

VIERTES KAPITEL.

R e f r a c t i o n .

§. 1.

Die Erfahrung, daß die Lichtstrahlen, wenn sie schief aus einem Mittel in ein anderes dichteres treten, gegen das Einfallslloth hingebrochen werden, führte auf die Vermuthung, daß auch die von den Körpern des Himmels zu uns kommenden Lichtstrahlen, wenn sie aus den Räumen, welche jene Körper von uns trennen, in die Atmosphäre der Erde treten, ähnlichen Brechungen unterworfen sind, wodurch wir diese Gestirne in einer größern Höhe erblicken, als wir sie ohne dieser Brechung sehen würden. Die Beobachtungen haben die Richtigkeit jener Voraussetzung bestätigt.

Diese Erscheinung der Rechnung zu unterwerfen, nimmt man, wie es sehr wahrscheinlich ist, an, daß die Atmosphäre aus unendlich dünnen concentrischen Kugelschalen besteht, deren Mittelpunkt der der Erde ist, und deren Dichtigkeit mit ihrer Entfernung von der Erde nach irgend einem Gesetze abnimmt.

Die Luft ist, wie alle andern Körper schwer, und der Druck der Atmosphäre hält an der Oberfläche des Meeres einer Quecksilbersäule des Barometers von 28.0754 Pariser Zollen bey der Temperatur des schmelzenden Eises das Gleichgewicht. Unter diesem Drucke und bey dieser Temperatur verhält sich die spezifische Schwere der Luft zu der des Quecksilbers, wie die Einheit zu 10485, also würde die Atmosphäre, wenn sie durchaus einerley Dichte hätte, eine Höhe von 28.0754 (10485) Zolle haben. Allein die Dichte der Luft ändert sich vermöge des bekannten Mariottischen Gesetzes sehr nahe dem Drucke oder der Barometerhöhe proportional, alsomüssen bey einerley Temperatur die obern Schichten weniger dicht seyn, als die von jener zusammengedrückten unteren, und wenn sie durchaus einerley Temperatur hätten, so würden ihre Dichtigkeiten, also auch die Barometerhöhen in den verschiedenen

Schichten in einer geometrischen Progression abnehmen, wenn die Höhen der Schichten über der Oberfläche der Erde in einer arithmetischen Reihe zunehmen. Aber die Luft wird, wie alle Körper, durch die Wärme ausgedehnt, und durch die Kälte zusammengezogen, so, daß die Räume, welche sie bey der Temperatur des unter der Barometerhöhe 28 P. Z. siedenden Wassers, und der des schmelzenden Eises einnimmt, sich wie 1.375 zu 1 verhalten. Die in den obern Theilen der Atmosphäre herrschende Kälte wird also wieder die Dichte der oberen Schichten vermehren. Endlich dehnt auch die Wärme das Quecksilber des Barometers aus, mit welcher der Druck der Luft gemessen wird.

Es sey also für einen Grad Aenderung des Thermometers Réaumur die Aenderung des Volums der atmosphärischen Luft gleich m , und die des Volums Quecksilber im Barometer gleich n . Ferner sey D die Dichte der Luft, wenn das Thermometer 0 Grade, und das auf 0 Grade der Temperatur gebrachte Barometer 28.0754 Zolle zeigt, so ist, wenn δ die Dichte der Luft für die Höhe b Zolle des Barometers und für t Grade des Thermometers hezeichnet,

$$\delta : D = \frac{1 - nt}{1 + mt} \cdot b : 28.0754 \text{ oder}$$

$$\delta = \frac{b}{28.0754} \cdot \frac{(1 - nt)}{1 + mt} \cdot D$$

und wenn die Refraction für jenen Normalzustand der Atmosphäre $t = 0$, $b = 28.0754$ durch R , jede andere Refraction aber durch ρ bezeichnet wird, so ist, da nach dem Vorhergehenden die Refraction der Dichte der Luft proportional ist

$$\frac{\delta}{D} = \frac{\rho}{R}$$

also auch

$$\rho = \frac{b}{28.0754} \cdot \frac{(1 - nt)}{(1 + mt)} \cdot R$$

Nach den neuesten Beobachtungen dehnt sich für jeden Grad des Thermometers ein Volum Luft um seinen 0.0046875. und ein Volum Quecksilber um seinen 0.0002309^{ten} Theil aus, also ist

$$\rho = \frac{b}{28.0754} \cdot \frac{(1 - 0.0002309 t)}{1 + 0.0046875 t} \cdot R$$

oder nahe

$$\rho = \frac{b}{28.0754 (1 + 0.0049184 t)}$$

Setzt man der Kürze wegen $0.0049184 = p$ und

$$1 + \alpha = \frac{b}{28.0754}$$

$$1 + \beta = \frac{1}{1 + pt}$$

so ist

$$\rho = (1 + \alpha) (1 + \beta) \cdot R$$

ein zur Berechnung mit Logarithmen bequemer Ausdruck, welcher also die wahre Refraction ρ gibt, wenn die mittlere Refraction R , welche für den oben angenommenen Normalzustand der Atmosphäre Statt hat, bekannt ist.

Es ist daher nur noch der Werth dieser mittlern Refraction R zu suchen.

§. 2.

Um diese Untersuchung zuerst ganz einfach anzustellen, sey ECD (Fig. 4) ein sehr kleiner Theil der Oberfläche einer jener Schichten, und ZC darauf senkrecht, so daß ZC verlängert durch den Mittelpunkt der Erde geht. Das Gestirn in A sendet einen Strahl AC , der bey der Ankunft von der dichteren Schichte in C gegen das Einfallslot ZC oder nach der Richtung Cb gebrochen wird. Man verlängere bC nach B , und AC nach a , so ist der Einfallswinkel $ACZ = aCP$ und der gebrochene Winkel $bCP = BCZ = z$, wenn z die scheinbare Zenithdistanz des Gestirns bezeichnet, während die wahre ACZ ist. Der Unterschied beyder Winkel, oder $aCb = ACB$ heißt die Refraction, die wir mit R bezeichnen wollen. Da aber bekanntlich der Sinus des Einfallswinkels zu dem Sinus des gebrochenen Winkels ein constantes Verhältniß hat, welches wir m nennen wollen, so ist

$$m = \frac{\sin aCP}{\sin bCP}$$

Nach dem Vorhergehenden ist $bCP = z$, und $aCP = z + R$, also hat man

$$m \sin z = \sin (z + R)$$

und aus dieser Gleichung würde man die Refraction R für jede scheinbare Zenithdistanz z ableiten, wenn m bekannt wäre. Man fand aber, daß dieser Ausdruck noch besser mit den Beobachtungen übereinstimmt, wenn man R mit einer constanten Gröfse, die wir n nennen wollen, multipliziert, wodurch also jene Gleichung wird

$$m \sin z = \sin (z - n R) \dots I.$$

Das Vorhergehende setzt voraus, daß die Atmosphäre sich in einer Ebene endige, und daß ihre Dichte überall dieselbe

sey. Die Atmosphäre besteht aber aus krummen Schichten, deren Dichte gegen die Erde nach einem gewissen Gesetze wächst. Allein da jene Krümmung sowohl, als diese Zunahme der Dichte nur gering ist, so sieht man im Allgemeinen, daß dadurch die äußere Form der Gleichung I. nicht wesentlich geändert werden wird. In der That stellt diese Gleichung, welche man, nach ihrem Erfinder, die Simpson'sche nennt, die beobachteten Refractionen wenigstens für nicht zu große Zenithdistanzen genügend dar.

§. 3.

Man hat dieser Gleichung verschiedene Formen gegeben, von welchen wir einige der vorzüglichsten kurz anzeigen wollen.

Sie gibt sofort

$$\sin z : \sin (z - nR) = 1 : m$$

oder

$$\sin z + \sin (z - nR) : \sin z - \sin (z - nR) = 1 + m : 1 - m$$

das heißt

$$\operatorname{Tg} \frac{nR}{2} = \frac{1-m}{1+m} \operatorname{Tg} \left(z - \frac{nR}{2} \right) \dots \text{II.}$$

welches die Bradley'sche Gleichung ist.

Für $z = 90$ ist $m = \cos nr$, wenn r die Refraction am Horizont bezeichnet, also ist auch

$$\frac{1-m}{1+m} = \operatorname{Tg}^2 \frac{nr}{2}$$

Setzt man endlich in der Gleichung II. den Bogen $\frac{nR}{2}$ für die Tangente, so ist

$$R = \frac{2}{n \sin 1''} \left(\frac{1-m}{1+m} \right) \operatorname{Tg} \left(z - \frac{nR}{2} \right) \dots \text{III.}$$

welches der abgekürzte Ausdruck ist, den Laplace für die Refraction in größern Höhen gegeben hat. Auch gilt die Gleichung I.

$$m = \cos nR - \sin nR \cdot \operatorname{Cotg} z$$

Setzt man in diesem Ausdrucke

$$\cos nR = \frac{1 - \operatorname{Tg}^2 \frac{nR}{2}}{1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{nR}{2}} \quad \text{und} \quad \sin nR = \frac{2 \operatorname{Tg} \frac{nR}{2}}{1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{nR}{2}}$$

so erhält man für $\text{Tg } \frac{nR}{2}$ eine quadratische Gleichung. Löst man diese in eine Reihe auf, so findet man für $\text{Tg } \frac{nR}{2}$, also auch

$$\text{da } \frac{nR}{2} = \text{Tg } \frac{nR}{2} - \frac{1}{3} \text{Tg}^3 \frac{nR}{2} + \frac{1}{5} \text{Tg}^5 \frac{nR}{2} -$$

ist, für $\frac{nR}{2}$ einen Ausdruck der Form

$$A \text{Tg } z + B \text{Tg}^3 z + C \text{Tg}^5 z + \dots$$

I. Die Gleichung I. gibt auch

$$\text{Cos } n r \text{ Sin } z = \text{Sin } (z - n R)$$

oder

$$\text{Cos } n r = \text{Cos } n R - \text{Sin } n R \text{ Cotg } z$$

woraus folgt

$$\text{Sin } n R = \text{Sin } z \cdot \sqrt{1 - \text{Cos}^2 n r \text{ Sin}^2 z} - \frac{1}{2} \text{Cos } n r \cdot \text{Sin } 2 z$$

Setzt man daher

$$\text{Tg } x = \frac{\text{Tg } n r}{\text{Cos } z}$$

so ist

$$\text{Sin } n R = \text{Sin } n r \cdot \text{Sin } z \cdot \text{Tg } \frac{x}{2}$$

Eben so war die Gleichung II.

$$\text{Tg } \frac{nR}{2} = \text{Tg}^2 \frac{n r}{2} \cdot \text{Tg } (z - \frac{nR}{2})$$

Löst man $\text{Tg } (z - \frac{nR}{2})$ auf, so gibt der letzte Ausdruck

$$\text{Tg } \frac{nR}{2} = \frac{1}{2 \text{Cos}^2 \frac{n r}{2} \text{Tg } z} \cdot \left\{ \sqrt{1 + \text{Sin}^2 n r \cdot \text{Tg } z} - 1 \right\}$$

Ist daher $\text{Tg } y = \text{Sin } n r \cdot \text{Tg } z$, so ist

$$\text{Tg } \frac{nR}{2} = \text{Tg } \frac{n r}{2} \cdot \text{Tg } \frac{1}{2} y$$

Nimmt man mit Laplace

$$n = 6.5 \quad \text{und} \quad m = 0.99809$$

so ist die Gleichung III.

$$R = 60'' 68 \text{Tg } (z - 3.25 R)$$

und dieser Ausdruck stellt die Refractionen bis $z = 80^\circ$ den Beobachtungen gemäß dar.

Ist endlich $a = 60'' 68$, $b = 3.25$,

so ist dieselbe Gleichung III.

$$R = a \operatorname{Tg} (z - b R)$$

woraus man, wenn man $\operatorname{Tg} (z - b R)$ auflöst, findet

$$R = \frac{a}{p} \operatorname{Tg} z - \frac{a^3 b \sin 1''}{p^3} \operatorname{Tg}^3 z + \frac{2 a^3 b^2}{p^5} \operatorname{Tg}^5 z -$$

wo $p = 1 + ab \sin 1''$ ist. Stellt man die Werthe von ab wieder her, so ist

$$R = 60'' 62204 \operatorname{Tg} z - 0.05785014 \operatorname{Tg}^3 z + 0.00011041 \operatorname{Tg}^5 z -$$

Uebrigens lassen sich die Werthe von m und n aus zwey beobachteten Refractionen mittels der Gleichungen I. oder II. leicht bestimmen. Ist z. B.

$$R = 98'' 5 \text{ für } z = 60^\circ$$

und

$$R = 1980'' 0 \text{ für } z' = 90^\circ$$

so findet man sehr nahe

$$n = 6 \quad \text{und} \quad m = 0.99834$$

§. 4.

Wir wollen nun sehen, wie man den Ausdruck der Refraction mit Hülfe der Analysis bestimmen kann. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, daß die Atmosphäre aus unendlich dünnen, der Erde concentrischen Schichten besteht, deren Dichte gegen den Mittelpunkt der Erde nach einem gewissen Gesetze zunimmt. Sey C (Fig. 4 a) der Mittelpunkt der Erde, AB ihre Oberfläche, A der Ort des Beobachters, Z sein Zenith, und $Apqr$ die Curve, welche der Lichtstrahl beschreibt. Das Auge in A sieht also das Gestirn nach der Tangente AT des Endpunkts der Curve.

In irgend einem Punkte q dieser Curve sey qT die Tangente derselben, so ist der Winkel pqt die Refraction der zu q gehörigen Schichte. Wir wollen diese Refraction durch d_ρ bezeichnen. Die ganze Refraction wird die Summe aller dieser Winkel d_ρ von dem einen Endpunkte der Curve bis zu dem andern seyn.

Die Form der Refraction einer jeden einzelnen Schichte läßt sich leicht aus der vorhergehenden Gleichung I. ableiten,

da die dort angenommene Voraussetzung einer brechenden Ebene auch hier angewendet werden kann. Es war aber

$$m \sin z = \sin (z - n R)$$

und da R oder die Refraction einer einzigen Schichte gewiß sehr klein ist, so kann man annehmen

$$m \sin z = \sin z - n R \cos z$$

woraus folgt, daß die Refraction im Allgemeinen die Form habe

$$a \operatorname{Tg} z$$

und da nach dem Vorhergehenden die Refraction für jede Zenithdistanz der Dichte der Luft proportionirt ist, so wird man haben

$$\text{Refraction} = \lambda q. \operatorname{Tg} z$$

wo q die Dichte der Schichte, und λ irgend ein constanter Factor ist.

Es sey nun $r = CB$ der Halbmesser der Erde, $Bq = x$ und der Winkel $ACq = v$ also auch $qCr = dv$ und $qrC = z$ der Einfallswinkel in r, so ist

$$Cq T = Cqp + pq T$$

und

$$Cq T = qCr + qrC$$

oder

$$pq T - qCr = qrC - Cqp$$

das heißt

$$d\varphi - dv = z - (z - dz)$$

oder

$$dz = d\varphi - dv.$$

Beschreibt man aber aus C mit dem Halbmesser $Cq = r + x$ einen Kreisbogen qs, so ist

$$\operatorname{Tg} z = \frac{qs}{sr} = (r+x) \frac{dv}{dx}, \text{ oder } dv = \frac{dx}{r+x} \cdot \operatorname{Tg} z$$

Ist aber, wie vorhin, q die Dichte der Schichte bey q, so ist die Dichte der nächstfolgenden Schichte bey r gleich $q - dq$, also das Differential der Refraction, nach dem Vorhergehenden,

$$d\varphi = - \lambda dq \operatorname{Tg} z$$

Substituirt man diese Werthe von dv und dφ in der Gleichung

$$dz = d\varphi - dv$$

so erhält man

$$\frac{dz}{\operatorname{Tg} z} = - \lambda dq - \frac{dx}{1+x}$$

Ist aber $ZAV = Z$ die scheinbare Zenithdistanz des Gestirns, und δ die Dichte der Atmosphäre in der letzten Schichte bey A, so erhält man, wenn man die letzte Gleichung so integrirt, daß für $x = 0$ die Gröfse $z = Z$, und $q = \delta$ wird

$$\operatorname{Sin} z = \frac{\operatorname{Sin} Z}{1 + \frac{x}{r}} \cdot \varepsilon^{\lambda(\delta - q)}$$

wo $\log \operatorname{nat} \varepsilon = 1$ ist.

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{x}{r} = x' \quad \text{und} \quad \varepsilon^{\lambda(\delta - q)} = u,$$

so wird x' immer sehr klein, und u nahe der Einheit gleich seyn, da nach den Beobachtungen λ eine gegen die Einheit sehr kleine Gröfse ist. Man wird daher haben

$$\operatorname{Sin} z = \frac{u}{1+x'} \operatorname{Sin} Z \quad \text{und} \quad dq = - \frac{du}{\lambda u}$$

und wenn man diesen Werth von z und dq in der obigen Gleichung

$$d\varphi = - \lambda dq \operatorname{Tg} z$$

substituirt, so wird man erhalten

$$d\varphi = \frac{\operatorname{Sin} Z \, du}{\sqrt{(1+x')^2 - u^2} \operatorname{Sin}^2 Z}$$

und das Integral dieser Gleichung wird die gesuchte Refraction φ geben. Man kann noch bemerken, daß dieser Ausdruck mit jenem übereinkömmt, den Laplace im IV. B. der *Mec. celeste* p. 244 gegeben hat. M. s. *Mémoires de Berlin* f. d. J. 1772.

Allein diese Gleichung läßt sich nicht integriren, wenn nicht x' in einer Function von u oder von q gegeben ist, d. h. wenn nicht das Gesetz gegeben ist, nach welchem die Dichte der Luftschichten von ihrer Höhe über der Erde abhängt, und dieß Gesetz ist unbekannt.

Wenn aber die Zenithdistanzen nicht größer als 80 oder 82 Grade sind, so braucht man, glücklicher Weise, jenes Gesetz nicht zu kennen. Entwickelt man nämlich die letzte Gleichung in eine Reihe, die nach den Potenzen von x' fortgeht, und setzt man in den Gliedern, welche schon den kleinen Factor x' , x'^2 . . haben, den Werth von u gleich der Einheit,

so erhält man, wenn man bloß die zwey ersten Glieder dieser Reihe berücksichtigt,

$$d\varphi = \frac{\sin Z \cdot du}{\sqrt{1-u^2 \sin^2 Z}} + \frac{\operatorname{Tg} Z}{\cos^2 Z} \cdot \frac{\lambda}{r} x dq$$

Das Integral des ersten Gliedes, zwischen den Gränzen $q = 0$ und $q = \delta$ genommen, welche Werthe von q für die zwey äußersten Punkte der Curve gehören, findet man leicht, wenn man abkürzend $u = 1 + \lambda (\delta - q)$ setzt, gleich

$$\lambda \delta \cdot \operatorname{Tg} Z$$

Im zweyten Gliede aber hängt das Integral $\int x dq$ von der Dichte der Luft, d. h. von der Höhe des Barometers in dem Endpunkte A ab. Ist nämlich y die Höhe des Quecksilbers im Barometer für die Erhöhung x über die Oberfläche der Erde, wo die Dichte der Luft gleich q war, so hat man, wenn man die Dichte des Quecksilbers gleich der Einheit annimmt,

$$q dx = - dy$$

also

$$\int x dq = qx - \int q dx + C$$

oder

$$\int x dq = qx + y + C$$

Um diese Constante zu bestimmen, sey b die Höhe des Barometers im Punkte A, so ist jenes Integral vom ersten Punkt der Curve, wo $y = b$, $x = 0$, $q = \delta$ ist, bis zu dem letzten, wo $y = q = 0$ ist, gleich

$$\int x dq = -b$$

Nimmt man diese beyden Glieder zusammen, so ist das vollständige Integral jener Gleichung

$$\varphi = \lambda \delta \operatorname{Tg} Z \cdot \left(1 - \frac{b}{\delta r \cos^2 Z} \right)$$

Hätte man endlich noch auf das dritte Glied jener Entwicklung Rücksicht genommen, so würde man gefunden haben

$$\varphi = \lambda \delta \operatorname{Tg} Z \left(1 - \frac{b}{\delta r \cos^2 Z} + \frac{122 b^2}{137 \delta^2 r^2} \cdot \frac{(2 + \sin^2 Z)}{\cos^4 Z} \right)$$

Um diesen Ausdruck numerisch zu entwickeln, hat man, wenn man die Bezeichnung des §. 1. beybehält,

$$\delta = \frac{b}{28.0754} \cdot \frac{(1 - nt)}{1 + mt} \cdot D$$

und man kann in dem zweyten und dritten Gliede der letzten Gleichung annähernd

$$\frac{b}{\delta} = \frac{28.0754}{D}$$

setzen. Ferner ist, wie bereits oben bemerkt wurde, wenn die Dichte des Quecksilbers zur Einheit angenommen wird, die Dichte der Luft

$$D = \frac{1}{10485}$$

und der Halbmesser der Erde $r = 6366198$ Meter, also

$$\frac{b}{\delta r} = 0.001251705$$

$$\frac{122}{137} \cdot \frac{b^2}{\delta^2 r^2} = 0.0000013952$$

und die letzte Gleichung geht daher in folgende über

$$\varphi = \lambda D \cdot \frac{b}{28.0754} \cdot \frac{(1-nt)}{1+nt} \operatorname{Tg} Z \times$$

$$\left(1 - \frac{0.001251705}{\cos^2 Z} + 0.0000013952 \frac{(2 + \sin^2 Z)}{\cos^4 Z} \right)$$

wo bloß noch die Constante λD durch Beobachtungen zu bestimmen ist, eine Bestimmung, die Schwierigkeiten unterliegt, da sie unabhängig von der Polhöhe des Beobachtungsortes vorgenommen werden soll. Um einen Weg zu dieser Bestimmung zu zeigen, seyen Z, Z' zwey beobachtete Zenithdistanzen eines dem Pole nahen Sterns in der obern und untern Culmination, φ, φ' die diesen Zenithdistanzen zugehörigen Refractionen, und endlich M, M' die Factoren von λD in der letzten Gleichung. Ist dann p die Poldistanz des Sterns, und ψ die unbekannte Höhe des Aequators, so ist

$$\psi = \frac{1}{2} (Z + Z') + \frac{1}{2} (\varphi + \varphi')$$

oder

$$\psi = \frac{1}{2} (Z + Z') + \frac{1}{2} (\lambda D) (M + M')$$

Eine zweyte doppelte Beobachtung eines andern Circumpolarsterns, welcher in seiner untern Culmination nahe zu dem Horizonte kömmt, wird eine der vorigen ähnliche Gleichung geben, und aus beyden wird man die zwey unbekannten Größen ψ und (λD) durch Elimination finden.

Man fand so für $t = 0^\circ$ Réaumur, und $b = 28.0754$ Pariser Zolle

$$(\lambda D) = 58'' 206$$

und hernach die mittlere Refraction

$R = 58''.133. \operatorname{Tg} Z - 0''.0724 \operatorname{Tg}^3 Z + 0''.006244 \operatorname{Tg}^5 Z$
welche mittlere Refraction R, nach §. 1., noch durch

$$\frac{b}{28.0754} \frac{(1-nt)}{1+mt}$$

multipliziert werden muß, um die wahre Refraction φ zu erhalten.

Noch kann man bemerken, daß die Schwere, die Anziehung der Erde, mit der Höhe über der Oberfläche der Erde und mit der Polhöhe sich ändert, und daß daher bey derselben Temperatur gleiche Barometerhöhen nicht genau eine gleiche Dichte der Luft anzeigen, da diese Dichte in jenen Gegenden kleiner seyn wird, wo die Schwere geringer ist. Der Factor (λD) der eigentlich für den Parallelkreis von 45 Graden gilt, muß also auf der Oberfläche der Erde mit der Schwere sich ändern, und man muß von diesem Factor noch die Gröfse $0''.17 \cos 2\varphi$ subtrahiren, wo φ die Polhöhe des Beobachtungsortes ist.

§. 5.

Die vorbergehenden Entwicklungen gelten aber nur, wie bereits erinnert wurde, für Zenithdistanzen, die nicht über 80 oder 82 Grade betragen. Für gröfsere Zenithdistanzen hat Laplace, im IV. Bande der Mec. celeste, folgenden allgemeinen Ausdruck gegeben.

$$R = 1624'' \sin Z. ((2-a-2a\Theta^2)\psi + a\Theta)$$

$$\text{wo } a = 0.7175935$$

$$\Theta = 28 \cos Z$$

$$\psi = \int_{\Theta}^{\infty} \frac{\Theta^2}{\varepsilon} - t^2 dt$$

Dieses Integral von $t=\Theta$ bis $t=\infty$ genommen, vorausgesetzt, daß $\log \text{nat } \varepsilon = 1$ ist.

Ist endlich $Z > 78^\circ$, so muß zu jenem Ausdrucke von R noch hinzugesetzt werden

$$(-14''.093 \sin Z ((1+2\Theta^2)\psi - \Theta)). (t' - 10)$$

wo t' die Höhe des Thermometers Réaumur bezeichnet.

Um diesen Ausdruck zu entwickeln, muß man für jeden Werth von Θ die Gröfse ψ kennen. Es ist aber (a. a. O. p. 253)

$$\psi = \frac{1}{2\Theta} \left(1 - \frac{1}{2\Theta^2} + \frac{1.3}{2^2.\Theta^4} - \frac{1.3.5}{2^3.\Theta^6} + \frac{1.3.5.7}{3^4.\Theta^8} - \right)$$

oder auch

$$\psi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \varepsilon^{\Theta^2} - \Theta \left(1 + \frac{2\Theta^2}{1.3} + \frac{2^2\Theta^4}{1.3.5} + \frac{2^3\Theta^6}{1.3.5.7} + \right)$$

$$\text{wo } \varepsilon^{\Theta^2} = 1 + \Theta^2 + \frac{\Theta^4}{1.2} + \frac{\Theta^6}{1.2.3} +$$

und wo $\pi = 3.14159 \dots$ ist.

Ist Θ gleich oder kleiner, als die Einheit, so muß man den zweyten Ausdruck von ψ brauchen. Es ist aber nahe $\Theta = 1$ für $Z = 84^\circ$. Ist $\Theta > 1$, so kann man den ersten Werth von ψ sofort in den allgemeinen Ausdruck von R substituiren, wodurch man eine einfache Reihe erhält. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$\psi = \frac{1}{2\Theta} \varphi$$

so ist der vorhergehende Ausdruck von R , da

$$\frac{1624}{28} = 58 \text{ ist,}$$

$$R = 58 \operatorname{Tg} Z \left(\left(1 - \frac{a}{2} - a\Theta^2 \right) \varphi + a\Theta^2 \right)$$

oder

$$R = 58 \operatorname{Tg} Z \cdot \varphi - 58 a \operatorname{Tg} Z \cdot \left(\frac{\varphi}{2} + \Theta^2 (\varphi - 1) \right)$$

oder auch, wenn man die Gröfse

$$58 \operatorname{Tg} Z \left(\frac{\varphi}{2} + \Theta^2 (\varphi - 1) \right)$$

addirt und subtrahirt

$$R = 58 \operatorname{Tg} Z \cdot \left(\frac{3}{2} \varphi + \Theta^2 (\varphi - 1) \right) - (1+a) 58 \operatorname{Tg} Z \cdot \left(\frac{\varphi}{2} + \Theta^2 (\varphi - 1) \right)$$

Entwickelt man aber die Gröfse

$$\frac{3}{2} \varphi + \Theta^2 (\varphi - 1)$$

und

$$\frac{\varphi}{2} + \Theta^2 (\varphi - 1)$$

so erhält man zwey Reihen, und wenn man die erste durch $58 \operatorname{Tg} Z$, und die zweyte durch $(1+a) 58 \operatorname{Tg} Z$ multipliziert, so gibt die Differenz beyder Produkte

$$R = 58 \operatorname{Tg} Z \cdot \left(1 - \frac{(1+a)}{2\Theta^2} + \frac{3(1+2a)}{2^2\Theta^4} - \frac{3.5(1+3a)}{2^3\Theta^6} + \frac{3.5.7(1+4a)}{2^4\Theta^8} \right)$$

und dieser Ausdruck ist bis $Z = 84^\circ$ brauchbar. Für größere

Zenithdistanzen wird man den zweyten Ausdruck von ψ nehmen, für welchen sich keine so einfache Reihe angeben läßt.

Ex. Sey $Z = 80$ so ist $\log \Theta = 0.6868282$
also der erste Ausdruck von

$$\psi = \frac{1}{2\Theta} (0.980050)$$

$$\log \psi = 9.0033900$$

$$2 - a - 2a\Theta^2 = -32.646110$$

$$\text{dessen Log} = 1.5138314n$$

$$\log 1624 \sin Z = 3.2039375$$

$$3.7211589 = \log - 5262''.1$$

$$\text{Ferner ist } \log a\Theta = 0.5427067$$

$$3.2039375$$

$$3.7460442 = \log + 5580.1$$

$$-5262.1$$

$$R = 318''.0$$

Nach der zuletzt gegebenen Reihe aber hat man sofort

$$R = 328.93 - 11.95 + 1.07 - 0.15 + 0.03 = 317''.93$$

wie zuvor.

Ex. II. Es sey $Z = 89^\circ 30'$
so ist

$$\log \Theta = 9.3879999$$

$$\log (2 - a - 2a\Theta^2) = 0.0779928$$

$$\psi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1.061521) - \Theta (1.040768) = 0.68645$$

Es ist daher

$$\log 1624 \sin Z = 3.2105695 \quad 3.2105695$$

$$0.0779928. \log a\Theta = 9.8438784$$

$$\log \psi = 9.8366089 \quad 2.4544479$$

$$3.1251712 \quad \text{Zahl} = 284.7$$

$$\text{Zahl} = 1334.0$$

$$284.7$$

$$R = 1618''.7$$

Endlich gibt $Z = 90$, $\Theta = 0$, $\psi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

also

$$R = 1624 \sin Z. (2 - a) \psi = 1845''.7$$

die Horizontalrefraction. Die Refractionstabeln am Ende dieses Theiles sind nach diesen Ausdrücken berechnet worden.

I. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß sich die vorhergehenden verwickelten und unbequemen Ausdrücke durch andere einfachere werden ersetzen lassen. Ein solcher ist folgender.

Ist nämlich, wie so eben gefunden wurde,

$$r = 1845''.7$$

die Horizontalrefraction, und

$$A = 0.06265 - 0.00002 \operatorname{Tg} Z$$

so läßt sich die durch die vorhergehenden Reihen gegebene Refraction R bis $Z = 87$ Grade incl. durch folgenden Ausdruck darstellen

$$R = \frac{A r \sin Z}{\cos Z + \sqrt{A^2 + \cos^2 Z}}$$

Man könnte die Uebereinstimmung vielleicht noch weiter treiben, wenn man für A eine Gröfse der Form

$$a - b \operatorname{Tg} Z + c \operatorname{Tg}^3 Z -$$

annimmt, allein es ist vielleicht vortheilhafter, die Refraction der letzten zwey oder drey Grade, wegen den großen Anomalien, denen sie unterworfen sind, mehr auf einem empirischen, obschon immer durch die Theorie geleiteten Weg zu bestimmen. Uebrigens kann man dem letzten Ausdrücke eine zur Rechnung sehr bequeme Form geben. Ist nämlich

$$\operatorname{Tg} x = \frac{A}{\cos Z}$$

so hat man

$$R = r \sin Z. \operatorname{Tg} \frac{x}{2}$$

Um zu sehen, wie nahe die Resultate der letzten Gleichung mit den vorhergehenden Reihen von Laplace übereinstimmen, findet man

I.

F

Für z . . . Laplace . . letzte Gleichung

20°	$21''1$. .	$21''1$
40	48.6	48.5
60	100.0	99.8
80	317.9	317.4
84	506.7	506.6
85	590.2	590.5
86	702.6	703.0
87	858.8	858.6

Am besten findet man die Theorie der Refraction entwickelt in Bessels Fundam. astronomiae.

§. 6.

Um die Refraction für irgend eine Zenithdistanz unmittelbar aus Beobachtungen zu bestimmen, kann man, wie oben, die Polhöhe des Beobachtungsortes aus der größten und kleinsten Höhe eines Circumpolarsterns ableiten, indem man die halbe Summe der beobachteten Höhen sucht, welche um die halbe Summe der den zwey Höhen entsprechenden Refractionen zu groß seyn wird. Geht der Stern in seiner obern Culmination nahe durch das Zenith, so ist seine Refraction nahe Null, während sie in der untern Culmination beträchtlich seyn wird.

Ist H die Summe der größten und kleinsten Höhe eines Circumpolarsterns, und R die Summe der diesen Höhen entsprechenden Refractionen, so ist die scheinbare Polhöhe $\frac{1}{2} H$, und die wahre $\frac{1}{2} (H - R)$. Für einen andern, weiter vom Pole abstehenden Stern seyen diese Summen H' und R' , so werden wieder die beyden Polhöhen $\frac{1}{2} H'$ und $\frac{1}{2} (H' - R')$ seyn, also ist

$$H' - R' = H - R$$

und da aus den Beobachtungen die Differenz $H' - H$ der scheinbaren Polhöhen gegeben ist, so kennt man die Differenz $R' - R$ der Summen der zwey letzten Refractionen über die Summen der zwey ersten, nämlich

$$R' - R = H' - H.$$

Hätte man z. B. beobachtet

Von dem Polarstern . . . größte Höhe $50^\circ 14' 18'' = h$
 kleinste - - $46 49 45 = h,$

Von α Persei . . . größte Höhe $89\ 20\ 40 = h'$
 kleinste - - $7\ 48\ 28 = h''$

so ist aus dem ersten

$$H = 97^\circ\ 4'\ 3''$$

aus dem zweyten

$$H' = 97\ 9\ 8$$

also auch

$$R' - R = 5'\ 5''.0 = 305''.0$$

Wäre das Verhältniß dieser Refractionen zu einander bekannt, so könnte man die Refractionen selbst finden. Es verhalten sich aber in nicht zu kleinen Höhen die Refractionen wie die Tangenten der scheinbaren Zenithdistanzen, also ist

$$\begin{aligned} &(\text{Cotg } h' + \text{Cotg } h'') - (\text{Cotg } h + \text{Cotg } h'') : \text{Cotg } h \\ &= 305'':48''6 \text{ Refraction für } 50^\circ\ 14' \text{ sch. Höhe} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\text{Cotg } h' + \text{Cotg } h'') - (\text{Cotg } h + \text{Cotg } h'') : \text{Cotg } h, \\ &= 305'':54''8 \text{ für } 46^\circ\ 50' \end{aligned}$$

und eben so findet man

$$0''.6 \text{ Refraction für } 89^\circ\ 21' \text{ scheinbare Höhe}$$

$$\text{und } 6'\ 47''8 - - - - 7^\circ\ 48'$$

also ist auch

$$R = 1'\ 43''4$$

$$R' = 6\ 48.4$$

und

$$H - R = 97^\circ\ 2'\ 19''6$$

$$H' - R' = 97\ 2\ 19.6$$

und deren Hälfte gibt

$$\text{die gesuchte Polhöhe} = 48^\circ\ 31'\ 9''8$$

Aber wahre Höhe des α Persei

$$= h' - 0''.6 = 89\ 20\ 39.4$$

$$\text{Polardistanz des } \alpha \text{ Persei} = 40^\circ\ 49'\ 29''6$$

Fällt eine dieser Höhen auf die Südseite vom Zenith, so ist ihre Cotangente negativ.

Kennt man aber die Polhöhe des Beobachtungsorts, und die

Declination des beobachteten Sterns, so läßt sich aus jeder beobachteten Höhe des Sterns, wenn man sie mit der berechneten vergleicht, die dieser Höhe entsprechende Refraction ableiten. Wiederholungen und allmähliche Correctionen sind hier unvermeidlich, da die Bestimmung der Polhöhe schon die Kenntniß der Refraction voraussetzt. Eine treffliche Methode, die Refraction durch Beobachtungen zu bestimmen, s. m. in Mayländer Ephemeriden 1816. p. 3.

§. 7.

Die Refraction beschleunigt den Aufgang, und verspätet den Untergang der Gestirne: der wahre halbe Tagbogen s ist, nach Cap. I. §. 4.

$$\cos s = - \operatorname{Tg} \varphi \operatorname{Tg} \delta$$

der scheinbare aber

$$\cos s' = - \frac{\sin(r+d)}{\cos \delta \cos \varphi} \operatorname{Tg} \varphi \operatorname{Tg} \delta$$

wo r die Horizontalrefraction, und d der Halbmesser des Gestirns ist. Für den Auf- oder Untergang des Mittelpunkts des Gestirns ist $d=0$, für den Auf- oder Untergang des untern Randes der Gestirne ist d negativ. Daraus findet man annähernd

$$s' - s = \frac{(r+d)}{\cos \delta \cos \varphi \sin s}$$

Auch das Azimut ω des Gestirns wird bey dem Auf- oder Untergange desselben verändert. Man findet leicht

$$\omega - \omega' = \frac{\sin(r+d) \sin \varphi + 2 \sin^2 \frac{r+d}{2} \sin \delta}{\cos(r+d) \cos \varphi \sin \omega, \sin \omega'}$$

Kennt man so ω und ω' , so ließe sich daraus die Horizontalrefraction r mittels des letztern Ausdrucks finden: eine wenig verlässliche Methode.

Ueber dem Horizonte aber ändert die Refraction, die immer nur in einer verticalen Ebene wirkt, das Azimut nicht, aber wohl den Stundenwinkel und die Declination. Ist v der Winkel des Verticalkreises mit dem Declinationskreise, und s der Stundenwinkel, R die Refraction, so findet man leicht

$$d s = \frac{R \sin v}{\cos (\delta + R \cos v)}$$

und

$$d \delta = - R \cos v$$

Nennt man a die Tiefe der Sonne unter dem Horizonte für den Augenblick, wo die höchsten Schichten der Atmosphäre, die noch merklich Licht zurückwerfen, von der Sonne zuerst oder zuletzt beschienen werden, d. h. für den Anfang oder das Ende der Dämmerung, so gibt der vorhergehende Ausdruck von $s' - s$ die ganze Dauer dieser Dämmerung, wenn man in ihm $r + d = a$ setzt.