

ZWEYTES KAPITEL.

P r ä c e s s i o n u n d N u t a t i o n.

§. 1.

Schon Hipparch, der erste Astronom des Alterthums, der um das Jahr 140 v. Chr. zu Alexandrien lebte, bemerkte, als er seine eigenen Beobachtungen mit den 160 Jahre früheren des Timocharis verglich, daß die Länge aller Fixsterne mit der Zeit gleichförmig zunehme, ohne daß dabey ihre Breite geändert wird. Ptolemäus, der um das Jahr 130 n. Chr. in derselben Stadt beobachtete, nahm diese Zunahme der Länge gleich einem Grad für hundert Jahre an. Da diese Veränderung der Länge für alle Sterne gleich groß ist, und die Breite derselben ungeändert bleibt, so kann man diese Erscheinung dadurch darstellen, daß man annimmt, die Aequinoctialpunkte bewegen sich in der unveränderlichen Ebene der Ecliptik in hundert Jahren um einen Grad rückwärts, oder in einer der jährlichen Bewegung der Sonne entgegengesetzten Richtung. Auch die Schiefe der Ecliptik ist, wie aus den Beobachtungen der neuern Astronomen, mit denen der Alten verglichen, folgt, einer wie wohl beynahe hundertmal langsamern Abnahme unterworfen. Endlich fand Bradley, vielleicht der größte Beobachter der neueren Zeiten, daß die beyden vorhergehenden gleichförmigen Veränderungen der Lage des Aequinoctialpunktes und der Schiefe der Ecliptik beträchtlichen Störungen unterworfen sind, die aber in wiederkehrende kurze Perioden von nahe 18 Jahren eingeschlossen sind. Das erste regelmäsig mit der Zeit fortgehende Zurückgehn der Aequinoctien nennt man die Präcession der Nachtgleichen, so wie die regelmäsigte Veränderung des Winkels der Ebene des Aequators, mit der der Ecliptik die säculäre Abnahme der Schiefe der Ecliptik, und endlich die periodischen Störungen beyder Bewegungen die Nutation.

Ohne Hülfe der höheren Analysis und der Mechanik ist es unmöglich, von diesen Erscheinungen strenge Rechenschaft zu geben. Wir werden sie indessen hier so weit auseinander zu

setzen suchen, als zu ihrer Anwendung bey den Berechnungen der Beobachtungen nöthig ist.

Es ist bekannt, daß die Geometer die Erde als einen Körper annehmen, der durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist. Wenn sie eine vollkommene Kugel wäre, so würde, wie man leicht zeigen kann, die Anziehung der andern Himmelskörper auf sie dieselbe seyn, als wenn die Masse der ganzen Erde in ihrem Mittelpunkte versammelt wäre. Da sie aber, nach ihrer eben angeführten Gestalt ein an ihren Polen abgeplattetes Sphäroid ist, so muß z. B. die Wirkung der Sonne auf diese Erde in dem Aequator der Erde eine Bewegung hervorbringen, welche, indem sie den Aequator auf seiner Durchschnittsline mit der Ecliptik in Bewegung setzt, die Ebene des Aequators jener der Ecliptik beständig nähern würde, ohne diese Durchschnittsline selbst zu verändern. Die Neigung des Aequators gegen die Ecliptik würde also durch die mittlere Wirkung der Sonne abnehmen, und beyder Durchschnittsline würde fest seyn, wenn die Erde keine Umdrehung um ihre Axe hätte. Da sie aber eine solche Umdrehung hat, so erhält, wie man leicht sieht, diese Umdrehung dem Aequator eine beständige Neigung gegen die Ecliptik, und verwandelt die Wirkung der Sonne in eine rückläufige Bewegung der Durchschnittsline oder der Aequinoctien, sie zieht diesen Aequinoctien eine Veränderung zu, welche ohne der Umdrehung der Erde, bloß bey der Neigung statt finden würde, und gibt dafür der Neigung die Beständigkeit, welche ohne die Rotation bey den Knoten statt finden würde. Diese rückgängige Bewegung der Aequinoctien, die Präcession, hängt also von der Abplattung der Erde ab, und sie verändert die Neigung der Ecliptik gegen den Aequator nicht.

Was von der Wirkung der Sonne gesagt wurde, gilt auch von den Wirkungen der andern Himmelskörper, von denen aber allein der Mond, wegen seiner Nähe, einen für die Beobachtungen noch merkbaren Einfluß hat. Auch der Mond also macht die Aequinoctien des Erdäquators in der Ebene seiner Bahn rückwärts gehen, und beyde Wirkungen zusammen heißen die Lunisolarpräcession, die nach den neuesten Bestimmungen jährlich nahe $50''/34$ beträgt. Da aber die Lage der Ebene der Mondbahn und ihre Neigung gegen den Aequator, wie wir unten sehen werden, veränderlich ist, so ist auch die Wirkung des Mondes, die sonst, wie die der Sonne, constant wäre, selbst veränderlich. Der constante Theil dieser Wirkung des Mondes auf die Erde ist die oben betrachtete Lunarpräcession, der veränderliche Theil dieser Wirkung aber, der von der verschiedenen Lage der Mondbahn gegen den Aequator abhängt, und in wiederkehrenden Perioden von nahe 18.6 Jahren sowohl auf die Bewegung der Aequinoctien, als auch auf die Veränderung der Schiefe der Ecliptik seinen Einfluß äußert, heißt,

nach dem Vorhergehenden, die Nutation. Nennt man Ω die Länge des Punktes, in welchem die Mondesbahn die Ecliptik schneidet, und von welchem sich der Mond über die Ecliptik erhebt, d. h. nennt man Ω den aufsteigenden Knoten der Mondesbahn in der Ecliptik, so fand Bradley aus seinen Beobachtungen, daß die Nutation ein Vorwärtsgehen der Aequinoctien bewirkt, welches dem Sinus von Ω proportionirt ist, und eine Verminderung der Schiefe der Ecliptik hervorbringt, die dem Cosinus desselben Winkels Ω proportionirt ist. Wir werden unten sehen, wie man diese Veränderungen der Präcession und Nutation bildlich darstellen, und ihren Einfluß auf die Lage der Gestirne gegen den Aequator und die Ecliptik berechnen könne.

Wenn also die Sonne und der Mond allein auf die Erde wirkte, so würde, wie wir gesehen haben, die mittlere (von der periodisch wiederkehrenden Nutation unabhängige) Neigung der Ecliptik gegen den Aequator beständig seyn. Allein die andern Körper unsers Sonnensystems, deren Einfluß auf die Gestalt der Erde zwar verschwindet, haben doch noch eine sehr merkliche Wirkung auf die Lage der Bahn der Erde, indem sie die Ebene der Ecliptik der des Aequators immer zu nähern suchen, und dieß ist die oben bemerkte säculare Abnahme der Schiefe der Ecliptik, die also mit der Präcession selbst nichts gemein hat. Aus dieser veränderten Lage der Erdbahn folgt aber nothwendig auch eine Aenderung in der Lage der Aequinoctien, und zwar eine rechtläufige Bewegung von nahe $0''.16$ jährlich, um welche GröÙe die oben betrachtete Lunisolarpräcession, da sie mit ihr eine entgegengesetzte Richtung hat, vermindert werden muß. Ist daher die durch die Wirkung der Sonne und des Mondes bewirkte Lunisolarpräcession nach dem oben gesagten $50''.34$, so ist die allgemeine oder wirklich statt habende Präcession $50''.18$. Diese beyden Wirkungen des Einflusses der Planeten sind also von der Abplattung der Erde oder der Wirkung der Sonne und des Mondes auf die Erde im Allgemeinen unabhängig, aber da die Wirkung der Sonne und des Mondes bey einer durch die Wirkung der Planeten veränderten Lage der Ecliptik auch verändert werden muß, so folgt, daß daraus eine der Nutation ähnliche Bewegung des Erdäquators entstehen wird, deren Werth aber viel kleiner, und deren Periode unvergleichbar größer seyn wird, als bey der oben betrachteten Nutation des Mondes. Die Ortsveränderung der Ecliptik durch die Planeten bringt also, in Verbindung mit der Wirkung der Sonne und des Mondes auf die Erde, in ihrer Schiefe gegen den Aequator eine kleine Veränderung hervor, die aber von der oben betrachteten säculären Abnahme der Schiefe sehr verschieden ist.

§. 2.

Um sich von allen diesen Bewegungen einen deutlichen Begriff zu machen, wollen wir den Aequator und die gegenwärtige mittlere oder bewegliche Ecliptik (die Benennung der wahren Ecliptik behalten wir für die durch die periodische Nutation gestörte mittlere Ecliptik, von welcher Nutation wir hier ganz abstrahiren) auf irgend eine feste Ebene beziehen, für welche wir die Ebene der Ecliptik im Jahre 1750 annehmen. Es sey also (Fig. 2) SE diese feste Ecliptik und SA' die Lage des Aequators für die Zeit 1750, so wie $S'E'$ und $S'S''A'$ die Lage der mittlern Ecliptik und des Aequators für die Zeit $1750 + t$, wo t in Jahren und deren Theilen ausgedrückt ist.

Wegen der bloßen Anziehung der Sonne und des Mondes auf die abgeplattete Erde geht nach dem vorhergehenden der Durchschnitt der Ebene A und E in der Ebene E zurück, wodurch die Schiefe der Ecliptik nicht geändert wird. Dieser Rückgang in der Zeit von 1750 bis $1750 + t$, oder die Lunisolarpräcession, heiße ψ , so ist $\psi = SS'$.

Da aber auch die Planeten den Mittelpunkt der Erde anziehen, so entsteht dadurch eine Bewegung der Ebene E' , und aus dieser Ursache wird A von E' immer in andern Punkten und unter andern Winkeln geschnitten, als von E . Der dadurch entstehende Rückgang des Durchschnitts der Ebene A und E' in der Ebene E' , die allgemeine Präcession, heiße ψ , so ist ψ gleich der Differenz der Bogen NS'' und NS . Heißt Π die Länge des aufsteigenden Knotens der Ebene E' in E , von dem fixen Aequinoctium des Jahres 1750 gerechnet, so ist $\Pi = NS$, und $\Pi + \psi = NS'$, und $\Pi + \psi = NS''$.

Durch diese allgemeine Präcession wird auch die Schiefe der Ecliptik geändert, und diese Aenderung der Lage der Ecliptik gegen den Aequator wird allmählig auch die Anziehung ändern, welche die Sonne und der Mond auf die abgeplattete Erde ausüben, wodurch eine Bewegung der Ebene A entsteht, die eine Art von Nutation von sehr langer Periode erzeugt.

Es sey ferner π der Winkel der Ebene E und E' , also $\pi = S'NS''$; ω der Winkel der Ebene A und E für die Zeit 1750, also $\omega = NS'S''$; ω' der Winkel der Ebenen A und E' für die Zeit $1750 + t$, also $\omega' = NS''A'$; und endlich der Bogen $S'S'' = \lambda$, also S das mittlere Aequinoctium zur Zeit 1750; S'' das mittlere Aequinoctium zur Zeit $1750 + t$; der Winkel ω endlich die mittlere Schiefe zu derselben Zeit $1750 + t$.

Aus den Beobachtungen Bradley's, verbunden mit denen von Piazzi, fand Bessel (Fundamentaastronomiae) für ψ , ω und ω' folgende Werthe für das Jahr $1750 + t$,

$$\psi = 50''.340499 t - 0''.0001217945 t^2$$

$$\psi_1 = 50. 176068 t + 0.0001221483 t^2$$

$$\omega = 23^\circ 28' 18''.0 + 0.000000984233 t^2$$

$$\omega_1 = 23^\circ 28' 18''.0 - 0.48368 t - 0.00000272295 t^2$$

Daraus kann man die Werthe von Π π und λ ableiten. In dem Dreyecke $NS'S''$ ist nämlich

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Tg} \frac{\pi}{2} \sin \left(\Pi + \frac{\psi + \psi_1}{2} \right) &= \sin \frac{\psi - \psi_1}{2} \operatorname{Tg} \frac{\omega_1 + \omega}{2} \\ \operatorname{Tg} \frac{\pi}{2} \cos \left(\Pi + \frac{\psi + \psi_1}{2} \right) &= \cos \frac{\psi - \psi_1}{2} \operatorname{Tg} \frac{\omega_1 - \omega}{2} \\ \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \lambda \cos \frac{\omega_1 + \omega}{2} &= \operatorname{Tg} \frac{\psi - \psi_1}{2} \cos \frac{\omega_1 - \omega}{2} \end{aligned} \right\} (1)$$

wo Π immer so genommen wird, daß π positiv bleibt.

Aus diesen endlichen Ausdrücken kann man leicht annähernde Werthe von Π π und λ entwickeln, die nach den Potenzen von t fortgehen. Man findet so

$$\Pi = 171^\circ 36' 10'' - 5''18 t$$

$$\pi = 0''.48892 t - 0.0000030719 t^2$$

$$\lambda = 0''.17926 t - 0.0002660394 t^2$$

§. 3.

Die vorhergehenden Ausdrücke werden uns ein bequemes Mittel darbieten, die Länge und Breite, oder die Rectascension und Declination eines Fixsterns von einer gegebenen Epoche auf eine andere gegebene Zeit zu übertragen. Wir wollen mit der Länge und Breite anfangen.

Sey L B die Länge und Breite eines Sterns, der seinen absoluten Ort nicht ändert, in Beziehung auf die feste Ecliptik und auf das Aequinoctium von 1750, und l b die Länge und Breite desselben Sterns in Beziehung auf die Ecliptik und das Aequinoctium von 1750 + t , so ist

$$\left. \begin{aligned} \cos B \cos(L - \Pi) &= \cos b \sin(l - \Pi - \psi_1) \\ \cos B \sin(L - \Pi) &= \cos b \sin(l - \Pi - \psi_1) \cos \pi - \sin b \sin \pi \\ \sin B &= \sin b \sin(l - \Pi - \psi_1) \sin \pi + \sin b \cos \pi \end{aligned} \right\} (2)$$

Diese Gleichungen dienen, die zur Zeit 1750 + t beobachteten Längen und Breiten auf die fixe Ecliptik zur Zeit 1750 zu reduciren.

Will man umgekehrt die Länge L und Breite B für die Epoche 1750 auf die Zeit 1750 + t bringen, so hat man, wenn man die für die letzte Zeit gehörigen Größen mit einem obern Striche bezeichnet:

$$\left. \begin{aligned} \cos b' \cos (l' - \Pi' - \psi') &= \cos B \cos (L - \Pi) \\ \cos b' \sin (l' - \Pi' - \psi') &= \cos B \sin (L - \Pi) \cos \pi' + \sin B \sin \pi' \\ \sin b' &= -\cos B \sin (L - \Pi) \sin \pi' + \sin B \cos \pi' \end{aligned} \right\} (3)$$

Vernachlässigt man die zweyten und höhern Potenzen von π , so geben die letzten Gleichungen für die Zeit 1750 + t

$$b' = B - \pi' \sin (L - \Pi')$$

$$l' = L + \psi' + \pi' \operatorname{Tg} B \cos (L - \Pi')$$

und eben so für die Zeit 1750 + t

$$b = B - \pi \sin (L - \Pi)$$

$$l = L + \psi + \pi \operatorname{Tg} B \cos (L - \Pi)$$

also abkürzend

$$l' = l + (\psi' - \psi) + (\pi' - \pi) \operatorname{Tg} b \cos A$$

$$b' = b - (\pi' - \pi) \sin A$$

wo $A = L - \frac{1}{2} (\Pi + \Pi')$ ist.

Substituirt man in diesen Ausdrücken die vorhergehenden Werthe von ψ π Π , so erhält man

$$l' = l + (t' - t) (50''.176068 + (t' + t) 0''.0001221438)$$

$$+ (t' - t) (0''.48892 - (t' + t) 0''.0000030719) \cos A \operatorname{Tg} b$$

$$b' = b - (t' - t) (0''.48892 - (t' + t) 0''.0000030719) \sin A$$

$$\text{wo } A = 1 - 171^\circ 36' 10'' - 50''.176 t + 5''.18 \left(\frac{t' + t}{2} \right)$$

und mit diesen Ausdrücken kann man die beobachtete Länge und Breite l b für eine Zeit t auf andere beobachtete Längen und Breiten l' b' für die Zeit t' bringen.

§. 4.

Auf eine ähnliche Weise läßt sich auch die Lage der Gestirne gegen den Aequator behandeln.

Ist α δ die in irgend einer Zeit beobachtete Rectascension und Declination eines Gestirns, und heisst die Rectascension von dem Durchschnitte der Ebene A und E an gerechnet, $\alpha + \lambda$, so findet man daraus die Länge und Breite L B für die Epoche 1750 und die feste Ecliptik durch die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \cos B \cos (L + \psi) &= \cos \delta \cos (\alpha + \lambda) \\ \cos B \sin (L + \psi) &= \cos \delta \sin (\alpha + \lambda) \cos \omega + \sin \delta \sin \omega \\ \sin B &= -\cos \delta \sin (\alpha + \lambda) \sin \omega + \sin \delta \cos \omega \end{aligned} \right\} (4)$$

und sucht man umgekehrt aus der Länge und Breite L B für die Epoche und für die fixe Ecliptik die Rectascension und Declination für eine andere Zeit, so ist, wenn man für die zweyte alle Grössen mit einem obern Strich bezeichnet

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta \cos (\alpha' + \lambda') &= \cos B \cos (L + \psi') \\ \cos \delta' \sin (\alpha' + \lambda') &= \cos B \sin (L + \psi') \cos \omega' - \sin B' \sin \omega' \\ \sin \delta' &= \cos B \sin (L + \psi') \sin \omega' + \sin B \cos \omega' \end{aligned} \right\} (5)$$

Eliminirt man endlich aus den Gleichungen 4 und 5 die Größe L und B , so erhält man Ausdrücke, durch welche man die Rectascension und Declination für $1750 + t'$ findet, wenn jene für $1750 + t$ gegeben sind, ähnliche, aber mehr zusammen gesetzte Ausdrücke mit jenen, welche wir oben für die Längen und Breiten gegeben haben. Man kann aber auch noch bequemer diese Reduction auf folgende Weise vornehmen.

Sind ψ , ψ' , und ω , ω' . . . die Werthe von ψ und ω . . . für die Zeiten $1750 + t$ und $1750 + t'$, so kennt man in dem sphärischen Dreyecke, welches durch die in der festen Ecliptik liegende Seite $\psi' - \psi$, durch den Bogen des Aequators zur ersten, und durch den Bogen des Aequators zur zweyten Epoche gebildet wird, die Seite $\psi' - \psi$ und die beyden ihr anliegenden Winkel ω' und $180 - \omega$. Es sey die an ω' liegende Seite gleich $90^\circ + z'$, die an $180 - \omega$ liegende Seite gleich $90 - z$, und der dritte Winkel des Dreyeckes gleich Θ , so findet man z , z' und Θ aus folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Tg} \frac{z' + z}{2} &= \frac{\cos \frac{\omega' + \omega}{2}}{\cos \frac{\omega' - \omega}{2}} \operatorname{Tg} \frac{\psi' - \psi}{2} \\ \operatorname{Tg} \frac{z' - z}{2} &= \frac{\sin \frac{\omega' - \omega}{2}}{\sin \frac{\omega' + \omega}{2}} \operatorname{Cotg} \frac{\psi' - \psi}{2} \\ \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \Theta &= \frac{\sin \frac{z' + z}{2}}{\cos \frac{z' - z}{2}} \operatorname{Tg} \frac{\omega' + \omega}{2} \end{aligned} \right\} (6)$$

Kennt man aber z , z' , Θ , so findet man die Rectascension und Declination α' , δ' für $1750 + t'$ aus der Rectascension und Declination α , δ für $1750 + t$ durch folgende den vorhergehenden analogen Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta' \sin (\alpha' + \lambda' - z') &= \cos \delta \sin (\alpha + \lambda + z) \\ \cos \delta' \cos (\alpha' + \lambda' - z') &= \cos \delta \cos (\alpha + \lambda + z) \cos \Theta - \sin \delta \sin \Theta \\ \sin \delta' &= \cos \delta \cos (\alpha + \lambda + z) \sin \Theta + \sin \delta \cos \Theta \end{aligned} \right\} (7)$$

§. 5

Differentiirt man diese Gleichungen (4) oder (5), so erhält man nach einigen einfachen Reductionen, wenn man die zwey-

ten und höheren Potenzen von λ und die in das Quadrat von t multiplizirten Glieder vernachlässiget,

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\psi}{dt} (\cos \omega + \sin \omega \operatorname{Tg} \delta \sin \alpha) +$$

$$\left(\frac{d\psi}{dt} \cdot \lambda \sin \omega - \frac{d\omega}{dt} \right) \operatorname{Tg} \delta \cos \alpha$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \sin \omega \cos \alpha - \left(\frac{d\psi}{dt} \cdot \lambda \sin \omega - \frac{d\omega}{dt} \right) \sin \alpha$$

Das letzte Glied dieser beyden Ausdrücke kann ohne Nachtheil weggelassen werden, da selbst für den Polarstern

$$\frac{d\psi}{dt} \cdot \lambda \sin \omega - \frac{d\omega}{dt} \text{ nur gleich } 0''.00000026 \text{ t ist.}$$

Setzt man daher

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= m + n \operatorname{Tg} \delta \sin \alpha \\ \frac{d\delta}{dt} &= n \cos \alpha \end{aligned} \right\} (8)$$

und entwickelt man aus den in §. 2 gegebenen Werthen von ψ und λ die Differentialcoefficienten

$$\frac{d\psi}{dt}, \frac{d\omega}{dt}, \frac{d\lambda}{dt}$$

so erhält man für $1750 + t$

$$m = 45.99592 + 0.0003086450 \text{ t}$$

$$n = 20.05039 - 0.0000970204 \text{ t}$$

und die Gleichungen (8) wird man statt den (7) für alle Fälle brauchen können, wo die Differenz der beyden Zeiten nur einige Jahre beträgt. Diese Gleichungen (8) enthalten die gewöhnlichen Ausdrücke der jährlichen Präcession in Rectascension und Declination, die also mit der Anzahl t der Jahre multiplizirt werden müssen.

Ex. Aldebaran gibt für 1800:

$$\alpha = 66^\circ 7', \quad \delta = 16^\circ 6', \quad t = 50$$

$$m = 46.011, \quad n = 20.045$$

$$\text{also } \frac{d\alpha}{dt} = 51''.30$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 8''.11$$

Wollte man in der Bestimmung der Präcession auch auf die Glieder Rücksicht nehmen, welche von dem Quadrate der Zeit abhängen, so sey α, δ die Rectascension und Declination für die Zeit T , und α', δ' für die Zeit $T + t$.

Diefs vorausgesetzt, ist

$$\alpha' = \alpha + t \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{t^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} +$$

$$\delta' = \delta + t \cdot \frac{d\delta}{dt} + \frac{t^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\delta}{dt^2} +$$

wo nach dem vorhergehenden

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \operatorname{Tg} \delta \operatorname{Sin} \alpha \quad \text{und}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = n \operatorname{Cos} \alpha \quad \text{ist.}$$

Also ist auch, wenn man diese Ausdrücke differentiirt,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{dm}{dt} + \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Tg} \delta \cdot \frac{dn}{dt} + mn \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Tg} \delta$$

$$+ n^2 \operatorname{Sin} 2\alpha \operatorname{Tg}^2 \delta + \frac{1}{2} n^2 \operatorname{Sin} 2\alpha$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \operatorname{Cos} \alpha \cdot \frac{dn}{dt} - mn \operatorname{Sin} \alpha - n^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha \operatorname{Tg} \delta$$

$$\text{wo} \quad \frac{dm}{dt} = 0.0003086450$$

$$\frac{dn}{dt} = -0.0000970204 \quad \text{ist.}$$

§. 6.

Die bisher betrachteten, mit der Zeit fortgehenden, oder doch in sehr langen Perioden von mehreren Jahrtausenden eingeschlossenen Bewegungen des Aequinoctialpunktes und der Schiefe der Ecliptik sind, wie wir schon bemerkt haben, noch einer andern Störung, der Nutation, unterworfen, die in der Zeit von nahe 18.6 Jahren wieder zurückkehret. Da aber die Knoten der Mondesbahn in der Ecliptik auf der letzten Ebene die ganze Peripherie in derselben Periode zurücklegen, so wurde man dadurch sehr bald auf die Vermuthung geführt, daß diese Störungen von der Lage dieser Knoten auf irgend eine Weise abhängen. Aus einer großen Anzahl von zu diesem Zwecke angestellten Beobachtungen fand Bradley, daß durch die Nutation der Frühlingspunkt vorwärts gehe, also die Länge der Sterne abnehme, um eine Gröfse, welche dem Sinus der Länge des aufsteigenden Knotens der Mondesbahn in der Ecliptik proportionirt ist, und in seinem Maximo nahe 18'' betrage; und daß die Schiefe der Ecliptik eine Verminderung erleide, die dem Cosinus jenes Winkels gleich ist, und in ihrem Maximo 9''65 betrage, und daß endlich die Breite der Sterne ungeändert bleibe. Daraus folgt, daß die Nutation ihren Grund in einer Veränderung des Aequators um die hier als ruhend angenommene Ecliptik habe, oder daß die Erdaxe in der Periode von 18.6 Jahren eine in sich selbst wiederkehrende Linie an

der Fläche des Himmels beschreibe, obschon sie, wie die Beständigkeit der Polhöhen aller Beobachtungsorte zeigt, immer denselben Punkt der Oberfläche der Erde einnimmt.

Man kann sich diese Bewegung durch folgende Hypothese bildlich darstellen.

Man denke sich durch die Pole des Aequators einen Kreis um die Pole der Ecliptik, dessen Entfernung also vom Pol der Ecliptik der Schiefe der Ecliptik gleich ist. In diesem Kreise bewegt sich der Pol des Aequators jährlich nahe $50''$ von Morgen gegen Abend. Dadurch wird also die Länge der Sterne jährlich um eben so viel gröfser, die Breite derselben aber, oder der Ort der Pole der Ecliptik, bleibt ungeändert. Diefs ist die Präcession, die, wie oben gesagt wurde, vorzüglich aus der Wirkung der Sonne und des Mondes auf die abgeplattete Erde entsteht.

Eine andere Ursache, die Wirkung der Planeten auf die Erdbahn, gibt dem Mittelpunkte dieses Kreises, dem Pole der Ecliptik, eine kleine Bewegung um den Pol des Aequators, wodurch dieser Kreis immer verkleinert, also vorzüglich die Breite der Sterne verändert wird, während die Declination derselben ungeändert bleibt. Diese Hypothese erklärt die oben betrachtete säculäre Abnahme der Schiefe der Ecliptik, die also aus einer Bewegung der Pole der Ecliptik um die hier als ruhend angenommenen Pole des Aequators entsteht.

Die Länge und Breite, Rectascension und Declination der Sterne, die sich auf den blofs durch die Procession corrigirten Frühlingspunkt, und auf die blofs durch die säculäre Abnahme der Ecliptik corrigirte Schiefe bezieht, heifst die mittlere.

Da die Nutation, wie oben erinnert wurde, die Breite der Sterne nicht ändert, so entsteht sie aus einer Bewegung des Aequators um die hier als ruhend angenommene Ecliptik, wie die Präcession. Man denke sich den Punkt des oben betrachteten Kreises (dessen Pol der ruhende Pol der Ecliptik ist), welchen eben der Pol des Aequators einnimmt, als Mittelpunkt einer Ellipse, deren grofse Axe $2h = 19''.30$ den Breitenkreis berührt, und deren kleine Axe $2g = 14''.36$ auf diesem Breitenkreis senkrecht ist. Der Mittelpunkt der Ellipse ist der mittlere Pol des Aequators, und die Länge des wahren Poles, der in der Peripherie dieser Ellipse ist, wird so bestimmt. Man beschreibt in der Ebene der Ellipse einen Kreis, dessen Mittelpunkt der der Ellipse, und dessen Halbmesser die halbe grofse Axe h der Ellipse ist, und denkt sich einen Halbmesser dieses Kreises in gleichförmiger Bewegung um seinen Mittelpunkt in einer Richtung, welche der der jährlichen Bewegung der Sonne entgegen ist, so, daß dieser Halbmesser mit der der Ecliptik am nächsten liegenden halben grofsen Axe dann zusammenfällt, wenn der aufsteigende Knoten der Mondesbahn in der Ecliptik

mit dem Frühlingspunkte zusammenfällt. Läßt man dann von dem Endpunkte dieses Halbmessers auf die große Axe der Ellipse ein Loth herab, so ist der Durchschnittspunkt dieses Lothes mit der Peripherie der Ellipse der Ort des wahren Poles des Aequators, und diese Bewegung des wahren Poles in seiner Ellipse um den mittlern Pol stellt die Nutation vor.

Da nach dieser Hypothese die große Axe der Ellipse in dem Kolur der Solstitien liegt, so wird der Winkel, welchen der bewegliche Halbmesser mit der Knotenlinie der Mondesbahn in der Ecliptik zu der Zeit bildet, wo jener Halbmesser mit der großen Axe der Ellipse zusammenfällt, ein rechter Winkel seyn, und da die Bewegung des Halbmessers sowohl, als die des mittlern Mondknotens gleichförmig ist, und in derselben Richtung vor sich geht, so ist klar, daß dieser Winkel während der ganzen Umlaufszeit des Halbmessers ein rechter Winkel bleiben, d. h. daß der Halbmesser mit der Ecliptik am nächsten liegenden halben großen Axe immer einen Winkel bilden wird, welcher gleich $\Omega \mathcal{C}$, oder welcher gleich der Länge des aufsteigenden Knotens der Mondesbahn in der Ecliptik ist. Heißt also z das Loth von dem Endpunkte des Halbmessers auf die große Axe, und y das Stück dieses Lothes zwischen der großen Axe und dem Bogen der Ellipse, und endlich x das Stück der großen Axe zwischen dem Lothe und dem Mittelpunkte der Ellipse, so hat man

$$\frac{z}{x} = \operatorname{Tg} \Omega \mathcal{C}$$

und wenn A der Winkel ist, welcher den Radius der Ellipse d. h. die Linie, welche den wahren Pol des Aequators mit dem mittlern Pol verbindet, mit der großen Axe bildet, so ist

$$\operatorname{Tg} A = \frac{y}{x}, \text{ also auch } \operatorname{Tg} A = \frac{y}{z} \operatorname{Tg} \Omega \mathcal{C}$$

und da $\frac{y}{z} = \frac{g}{h}$ ist, so hat man $\operatorname{Tg} A = \frac{g}{h} \operatorname{Tg} \Omega \mathcal{C}$, also auch

$$x = h \operatorname{Cos} \Omega \mathcal{C} \text{ und } y = x \operatorname{Tg} A = g \operatorname{Sin} \Omega \mathcal{C}$$

Verbindet man aber die beyden Endpunkte der Linie y mit dem Pole der Ecliptik, so entsteht ein sphärisches Dreyeck, in welchem zwey Seiten y und $x + e$ sind, wenn e die mittlere Schiefe der Ekliptik bezeichnet. In diesem Dreyecke ist die Hypothenuse gleich der wahren Schiefe der Ecliptik $e + d e$ und der an der Hypothenuse anliegende Winkel gleich der gesuchten Veränderung des Aequinoctialpunktes $d \lambda$. Man hat daher

$$\operatorname{Cos} (e + d e) = \operatorname{Cos} y \operatorname{Cos} (x + e) \text{ und}$$

$$\operatorname{Tg} d \lambda = \frac{\operatorname{Tg} y}{\operatorname{Sin} (x + e)}$$

Da aber x, y, de , nur geringe Werthe haben, so kann man statt den vorhergehenden Gleichungen setzen.

$$de = x$$

$$d\lambda = \frac{y}{\sin e}$$

also ist, wenn man die obigen Werthe von x und y substituirt,

$$de = h \cos \Omega \varrho = 9.65 \cos \Omega \varrho$$

$$d\lambda = -g \frac{\sin \Omega \varrho}{\sin e} = -18''.03 \sin \Omega \varrho \text{ wenn } e = 23^\circ 28' \text{ ist.}$$

und dieß ist die Nutation der Schiefe der Ecliptik und der Länge der Fixsterne, das negative Zeichen bey der zweyten, weil im ersten Quadrate von $\Omega \varrho$ nach dem Vorhergehenden die Länge der Sterne durch die Nutation vermindert wird.

§. 7.

Um aus dieser Gröfse $d\lambda$, de die Nutation der Sterne in Rectascension und Declination $d\alpha$, $d\delta$ zu finden, werden wir die Differentialgleichungen des §. 5. Cap. I. brauchen, in welchem $d\beta = 0$ ist, und $d\lambda$, de die oben gefundenen Werthe haben. Man findet so

$$d\alpha = -g \frac{\sin \Omega \varrho}{\sin e} \cdot \frac{\cos \pi \cos \beta}{\cos \delta} - h \cos \Omega \varrho \cdot \frac{\sin \delta \cos \alpha}{\cos \delta}$$

$$d\delta = -g \frac{\sin \Omega \varrho}{\sin e} \cdot \sin \pi \cos \beta + h \cos \Omega \varrho \cdot \sin \alpha$$

Allein nach den a. a. O. gegebenen Ausdrücken ist

$$\cos \pi \cos \beta = \cos e \cos \delta + \sin e \sin \delta \sin \alpha$$

$$\sin \pi \cos \beta = \sin e \cos \alpha, \text{ also ist}$$

$$d\alpha = -g \sin \Omega \varrho \cotg e - (h \cos \alpha \cos \Omega \varrho + g \sin \alpha \sin \Omega \varrho) \operatorname{Tg} \delta$$

$$d\delta = -g \sin \Omega \varrho \cos \alpha + h \cos \Omega \varrho \sin \alpha$$

und die letzten Gleichungen enthalten die Nutation der Rectascension und Declination, oder die Gröfsen $d\alpha$, $d\delta$, welche man mit ihren Zeichen zu den mittlern Rectascensionen und Declinationen setzen muß, um die wahren, oder wie sie auch genannt werden, die scheinbaren Rectascensionen und Declinationen zu erhalten. Diese Ausdrücke sind mehrerer Transformationen fähig, von welchen ich nur die zwey merkwürdigsten hier vortragen will.

I. Setzt man

$$Q = g \sin \alpha \operatorname{Tg} \delta + g \operatorname{Cotg} e \quad \text{und} \quad Q' = -g \cos \alpha$$

$$q = h \cos \alpha \operatorname{Tg} \delta \quad q' = h \sin \alpha$$

und sucht man

$$\operatorname{Tg} B = \frac{q}{Q} \quad \text{und} \quad \operatorname{Tg} B' = \frac{q'}{Q'}$$

$$b = -\frac{Q}{\cos B} \quad b' = \frac{Q'}{\cos B'}$$

so ist

$$d\alpha = b \sin (B + \Omega \zeta)$$

$$d\delta = b' \sin (B' + \Omega \zeta)$$

sehr einfache Formeln, die besonders dann sehr bequem sind, wenn man die Nutation desselben Sternes für verschiedene Zeiten oft berechnen muß. Man hat $\log g = 0.85612$

$$\log h = 0.98453 \quad \text{und} \quad g \operatorname{Cotg} e = 16''.54$$

II. Setzt man aber

$$x = g \sqrt{1 + \left(\frac{h^2}{g^2} - 1\right) \cos^2 \Omega \zeta}$$

$$\operatorname{Tg} y = \frac{\left(1 - \frac{h}{g}\right) \sin \zeta \Omega \cos \zeta \Omega}{1 - \left(1 - \frac{h}{g}\right) \cos^2 \Omega \zeta} \quad \text{und}$$

$$z = -g \operatorname{Cotg} e \sin \Omega \zeta$$

so hat man

$$d\alpha = -x \operatorname{Tg} \delta \cos (\Omega \zeta + y - \alpha) + z$$

$$d\delta = -x \sin (\Omega \zeta + y - \alpha)$$

und diese Ausdrücke sind sehr bequem, um die Nutation in einfache Tafeln zu bringen.

Exempel. Für α Ophiuchus 1818 May 1 ist

$$\alpha = 261^\circ 30' 35'' 46$$

$$\delta = 12 \quad 42 \quad 41. \quad 06$$

$$\Omega \zeta = 232^\circ 9' \text{ also } y = -8^\circ 23', \quad \Omega \zeta + y - \alpha = 322^\circ 15' = m$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{also } \log x = & 0.9137 \text{ n. . . .} & 0.9137 \text{ n} \\
 \log \cos m = & 9.8980 & \log \sin m = 9.7869 \text{ n} \\
 \log \operatorname{Tg} \delta = & 9.3533 & 0.7006 \\
 & 0.1650 & d\delta = +5''0
 \end{array}$$

$$\text{Zahl} = -1''.5$$

$$z = +13.0$$

$$d\alpha = 11''.5$$

wo die n am Ende der Logarithmen anzeigen, daß diese Logarithmen zu negativen Zahlen gehören.

Für Aldebaran und das Jahr 1800 ist

$$\alpha = 66^\circ 7'$$

$$\delta = 16^\circ 6' \text{ also ist}$$

$$B = 183^\circ 30' \quad \log b = 1.2664$$

$$B' = 108^\circ 14' \quad \log b' = 0.9679$$

§. 8.

Eigentlich sind die bisher gegebenen Werthe von $d\lambda$ und de nur die vorzüglichsten Ausdrücke der Nutation der Länge der Sterne und der Schiefe der Ecliptik. Die Theorie zeigt, daß der vollständige Ausdruck der Nutation auch von der Länge der Sonne und des Mondes abhängt, und daß dieser Ausdruck eigentlich ist

$$\begin{aligned}
 d\lambda = & -18''03 \sin \Omega \, \zeta - 1.13 \sin 2 \odot - 0''22 \sin 2 \, \zeta \\
 de = & 9.65 \cos \Omega \, \zeta + 0''49 \cos 2 \odot + 0''09 \cos 2 \, \zeta - 0''09 \cos 2 \Omega \, \zeta
 \end{aligned}$$

wo $\odot$ und ζ die Länge der Sonne und des Mondes bezeichnet. Von diesen Gliedern sind, außer den oben betrachteten, von dem einfachen Winkel $\Omega \, \zeta$ abhängigen, bloß diejenigen für die Ausübung noch merkbar, welche von der doppelten Länge der Sonne abhängen. Die Solarnutation in Rectascension und Declination, welche aus den zwey Gliedern

$$d\lambda = -g' \sin 2 \odot$$

$$de = h' \cos 2 \odot,$$

wo $g' = 1.13,$

$$h' = 0.49 \text{ ist,}$$

entsteht, wird man finden, wenn man in den vorhergehenden Ausdrücken von $d\alpha$ und $d\delta$ für g die Größe $g' \sin e$, und für

D

h die Gröfse h' , endlich für Ω den Winkel $2 \odot$ setzt. Man wird so erhalten

$$R = g' \sin e. \sin \alpha \operatorname{Tg} \delta + g' \cos e \quad R' = -g' \sin e. \cos \alpha$$

$$r = h' \cos \alpha \operatorname{Tg} \delta \quad r' = h' \sin \alpha$$

$$\operatorname{Tg} C = \frac{r}{R} \quad \operatorname{Tg} C' = \frac{r'}{R'}$$

$$c = -\frac{R}{\cos C} \quad c' = \frac{R'}{\cos C'}$$

$$d\alpha = c \sin (C + 2 \odot)$$

$$d\delta = c' \sin (C' + 2 \odot)$$

So findet man z. B. für α Ophiuchus die Solarnutation

$$d\alpha = 9.968 \sin (179^\circ + 2 \odot)$$

$$d\delta = 9.689 \sin (278^\circ + 2 \odot)$$

wo die Coefficienten der Sinus schon Logarithmen sind,
und für Aldebaran

$$d\alpha = 0.061 \sin (183^\circ + 2 \odot)$$

$$d\delta = 9.684 \sin (112^\circ + 2 \odot)$$