
ERSTES KAPITEL.

Eintheilung der Oberfläche des Himmels und Bestimmung eines Punktes auf dieser Fläche.

§. 1.

Der Himmel erscheint uns als eine hohle Kugelfläche, auf welcher wir die Gegenstände, die er uns darbietet, zu betrachten glauben. Die Richtung der Schwere auf unserer Erde in dem Orte des Beobachters trifft verlängert jene Kugelfläche in zwey Punkten, deren oberer uns sichtbarer das Zenith, und deren unterer uns unsichtbarer das Nadir des Beobachters heist. Die Kreise, durch deren Mittelpunkte jene Richtung unter rechten Winkeln geht, sind Almlicantarat, und unter diesen der, welcher durch den Punkt der Oberfläche der Erde, den der Beobachter einnimmt, geht, der scheinbare, und der, welcher durch den Mittelpunkt der Erde geht, der wahre Horizont.

Die tägliche Bewegung der Himmelskörper geht in unter einander parallelen Kreisen vor sich, deren sämtliche Mittelpunkte in einer geraden Linie, der Weltaxe, liegen. Die Punkte, in welchen diese Axe die Fläche des Himmels trifft, sind die Weltpole, und zwar der in unsern Gegenden sichtbare: der nördliche, und der entgegengesetzte uns unsichtbare: der südliche Pol. Unter diesen Parallelkreisen ist der von beyden Polen gleichweit abstehende der Aequator, der den Himmel in zwey gleiche Theile, die nördliche und südliche Hemisphäre, theilt.

Der Durchschnitt des Aequators mit dem wahren Horizont, auf der Seite, wo die Gestirne in ihrer täglichen Bewegung sich über dem Horizont erheben, heist Ost, oder Morgen, und der diesem entgegengesetzte Durchschnitt beyder Kreise West, oder Abend. Auf- oder Untergang bezeichnet den Augenblick, in welchem ein Gestirn auf der Ost- oder Westseite durch den Horizont geht, und die Entfernung des auf- oder untergehenden Gestirns vom Ost- oder Westpunkte, im Horizont gezählt, heist des Gestirns Morgen- oder Abendweite

Die größten Kreise durch die Weltpole und durch das Zenith oder Nadir sind Meridiane. Der Durchschnitt der Ebene des Meridians mit dem Horizonte ist die Mittagslinie. Ihr Endpunkt in der südlichen Hemisphäre heisst Süd, oder Mittag, und der entgegengesetzte Nord, oder Mitternacht.

Größte Kreise durch die Weltpole und ein Gestirn sind dieses Gestirns Declinations- oder Abweichungs- oder Stundenkreise. Größte Kreise durch das Zenith und ein Gestirn sind dieses Gestirns Höhen- oder Scheitelkreise. Die ersten stehen also auf dem Aequator, und die andern auf dem Horizont senkrecht.

Der Winkel am Weltpole zwischen dem Meridian und dem Declinationskreise eines Gestirns ist des Gestirns Stundenwinkel, und der Winkel am Zenith zwischen dem Meridian und eines Gestirns Scheitelkreise ist des Gestirns Azimut.

Der Theil des Declinationskreises zwischen dem Gestirn und dem Aequator ist des Gestirns Declination oder Abweichung, und dessen Ergänzung zu 90 Graden desselben Polardistanz. Der Theil des Scheitelkreises zwischen dem Gestirn und dem Horizonte ist des Gestirns Höhe und dessen Ergänzung zu 90 Graden desselben Zenithdistanz.

Unter den Körpern des Himmels dringt sich dem Beobachter vor allem die Sonne auf. Man bemerkte sehr früh, daß sie, nebst der täglichen Bewegung von Ost nach West, welche sie mit allen Gestirnen gemein hat, noch in einer eigenen Bewegung von West nach Ost in einem Kreise fortzurücken scheint, welcher den Aequator halbirt. Dieser größte Kreis, die scheinbare Bahn der Sonne, heisst die Ecliptik. Ihre Axe bezeichnet an der Fläche des Himmels in der nördlichen Hemisphäre den nördlichen, und in der entgegengesetzten den südlichen Pol der Ecliptik. Ein größter Kreis durch diese Pole und ein Gestirn heisst des Gestirns Breitenkreis, und der Theil desselben zwischen dem Gestirn und der Ecliptik heisst des Gestirns Breite. Die Durchschnittspunkte der Ecliptik mit dem Aequator sind die Aequinoctialpunkte, oder die Punkte der Nachtgleichen, deren jener, von welchem die Sonne sich in die nördliche Hemisphäre erhebt, der Frühlingspunkt, und der entgegengesetzte der Herbstpunkt heisst. Der Bogen des Aequators zwischen dem Frühlingspunkt und dem Declinationskreise eines Gestirns heisst des Gestirns Rectascension oder gerade Aufsteigung, und der Bogen der Ecliptik zwischen dem Frühlingspunkte und dem Breitenkreise eines Gestirns heisst des Gestirns Länge.

Der Parallelkreis durch den Nord- und Südpol der Ecliptik ist der nördliche und südliche Polarkreis. Der Parallelkreis, der in der nördlichen und südlichen Hemisphäre eben so weit vom Aequator absteht, als die Polarkreise von den Weltpolen,

heißt der nördliche und südliche Wendekreis. Der Declinationskreis durch die Aequinoctialpunkte ist der Colur der Nachtgleichen, und der von diesem um 90 Grade in Rectascension oder Länge entfernte Declinationskreis ist der Colur der Solstitien, oder der Sonnenwenden. Endlich nennt man den Winkel des Breitenkreises eines Gestirns mit dem Declinationskreise die Position, den des Declinationskreises mit dem Scheitelkreise die Variation, und den des Scheitelkreises mit dem Breitenkreise die Parallaxe des Gestirns.

Länge und Rectascension wird vom Frühlingspunkte bis 360 Grade und zwar in einer der täglichen Bewegung der Gestirne entgegengesetzten Richtung, also von West gen Ost gezählt. Azimute und Stundenwinkel aber zählt man in der Richtung der täglichen Bewegung von Süden angefangen gen West bis 360 Grade, oder auch bis 180 Grade, in welchem letzten Falle man aber die auf der Ostseite des Meridians liegenden Azimute und Stundenwinkel negativ nimmt. Südliche Declinationen und Breiten sind negativ.

Das Vorgetragene wird man sich bequem durch die Betrachtung eines Globus erläutern: um es aber durch eine Zeichnung sinnlich darzustellen, sey (Fig. 1.) Z der Pol des Horizonts HR, N der Pol des Aequators AQ, L der Pol der Ecliptik EP, S ein Gestirn, und R. A. H. Süd, West, Nord, so ist HZR der Meridian, und wenn man durch S die Bogen ZSa, NSb, LSc nach der Ordnung senkrecht auf HR, AQ, EP zieht, so ist

- Sa die Höhe des Gestirns,
- SZ die Zenithdistanz,
- Sb die Declination,
- SN die Poldistanz,
- Sc die Breite,
- ONb oder Ob die Rectascension,
- OLc oder Oc die Länge,
- ENb oder Qb der Stundenwinkel,
- RZa oder Ra das Azimut,
- NSL die Position,
- NSZ die Variation,
- LSZ die Parallaxe.

§. 2.

Almicantarate und Parallelkreise ausgenommen, sind alle bisher betrachtete Kreise größte, d. h. solche, deren Mittelpunkt zugleich der der Kugelfläche des Himmels ist. Die ungemein große Entfernung der meisten Gestirne, von welcher wir uns in der Folge überzeugen werden, erlaubt uns oft die ganze Erde nur für einen Punkt, d. h. das Auge des Beobachters im Mittelpunkte der Erde anzunehmen, wodurch der Unterschied des wahren und scheinbaren Horizontes, so wie überhaupt der

Ehe wir aber dazu übergehen, wird es gut seyn, die vorzüglichsten Lehren der sogenannten sphärischen Trigonometrie und einige verwandte Gegenstände auf eine eben so allgemeine als einfache Weise zu entwickeln.

Zwey Ebenen sollen sich unter dem Winkel γ schneiden. Die rechtwinklichten Coordinaten irgend eines Punktes C in Beziehung auf die erste Ebene sollen $x\ y\ z$, und in Beziehung auf die andere $x'\ y'\ z'$ heißen. Der Anfangspunkt dieser Coordinaten, so wie die Axen des x und x' sollen endlich in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie beyder Ebenen liegen. Dief's vorausgesetzt, hat man sofort folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= z \sin \gamma - y \cos \gamma \\ z' &= z \cos \gamma + y \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Ist nun r die Entfernung jenes Punktes von dem Anfangspunkte der Coordinaten und überdies

α der Winkel des r mit der Axe des z
 β z' und

A der Winkel der Project. von r in der Ebene x'y' mit der Axe des y,
B

so ist, wenn man jene Entfernung $r = 1$ setzt:

$$\begin{aligned}x &= \sin \alpha \sin B \\y &= \sin \alpha \cos B \\z &= \cos \alpha\end{aligned}$$

und eben so :

$$\begin{aligned}x' &= \sin \beta \sin A \\y' &= \sin \beta \cos A \\z' &= \cos \beta\end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe der Coordinaten in den Gleichungen (I), so gibt die erste

$$\sin \alpha \sin B = \sin \beta \sin A \dots (a)$$

und die dritte

$$\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos B \dots (b)$$

und endlich die zweyte, dividirt durch die erste,

$$\text{Cotg } A \sin B = \text{Cotg } \alpha \sin \gamma - \cos \gamma \cos B \dots (c)$$

Diese drey Gleichungen, ja schon die zweyte (b), aus welcher sich die beyden andern leicht ableiten lassen, enthalten die gesammten Vorschriften der sphärischen, also auch der ebenen

Trigonometrie, welche letzte nur ein besonderer Fall von jener ist, da man alle Ausdrücke der ebenen Trigonometrie erhält, wenn man in denen der sphärischen die Seiten der Dreyecke unendlich klein annimmt. Um dieß zu zeigen, beschreibe man um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $r = 1$ eine Kugel. Die verlängerten Axen der z und z' sollen die Fläche dieser Kugel respective in den Punkten B und A schneiden. Verbindet man die Punkte A B C der Kugeloberfläche durch drey größte Kreise, so hat man ein sphärisches Dreyeck ABC. Wir wollen der gewöhnlichen Bezeichnung gemäß, die Winkel dieses Dreyecks BAC, ABC, BCA resp. A, B, C , und die Seiten BC, AC, AB desselben α, β, γ nennen. Man sieht leicht, daß hier die Zeichen A, B, C und α, β, γ die vorige Bedeutung haben, also gelten die drey vorhergehenden Gleichungen (a), (b), (c) auch für sphärische Dreyecke.

Setzt man endlich in der Gleichung (c) für $\sin \gamma$ die GröÙe

$$\frac{\sin \alpha \sin C}{\sin A} \text{ aus der Gleichung (a), so hat man}$$

$$\cos A \sin B = \cos \alpha \sin C - \cos \gamma \cos B \sin A$$

und durch bloÙe Verwandlung der Buchstaben analog

$$\cos B \sin C = \cos \beta \sin A - \cos \alpha \cos C \sin B$$

$$\cos C \sin A = \cos \gamma \sin B - \cos \beta \cos A \sin C$$

Multipliziert man aber die erste dieser Gleichungen durch $\sin B$, die zweyte durch $\cos A \cos B \sin C$, und die dritte durch $\sin A \cos B$, so gibt die Summe dieser Produkte, wenn man im Zähler alle Sinus in Cosinus verwandelt und bemerkt, daß $(1 - \cos A \cos B \cos C)$ der gemeinschaftliche Factor des Zählers und Nenners ist, folgenden Ausdruck:

$$\cos A = \sin B \sin C \cos \alpha - \cos B \cos C \dots (d)$$

und die Gleichungen (a) .. (d) enthalten alle zur Auflösung sphärischer Dreyecke nöthigen Ausdrücke.

I. Durch schickliche Verwandlungen lassen sich die gegebenen Ausdrücke zur Rechnung mit Logarithmen bequemer machen. So gibt z. B. die Gleichung (b)

$$1 \pm \cos B = \frac{\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \pm \cos \beta}{\sin \alpha \sin \gamma}$$

oder

$$1 \pm \cos B = \pm \cos (\alpha \pm \gamma) \pm \cos \beta$$

woraus man leicht findet

$$\sin^2 \frac{B}{2} = \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} : \sin \alpha \sin \gamma$$

$$\cos^2 \frac{B}{2} = \sin \frac{\beta + \alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} : \sin \alpha \sin \gamma$$

Oder wenn man die GröÙen φ und ψ so annimmt, daß man hat

$$\text{Tang } \varphi = \frac{\text{Cos } \alpha \text{ Cos } \gamma}{\text{Sin } \beta} \text{ und } \text{Tang } \psi = \text{Cos } B \text{ Tg } \alpha$$

so erhält man

$$\text{Cos } B = \frac{\text{Cos } (\beta + \varphi)}{\text{Sin } \alpha \text{ Sin } \gamma \text{ Cos } \varphi} \text{ und } \text{Cos } \beta = \frac{\text{Cos } \alpha \text{ Cos } (\gamma - \psi)}{\text{Cos } \psi}$$

und ähnliche Reductionen kann man für die Gleichungen (c) und (d) finden.

II. Nimmt man die Seiten des Dreyecks unendlich klein an, so erhält man aus den vorhergehenden Ausdrücken sofort

$$\alpha \text{ Sin } B = \beta \text{ Sin } A \dots \text{ aus (a)}$$

$$\text{Cotg } A = \frac{\gamma - \alpha \text{ Cos } B}{\alpha \text{ Sin } B} \dots \text{ aus (c)}$$

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{1 - \gamma^2} + \alpha \gamma \text{ Cos } B \text{ oder}$$

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2 \alpha \gamma \text{ Cos } B \dots \text{ aus (b)}$$

$$\text{Sin } \frac{B}{2} = \frac{(\alpha + \beta - \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)}{4 \alpha \gamma} \dots \text{ aus (I)}$$

welches die bekannten Ausdrücke der ebenen Trigonometrie sind.

III. Es ist nicht meine Absicht, alle hieher gehörenden Verwandlungen vorzutragen, die man in den Werken, welche diesen Gegenständen ausschliessend gewidmet sind, gesammelt findet; aber die folgende minder bekannte verdient eine nähere Entwicklung, da sie uns bey vielen künftigen Untersuchungen von dem grössten Nutzen seyn wird.

Es sey der Kürze wegen

$$P = \text{Sin } \frac{A+B}{2} \quad p = \text{Sin } \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$Q = \text{Cos } \frac{A+B}{2} \quad q = \text{Cos } \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Für die negativen B und β wollen wir diese Gröfsen P p mit einem Striche bezeichnen. Da man hat

$$\frac{\text{Sin } (A+B)}{\text{Sin } C} = \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Sin } \gamma} \text{ Cos } B + \frac{\text{Sin } \beta}{\text{Sin } \gamma} \text{ Cos } A$$

so ist auch, wenn man für Cos A, Cos B ihre vorhergehenden Werthe in $\alpha \beta \gamma$ setzt

$$\frac{P Q}{\text{Sin } \frac{C}{2} \text{ Cos } \frac{C}{2}} = \frac{q q'}{\text{Cos } \frac{\gamma}{2}} \dots (1)$$

Verfährt man eben so mit $\frac{\text{Sin } (A-B)}{\text{Sin } C}$, so ist

$$\frac{P' Q'}{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{p p'}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \dots (2)$$

Weiter ist $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \gamma} = \frac{\sin A}{\sin C} \cos \beta + \frac{\sin B}{\sin C} \cos \alpha$

also, wenn man für $\cos \alpha$, $\cos \beta$ ihre Werthe in A, B, C substituirt,

$$\frac{Q Q'}{\sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{p q}{\sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \dots (3)$$

und eben so aus $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \gamma}$

$$\frac{P P'}{\cos^2 \frac{C}{2}} = \frac{p' q'}{\sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \dots (4)$$

Endlich ist noch

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \gamma}$$

und wenn man diese Summen und Differenzen auf die bekannte Art in Producte verwandelt

$$\frac{P Q'}{\sin C} = \frac{p q'}{\sin \gamma} \dots (5)$$

$$\frac{Q P'}{\sin C} = \frac{q p'}{\sin \gamma} \dots (6)$$

Deutet man aber das Product der zwey ersten Gleichungen, oder

$$\frac{P Q}{\sin^2 \frac{C}{2}} \frac{P' Q'}{\cos^2 \frac{C}{2}} = \frac{p q \cdot p' q'}{\sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2}}$$

der Kürze wegen durch (1. 2) an, und so fort mit den übrigen, so erhält man erstens

$$\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{4}{6}\right)$$

$$\left(\frac{2}{6}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{3}{6}\right)$$

$$\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)$$

und diese vier Gleichungen heißen nach ihrem Erfinder die Neper'schen Gleichungen. Ferner ist zweytens

$$\left(\frac{1. 3}{5}\right) = \left(\frac{1. 6}{4}\right) = \left(\frac{3. 6}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1. 4}{6}\right) = \left(\frac{1. 5}{3}\right) = \left(\frac{4. 5}{2}\right)$$

$$\left(\frac{2.3}{6}\right) = \left(\frac{2.5}{4}\right) = \left(\frac{3.5}{1}\right)$$

$$\left(\frac{2.4}{5}\right) = \left(\frac{2.6}{3}\right) = \left(\frac{4.6}{1}\right)$$

und diese vier Ausdrücke kann man, nach ihrem Erfinder, die Gauß'schen Gleichungen nennen. Stellt man die Bedeutung der Zeichen (1), (2) .. wieder her, so sind die ersten

$$\operatorname{Tg} \frac{A+B}{2} \operatorname{Tg} \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{Cos} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\operatorname{Tg} \frac{A-B}{2} \operatorname{Tg} \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\operatorname{Tg} \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{Cotg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{Cos} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{A+B}{2}}$$

$$\operatorname{Tg} \frac{\alpha-\beta}{2} \operatorname{Cotg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{A+B}{2}}$$

und die letzten

$$\operatorname{Cos} \frac{A+B}{2} \operatorname{Cos} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{Cos} \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{Sin} \frac{C}{2}$$

$$\operatorname{Sin} \frac{A+B}{2} \operatorname{Cos} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{Cos} \frac{\alpha-\beta}{2} \operatorname{Cos} \frac{C}{2}$$

$$\operatorname{Cos} \frac{A-B}{2} \operatorname{Sin} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{Sin} \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{Sin} \frac{C}{2}$$

$$\operatorname{Sin} \frac{A-B}{2} \operatorname{Sin} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{Sin} \frac{\alpha-\beta}{2} \operatorname{Cos} \frac{C}{2}$$

und man sieht, daß die ersten in den letzten allgemeinen enthalten sind.

IV. Die Nepper'schen Gleichungen können unter die allgemeine Form

$$\operatorname{Tg} \frac{x}{2} = a \operatorname{Tg} \frac{y}{2}$$

gebracht werden. Da Gleichungen dieser Art im Folgenden sehr oft vorkommen, so wird hier eine nähere Betrachtung derselben nicht überflüssig seyn.

Ist e die Basis der natürlichen Logarithmen, und der Kürze wegen

$\frac{a-1}{a+1} = b$, so läßt sich jene Gleichung auch so ausdrücken:

$$e^{x\sqrt{-1}} = e^{y\sqrt{-1}} \left\{ \frac{1 - b e^{-y\sqrt{-1}}}{1 - b e^{y\sqrt{-1}}} \right\}$$

oder auch wenn man die Logarithmen dieses Ausdrucks nimmt,

$$x\sqrt{-1} = y\sqrt{-1} + \log(1 - b e^{-y\sqrt{-1}}) - \log(1 - b e^{y\sqrt{-1}})$$

und wenn man diese Logarithmen nach der Reihe

$$\log(1-z) = -z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 -$$

entwickelt:

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y + b \sin y + \frac{1}{2}b^2 \sin 2y + \frac{1}{3}b^3 \sin 3y + \dots (7)$$

und diese Gleichung gibt den Werth von x in einer sehr einfachen Reihe, die nach den Sinus des Vielfachen von y fortgeht, die aber nur dann brauchbar ist, wenn b eine gegen die Einheit kleine Gröfse ist. Um daher auch für die Fälle, in denen die gegebene Reihe divergirt, einen für die Anwendung brauchbaren Ausdruck zu finden, wollen wir die gegebene Gleichung so darstellen:

$$e^{x\sqrt{-1}} = e^{-y\sqrt{-1}} \left\{ \frac{1 - \frac{1}{b} e^{y\sqrt{-1}}}{1 - \frac{1}{b} e^{-y\sqrt{-1}}} \right\}$$

Verfährt man mit diesem Ausdrücke wie mit dem vorhergehenden, so erhält man

$$\frac{x}{2} = -\frac{y}{2} - \frac{1}{b} \sin y - \frac{1}{2b^2} \sin 2y - \frac{1}{3b^3} \sin 3y - \dots (8)$$

und diese Reihe fängt da an brauchbar zu werden, wo die andere aufhört, so dafs eigentlich beyde zusammen als die vollständige Entwicklung der Gröfse x in eine Reihe anzusehen sind. Es wird nun nicht schwer seyn, auch für die Entwicklung der Gröfse y in eine Reihe, die nach den Sinus der Vielfachen der x fortgeht, die beyden zusammengehörenden Auflösungen zu finden. Man wird erhalten

$$\begin{aligned} \frac{y}{2} &= \frac{x}{2} - b \sin x + \frac{b^2}{2} \sin 2x - \frac{b^3}{3} \sin 3x + \\ \frac{y}{2} &= -\frac{x}{2} + \frac{1}{b} \sin x - \frac{1}{2b^2} \sin 2x + \frac{1}{3b^3} \sin 3x - \end{aligned}$$

Man bemerke noch, dafs die gegebene Gleichung

$$\operatorname{Tg} \frac{x}{2} = a \operatorname{Tg} \frac{y}{2}$$

sich auch auf folgende bringen läßt

$$\operatorname{Tg} \frac{x+y}{2} = \frac{\sin y}{\cos y - b} \quad \text{und} \quad \operatorname{Tg} \frac{x-y}{2} = \frac{b \sin y}{1 - b \cos y}$$

und daß daher auch für diese Formen die oben gegebenen doppelten Entwicklungen gelten.

V. Wendet man das, was in IV. gesagt wurde, auf die oben gegebenen Nepper'schen Ausdrücke an, so wird man durch diese Reihen aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die beyden unbekannten Winkel eines sphärischen Dreyecks, oder auch aus zwey Winkeln mit der eingeschlossenen Seite die beyden unbekannten Seiten des Dreyecks entwickeln. Zur vollständigen Auflösung dieser Dreyecke durch Reihen, fehlt daher noch im ersten Falle die dritte Seite, und im zweyten der dritte Winkel. Wir wollen sehen, wie man auch diese in Reihen entwickeln könne. Die vorhergehenden Gleichungen (b) und (d) sind

$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta \cos C + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos C = \sin A \sin B \cos \gamma - \cos A \cos B$$

Allein die erste desselben läßt sich auch so ausdrücken:

$$\sin^2 \frac{1}{2} \gamma = \frac{1 - \sin \alpha \sin \beta \cos C - \cos \alpha \cos \beta}{2}$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich

$$f^2 = 2fg \cos C + g^2$$

$$\text{so hat man } f^2 + g^2 = \frac{1 - \cos \alpha \cos \beta}{2}$$

$$fg = \frac{1}{4} \sin \alpha \sin \beta$$

oder auch

$$f^2 + g^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

$$2fg = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

Allein die Summe der zwey letzten Gleichungen gibt auf jeder Seite des Gleichheitszeichens ein vollständiges Quadrat, also ist entweder

$$f = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \quad \text{und} \quad g = \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

oder auch, da sich offenbar f und g verwechseln läßt,

$$f = \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \quad \text{und} \quad g = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

Es ist aber auch

$f^2 - 2fg \cos C + g^2 = (f - ge^{C\sqrt{-1}})(f - ge^{-C\sqrt{-1}})$
 also hat man, wenn man wie in IV. die Logarithmen nimmt,

$$\log \sin \frac{1}{2} \gamma = \log \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - m \cos C - \frac{1}{2} m^2 \cos 2C - \frac{1}{3} m^3 \cos 3C -$$

$$\text{wo } m = \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \beta \operatorname{Cotg} \frac{1}{2} \alpha$$

und, wenn m grösser als 1 ist, da man, wie gesagt, die Grössen f und g verwechseln kann,

$$\log \sin \frac{1}{2} \gamma = \log \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} - \frac{1}{m} \cos C - \frac{1}{2m^2} \cos 2C - \frac{1}{3m^3} \cos 3C -$$

Ähnliche Reihen lassen sich durch dasselbe Verfahren aus der ersten der beyden obigen Gleichungen für den Logarithmus von $\cos \frac{1}{2} \gamma$ ableiten. Setzt man nämlich

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \alpha \sin \beta \cos C + \cos \alpha \cos \beta + 1}{2} = h^2 + 2hk \cos C + k^2$$

$$\text{so ist wieder } h = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \text{ und } k = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

oder umgekehrt, da sich h und k wieder verwechseln läßt. Man erhält daher wieder, wie zuvor,

$$\log \cos \frac{\gamma}{2} = \log \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + n \cos C - \frac{n^2}{2} \cos 2C + \frac{n^3}{3} \cos 3C -$$

$$\log \cos \frac{\gamma}{2} = \log \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \frac{1}{n} \cos C - \frac{1}{2n^2} \cos 2C + \frac{1}{3n^3} \cos 3C - \quad \text{wo } n = \operatorname{Tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{Tg} \frac{\beta}{2}$$

Eben so wird man endlich aus der zweyten der gegebenen Gleichungen die analogen vier Reihen für $\sin \frac{1}{2} C$ und $\cos \frac{1}{2} C$ ableiten, von deren je zweyen immer eine convergirt, wenn die andere divergirt. Da diese Entwicklungen keine weitere Schwierigkeit haben, so halte ich mich nicht länger dabey auf, und gehe zu der näheren Betrachtung einiger besondern Fälle über, die uns später nützlich seyn werden.

§ 3.

Die Gleichung (b) des vorigen §. gibt folgende

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A \\ \cos \beta &= \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos B \\ \cos \gamma &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C \end{aligned} \right\}$$

Differentirt man die erste dieser Gleichungen, so erhält man nach einigen leichten Reductionen

$$d\alpha = d\beta \cos C + d\gamma \cos B + dA \sin B \sin \gamma$$

und eben so geben die folgenden Gleichungen

$$d\beta = d\alpha \cos C + d\gamma \cos A + dB \sin C \sin \alpha$$

$$d\gamma = d\alpha \cos B + d\beta \cos A + dC \sin A \sin \beta$$

und durch die Verbindung dieser drey Gleichungen wird man alle bekannten Differentialformeln für sphärische Dreyecke ableiten.

Ist z. B. der Winkel A und die Seite γ constant, so gibt die erste dieser Differentialgleichungen

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \cos C$$

und die zweyte $d\beta = d\alpha \cos C + dB \sin C \sin \alpha$ also, wenn man den vorhergehenden Werth von $d\alpha$ substituirt,

$$\frac{d\beta}{dB} = \frac{\sin \alpha}{\sin C}$$

Endlich gibt eben so die dritte

$$0 = d\alpha \cos B + d\beta \cos A + dC \sin A \sin \beta$$

oder wenn man in ihr die vorhergehenden Werthe von $d\alpha$ und $d\beta$ substituirt,

$$\frac{dC}{d\alpha} = -\frac{1}{\cos \alpha}$$

Ist also A, γ constant, so hat man

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \cos C, \frac{d\beta}{dB} = \frac{\sin \alpha}{\sin C}, \frac{dC}{d\alpha} = -\cos \alpha,$$

$$\frac{d\alpha}{dB} = \sin \alpha \cotg C, \frac{dC}{d\beta} = -\sin C \cotg \alpha$$

und $\frac{d\alpha}{dC} = -\text{Tg } \alpha \cotg C$

Ist β, γ constant, so ist

$$\frac{dB}{dC} = \text{Tg } B \cotg C, \frac{d\alpha}{dB} = -\sin \alpha \text{Tg } C, \frac{d\alpha}{dC} = -\sin \alpha \text{Tg } B,$$

$$\frac{d\alpha}{dA} = \sin \gamma \sin B, \frac{dA}{dB} = -\frac{\sin \alpha}{\sin \beta \cos C}, \frac{dA}{dC} = -\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma \cos B}$$

Ist B, C constant, so hat man

$$\frac{d\beta}{d\gamma} = \text{Tg } \beta \cotg \gamma, \frac{dA}{d\beta} = \sin A \text{Tg } \gamma, \frac{dA}{d\gamma} = \sin A \text{Tg } \beta,$$

$$\frac{dA}{d\alpha} = \sin \gamma \sin B, \frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \cos \gamma}, \frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta \sin \gamma}$$

Ist endlich A, α constant, so ist

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = -\frac{\cos C}{\cos B}, \frac{dC}{dB} = -\frac{\cos \gamma}{\cos \beta}, \frac{d\gamma}{dC} = \text{Tg } \gamma \cotg C,$$

$$\frac{d\beta}{dB} = \text{Tg } \beta \cotg B, \frac{d\gamma}{dB} = -\frac{\text{Tg } \beta \cos C}{\sin B}, \frac{d\beta}{dC} = -\frac{\sin \beta \cotg B}{\cos \gamma}$$

I. Oefter kommt die Aufgabe vor, aus den drey gegebenen Seiten eines sphärischen Dreyeckes, deren zwey nahe gleich 90° sind, den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel zu finden. Obschon sich auch auf diesen Fall die oben gegebenen Ausdrücke unmittelbar anwenden lassen, so wird es doch bequemer seyn, folgende Auflösung anzuwenden.

Sind die Seiten $\alpha \beta$ nahe gleich 90° und sucht man den von ihnen eingeschlossenen Winkel C, so sey

$$\alpha = 90 - \alpha'$$

$$\beta = 90 - \beta'$$

$$C = \gamma + x$$

wo $\alpha' \beta' x$ nur kleine Gröfsen sind. Die Gleichung

$$\cos C = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}$$

wenn man die vierten Potenzen jener Gröfsen vernachlässiget, geht in folgende über

$$\cos \gamma - x \sin \gamma = \frac{\cos \gamma - \alpha' \beta'}{1 - \frac{1}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2)}$$

woraus man leicht findet

$$x = \frac{\alpha' \beta' - \frac{1}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2) \cos \gamma}{\sin \gamma}$$

Setzt man $p = \frac{\alpha' + \beta'}{2}$ und $q = \frac{\alpha' - \beta'}{2}$, so ist der letzte Ausdruck

$$x = \frac{p^2}{R} \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \gamma - \frac{q^2}{R} \operatorname{Cotg} \frac{1}{2} \gamma$$

$$\text{wo } R = \frac{1}{\sin 1''} = \frac{180.60^2}{3.14159} \text{ ist.}$$

II. Wenn in einem sphärischen Dreyecke die drey Seiten gegen den Halbmesser der Kugel, zu welcher das Dreyeck gehört, sehr klein sind, so läßt sich die Auflösung des sphärischen Dreyeckes auf die der ebenen zurückführen, welche letzten zur Ausübung bequemer sind.

Es sey r der Halbmesser der Kugel, auf welchem das gegebene Dreyeck liegt. Denkt man sich ein ähnliches Dreyeck auf einer der ersten concentrischen Kugel, deren Halbmesser gleich der Einheit ist, so werden die Seiten dieses Dreyeckes

$$\frac{\alpha}{r}, \frac{\beta}{r}, \frac{\gamma}{r}$$

seyn, wenn die Seiten jenes Dreyeckes $\alpha \beta \gamma$ sind, so daß man hat

$$\cos A = \frac{\cos \frac{\alpha}{r} - \cos \frac{\beta}{r} \cos \frac{\gamma}{r}}{\sin \frac{\beta}{r} \sin \frac{\gamma}{r}}$$

Entwickelt man die Sinus und Cosinus dieser sehr kleinen Seiten in die bekannten Reihen, und vernachlässigt man die fünften und höheren Potenzen dieser Seiten, so ist

$$\cos A = \frac{\left(\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2r^2} + \frac{\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}{24r^4} - \frac{\beta^2 \gamma^2}{4r^4} \right)}{\frac{\beta \gamma}{r^2} \left(1 - \frac{\beta^2}{6r^2} - \frac{\gamma^2}{6r^2} \right)}$$

oder wenn man Zähler und Nenner durch $1 + \frac{\beta^2}{6r^2} + \frac{\gamma^2}{6r^2}$ multiplicirt,

$$\cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} + \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)}{24\beta\gamma r^2}$$

Denkt man sich ein ebenes Dreyeck, dessen Seiten ebenfalls $\alpha \beta \gamma$, und dessen diesen Seiten resp. gegenüberstehende Winkel $A' B' C'$ sind, so hat man

$$\cos A' = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$$

woraus folgt

$$\sin^2 A' = - \left(\frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)}{4\beta^2\gamma^2} \right)$$

und wenn man diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdruck von $\cos A$ substituirt, so ist

$$\cos A = \cos A' - \frac{\beta\gamma}{6r^2} \sin^2 A'$$

Ist aber $A = A' + x$ so ist sehr nahe

$$\cos A = \cos A' - x \sin A' \text{ also } x = \frac{\beta\gamma}{6r^2} \sin A'$$

also die vorhergehende Gleichung

$$A = A' + \frac{\beta\gamma}{6r^2} \sin A'$$

welcher Ausdruck bis zu den vierten Potenzen von $\frac{\beta}{r}, \frac{\gamma}{r}$ richtig ist.

Es ist aber $\frac{1}{2} \beta \gamma \sin A'$ die Fläche des ebenen Dreyeckes, die sehr nahe der Fläche unsers sphärischen Dreyeckes gleich ist. Setzt man also diese Fläche $\frac{1}{2} \beta \gamma \sin A' = f$, so hat man

$$A' = A - \frac{\frac{1}{3}f}{r^2} \text{ und eben so}$$

$$B' = B - \frac{\frac{1}{3}f}{r^2}$$

$$C' = C - \frac{\frac{1}{3}f}{r^2}$$

also auch

$$A' + B' + C' = 180 = A + B + C - \frac{f}{r^2}$$

Man kann daher die Gröfse $g = \frac{f}{r^2}$ als den Excefs der Summe der drey Winkel des sphärischen Dreyeckes über zwey rechte Winkel ansehen. Ein sphärisches Dreyeck also, dessen Winkel $A B C$ sind, und dessen Seiten $\alpha \beta \gamma$ gegen den Halbmesser der Kugel sehr klein sind, läfst sich wie ein ebenes Dreyeck behandeln, welches dieselben Seiten $\alpha \beta \gamma$, und welches die Winkel $A - \frac{1}{2}g, B - \frac{1}{2}g, C - \frac{1}{2}g$ hat, wo ε gleich der Summe der drey Winkel des sphärischen Dreyeckes weniger 180° ist.

Die Gröfse $g = \frac{f}{r^2}$, die der Fläche des Dreyeckes proportional ist, kann man durch die gegebenen Seiten und Winkel des sphärischen Dreyeckes, indem man es als ein ebenes betrachtet, berechnen. Ist z. B. $\beta \gamma$ und die eingeschlossene Seite A gegeben, so ist

$$f = \frac{1}{2} \beta \gamma \sin A; \text{ ist } \alpha \text{ und } B C \text{ gegeben, so ist } f = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)} \text{ u. s. w. und man hat } g = \frac{f \sin 1''}{r^2}$$

§. 4.

Ehe wir diese Gegenstände verlassen, wird es gut seyn, noch die vorzüglichsten Sätze der analytischen Geometrie hier kurz zusammen zu stellen, da wir uns in der Folge öfter auf sie beziehen werden.

I. Um die Lage eines Punktes im Raume zu bestimmen, denkt man sich drey unveränderliche, gewöhnlich unter einander senkrechte Ebenen; die senkrechten Distanzen des Punktes von jeder dieser drey Ebenen heißen die Coordinaten dieses Punktes, so wie die Ebenen selbst die coordinirten Ebenen; der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dieser Ebenen der Anfangspunkt der Coordinaten, so wie endlich die Durchschnittslinien jeder zwey dieser Ebenen, welchen jene Distanzen parallel sind, die Axen dieser Coordinaten. Wir wollen diese drey unter einander senkrechten Coordinaten durch x, y, z bezeichnen.

Man sieht leicht, dafs die Gleichungen eines Punktes die Form haben werden

$$x = a$$

$$y = b$$

$$z = c$$

Die zwey ersten dieser Gleichungen, allein betrachtet, sind die Gleichungen der Projection des Punktes in der coordi-

nirten Ebene, welche die Axen der x und y enthält, d. h. in der Ebene der xy , oder auch, sie sind die Gleichungen einer geraden Linie, die mit der Axe der z parallel ist, daher auch die beyden Gleichungen

$$\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \Bigg) \quad$$

die der Axe der z selbst sind.

Die erste jener Gleichungen, allein genommen, oder $x = a$ wird aber die Gleichung aller Punkte der Ebene seyn, die mit der Ebene der yz parallel ist, also ist auch $x = 0$ die Gleichung der Ebene der yz selbst.

II. Die Gleichungen einer geraden Linie im Raume werden im Allgemeinen folgende Gestalt haben

$$\begin{matrix} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{matrix} \Bigg) \text{ I}$$

Wir wollen sie der Kürze wegen die Linie I nennen. Liegt diese Linie in der Ebene der xy , so werden also ihre Gleichungen seyn

$$\begin{matrix} z = 0 \\ y = Ax + B \end{matrix}$$

Eine zweyte Linie im Raume habe die Gleichungen

$$\begin{matrix} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{matrix} \Bigg) \text{ II}$$

Wir wollen sie die Linie II nennen.

1. Soll die Linie I durch den Punkt gehen, dessen Coordinaten x' y' z' sind, so sind ihre Gleichungen

$$\begin{matrix} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \\ x' = az' + \alpha \\ y' = bz' + \beta \end{matrix} \Bigg\}$$

aus welchen man zwey der vier Gröfsen a , b , α , β eliminirt. Soll die Linie überdißs noch durch den Punkt gehen, dessen Coordinaten x'' y'' z'' sind, so wird man mit den vier letzten Gleichungen noch die zwey folgenden verbinden

$$\begin{matrix} x'' = az'' + \alpha \\ y'' = bz'' + \beta \end{matrix}$$

und mittels der letzten vier Gleichungen die Werthe der Gröfsen a , b , α , β , und dadurch die Lage der Linie selbst vollständig bestimmen. Die Entfernung jener beyden Punkte aber wird seyn

$$\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}$$

2. Die Gleichung, welche ausdrückt, daß die Linien I und II sich irgendwo in einem Punkte schneiden, ist

$$(\alpha' - \alpha)(b' - b) = (\beta' - \beta)(a' - a)$$

und sie folgt aus der Elimination der Gröſſen x y z aus den vier Gleichungen I und II.

3. Es sey V der Winkel der zwey Linien I, II oder wenn sich diese Linien nicht schneiden, der Winkel zweyer andern der I. II. parallelen Linien, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen. Die Gleichungen dieser parallelen Linien sind

$$\begin{array}{lcl} x = az & \text{und} & x = a'z \\ y = bz & & y = b'z \end{array}$$

Nimmt man auf jeder dieser beyden Linien einen Punkt, dessen Entfernung vom Anfangspunkte die Einheit ist, so ist die Distanz dieser zwey Punkte gleich

$$2 \sin \frac{1}{2} V = \sqrt{2 - 2 \cos V}$$

oder auch, nach dem Vorhergehenden,

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

wenn man $x = az$ und $x' = a'z'$
 $y = bz$ $y' = b'z'$

setzt. Da aber $x^2 + y^2 + z^2 = (1 + a^2 + b^2) z^2 = 1$, und eben so $x'^2 + y'^2 + z'^2 = (1 + a'^2 + b'^2) z'^2 = 1$ ist, so ist

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad z' = \frac{1}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}$$

Substituirt man diese Werthe von xyz und $x'y'z'$ in dem letzten Ausdrücke der Distanz jener zwey Punkte, und setzt man ihn gleich $\sqrt{2 - 2 \cos V}$, so erhält man

$$\cos V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}$$

Sind daher die beyden Linien auf einander senkrecht, so ist

$$1 + aa' + bb' = 0$$

und sind sie unter einander parallel, so ist

$$a = a' \text{ und } b = b'$$

4. Daraus folgt ferner: Ist XYZ der Winkel der Linie I mit der Axe der x , y , z , so ist

$$\cos X = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad \cos Y = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad \cos Z = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$$

und überdieſs $\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1$

Ist aber φ ψ ξ der Winkel der Linie I mit der Ebene der xy , xz , yz , so ist

$$\sin \varphi = \cos Z, \quad \sin \psi = \cos Y, \quad \sin \xi = \cos X$$

5. Sucht man eine Linie, die durch den Punkt $x' y' z'$ pa-

parallel mit der Linie I geht, so sind ihre Gleichungen nach dem Vorhergehenden

$$\left. \begin{aligned} x &= az + B \\ y &= bz + D \\ x' &= az' + B \\ y' &= bz' + D \end{aligned} \right\}$$

6. Sucht man eine Linie, die senkrecht auf I steht, so sind ihre Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= Az + A' \\ y &= Bz + B' \end{aligned} \right\}$$

und zur Bestimmung der constanten Gröfse hat man nach dem Vorhergehenden

$$1 + Aa + Bb = 0 \quad \text{und}$$

$$(A' - \alpha)(B - b) = (B' - \beta)(A - a)$$

soll sie noch überdies durch den Punkt $x' y' z'$ gehen, so wird man zu den vorhergehenden vier Gleichungen noch folgende zwey setzen

$$\left. \begin{aligned} x' &= Az' + A' \\ y' &= Bz' + B' \end{aligned} \right\}$$

III. Die Gleichung der Ebene hat im Allgemeinen die Form

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Wir wollen diese der Kürze wegen die Ebene I, und die Ebene, deren Gleichung

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

ist, die Ebene II nennen.

Die geraden Linien, in welchen eine Ebene die coordinirten Ebenen schneidet, nennt man die Knotenlinien jener Ebene. So sind die Gleichungen der Knotenlinie der Ebene I in der Ebene xy

$$\left. \begin{aligned} z &= 0 \\ Ax + By + D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

also auch $-\frac{A}{B}$ die Tangente des Winkels der Knotenlinie in xy mit der Axe der x u. s. f. für die übrigen. Die Entfernung des Anfangspunktes von dem Punkte, in welchem die Ebene I die Axe der $x y z$ schneidet, ist resp. $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$, $-\frac{D}{C}$.

1. Daraus folgt: $x = a$ ist die Gleichung einer Ebene, welche senkrecht auf der Axe der x steht; $x = 0$ ist die Gleichung der coordinirten Ebene yz ; und $x = ay + \alpha$ ist die Gleichung einer Ebene, welche durch die Linie, deren Gleichungen $x = ay + \alpha$, $y = b$ sind, geht, und auf der coordinirten Ebene xy senkrecht ist.

2. Die Gröfse einer auf die Ebene I senkrechten Linie zwischen dem Anfangspunkte der Coordinaten und der Ebene ist

$$\frac{D}{M} \text{ wo } M = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

und die den Coordinaten xyz analogen Coordinaten ξ, ν, ζ des Durchschnittspunktes dieser senkrechten Linie mit der Ebene I sind

$$\xi = -\frac{A D}{M^2}, \nu = -\frac{B D}{M^2}, \zeta = -\frac{D C}{M^2}$$

Endlich sind die Gleichungen dieser senkrechten Linie selbst

$$x = \frac{A}{C} z \text{ und } y = \frac{B}{C} z$$

3. Die Linie, welche durch den Anfangspunkt parallel mit der Linie I geht, ist

$$x = az, y = bz$$

und die Linie, welche durch den Anfangspunkt senkrecht auf die Ebene I geht, ist

$$x = \frac{A}{C} z, y = \frac{B}{C} z$$

Ist also U der Winkel dieser beyden Linien, oder, was dasselbe ist, ist $90 - U$ der Winkel der Linie I mit der Ebene I, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\sin U = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{1+a^2+b^2} \cdot \sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Sind also beyde parallel, so ist $Aa + Bb + C = 0$, und sind sie senkrecht, so ist

$$\frac{A}{C} = a \text{ und } \frac{B}{C} = b \text{ Endlich sind}$$

$\frac{C}{M}, \frac{B}{M}, \frac{A}{M}$ die Cosinus der Winkel der Ebene I mit der Ebene xy, xz, yz .

4. Die Linie, welche durch den Anfang senkrecht auf die Ebene I geht, ist

$$x = \frac{A}{C} z, y = \frac{B}{C} z$$

und die Linie, welche durch den Anfang senkrecht auf die Ebene II geht, ist

$$x = \frac{A'}{C'} z, y = \frac{B'}{C'} z$$

Ist also W der Winkel der Ebene I mit der Ebene II, d. h. ist W der Winkel jener beyden Linien, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\cos W = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

Sind beyde Ebenen parallel, so ist $\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}$ und $\frac{B}{C} = \frac{B'}{C'}$ und sind sie senkrecht, so ist $AA' + BB' + CC' = 0$

5. Geht die Ebene I durch die Linie I, so ist die Gleichung der Ebene

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A\alpha + B\beta + D &= 0 \\ Aa + Bb + C &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Geht die Ebene I überdiess noch durch den Punkt der Coordinaten $x' y' z'$, so wird man den vorhergehenden drey Gleichungen noch folgende hinzufügen

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

6. Steht die Ebene I senkrecht auf der Linie I, so ist die Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\frac{A}{C} = a$$

$$\frac{B}{C} = b$$

und geht überdiess die Ebene I noch durch den Punkt der Coordinaten $x' y' z'$, so wird man den vorhergehenden Gleichungen noch folgende hinzusetzen

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

d. h. also, die vollständig bestimmte Gleichung der Ebene wird seyn

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0$$

und die Coordinaten $\xi \nu \zeta$ des Durchschnittspunktes dieser Ebene mit der darauf senkrechten Linie sind

$$\xi = \alpha + am$$

$$\nu = \beta + bm$$

$$\zeta = m$$

$$\text{wo } m = \frac{z' + a(x' - \alpha) + b(y' - \beta)}{1 + a^2 + b^2}$$

Die Entfernung dieses Durchschnittspunktes von dem Punkte der Coordination $x' y' z'$ ist

$$R = \sqrt{(\xi - x')^2 + (\nu - y')^2 + (\zeta - z')^2}$$

und die Entfernung des Anfangspunktes von dem Durchschnittspunkte der Ebene mit der darauf senkrechten Linie ist

$$\sqrt{\xi^2 + \nu^2 + \zeta^2}$$

und endlich der Theil des Lothes vom Anfangspunkte auf die Ebene I, welcher zwischen dem Anfangspunkte und der Ebene enthalten ist, ist

D

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

7. Geht eine Linie durch den Punkt, dessen Coordinaten $x' y' z'$ sind, senkrecht auf die Ebene I, so sind die Gleichungen dieser Linie

$$x - x' = \frac{A}{C} (z - z')$$

$$y - y' = \frac{B}{C} (z - z')$$

und wenn ξ u ζ die Coordinaten des Punktes sind, wo sich Loth und Ebene treffen, so ist

$$\xi = x' - A.P$$

$$u = y' - B.P$$

$$\zeta = z' - C.P$$

$$\text{wo } P = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

und die Entfernung der Punkte, deren Coordinaten $x' y' z'$ und ξ u ζ sind, ist

$$\sqrt{(\xi - x')^2 + (u - y')^2 + (\zeta - z')^2} = -P \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

8. Geht die Ebene I durch die drey Punkte, deren resp. Coordinaten $x' y' z'$, $x'' y'' z''$, $x''' y''' z'''$ sind, so ist ihre Gleichung

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ Ax' + By' + Cz' + D &= 0 \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0 \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Man kann daher annehmen

$$A = y'(z'' - z''') - y''(z' - z''') + y'''(z' - z'')$$

$$B = z'(x'' - x''') - z''(x' - x''') + z'''(x' - x'')$$

$$C = x'(y'' - y''') - x''(y' - y''') + x'''(y' - y'')$$

$$D = x'(y''z''' - y'''z'') - x''(y'z''' - y'''z') + x'''(y'z'' - y''z')$$

Ist T die Fläche des Dreyecks zwischen jenen drey Punkten und t, t', t'' die Projection dieser Fläche resp. in den Ebenen yz, xz, xy , so findet man

$$A = 2t, \quad B = 2t', \quad C = 2t'', \quad \text{oder}$$

$$t = \frac{AT}{\sqrt{M}}, \quad t' = \frac{BT}{\sqrt{M}}, \quad t'' = \frac{CT}{\sqrt{M}}, \quad \text{wo } M^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

$$\text{also auch } T^2 = t^2 + t'^2 + t''^2$$

Sind S, s, s', s'' ähnliche Dinge, so ist eben so

$$S^2 = s^2 + s'^2 + s''^2 \quad \text{und}$$

$$TS = ts + t' s' + t'' s'', \text{ also auch}$$

$$(T + S)^2 = (t + s)^2 + (t' + s')^2 + (t'' + s'')^2$$

welches sich leicht auf mehrere Dreyecke fortsetzen läßt.

$$\text{Endlich ist } \frac{D}{C} = \frac{T \cdot D}{3\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

der körperliche Inhalt der Pyramide, deren Basis das Dreyeck T , und deren Spitze der Anfangspunkt der Coordinaten ist.

§. 5.

Indem wir nun zu den Anwendungen des Vorhergehenden auf die oben betrachteten sphärischen Dreyecke an der Oberfläche des Himmels übergehen, wollen wir unter den mannigfaltigen Aufgaben, welche sich uns hier darbieten, nur diejenigen näher betrachten, die sich durch ihren Nutzen in der Anwendung auszeichnen.

Der Kürze wegen wollen wir zuvor einige allgemeine Bezeichnungen einführen, die wir durch das ganze Werk, wenn nicht das Gegentheil besonders angegeben wird, beybehalten werden. Es sey also

- α die Rectascension eines Gestirns,
- λ die Länge,
- δ die Declination,
- β die Breite,
- h die Höhe,
- ω das Azimut,
- s der Stundenwinkel.

Ferner sey $\pi \nu \xi$ nach der Ordnung die Position, Variation und Parallaxe, φ die Höhe des Pols des Aequators oder die Polhöhe (geographische Breite) des Beobachtungsortes, und e die Neigung der Ebene der Ecliptik gegen die des Aequators, oder die Schiefe der Ecliptik.

Die gewöhnlichsten Instrumente der Astronomen dienen dazu, die Höhe und das Azimut eines Gestirns zu messen. Wir wollen also zuerst voraussetzen, daß ω und h durch eine Beobachtung gegeben ist, und daß überdiß die Polhöhe φ bekannt sey; man suche den Stundenwinkel, die Declination und die Variation des Gestirns.

In dem Dreyecke NZS hat man mittels der Gaußschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin \frac{90 - \delta}{2} \sin \frac{s - \nu}{2} &= \sin \frac{\omega}{2} \sin \frac{\varphi - h}{2} \\ \sin \frac{90 - \delta}{2} \cos \frac{s - \nu}{2} &= \cos \frac{\omega}{2} \cos \frac{\varphi + h}{2} \end{aligned}$$

$$\cos \frac{90^\circ - \delta}{2} \sin \frac{s + \nu}{2} = \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\varphi - h}{2}$$

$$\cos \frac{90^\circ - \delta}{2} \cos \frac{s + \nu}{2} = \cos \frac{\omega}{2} \sin \frac{\varphi + h}{2}$$

Die beyden ersten geben durch Division die Tangente von $\frac{s - \nu}{2}$, die beyden andern aber die Tangente von $\frac{s + \nu}{2}$, also kennt man s sowohl, als ν , und dadurch erhält man aus den obigen Gleichungen zwey Bestimmungen für $\sin \frac{90^\circ - \delta}{2}$ sowohl, als auch für $\cos \frac{90^\circ - \delta}{2}$, die mit einander verglichen, zur Prüfung der Rechnung dienen können.

Will man die Gröſſe ν als entbehrlich übergehen, so hat man:

$$\cotg s = \frac{\operatorname{Tg} h \cos \varphi + \sin \varphi \cos \omega}{\sin \omega}$$

$$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos \omega,$$

$$\text{oder auch: } \cos \delta = - \frac{\cos h \cos \omega}{\sin s}$$

Um die vollständige Bestimmung der Lage des beobachteten Gestirns gegen den Aequator zu erhalten, muß man, nebst der gefundenen Declination δ , auch die Rectascension α haben. Es ist aber klar, daß die Rectascension aus ω und h , auch wenn die Polhöhe gegeben ist, sich nicht bestimmen lasse. Wäre aber z. B. noch die Rectascension t des Zeniths, d. h. der Stundenwinkel des Frühlingspunktes, zur Zeit der Beobachtung, gegeben, so hätte man $t = \text{ZNO} = \text{ZNS} + \text{SNO}$, oder $t = s + \alpha$, also die gesuchte Rectascension des Gestirns $\alpha = t - s$. Die Rectascension t des Zeniths aber ist bekannt, wenn der Stundenwinkel T der Sonne (oder die Beobachtungszeit) und überdies die Rectascension A der Sonne für dieselbe Zeit bekannt ist; es ist nämlich wieder $t = A + T$, und wenn man diesen Werth von t in der Gleichung $\alpha = t - s$ substituirt, so erhält man die gesuchte Rectascension des Gestirnes.

Andere ähnliche Probleme haben keine andere Schwierigkeit als die einfache Uebersetzung der allgemeinen Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie in unsere oben gewählten Zeichen; daher ich mich im folgenden nur auf jene beschränken werde, welche einen besonderen Nutzen für die Ausübung haben.

§. 6.

Es sey die Polhöhe, die Declination und der Stundenwinkel gegeben; man suche die Höhe des Gestirnes.

Es ist: $\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos s$,
welcher Ausdruck sich durch verschiedene Transformationen zur
Rechnung bequemer machen läßt.

Es ist angenehm und nützlich, die Allgemeinheit der analytischen Sprache näher zu betrachten, die oft viele Fragen durch eine einzige Gleichung beantwortet. Die gegenwärtige enthält z. B. alles, was man über die tägliche Bewegung der Gestirne sagen kann. Aus ihr folgt:

Zu gleichen Höhen gehören gleiche Stundenwinkel zu beyden Seiten des Meridians, wenn die Declination constant ist, und umgekehrt. Je näher der Stundenwinkel an Null ist, desto gröfser ist die Höhe; je näher der Stundenwinkel an 180° ist, desto kleiner ist die Höhe, wo nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche eine gröfsere Vertiefung unter dem Horizonte für eine kleinere Höhe angenommen wird. Für $s = 90^\circ = 270^\circ$ ist $\sin h = \sin \varphi \sin \delta$, und dann ist das Gestirn in dem sogenannten ersten Verticalkreise. Die gröfste Höhe, wenn die Declination constant ist, hat für $s = 0$ in der obern Culmination des Gestirns, d. h. in dem Durchgange desselben durch die südliche Hälfte des Meridians statt; die kleinste Höhe, die zu $s = 180^\circ$ gehört, hat in der untern Culmination statt.

Für diese untere Culmination ist $z = 180 - \delta - \varphi$, wo $z = 90 - h$ die Zenithdistanz ist. Für die obere Culmination aber ist $z = \varphi - \delta$, wo südliche Declinationen negativ sind. Ist die nördliche Declination gröfser als φ , so ist z negativ, oder der Stern geht in seiner obern Culmination auf der Nordseite des Zeniths durch den Meridian; ist $\delta = \varphi$, so culminirt er im Zenithe selbst; ist endlich δ kleiner als φ , so culminirt er auf der Südseite des Zeniths. Ist ferner die südliche Declination gröfser als $90 - \varphi$, so geht der Stern nie auf, und ist die nördliche Declination gröfser, als $90 - \varphi$, so geht der Stern nie unter u. s. f.

Ist $h = 0$, so ist der Stern im Horizont, er geht auf oder unter, und für diesen Augenblick hat man:

$$\cos s = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$$

und dieses s heifst der halbe Tagbogen des Sterns, oder die halbe Zeit, welche er über dem Horizonte zubringt. Wird die Zeit t' berechnet, welche der Stern braucht, um diesen halben Tagbogen zu durchlaufen, indem man schließt

$$360 : \frac{1}{2} \text{ Tagbogen} = \text{Umlaufszeit des Sterns} : t'$$

und wird diese Zeit t' von der Zeit t der Culmination des Sterns subtrahirt, oder dazu addirt, so hat man die Zeit seines Auf- und Unterganges. Südliche Declinationen werden als negativ betrachtet.

Um dies auf analytische Ausdrücke zurückzuführen, sey $\odot$

die Zeit zwischen zwey nächsten Culminationen des Gestirnes, so ist

$$t' = \frac{s \cdot \Theta}{360}$$

Die Zeit der Culmination des Gestirns zu finden, sey A und α die Rectascension der Sonne und des Gestirns für den Mittag des gegebenen Tages in Zeit ausgedrückt, und dA , $d\alpha$ die Veränderung dieser Rectascensionen zwischen zwey nächsten Culminationen, so ist, wie man leicht findet, die Zeit zwischen zwey nächsten Culminationen des Gestirns

$$\Theta = \frac{24^h \cdot 360^\circ}{24 + dA - d\alpha}$$

und die Zeit der Culmination des Gestirns

$$t = \frac{24 (\alpha - A)}{24 + dA - d\alpha}$$

Nimmt die Rectascension des Gestirns ab, oder ist sie constant, so ist $d\alpha$ im ersten Falle negativ, und im zweyten Null.

Da wir übrigens, wie wir später sehen werden, die Gestirne durch unsre Atmosphäre um a scheinbar erhöht, und durch unsern Standpunkt über dem Mittelpunkt der Erde unter dem wahren Horizont um b scheinbar erniedrigt sehen, so muß man, der größern Genauigkeit wegen, nicht $h = 0$, sondern $h = b - a$ nehmen. Die Gröfse a ist gleich $0^\circ 30' 45''$, und für alle Gestirne constant; die Gröfse b aber ist für die verschiedenen Gestirne verschieden, und allein für den Mond beträchtlich, wo sie nahe 1 Grad beträgt. Man nennt a die Refraction, und b die Höhenparallaxe des Horizonts. Ist endlich die Declination des Gestirns veränderlich, so sucht man zuerst seinen Auf- oder Untergang mit irgend einer dieser Zeit nahen Declination, z. B. für den Mittag des gegebenen Tages. Für diese genäherte Zeit des Aufganges kann man dann die entsprechende Declination finden, und mit dieser einen verbesserten Werth für die Zeit des Aufganges suchen, und dieses Verfahren so oft wiederholen, als es die beabsichtigte Genauigkeit der Rechnung, die bey Aufgaben dieser Art nicht groß zu seyn pflegt, erfordert.

Die Zeit der Culmination sowohl, als die des Auf- und Unterganges der Fixsterne findet man am bequemsten, wenn man dabey eine Uhr voraussetzt, die bey der Culmination des Frühlingspunktes Null, und zwischen zwey nächsten Culminationen dieses Punktes 24 Stunden gibt. Eine solche Uhr heißt Sternuhr, und die von ihr angegebene Zeit Sternzeit. Da die Sternzeit der Culmination eines jeden Sterns zugleich die Rectascension α dieses Sterns ist, so ist auch $\alpha + s$ die Sternzeit seines Auf- und Unterganges, wenn s wie zuvor den halben Tagbogen des Gestirns bezeichnet.

Ex. Sey die Rectascension eines Sternes $\alpha = 14^h 6' 32'' 5$,

die Declination $\delta = 20^\circ 13' 48'' 0$, und die Polhöhe $\varphi = 45^\circ 24' 3''$, so ist nach dem vorhergehenden der halbe Tagbogen $s = 111^\circ 56' 20'' = 7^h 27' 45'' 3$.

Also ist die Sternzeit seiner Culmination $\alpha = 14^h 6' 32'' 5$

Sternzeit des Aufgangs	6	38	47.2
Untergangs	21	34	17.7

und wie man aus diesen Sternzeiten unsere gewöhnliche Zeit, welche sich nach der Sonne richtet, ableitet wird im VI. Capitel gezeigt werden.

§. 7.

Es sey die Rectascension und Declination eines Gestirns gegeben, man suche dessen Länge und Breite, oder umgekehrt.

Es ist klar, daß man für jede dieser beyden Aufgaben die Schiefe der Ecliptik als bekannt voraussetzen muß.

Da diese Aufgaben sich auf das Dreyeck NLS beziehen, so muß man vor allen die allgemeine Bezeichnung der Winkel dieses Dreyeckes aufsuchen.

Wenn man durch den Punkt A eines sphärischen Dreyeckes ABC einen Bogen AO senkrecht auf die Seite AB dieses Dreyeckes zieht, und den Winkel OAC gleich n setzt, so ist offenbar der Winkel des Dreyeckes $A = 90 - n$, so lange n kleiner als 90° ist, oder so lange der Punkt C in dem ersten Quadranten von n liegt. Ist aber C in dem zweyten Quadranten von n , so ist $A = n - 90$, und denselben Ausdruck für A findet man, wenn C in dem dritten Quadranten von n liegt. Für den vierten endlich ist

$$A = 360 - n + 90$$

und der letzte Werth von A ist dem ersten gleich, weil beyde um 360° verschieden sind.

Um aber eine allgemeine Bezeichnung des Winkels A, die für alle Quadranten von n gilt, zu finden, muß man bemerken, daß es zwischen drey Punkten auf einer Kugelfläche immer zwey Dreyecke gibt, der anderen nicht zu erwähnen, für welche alle oben gegebenen analytischen Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie selbst in Beziehung auf ihre Zeichen ganz identisch sind; nämlich erstens das Dreyeck, welches man gewöhnlich zu betrachten pflegt, und zweytens jenes, dessen Fläche die Fläche des ersten zur ganzen Kugelfläche ergänzt. Ich will das letzte das Ergänzungsdreyeck nennen. Beyde Dreyecke haben offenbar dieselben Seiten, aber die Winkel des einen sind die Ergänzungen der Winkel des andern zu vier rechten Winkeln. Die gegebenen Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie sind aber durchaus dieselben, wenn man in ihnen die Seiten

$\alpha \beta \gamma$ ungeändert läßt, und für die Winkel A B C die Größen $360 - A$, $360 - B$, $360 - C$ setzt.

Bemerkt man ferner, daß die angezeigten vier Dreyecke für die vier Quadranten von n dadurch entstehen, daß sich die Linie CA um den festen Punkt A dreht, so ist klar, daß man, um den Winkel zu bestimmen, den CA während der Rotation mit BA bildet, immer dieselben Seiten der Linien CA, BA, mit einander vergleichen müsse. Daraus folgt, daß, wenn man auf der Seite von BA, wo AO liegt, die Seite von CA zur Bestimmung des Winkels CAB gewählt hat, welche gegen BA gekehrt ist, man auf der andern Seite von BA die von BA abgewendete Seite der Linie CA zur Bestimmung desselben Winkels wählen müsse, weil die jetzt abgewendete Seite von CA dieselbe mit der vorhin zugewendeten Seite ist. Wenn man aber bey einem Dreyecke die Winkel betrachtet, welche die von einander abgekehrten Seiten der Bogen bilden, so betrachtet man eigentlich nicht das gewöhnliche, sondern das Ergänzungsdreyeck.

Wenn man also allgemein bey einem Dreyecke, in welchem ein Bogen fest, und die beyden andern beweglich sind, auf der einen Seite des festen Bogens das gewöhnliche Dreyeck betrachtet, so muß man auf der andern Seite des festen Bogens das Ergänzungsdreyeck betrachten, um in der That immer dasselbe Dreyeck, wie es die Gleichförmigkeit des Verfahrens nothwendig erfordert, bezubehalten.

Nach diesen Bemerkungen sind daher die Winkel A im ersten und vierten Quadranten von n gleich $(90 - n)$, und im zweyten und dritten Quadranten von n gleich $360 - (n - 90) = 360 + (90 - n) = 90 - n$, oder mit andern Worten, $(90 - n)$ ist die allgemeine Bezeichnung des Winkels A für alle Quadranten von n .

Die Mechanik der Analyse, die in ihrem Verfahren eben so einfach, als in ihren Resultaten reichhaltig an mannigfaltigen, im Anfange der Untersuchung oft nicht geahnter, oder doch nicht mit Vorsatz hineingelegter Verbindungen ist, hat auch hier auf diese nothwendige Gleichförmigkeit des Verfahrens in der Messung des Winkels, gleichsam ohne unserm Dazuthun, Rücksicht genommen, und wir werden in unsern folgenden Untersuchungen noch oft Gelegenheit haben, diese vortreffliche Eigenschaft der analytischen Sprache zu beobachten.

I. Dieß vorausgesetzt, sieht man leicht, daß die allgemeine Bezeichnung des Dreyeckes NLS folgende ist:

$$LN = e \text{ die Schiefe der Ecliptik.}$$

$$NS = 90 - \delta$$

$$LS = 90 - \beta \text{ und}$$

$$LNS = 90 + \alpha$$

$$NLS = 90 - \lambda$$

$$NSL = \pi$$

Ist also α δ und e bekannt, so hat man

$$\text{Tg } \lambda = \frac{\sin \alpha \cos e + \text{Tg } \delta \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin \beta = \sin \delta \cos e - \sin \alpha \cos \delta \sin e \text{ und}$$

$$\text{Tg } \beta = (\text{Tg } \delta \cos e - \sin \alpha \sin e) \frac{\cos \lambda}{\cos \alpha}$$

Ist aber λ β und e bekannt, so ist

$$\text{Tg } \alpha = \frac{\sin \lambda \cos e - \text{Tg } \beta \sin e}{\cos \lambda}$$

$$\sin \delta = \sin \lambda \cos \beta \sin e + \sin \beta \cos e \text{ und}$$

$$\text{Tg } \delta = (\sin \lambda \sin e + \text{Tg } \beta \cos e) \frac{\cos \alpha}{\cos \lambda}$$

Die Zweydeutigkeit in der Bestimmung des Winkels aus seiner Tangente wird dadurch entfernt, daß $\cos \alpha$ und $\cos \lambda$ immer dasselbe Zeichen haben muß. Auch hat man dafür die Prüfungsgleichung

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda \cos \beta.$$

II. Den vorhergehenden Ausdrücken kann man zur Rechnung eine bequemere Form geben. Ist nämlich

$$\text{Tg } m = \text{Cotg } \delta \sin \alpha, \text{ so hat man}$$

$$\text{Tg } \lambda = \frac{\text{Tg } \alpha}{\sin m} \sin (m + e)$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \delta}{\cos m} \cos (m + e)$$

und ist $\text{Tg } n = \sin \lambda \text{ Cotg } \beta$, so hat man

$$\text{Tg } \alpha = \frac{\text{Tg } \lambda}{\sin n} \sin (n - e)$$

$$\sin \delta = \frac{\sin \beta}{\cos n} \cos (n - e)$$

Endlich ist noch für die Bestimmung des Positionswinkels π ,

$$\sin \pi = \frac{\cos \alpha \sin e}{\cos \beta} = \frac{\cos \lambda \sin e}{\cos \delta}$$

oder

$$\text{Cotg } \pi = \frac{\text{Cotg } e \cos \delta + \sin \delta \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\text{Cotg } e \cos \beta - \sin \beta \sin \lambda}{\cos \lambda}$$

Andere nicht minder bequeme Ausdrücke findet man, wenn man die oben gegebenen Gaußschen Gleichungen auf das Dreyeck LNS anwendet.

Ist nämlich der Kürze wegen $90 - \pi = p$, $45 - \frac{1}{2} \delta = d$,
 $45 + \frac{1}{2} \lambda = l$, so ist

$$\sin d \sin \frac{p + \alpha}{2} = \sin l \sin (45 - \frac{1}{2} (e + \beta))$$

$$\sin d \cos \frac{p + \alpha}{2} = \cos l \cos (45 - \frac{1}{2} (e - \beta))$$

$$\cos d \sin \frac{p - \alpha}{2} = \cos l \sin (45 - \frac{1}{2} (e - \beta))$$

$$\cos d \cos \frac{p - \alpha}{2} = \sin l \cos (45 - \frac{1}{2} (e + \beta))$$

wodurch man δ α und π aus λ β und e findet, und ähnliche Ausdrücke wird man auch für die entgegengesetzte Aufgabe entwickeln, in welcher λ β π aus α δ e bestimmt werden. Um diese Ausdrücke zu erhalten, braucht man bloß in den vorhergehenden β in δ und λ in $-\alpha$ zu verwandeln.

III. Eine andere merkwürdige Auflösung dieser doppelten Aufgabe gründet sich bloß auf ebene Trigonometrie. Es seyen x y z die drey rechtwinklichten Coordinaten, welche die Lage des Gestirns gegen den Mittelpunkt der Erde bestimmen. Die Axe der x liege in der Linie der Nachtgleichen, und die Ebene der x y sey die des Aequators. Bestimmt man dieselbe Lage noch durch drey andere senkrechte Coordinaten x' y' z' , von denen x' wieder in der Linie der Nachtgleichen, und die Ebene x' y' in der Ecliptik liegen, so hat man, wenn r die Entfernung des Gestirns vom Mittelpunkt der Erde bezeichnet:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \delta \cos \alpha & \text{und} & & x' &= r \cos \beta \cos \lambda \\ y &= r \cos \delta \sin \alpha & & & y' &= r \cos \beta \sin \lambda \\ z &= r \sin \delta & & & z' &= r \sin \beta \end{aligned}$$

Es sey nun R die Entfernung eines Gestirns von dem Punkte, wo die Ordinate y oder y' die Axe der x schneidet, und $90 - n$ der Winkel der R mit y' , also n der Winkel der R mit z' , so hat man

$$\left. \begin{aligned} y &= R \sin (n - e) & \text{und} & & y' &= R \sin n \\ z &= R \cos (n - e) & & & z' &= R \cos n \end{aligned} \right\} \text{I.}$$

Ist eben so $(90 - m)$ der Winkel der R mit y , also m der Winkel der R mit z , so ist

$$\left. \begin{aligned} y' &= R \sin (m + e) & \text{und} & & y &= R \sin m \\ z' &= R \cos (m + e) & & & z &= R \cos m \end{aligned} \right\} \text{II.}$$

Löst man die zwey ersten der Gleichungen I. und II. auf, und substituirt für $R \sin n$, $R \sin m$... ihre Werthe aus den zwey letzten dieser Gleichungen, so hat man aus I.

$$\left. \begin{aligned} y &= y' \cos e - z' \sin e \\ z &= y' \sin e + z' \cos e \end{aligned} \right\} \text{I'}$$

ad aus II.

$$\begin{aligned} y' &= z \sin e + y \cos e \\ z' &= z \cos e - y \sin e \end{aligned} \quad \text{II'}$$

Substituirt man in den letzten vier Gleichungen die vorhergehenden Werthe der Coordinaten, so findet man, wenn man ihnen die Gleichung $x = x'$ hinzusetzt, aus I'

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda \cos \beta$$

$$\sin \alpha \cos \delta = \sin \lambda \cos \beta \cos e - \sin \beta \sin e$$

$$\sin \delta = \sin \lambda \cos \beta \sin e + \sin \beta \cos e$$

und aus II'

$$\cos \lambda \cos \beta = \cos \alpha \cos \delta$$

$$\sin \lambda \cos \beta = \sin \alpha \cos \delta \cos e + \sin \delta \sin e$$

$$\sin \beta = -\sin \alpha \cos \delta \sin e + \sin \delta \cos e$$

welche Gleichungen mit der oben I auf andern Wegen gefundenen identisch sind.

Zieht man es aber vor, in der ersten der Gleichungen I. und II. die Werthe von R aus der zweyten dieser Gleichungen zu substituiren, so erhält man aus I.

$$x = x'$$

$$y = \frac{y'}{\sin n} \sin (n - e)$$

$$z = \frac{z'}{\cos n} \cos (n - e)$$

oder wenn man die Werthe der Coordinaten wieder einführt,

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda \cos \beta$$

$$\sin \alpha \cos \delta = \sin \lambda \cos \beta \frac{\sin (n - e)}{\sin n}, \text{ oder } \operatorname{Tg} \alpha = \operatorname{Tg} \lambda \frac{\sin (n - e)}{\sin n}$$

$$\sin \delta = \sin \beta \frac{\cos (n - e)}{\cos n}$$

und eben so erhält man aus II.

$$\operatorname{Tg} \lambda = \frac{\operatorname{Tg} \alpha}{\sin m} \sin (m + e)$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \delta}{\cos m} \cos (m + e)$$

und dieselben Gleichungen haben wir ebenfalls in II. gefunden.

$$\text{Ex. I. Sey } \alpha = 355^\circ 43' 45'' 30$$

$$\delta = -8^\circ 47' 25'' 0$$

$$e = 23^\circ 27' 59'' 26$$

so findet man

$$\lambda = 352^\circ 34' 44'' 55$$

$$b = -6^\circ 21' 56'' 28$$

$$\pi = 23 \quad 23 \quad 4. \quad 67$$

Ex. II. Sey $\lambda = 129^\circ 38' 50''.9$
 $\beta = -14^\circ 58' 16''.6$
 $e = 23^\circ 27' 42''.6$

so findet man

$\alpha = 128^\circ 7' 57''.9$
 $\delta = +3^\circ 23' 33''.3$
 $\pi = -14^\circ 44' 34''.6$

IV. Differentiirt man die gegebenen Gleichungen in Beziehung auf $\alpha, \delta, \lambda, \beta$ und e , so findet man nach einigen einfachen Reductionen

$$d\beta = d\delta \cos \pi - d\alpha \sin \pi \cos \delta - de \sin \lambda$$

$$d\lambda \cos \beta = d\delta \sin \pi + d\alpha \cos \pi \cos \delta + de \sin \beta \cos \lambda$$

und dann durch Reversion

$$d\delta = d\lambda \sin \pi \cos \beta + d\beta \cos \pi + de \sin \alpha$$

$$d\alpha \cos \delta = d\lambda \cos \pi \cos \beta - d\beta \sin \pi - de \sin \delta \cos \alpha$$

durch welche Ausdrücke man die Fehler der Länge und Breite aus den gegebenen Fehlern der Rectascension und Declination, oder umgekehrt finden kann.

V. Für ein Gestirn in der Ebene der Ecliptik, z. B. für die Sonne, ist $\beta = 0$, also werden für sie die vorhergehenden Ausdrücke einfacher. Die vorzüglichsten derselben sind:

Aus e und λ

$$\text{Tg } \alpha = \cos e \text{ Tg } \lambda$$

$$\sin \delta = \sin e \sin \lambda$$

$$\text{Tg } \pi = \text{Tg } e \cos \lambda$$

Aus e und α

$$\text{Tg } \lambda = \frac{\text{Tg } \alpha}{\cos e}$$

$$\text{Tg } \delta = \text{Tg } e \sin \alpha$$

$$\sin \pi = \sin e \cos \alpha$$

Aus e und δ

$$\sin \lambda = \frac{\sin \delta}{\sin e}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{Tg } \delta}{\text{Tg } e}$$

$$\cos \pi = \frac{\cos e}{\cos \delta}$$

Aus α und δ

$$\operatorname{Tg} e = \frac{\operatorname{Tg} \delta}{\sin \alpha}$$

$$\cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta$$

$$\operatorname{Tg} \pi = \frac{\sin \delta}{\operatorname{Tg} \alpha}$$

VI. Endlich lassen sich auch auf diese Ausdrücke die oben gegebenen Entwicklungen in Reihen anwenden. Ist z. B. die Rectascension und Declination gegeben, und setzt man

$$m = \operatorname{Tg} \frac{e}{2} \operatorname{Cotg} \frac{90^\circ - \delta}{2} \text{ und } n = \operatorname{Tg} \frac{1}{2} e \operatorname{Cotg} \frac{90^\circ + \delta}{2}$$

so findet man

$$\frac{\lambda + \pi}{2} = \frac{\alpha}{2} + m \cos \alpha - \frac{m^2}{2} \sin 2\alpha - \frac{m^3}{3} \cos 3\alpha + \frac{m^4}{4} \sin 4\alpha +$$

$$\frac{\lambda - \pi}{2} = \frac{\alpha}{2} - n \cos \alpha - \frac{n^2}{2} \sin 2\alpha + \frac{n^3}{3} \cos 3\alpha + \frac{n^4}{4} \sin 4\alpha -$$

und überdies

$$\log \sin \frac{90^\circ - \beta}{2} = \log \left(\sin \frac{90^\circ - \delta}{2} \cos \frac{e}{2} \right) + m \sin \alpha + \frac{m^2}{2} \cos 2\alpha - \frac{m^3}{3} \sin 3\alpha -$$

$$\log \cos \frac{90^\circ - \beta}{2} = \log \left(\cos \frac{90^\circ - \delta}{2} \cos \frac{e}{2} \right) - n \sin \alpha + \frac{n^2}{2} \cos 2\alpha + \frac{n^3}{3} \sin 3\alpha -$$

und so weiter mit den übrigen, deren Entwicklung keine Schwierigkeit haben kann. Eben so wird man in dem Dreyecke ZNL die Länge λ' und Breite β' des Zeniths finden, wenn dessen Rectascension $= (\alpha + s)$ und Declination $= \varphi$ nebst der Schiefe der Ecliptik e bekannt ist. Es ist nämlich auch hier

$$\sin \beta' = \cos e \sin \varphi - \sin e \cos \varphi \sin (\alpha + s)$$

$$\operatorname{Tg} \lambda' = \frac{\sin e \operatorname{Tg} \varphi + \cos e \sin (\alpha + s)}{(\cos \alpha + s)} \text{ oder}$$

$$\cos \lambda' = \frac{\cos \varphi \cos (\alpha + s)}{\cos \beta'}$$

Andere Probleme, die sich hier darbieten, werden wir später aufzulösen suchen, wenn wir erst in den folgenden Kapiteln die zu ihrer vollständigen Auflösung nöthigen Vorkenntnisse erworben haben. Das gegenwärtige soll ein allgemeines Beyspiel zur Uebung für alle vorhergehenden Ausdrücke beschließen.

Es sey $\alpha = 200^\circ 0' 0''$

$\delta = -10^\circ$ südlich

$s = 30^\circ$, $\varphi = 50^\circ$, $e = 23^\circ 28' 0'' 0$

so ist

$\lambda = 202^\circ 13' 27'' 8$

$\beta = -1 26 29. 7$

$h = 24 31 52. 8$

$\omega = 32 46 10. 3$

$\pi = 21 58 55. 9$

$\nu = 20 41 17. 7$

$\zeta = 1 17 38. 2$

$\lambda' = 199 32 19. 1$ Länge des Zeniths.

$\beta' = 63 59 48. 3$ Breite des Zeniths.