

DRITTES KAPITEL.

A b e r r a t i o n.

§. 1.

Bradley fand, als er sich mit der Untersuchung der Nutation beschäftigte, noch eine andere Bewegung, die allen Sternen gemeinschaftlich zukömmt, aber nach ganz verschiedenen Gesetzen vor sich zu gehen scheint. Die Bemerkung, daß diese Bewegungen in eine Periode eingeschlossen sind, die genauer Umlaufszeit der Sonne um die Erde, oder die unserm Jahre gleich ist, mußte auf die Vermuthung führen, daß diese Bewegung selbst ihre Ursache in jener Bewegung der Sonne oder der Erde habe. Nach vielen mit der größten Genauigkeit angestellten Beobachtungen fand man, daß folgende Hypothese diese Bewegungen darstelle.

Man nahm an, daß jeder Stern jährlich einen der Ecliptik parallelen Kreis beschreibe, dessen Mittelpunkt der wahre Ort des Sterns ist, und dessen Peripherie von dem scheinbaren Orte des Sterns, in der Richtung der jährlichen Bewegung der Sonne, und zwar so zurückgelegt werde, daß die Sonne beständig 90 Grade vor dem Stern vorausgeht. Der Durchmesser dieses Kreises, von der Erde gesehen, mißt einen Winkel von $20'' 25$, oder nach den neuesten Untersuchungen von $20'' 448$.

Um dieser Annahme gemäß die Veränderungen der Länge und Breite der Gestirne, welche aus dieser Bewegung entstehen, zu bestimmen, sey λ , β , r die Länge, Breite und Entfernung des Gestirns von der Erde, L die Länge der Sonne, und R der Halbmesser des der Ecliptik parallelen Kreises. Bestimmt man die Lage des wahren Gestirns, oder des Mittelpunktes jenes Kreises gegen die Erde durch drey rechtwinklichte Coordinaten $x y z$, von denen x in der Linie der Nachtgleichen, und $x y$ in der Ebene der Ecliptik liegt, so hat man

$$x = r \cos \beta \cos \lambda$$

$$y = r \cos \beta \sin \lambda$$

$$z = r \sin \beta$$

Bezeichnet man aber dieselben Gröſſen für den scheinbaren Ort mit x' r' ..., so ist eben so

$$x' = r' \cos \beta' \cos \lambda'$$

$$y' = r' \cos \beta' \sin \lambda'$$

$$z' = r' \sin \beta'$$

Da der Kreis der Ecliptik parallel ist, so ist offenbar

$$z = z'$$

Man denke sich nun auf der Ebene des Kreises zwey Halbmesser, von denen der erste parallel mit x , und der andere parallel mit y ist. Ein dritter bilde mit dem ersten einen Winkel, gleich L , und ein vierter endlich stehe senkrecht auf dem dritten, so bezeichnet, nach dem Vorhergehenden, der dritte die Länge der Sonne, und der vierte die scheinbare Länge des Gestirns. Da aber der erste auf den zweyten, so wie der dritte auf den vierten senkrecht steht, so ist auch der Winkel des zweyten mit dem vierten gleich L , also hat man

$$x' = x + R \sin L$$

$$y' = y - R \cos L$$

Da aber $\text{Tg } \lambda = \frac{y}{x}$ und $\text{Tg } \beta = \frac{z}{x} \cos \lambda$ ist, so hat man auch

$$\text{Tg } \lambda = \frac{y' + R \cos L}{x' - R \sin L} \quad \text{und} \quad \text{Tg } \beta = \frac{z' \cos \lambda}{x' - R \sin L}$$

und die beyden letzten Gleichungen geben, da auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens alle Gröſſen bekannt sind, die wahre Länge und Breite aus der beobachteten scheinbaren Länge und Breite. Man hat nämlich, wenn man für x' y' z' die vorhergehenden Werthe

$$\text{und } \frac{R}{r} = 20''448 \text{ setzt,}$$

$$\text{Tg } \lambda = \frac{\sin \lambda' + 20.448 \frac{\cos L}{\cos \beta'}}{\cos \lambda' - 20.448 \frac{\cos L}{\cos \beta'}} \quad \text{und}$$

$$\text{Tg } \beta = \frac{\sin \beta' \cos \lambda}{\cos \beta' \cos \lambda' - 20.448 \sin L}$$

oder, da $\lambda' - \lambda$, $\beta' - \beta$ und $20''448$ nur geringe Gröſſen sind, durch eine leichte Veränderung der vorhergehenden Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \lambda - \lambda' &= 20''448 \frac{\cos(L - \lambda')}{\cos \beta'} \\ \beta - \beta' &= 20.448 \sin(L - \lambda') \sin \beta' \end{aligned} \right\} \text{I.}$$

und diese beyden Gleichungen geben die gesuchte Veränderung

der Sterne in Länge und Breite. Man hat gefunden, daß sie mit den Beobachtungen sehr genau übereinstimmen.

§. 2.

Obschon sich aber diese Annahme der gemeinschaftlichen Bewegung jedes Gestirns in einem Kreise den Beobachtungen genau anschließt, so ist sie doch an sich selbst zu unwahrscheinlich, um ohne weitere Prüfung zugelassen zu werden. Die gemeinschaftliche GröÙe aller dieser Kreise führt auf die Vermuthung, daß die Ursache dieser Bewegungen auÙer den Gestirnen liege, und die der Ecliptik parallele Lage dieser Kreise, so wie die obenangezeigte Periode dieser Bewegung veranlaßt uns, den Grund derselben in der Bewegung der Sonne oder der Erde aufzusuchen.

Der Beobachter auf der Erde, diese als ruhend vorausgesetzt, wird, ein Gestirn, welches wir ebenfalls als ruhend annehmen wollen, zu betrachten, seinem Fernrohre offenbar die Richtung geben müssen, welche der von den Gestirnen ausgehende Strahl des Lichtes hat, damit dieser Strahl, ohne von den Wänden des Rohres aufgehalten zu werden, mit diesem parallel und frey in das Auge des Beobachters kommen könne. Dasselbe würde ohne Zweifel auch selbst dann der Fall seyn, wenn die Erde sich bewegte, aber die Geschwindigkeit l des Lichtes gegen die Geschwindigkeit t der Erde unendlich groß wäre.

Wenn man aber das Verhältniß $\frac{t}{l} = a$, ohne sich merklich von der Wahrheit zu entfernen, nicht für Null ansehen kann, so wird auch der Unterschied beyder Fälle, der der ruhenden und der der bewegten Erde, nicht mehr vernachlässigt werden können, oder man wird dem Rohre in dem zweyten Falle eine von der Richtung des Lichtstrahles verschiedene Richtung geben müssen.

Es bewege sich also eine Reihe von Lichtpunkten in der Richtung ECA (Fig. 3) mit der Geschwindigkeit l gegen die Ebene AB, in welcher sich von B gen A ein Rohr mit der Geschwindigkeit t sich selbst parallel bewegt. Man suche die Richtung des Rohrs, welches jene Lichtpunkte ungehindert durchläßt.

Zu diesem Zwecke nehme man AB zu AC, wie t zu l . Statt der Bewegung der Lichtpunkte in der Richtung CA, verbunden mit der Bewegung des Rohrs in der Richtung BA, kann man auch annehmen; daß sich diese Lichtpunkte in der Richtung CB, und zwar mit der Geschwindigkeit, welche durch diese Linie CB ausgedrückt wird, bewegen, während das Mittel C, aus welchem diese Punkte kommen, von C nach D parallel mit der Richtung BA = CD sich bewegt. Diese Annahme ändert

offenbar nichts in der Art, wie diese Punkte von C auf die Oberfläche BA kommen. Da aber eben durch diese Annahme das Rohr dieselbe Geschwindigkeit erhält, die das Mittel C hat, so kann man das Rohr als in diesem Mittel enthalten, betrachten, d. h. man kann die Bewegung des Mittels und des Rohres zugleich Null setzen, wenn man dafür den Lichtpunkten die Richtung und die Geschwindigkeit CB gibt, wodurch demnach der Fall des bewegten Rohres auf den einfachern des ruhenden Rohres zurückgeführt wird.

Ist also, um dieß auf unsern Gegenstand anzuwenden, EA die Richtung des Strahls, und BA die Richtung der sich bewegenden Erde, so nehme man $CD:CA = t:1$ oder $CD = a \cdot CA$, und CD mit BA parallel, so ist AD oder BC die gesuchte Lage des Rohres, also auch E der wahre, und E' der scheinbare Ort des Gestirns. Die Differenz der beyden Orte, oder der Winkel EAE' heist die Aberration, welche demnach immer in der Ebene durch die Tangente der Erdbahn und durch die wahre Entfernung des Gestirns Statt hat.

Es sey nun wieder L die Länge der Sonne, $\lambda \beta r$ die wahre Länge, Breite und Entfernung des Gestirns von der Erde, bestimmt man die Lage des wahren Ortes der Gestirnes gegen den Mittelpunkt der Erde durch drey rechtwinklichte Coordinaten, $x y z$, wo x in der Linie liegt, welche die Mittelpunkte der Sonne und Erde verbindet, und wo xy in der Ebene der Ecliptik liegt, so ist

$$x = r \cos \beta \cos (\lambda - L)$$

$$y = r \cos \beta \sin (\lambda - L)$$

$$z = r \sin \beta$$

Bezeichnet man, wie oben, dieselben Größen für den scheinbaren Ort des Gestirns durch $x' r' \beta' \dots$ so ist eben so

$$x' = r' \cos \beta' \cos (\lambda' - L)$$

$$y' = r' \cos \beta' \sin (\lambda' - L)$$

$$z' = r' \sin \beta'$$

Errichtet man aber nach dem vorhin gesagten, an dem wahren Orte des Gestirnes in der Ebene durch diesen wahren Ort und durch die Tangente der Erdbahn eine gerade Linie,

$$b = \frac{t}{1} \cdot r,$$

parallel mit dieser Tangente, so wird der Endpunkt dieser geraden Linie b den scheinbaren Ort des Gestirns bezeichnen. Da aber die Tangente des Kreises auf dem Halbmesser desselben senkrecht steht, so ist die Tangente der Erdbahn auf der Axe

der x senkrecht, d. h. diese Tangente, also auch die Linie b , ist mit der Axe der y parallel, also ist

$$y' = y - b$$

Die beyden andern Coordinaten $x' z'$ sind offenbar dieselben mit $x z$. Es ist daher

$$\text{Tg } \alpha = \frac{y}{x} = \frac{y' + b}{x'} \text{ und}$$

$$\text{Tg } \beta = \frac{z}{x} \cos (\lambda - L) = \frac{z'}{x'} \cos (\lambda - L)$$

oder es ist

$$\text{Tg } (\lambda - L) = \text{Tg } (\lambda' - L) + \frac{a}{\cos \beta' \cos (\lambda' - L)}$$

$$\text{Tg } \beta = \text{Tg } \beta' \frac{\cos (\lambda - L)}{\cos (\lambda' - L)}$$

und diese Gleichungen geben die gesuchte wahre Länge und Breite genau. Aus ihnen wird man, nach einigen leichten Verwandlungen, folgende abgekürzte Ausdrücke ableiten, in denen $d\lambda = \lambda' - \lambda$ und $d\beta = \beta' - \beta$ ist,

$$\left. \begin{aligned} d\lambda &= -a \cdot \frac{\cos (L - \lambda')}{\cos \beta'} \\ d\beta &= -a \sin (L - \lambda') \sin \beta' \end{aligned} \right\} \text{ II.}$$

und diese zwey Gleichungen sind genau dieselben mit jenen (I), welche wir bereits oben gefunden haben, bis auf die Gröfse

$$a = \frac{t}{1},$$

welche wir noch zu bestimmen haben. Zu diesem Zwecke bemerke man, dafs man aus andern Beobachtungen, die erst unten erklärt werden, gefunden hat, dafs das Licht, um die Entfernung der Sonne von der Erde zurückzulegen, $0^{\text{st}}. 8' 17'' 91 = 497''.91$ brauche. Die Umlaufszeit der Erde um die Sonne aber, oder die Länge des Jahres ist 365.2563835 Tage, daher legt die Erde in der Zeit $497''.91$ einen auf den Halbmesser gleich 1 gebrachten Bogen von

$$\frac{(360) (497.91)}{24 (365.2563835)} \cdot \frac{\pi}{648000} = 0.000 \ 099 \ 1372$$

zurück, wo $\pi = 3.1415926 \dots$ ist.

Man hat daher

$$a = \frac{t}{1} = \frac{0.000\ 099\ 1372}{1}$$

oder in Bogensekunden ausgedrückt

$$a = \frac{t}{1 \sin 1''} = 20''.448$$

und so ist also auch die Gröfse a gleich den oben gefundenen Factoren der Gleichungen (I).

Diese Identität beyder Ausdrücke I., II. d. h. die vollkommene Uebereinstimmung der Theorie, der angenommenen Hypothese mit den Beobachtungen, gibt eines der schönsten Beispiele, wie man zu verfahren hat, um die Gesetze, nach welchen beobachtete Phänomene in der Natur vor sich gehen, aufzufinden; so wie sie zugleich einen Beweis für die Bewegung der Erde um die Sonne gibt, da ohne dieser Bewegung der Erde jene Theorie nicht Statt haben, und doch keine andere genügende Erklärung der durch die Beobachtungen gegebenen Aberration gefunden werden kann.

§. 3.

Diese Aenderungen der Länge und Breite werden wieder Aenderungen in der Rectascension und Declination nach sich ziehen, die wir nun aufsuchen wollen. Die Gleichung für $Tg\ \alpha$ des Cap. I. §. 5 gibt, wenn man sie in Beziehung auf $\alpha\ \lambda\ \beta$ differentiirt, und für $d\lambda$, $d\beta$ ihre Werthe aus den Gleichungen I. substituirt

$$d\alpha = -a \frac{\cos e \cos \alpha \cos (L-\lambda)}{\cos \lambda \cos \delta} \\ + a \sin e \sin \beta \left(\frac{\sin \lambda \cos (L-\lambda)}{\cos^2 \delta} + \frac{\cos \alpha \sin (L-\lambda)}{\cos \delta \cos \beta} \right)$$

Löst man die Sinus und Cosinus von $(L-\lambda)$ auf, so wird

$$d\alpha = -a \frac{\cos e \cos \alpha \cos L}{\cos \delta} \\ - \frac{a \sin L}{\cos \delta} \left(\cos e \cos \alpha \operatorname{Tg} \lambda - \frac{\sin e \sin \beta}{\cos \delta} \right)$$

und wenn man für $\operatorname{Tg} \lambda$ und $\sin \beta$ ihre Werthe in $\alpha\ \delta$ aus den Gleichungen Cap. I. §. 5 substituirt

$$d\alpha = -a \frac{\cos e \cos \alpha \cos L}{\cos \delta} - a \frac{\sin \alpha \sin L}{\cos \delta} \dots \text{(III)}$$

Behandelt man eben so die Gleichung für $\sin \delta$ des a. O., so hat man

$$d\delta = -a \frac{\sin \beta \cos \beta \cos e}{\cos \delta} \sin(L - \lambda) \\ + a \frac{\sin^2 \beta \sin \lambda \sin e}{\cos \delta} \sin(L - \lambda) - a \frac{\cos \lambda \sin e}{\cos \delta} \cos(L - \lambda)$$

Löst man die Sinus und Cosinus von $(L - \lambda)$ auf, so erhält man für $d\delta$ in derselben Ordnung sechs Glieder; davon ist die Summe des ersten, dritten und sechsten

$$-a \frac{\cos \beta \cos \lambda \sin L}{\cos \delta} (\sin \beta \cos e + \cos \beta \sin \lambda \sin e) = \\ -a \cos \alpha \sin \delta \sin L$$

und die Summe der drey übrigen

$$a \frac{\cos L}{\cos \delta} (\cos e \sin \lambda \sin \beta \cos \beta - \sin e (\sin^2 \beta \sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda))$$

das heißt, wenn man in diesem Ausdrücke die Werthe von $\tan \lambda$, $\sin \beta$, und $\cos \beta \cos \lambda$ aus den Gleichungen des a. O. substituirt

$$a \cos L (\cos e \sin \alpha \sin \delta - \sin e \cos \delta)$$

also ist, wenn man beyde Summen addirt,

$$\left. \begin{aligned} d\delta &= -a \sin e \cos \delta \cos L - \\ &a \sin \delta (\cos \alpha \sin L - \cos e \sin \alpha \cos L) \end{aligned} \right\} \dots (IV)$$

und die Gleichungen II., III., IV. geben die Aberration der Länge, Breite, Rectascension und Declination, und die so erhaltenen Werthe von $d\lambda$, $d\beta$, $d\alpha$, $d\delta$ werden mit ihren Zeichen zu den wahren (oder mittlern) Gröfsen geschlagen, um die scheinbaren, von der Aberration afficirten, Orte der Gestirne zu erhalten.

I. Man hat den beyden letzten Gleichungen verschiedene Gestalten gegeben, um sie zur Rechnung bequemer zu machen. Folgende Veränderung ist für sich klar

$$d\alpha = -\frac{a}{2} \frac{(1 + \cos e)}{\cos \delta} \cos(\alpha - L) + \frac{a}{2} \frac{(1 - \cos e)}{\cos \delta} \cos(\alpha + L)$$

$$d\delta = \frac{a}{2} (1 + \cos e) \sin \delta \sin(\alpha - L) - \frac{a}{2} (1 - \cos e) \sin \delta \sin(\alpha + L)$$

$$-\frac{a}{2} \sin e \cos(L - \delta) - \frac{a}{2} \sin e \cos(L + \delta)$$

das untere Zeichen für südliche Declinationen.

In diesen Ausdrücken kann man die Gröfse e , da sie sich nur sehr langsam ändert, für eine gegebene Periode als constant annehmen. Man sieht dann leicht, dafs sich $d\alpha$ und $d\delta$ in drey Tafeln bringen lassen, wenn man die Factoren

$$\frac{1}{\cos \delta} \text{ und } \sin \delta$$

eingens anbringt.

II. Man kann aber auch diesen Gleichungen eine mit jenen analoge Form geben, die wir bereits für die Nutation entwickelt haben. Zu diesem Zwecke darf man nur bemerken, dafs man der Gleichung

$$A (a \cos b \cos c + \sin b \sin c)$$

immer die Gestalt

$$x \cos (b - c + y)$$

geben kann, wenn man die Gröfsen x , y gehörig bestimmt. Löst man nämlich den letzten Ausdruck auf, so hat man

$$(x \cos b \cos y - x \sin b \sin y) \cos c + (x \sin b \cos y + x \cos b \sin y) \sin c = A a \cos b \cos c + A \sin b \sin c$$

und wenn man die Factoren von $\cos c$ und $\sin c$ auf beyden Seiten gleich setzt, so ist

$$x (\cos b \cos y - \sin b \sin y) = A a \cos b$$

$$x (\sin b \cos y + \cos b \sin y) = A \sin b$$

Multipliziert man aber die erste dieser Gleichungen durch $\sin b$, und die zweyte durch $-\cos b$, so gibt ihre Summe

$$x \sin y = (1 - a) A \sin b \cos b$$

und multipliziert man die erste durch $\cos b$, und die zweyte durch $\sin b$, so gibt ihre Summe

$$x \cos y = A - (1 - a) A \cos^2 b$$

woraus man sofort findet

$$\operatorname{Tg} y = \frac{(1 - a) \sin b \cos b}{1 - (1 - a) \cos^2 b}$$

$$x = A \sqrt{1 - (1 - a^2) \cos^2 b}$$

Wendet man dieses auf die vorhergehenden Gleichungen an, so ist für die erste $c = \alpha$, und für die zweyte $c = 90^\circ + \alpha$, und für beyde $a = \cos e$, $b = L$, also ist

$$\operatorname{Tg} y = \frac{\sin^2 \frac{e}{2} \sin 2 L}{1 - 2 \sin \frac{e}{2} \cos^2 L}$$

$$x = \frac{t}{1} \sqrt{1 - \sin^2 e \cos^2 L}$$

also auch

$$d\alpha = -\frac{x}{\cos \delta} \cos (L + y - \alpha)$$

$$d\delta = -x \sin \delta \sin (L + y - \alpha) - \frac{t \sin e}{21} \cos (L - \delta) \\ - \frac{t \sin e}{21} \cos (L + \delta)$$

und dadurch ist $d\alpha$, $d\delta$ auf zwey Tafeln gebracht, deren die erste das Argument L und die Gröfsen x , y und die zweyte die zu wiederholenden Argumente $L + \delta$ und $L - \delta$ und die Gröfsen

$$- \frac{t}{21} \sin e \cos (L - \delta), - \frac{t}{21} \sin e \cos (L + \delta)$$

enthält. Südliche Declinationen werden als negativ angenommen, also wird ihre absolute Gröfse durch positive Aberration vermindert.

III. Setzt man endlich $f = 20'' 448$, so sey, wie Cap. II. §. 7.,

$$P = f \frac{\sin \alpha}{\cos \delta}$$

$$P' = f \cos \alpha \sin \delta$$

$$p = f \cos e \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \delta}$$

$$p' = -f \cos e \cdot \sin \alpha \sin \delta \\ + f \sin e \cdot \cos \delta$$

$$\text{und } \operatorname{Tg} A = \frac{P}{p}$$

$$\operatorname{Tg} A' = \frac{P'}{p'}$$

$$a = -\frac{P}{\cos A}$$

$$a' = -\frac{P'}{\cos A'}$$

so hat man

$$d\alpha = a \sin (A + L)$$

$$d\delta = a' \sin (A' + L)$$

§. 4.

Der Factor $\frac{1}{\cos \beta'}$ in der ersten der Gleichungen II. reduziert die eigentliche Veränderung der Länge

$$- \frac{t}{1} \cos (L - \lambda')$$

auf die Ecliptik. Wir wollen diese nicht reduzierte Grösse mit Y, und die darauf senkrechte, oder

$$- \frac{t}{1} \sin (L - \lambda') \sin \beta'$$

mit X bezeichnen. Wegen den geringen Werthen dieser Grössen XY kann man ihre Ausdrücke im Räume für gerade Linien annehmen, und dann stellen sie die rechtwinklichten Coordinaten der Curve vor, in welcher alle scheinbaren Orte des Gestirnes liegen. Es ist also

$$X = - \frac{t}{1} \sin (L - \lambda') \sin \beta'$$

$$Y = - \frac{t}{1} \sqrt{1 - \sin^2 (L - \lambda')}$$

und wenn man $\sin (L - \lambda')$ eliminirt,

$$Y = \frac{t}{1} \sqrt{1 - \frac{X^2}{t^2 \sin^2 \beta'}}$$

die Gleichung der gesuchten Curve, die also eine Ellipse ist, deren halbe Axen

$$\frac{t}{1} \text{ und } \frac{t}{1} \sin \beta'$$

sind. Im Pole der Ecliptik wird diese Ellipse zum Kreise, und in der Ecliptik selbst zur geraden Linie. Diese Ellipse ist die Projection auf die Sphäre des Himmels von dem der Ecliptik parallelen Kreis, welchen wir oben betrachtet haben.

Ex. Den 1. May 1808 ist für α Ophiuchus, wenn man α δ aus dem Ex. Cap. II. §. 7, und die Länge der Sonne $L = 40^\circ 52'$ nimmt,

$$y = 2^\circ 28', \quad L + y - \alpha = 141^\circ 49' = p$$

$$\begin{array}{rcl}
 \log x = & 1.2859 n & \dots \dots \dots 1.2859 n \\
 \log \cos p = & 9.8954 n & \log \sin p = 9.7911 \\
 \log \operatorname{Comp} \cos \delta = & 0.0108 & \log \sin \delta = 9.3425 \\
 & 1.1921 & 0.4195 = \log -2''6 \\
 & & -2.4 \\
 d\alpha = & 15''6 & -3.6 \\
 & & d\delta = -8''6
 \end{array}$$

Ex. II. Aldebaran gibt für 1800

$$\alpha = 66^\circ 7'$$

$$\delta = 16^\circ 6'$$

also

$$d\alpha = 1.3181 \sin (202^\circ 6' + L)$$

$$\delta = 0.5793 \sin (233^\circ 12' + L)$$

wo die Factoren schon Logarithmen sind.

§. 5

Die Aberration lehrte uns, wie wir im Vorhergehenden gesehen haben, daß nicht, wie es scheint, die Sonne sich um die Erde, sondern umgekehrt, daß die Erde sich um die Sonne bewegt. Der größern Einfachheit wegen haben wir angenommen, daß diese Bewegung der Erde in einem Kreise vor sich gehe, dessen Mittelpunkt der der Sonne ist. Allein wir werden unten sehen, daß diese Bahn der Erde eine Ellipse ist, in deren einem Brennpunkte der Mittelpunkt der Sonne liegt, und deren Excentricität $\varepsilon = 0.01679$ Theile der halben großen Axe ist. Es sey r die Entfernung der Sonne von der Erde, und ω der Winkel von r mit der großen Axe der Ellipse, welcher Winkel von dem Endpunkte der großen Axe gezählt werden soll, der der Sonne am nächsten ist, so ist die Gleichung der Ellipse, deren halbe große Axe die Einheit ist

$$r = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \cos \omega}$$

und man findet leicht, daß die wahre Bewegung der Erde in $0^h 8' 17'' 91$ gleich

$$rd\omega = 20.448. \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{r} \text{ oder}$$

$$rd\omega = 20.448. \frac{(1 + \varepsilon \cos \omega)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \text{ ist.}$$

Vernachlässigt man daher die höheren Potenzen der gegen die Einheit sehr kleinen Gröfse ε , so wird man in den vorhergehenden Ausdrücken, die eine kreisförmige Bahn der Erde voraussetzen, nur 20.448 $(1 + \varepsilon \cos \omega)$ für 20.448 setzen dürfen, um auf die Excentricität der Erdbahn Rücksicht zu nehmen. Ferner setzt die vorhergehende Methode der Bestimmung der Aberration in der kreisförmigen Erdbahn voraus, dafs der Winkel der Tangente der Erdbahn mit r gleich einem rechten Winkel sey. Ist dieser Winkel in der Ellipse gleich φ , so hat man bekanntlich

$$\text{Tg}(90 - \varphi) = \frac{dr}{rd\omega},$$

also da $90 - \varphi$ nur sehr klein ist,

$$\varphi = 90 - \frac{dr}{rd\omega}$$

Differentiirt man aber die oben gegebene Gleichung der Ellipse, so ist

$$\frac{dr}{rd\omega} = \varepsilon \sin \omega$$

woraus folgt, dafs man in den oben gegebenen Ausdrücken für die kreisförmige Erdbahn noch $(L - \varepsilon \sin \omega)$ für L setzen müsse, wenn man auf die Excentricität der Erdbahn Rücksicht nehmen will. Ist aber π die Länge des Endpunktes der grofsen Axe, von welchem die Winkel ω gezählt werden, so ist $\omega = L - \pi$, und da für dieses Jahrhundert $\pi = 279^\circ 30'$ sehr nahe constant ist, so wird man, um die vollständigen Werthe von $d\lambda$, $d\beta$, $d\alpha$, $d\delta$ zu erhalten, zu den in den Gleichungen II., III., IV gegebenen Werthen dieser Gröfsen noch hinzusetzen

$$d\lambda' = - \frac{20.448\varepsilon}{\cos \beta} \cos(\pi - \lambda)$$

$$d\beta' = - 20.448 \varepsilon \sin \beta \sin(\pi - \lambda)$$

$$d\alpha' = - \frac{20.448\varepsilon}{\cos \delta} (\cos e \cos \alpha \cos \pi + \sin \alpha \sin \pi)$$

$$d\delta' = - 20.448 \varepsilon \sin e \cos \delta \cos \pi$$

$$- 20.448 \varepsilon \sin \delta (\cos \alpha \sin \pi - \cos e \sin \alpha \cos \pi)$$

wo die vollständige Aberration der Länge, Breite... $d\lambda + d\lambda'$, $d\beta + d\beta'$... ist.

Setzt man endlich $\pi = 279^\circ 30'$, so ist

$$d\alpha' = 0''33 \sin \alpha - 0''05 \cos \alpha = \frac{0.33}{\cos \delta} (\sin \alpha - \operatorname{Tg} 8^\circ 43' \cos \alpha)$$

oder

$$d\alpha' = \frac{0''33}{\cos \delta} \sin (\alpha - 8^\circ 43')$$

und eben so

$$d\delta' = - 0''02 \cos \delta + 0''33 \cos (\alpha - 8^\circ 43')$$

I. Setzt man in den gefundenen Ausdrücken für die Aberration der Länge, die Länge des Sterns gleich der Länge der Sonne und die Breite gleich Null, so erhält man die Aberration der Länge der Sonne, die also ist

$$\begin{aligned} dL &= - 20''.448 - 20.448. \varepsilon \cos (\pi - L) = \\ &= - 20''.448 - 20.448 \varepsilon \cos \omega \end{aligned}$$

§. 6.

Die tägliche Bewegung der Erde um ihre Axe wird offenbar eine ähnliche Aberration des Lichtes zur Folge haben, wie die oben betrachtete Bewegung der Erde um die Sonne, aber die erste wird viel geringer seyn, weil die Bewegung eines Punktes des Erdäquators, die von der Rotation der Erde entspringt, viel kleiner ist, als jene, welche aus der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne folgt.

Heißt man s den Stundenwinkel des Gestirns und δ die Declination, so wie r die Entfernung desselben von der Erde, so ist, wenn man in den vorhergehenden Gleichungen α in s , und β in δ verwandelt,

$$\operatorname{Tg} s = \frac{y}{x} = \frac{y' + b'}{x'} = \operatorname{Tg} s' + \frac{b'}{r \cos \delta' \cos s'}$$

und

$$\operatorname{Tg} \delta = \frac{z}{x} \cos s = \frac{z'}{x'} \cos s = \frac{\operatorname{Tg} \delta' \cos s}{\cos s'}$$

wo x und x' in der Ebene des Meridians, und xy , $x'y'$ in einer der Ebene des Aequators parallelen Ebene liegen. Daraus folgt abkürzend

$$s' - s = - \frac{b'}{r} \cdot \frac{\cos s'}{\cos \delta'}$$

$$\delta' - \delta = + \frac{b'}{r} \cdot \sin s' \sin \delta'$$

Um die Gröfse b' zu bestimmen, sey H der Halbmesser der Erdbahn, und h der des Erdparallels, in welchem sich der Beobachter befindet, so legt die Erde in einem Tage durch ihre jährliche Bewegung den Raum

$$M = \frac{2 \pi H}{365.25638}$$

und durch ihre tägliche Bewegung den Raum

$$m = 2 \pi \cdot h$$

zurück, also ist, wenn T die Geschwindigkeit eines Punktes des Parallelkreises in der täglichen Bewegung, und l die des Lichtes bezeichnet,

$$\frac{b'}{r} = \frac{T}{l} = \frac{m}{M} \cdot 20.448$$

Ist aber φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, und die aus dem Mittelpunkte der Sonne beobachtete Gröfse des Halbmessers der Erde, nach den Beobachtungen, gleich $3''7$, so ist

$$h = 3''7 \cdot H \cdot \sin 1'' \cos \varphi$$

also

$$\frac{b'}{r} = (365.25638) (20.448) (3.7) \sin 1'' \cos \varphi = 0''31 \cos \varphi$$

Heißt man endlich α die Rectascension des Gestirns, und A die des Zeniths, so ist $s = \alpha - A$ also

$$s' - s = \alpha' - \alpha = d\alpha \quad \text{und} \quad \delta' - \delta = d\delta$$

und die vorhergehenden Ausdrücke gehen in folgende über

$$d\alpha = - 0''31 \frac{\cos(A - \alpha) \cos \varphi}{\cos \delta}$$

$$d\delta = - 0''31 \sin(A - \alpha) \sin \delta \cos \varphi$$

Für den Polarstern ist $\delta = 88^\circ 14'$, also für $\varphi = 45^\circ$, wenn der Stern im Meridian ist,

$$d\alpha = - 7''15$$

§. 7.

Bisher haben wir das Gestirn als ruhend vorausgesetzt. Es würde nicht schwer seyn, die vorhergehenden Betrachtungen auch auf bewegliche Gestirne (Planeten und Cometen) auszudehnen, da aber die hier zu entwickelnden Ausdrücke sehr unständlich werden, so wird es für die Ausübung bequemer seyn, für diesen Fall einen andern Weg einzuschlagen.

Diesem gemäß sey t und t' die Zeit, in welchem der Lichtstrahl von dem Gestirne in das Objectivglas C , und in das Ocularglas A des beweglichen Fernrohres CB , DA kömmt. Sey ferner E der Ort des Gestirns zur Zeit T , in welcher der Lichtstrahl von ihm ausging, und e der Ort des Gestirns zur Zeit t' , so wie b der Ort des Ocularglases des Rohres bc zur Zeit T .

Daraus folgt:

1. bE ist der wahre Ort des Gestirns zur Zeit T .
2. Ae ist der wahre Ort des Gestirns zur Zeit t oder t' , da die Differenz der Zeiten $t' - t$ unendlich klein ist.
3. DA oder CB ist der scheinbare Ort des Gestirns zur Zeit t , und
4. CA ist der scheinbare Ort zur Zeit t von der Aberration der unbeweglichen Gestirne, die wir bisher betrachtet haben, befreyt.

Wenn wir die Bewegung des Lichtes gleichförmig annehmen, so verhalten sich, da E, C, A in einer geraden Linie liegen, die Linien EC und CA , wie die Zeiten, die das Licht braucht, diese Linien EC, CA zu durchlaufen, das heißt, es ist

$$EC : CA = t - T : t' - t.$$

Nehmen wir eben so die Bewegung der Erde in der Tangente Ab ihrer Bahn während der immer sehr kleinen Zeit $t - T$, als gleichförmig und geradlinicht an, so werden auch die Punkte e, C, D in einer geraden Linie liegen, und man wird wieder haben

$$eC : CD = t - T : t' - t.$$

Daraus folgt

$$\frac{EC}{eC} = \frac{CA}{CD}$$

Da endlich der von den eben genannten Seiten eingeschlossene Winkel $ECe = ACD$ ist, so sind die Dreyecke ECe, ACD ähnlich, oder es ist der Winkel eEC gleich dem Winkel CAD , d. h. es ist AD oder BC mit Ecb parallel, oder mit andern Worten, der scheinbare Ort (N. 3) zur Zeit t ist gleich dem wahren Orte (N. 1) zur Zeit T .

Daraus entspringt folgende Methode, die Aberration der beweglichen Gestirne zu bestimmen.

Ist l die beobachtete oder die scheinbare Lage des Gestirns für die Zeit t der Beobachtung, und ist $t - T = \odot$ die Zeit, in welcher das Licht die Entfernung des Gestirns von der Erde zurücklegt, so ist zugleich l die wahre, von der totalen Aberration des Planeten befreite, Länge für die Zeit $t - \odot = T$, und es ist, wie es aus der Natur dieses Beweises klar ist, gleich viel, ob l die Länge, Breite, Rectascension oder Declination des Gestirns bedeutet: immer ist der beobachtete Ort l für die Zeit t gleich dem wahren Orte für die Zeit $t - \odot$.

Unsere Sonnentafeln geben, wie wir weiter unten sehen werden, unmittelbar nur diejenigen Längen der Erde an, welche die Aberration der Erde, die von ihrer eigenen Bewegung um die Sonne herrührt, noch in sich enthalten. Die Planetentafeln aber enthalten die von der Aberration befreiten Orte dieser Gestirne. Diese verschiedene Einrichtung der Tafeln muß man berücksichtigen, wenn man Beobachtungen der Planeten mit denen der Sonne vergleicht. Man kann dieß auf zwey verschiedene Arten thun.

Bezeichnet nämlich m'' die tägliche Bewegung des Planeten in Länge, Breite u. s. w. und ist Δ die Entfernung des Planeten von der Erde, so ist

$$1 : \Delta = 497''.9 : \odot$$

und

$$86400 : \odot = m : \omega$$

oder die Aberration der Länge, Breite u. f. in Secunden ausgedrückt ist

$$\omega = \frac{497.9}{86400} m \Delta = 0.00576 m \Delta$$

Für die Erde ist im Mittel $\Delta = 1$, $m = 3548''.3$, also

$$\omega = 20'' 44$$

wie zuvor.

Ist also t die Zeit der Beobachtung,

- l die beobachtete Länge, Rectascension etc. des Planeten,
- L die tabellarische (von der Aberration noch nicht befreite Länge der Erde für die Zeit t
- λ die tabellarische Länge der Erde für die Zeit $t - \odot$.

so muß man folgende wahre Längen des Planeten und der Erde mit einander vergleichen:

entweder l und $\lambda + 20''44$ für die Zeit $t - 497.9 \Delta$

oder auch $l \pm 0.00576 m \Delta$ und $L \pm 20.44$ für die Zeit t .

Für wachsende Längen, Breiten etc. ist die wahre Länge, Breite etc. größer, als die scheinbare, und umgekehrt für abnehmende ist die wahre kleiner.