatorname{Tg} \varphi \operatorname{Tg} \varphi'} \cdot A^2$$

oder endlich

$$r = A \cdot \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi' \cos (\varphi - \varphi')}} \dots (II)$$

Die Gleichung I. gibt φ' aus φ , und die Gleichung II. gibt die Gröfse r .

Es ist aber φ die aus den Beobachtungen gegebene Polhöhe des Beobachtungsortes, weil dieser Winkel die Neigung der Normale, d. h. der Verticale gegen den Aequator bezeichnet. Den Winkel φ' aber nennt man die geocentrische Polhöhe.

Nach Laplace Expos. du syst. du monde, IV. Ausgabe, p. 64, ist $A = 6376606$, $B = 6356215$ Meter, und ein Meter $= 443.2959$ Pariser Linien, also die Abplattung der Erde

$$\frac{A-B}{B} = \frac{1}{311.72}$$

$$\text{Ex. } \varphi = 40^\circ \text{ gibt } \varphi - \varphi' = 10' 50''$$

$$\log \frac{r}{A} = 9.999429$$

$$\varphi = 50^\circ \text{ gibt } \varphi - \varphi' = 10' 51''$$

$$\log \frac{r}{A} = 9.999188.$$

§. 4.

Es sey die wahre oder geocentrische Länge λ und Breite β eines Gestirns nebst dessen Horizontalparallaxe π für den Beobachtungsort gegeben. Man suche die scheinbare, von der Parallaxe afficirte, Rectascension α' und Declination δ' des Gestirns.

Wird die Lage des Gestirns gegen den Mittelpunkt der Erde durch drey rechtwinklichte Coordinaten X' Y' Z' gegeben, von denen X' in der Linie der Nachtgleichen, X' Y' in der Ebene der Ecliptik liegt, so hat man

$$X' = R \cos \beta \cos \lambda$$

$$Y' = R \cos \beta \sin \lambda$$

$$Z' = R \sin \beta$$

Wird aber die Lage desselben Gestirns gegen den Mittelpunkt

der Erde durch drey andere senkrechte Coordinaten $X Y Z$ gegeben, von denen X wieder in der Linie der Nachtgleichen, und XY in der Ebene des Aequators liegen, so wird die Abhängigkeit dieser zweyten Coordinaten von den vorhergehenden durch folgende Gleichungen gegeben

$$X = X'$$

$$Y = Y' \cos e - Z' \sin e$$

$$Z = Z' \cos e + Y' \sin e$$

wo e die scheinbare Schiefe der Ecliptik bezeichnet.

Wird ferner der Ort des Beobachters auf der Oberfläche der Erde gegen den Mittelpunkt derselben durch die drey, den letzten parallelen, Coordinaten $x y z$ gegeben, so ist, wenn φ' die geocentrische Polhöhe, und A die Rectascension des Zeniths bezeichnet,

$$x = r \cos \varphi' \cos A$$

$$y = r \cos \varphi' \sin A$$

$$z = r \sin \varphi'$$

Daraus folgt, daß

$$X - x, Y - y, Z - z$$

die den letzten parallelen Coordinaten seyn werden, welche die Lage des Gestirns gegen den Beobachtungsort auf der Oberfläche der Erde, oder welche den scheinbaren Ort des Gestirns in Beziehung auf den Aequator bestimmen. Man wird also haben

$$X - x = R' \cos \delta' \cos \alpha'$$

$$Y - y = R' \cos \delta' \sin \alpha'$$

$$Z - z = R' \sin \delta'$$

Substituirt man in den letzten Gleichungen die vorhergehenden Werthe von $X, x \dots$, so erhält man die gesuchten scheinbaren Orte des Gestirnes, nämlich

$$\operatorname{Tg} \alpha' = \frac{Y-y}{X-x}$$

$$\operatorname{Tg} \delta' = \frac{Z-z}{X-x} \cos \alpha' = \frac{Z-z}{Y-y} \sin \alpha'$$

$$\frac{R}{R'} = \frac{R \cos \delta' \cos \alpha'}{X-x} = \frac{R \cos \delta' \sin \alpha'}{Y-y} = \frac{R \sin \delta'}{Z-z}$$

Wächst die Höhe des Gestirns über dem Horizont, so nimmt

die Entfernung desselben von dem Beobachter ab, vorausgesetzt, daß das Gestirn dieselbe Entfernung vom Mittelpunkte der Erde behält. Nennt man also Δ den scheinbaren Halbmesser des Gestirns im Horizonte, oder den geocentrischen Halbmesser, weil der horizontale mit dem aus dem Mittelpunkte gesehenen Halbmesser derselbe ist, und nennt man Δ' den wegen seiner Höhe (wegen seiner Annäherung zur Erde) vergrößerten Halbmesser, so ist

$$\frac{\sin \Delta'}{\sin \Delta} = \frac{R}{R'}$$

Substituirt man also in den drey letzten Gleichungen die oben für $X, x \dots$ gefundenen Werthe, und setzt der Kürze wegen

$$\frac{1}{H} = \cos \lambda \cos \beta - \sin \pi \cos \varphi' \cos A$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \text{Tg } \alpha' &= H (\sin \lambda \cos \beta \cos e) \\ &- H (\sin \beta \sin e - \sin \pi \cos \varphi' \sin A) \\ \text{Tg } \delta' &= H \cos \alpha' (\sin \beta \cos e) \\ &+ H \cos \alpha' (\cos \beta \sin e \sin \lambda - \sin \pi \sin \varphi') \\ \sin \Delta' &= H \cos \alpha' \cos \delta' \sin \Delta \end{aligned}$$

Zur bequemerer Berechnung sey

$$\text{Tg } \psi = \cotg \beta \sin \lambda,$$

so ist

$$\begin{aligned} \text{Tg } \alpha' &= H \left(\frac{\sin \beta \sin (\psi - e)}{\cos \psi} - \sin \pi \cos \varphi' \sin A \right) \\ \text{Tg } \delta' &= H \cos \alpha' \left(\frac{\sin \beta \cos (\psi - e)}{\cos \psi} - \sin^2 \pi \sin \varphi' \right) \end{aligned}$$

Ex. Es sey

$$\begin{aligned} \lambda &= 93^\circ 37' 26'', \\ \beta &= 1^\circ 0' 29'', \\ \pi &= 1^\circ 0' 43'', \\ e &= 23^\circ 27' 59'', \\ \Delta &= 0^\circ 33' 12'', \\ A &= 183^\circ 17' 51'' \text{ und} \\ \varphi' &= 49^\circ 53' 44'', \end{aligned}$$

so findet man

$$\alpha' = 93^{\circ} 15' 51''$$

$$\delta' = 23 \quad 43 \quad 6$$

$$\Delta' = 0 \quad 33 \quad 24$$

§. 4.

Aus der vorhergehenden allgemeinen Auflösung lassen sich mehrere besondere Fälle sehr leicht ableiten.

I. Sucht man z. B. aus der wahren Länge und Breite $\lambda \beta$ diese scheinbaren Gröfsen $\lambda' \beta'$, so darf man nur in den vorhergehenden Ausdrücken

$$e = 0$$

und $\alpha' = \lambda', \delta' = \beta',$

endlich $A = L, \varphi' = B$

setzen, wo L die Länge, und B die Breite des Zeniths ist. Man hat dann

$$\frac{1}{H} = \cos \beta \cos \lambda - \sin \pi \cos B \cos L$$

$$\operatorname{Tg} \lambda' = H (\sin \lambda \cos \beta - \sin \pi \sin L \cos B)$$

$$\operatorname{Tg} \beta' = H \cos \lambda' (\sin \beta - \sin \pi \sin B)$$

$$\sin \Delta' = H \cos \lambda' \cos \beta'. \sin \Delta$$

Die Gröfse $L B$ aber findet man aus A, φ' eben so, wie man im I. Cap. §. 5. aus der Rectascension und Declination eines Gestirns die Länge und Breite desselben findet. Zieht man es aber vor, diese Werthe von L und B sogleich in den vorhergehenden Gleichungen zu substituiren, so erhält man

$$\frac{1}{H} = \cos \lambda \cos \beta - \sin \pi \cos \varphi' \cos A$$

$$\operatorname{Tg} \lambda' = H (\sin \lambda \cos \beta - \sin \pi (\sin \varphi' \sin e + \cos \varphi' \cos e \sin A))$$

$$\operatorname{Tg} \beta' = H \cos \lambda' (\sin \beta - \sin \pi (\sin \varphi \cos e - \cos \varphi' \sin e \sin A))$$

$$\sin \Delta' = H \cos \lambda' \cos \beta'. \sin \Delta$$

II. Sucht man aus der wahren Rectascension und Declination $\alpha \delta$ diese scheinbaren Gröfsen $\alpha' \delta'$, so wird man

in I. die Gröfsen $\lambda \beta$ in $\alpha \delta$ verwandeln,

und $e = 0$ setzen,

wodurch man erhält

$$\frac{1}{H} = \cos \alpha \cos \delta - \sin \pi \cos A \cos \varphi'$$

$$\operatorname{Tg} \alpha' = H (\sin \alpha \cos \delta - \sin \pi \sin A \cos \varphi')$$

$$\operatorname{Tg} \delta' = H \cos \alpha' (\sin \delta - \sin \pi \sin \varphi')$$

$$\sin \Delta' = H \cos \alpha' \cos \delta'. \sin \Delta$$

III. Sucht man endlich aus der wahren Höhe h , und dem wahren Azimute ω , diese scheinbaren Größen h' , ω' , so wird man in II. für α , δ die Größen ω , h , für φ' die Größe $90 - (\varphi - \varphi')$ und endlich $A = 0$ setzen, wodurch man erhält

$$\frac{1}{H} = \cos \omega \cos h - \sin \pi \sin (\varphi - \varphi')$$

$$\operatorname{Tg} \omega' = H \sin \omega \cos h$$

$$\operatorname{Tg} h' = H \cos \omega' (\sin h - \sin \pi \cos (\varphi - \varphi'))$$

$$\sin \Delta' = H \cos \omega' \cos h'. \sin \Delta$$

Nimmt man die Erde als eine vollkommene Kugel an, so ist

$$\varphi' = \varphi,$$

also geben die letzten Ausdrücke

$$\omega' = \omega, \text{ und}$$

$$\operatorname{Tg} h' = \operatorname{Tg} h - \frac{\sin \pi}{\cos h}$$

oder abkürzend

$$h - h' = \frac{\pi \cos h}{1 - \sin \pi \sin h} = \pi \cos h'$$

und

$$\Delta' = \Delta \frac{\cos h'}{\cos h}$$

und $h - h'$ ist die Parallaxe der Höhe. Für das Sphäroid aber findet man aus dem letzten Ausdrucke für $\operatorname{Tg} \omega'$ die genäherten

$$\omega' - \omega = \pi \frac{\sin \omega \sin (\varphi - \varphi')}{\cos h}$$

welches die Parallaxe des Azimuts ist.

Ex. zu I.

$$\text{Sey } \lambda = 181^\circ 46' 22'' 5,$$

$$\beta = 2^\circ 17' 26'' 2,$$

$$\pi = 0^\circ 59' 27'' 7,$$

$$e = 23^\circ 28' 0'' 8,$$

$$\Delta = 0^\circ 16' 15'' 5,$$

$$A = 209^\circ 46' 7'' 9,$$

$$\varphi' = 49^\circ 53' 43'' 9,$$

so erhält man

$$\lambda' = 181^\circ 48' 5'' 4,$$

$$\beta' = 1 29' 1. 3$$

$$\Delta' = 0 16 25. 5$$

§. 5.

Endlich lassen sich aus den gegebenen Ausdrücken durch einige leichte Verwandlungen andere genäherte finden, welche dann vorzüglich brauchbar seyn werden, wenn π nur geringe Werthe hat, oder die scheinbaren Gröfsen von den wahren nur wenig verschieden sind. So geben die Gleichungen §. 4. I. wenn man

$$\operatorname{Tg} \psi = \frac{\operatorname{Tg} B}{\operatorname{Cos} (\lambda - L)}$$

setzt,

$$\lambda' - \lambda = \frac{\pi \operatorname{Cos} B}{\operatorname{Cos} \beta} \operatorname{Sin} (\lambda - L)$$

$$\beta' - \beta = \frac{\pi \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} \psi} \operatorname{Sin} (\beta - \psi)$$

$$\Delta' - \Delta = \frac{\pi \Delta \operatorname{Cos} B}{\operatorname{Cos} \beta} \operatorname{Cos} (\lambda - L)$$

und diese Ausdrücke werden auch sehr nahe die wahren Gröfsen aus den scheinbaren geben, wenn man blofs die Zeichen der Buchstaben versetzt, so dafs man hat

$$\operatorname{Tg} \psi = \frac{\operatorname{Tg} B}{\operatorname{Cos} (\lambda' - L)}$$

$$\lambda' - \lambda = \pi \frac{\operatorname{Cos} B}{\operatorname{Cos} \beta'} \operatorname{Sin} (\lambda' - L)$$

$$\beta' - \beta = \pi \frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} \psi} \operatorname{Sin} (\beta' - \psi)$$

$$\Delta' - \Delta = \pi \Delta' \frac{\operatorname{Cos} B}{\operatorname{Cos} \beta'} \operatorname{Cos} (\lambda' - L)$$

und diese oder die vorhergehenden Gleichungen geben wieder die Parallaxe der Länge und Breite, wenn λ λ' L die wahre und scheinbare Länge des Gestirns und des Zeniths, und β β' B die wahre und scheinbare Breite des Gestirns und des Zeniths ist; sie geben ferner die Parallaxe der Rectascension und Declination, wenn λL und βB die Rectascension und Declination des Gestirns und des Zeniths ist. Sie geben endlich die Parallaxe des Azimuts und der Höhe, wenn

λ das Azimut,

β die Höhe, und

$B = 90 - (\varphi - \varphi')$ und

$L = 0$ ist.