
NOTES

SUR LES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

NOTE I.

Sur quelques noms et définitions.

ON a introduit dans cet ouvrage quelques expressions et définitions nouvelles qui tendent à donner au langage géométrique plus d'exactitude et de précision. Nous allons rendre compte de ces changements, et en proposer quelques autres qui pourraient remplir plus complètement les mêmes vues.

Dans la définition ordinaire du *parallélogramme rectangle* et du *quarré*, on dit que les angles de ces figures sont droits; il serait plus exact de dire que leurs angles sont égaux. Car, supposer que les quatre angles d'un quadrilatère peuvent être droits, et même que les angles droits sont égaux entre eux, c'est supposer des propositions qui ont besoin d'être démontrées. On éviterait cet inconvénient et plusieurs autres du même genre, si, au lieu de placer les définitions, suivant l'usage, à la tête d'un livre, on les distribuait dans le courant du livre, chacune à la place où ce qu'elle suppose est déjà démontré.

Le mot *inclinaison* doit être entendu dans le même sens que celui d'angle; l'un et l'autre indiquent la manière d'être de deux lignes ou de deux plans qui se rencontrent, ou qui, prolongés, se rencontreraient. L'inclinaison de deux lignes est nulle lorsque l'angle est nul, c'est-à-dire lorsque les lignes sont parallèles ou coïncidentes. L'inclinaison est la plus grande lorsque l'angle est le plus grand, ou lorsque les deux lignes font entre elles un angle très-obtus. La qualité de *pencher* est prise dans un sens différent; une ligne *penche* d'autant plus sur une autre qu'elle s'écarte plus de la perpendiculaire à celle-ci.

Douz, éd.

Euclide et d'autres auteurs appellent assez souvent *triangles égaux* des triangles qui ne sont égaux qu'en surface, et *solides égaux* des solides qui ne sont égaux qu'en solidité. Il nous a paru plus convenable d'appeler ces triangles ou ces solides *triangles* ou *solides équivalents*, et de réserver la dénomination de *triangles égaux*, *solides égaux*, à ceux qui peuvent coïncider par la superposition.

Il est de plus nécessaire de distinguer dans les solides et les surfaces courbes deux sortes d'égalité qui sont différentes. En effet, deux solides, deux angles solides, deux triangles ou polygones sphériques, peuvent être égaux dans toutes leurs parties constituantes, sans néanmoins coïncider par la superposition. Il ne paraît pas que cette observation ait été faite dans les livres d'éléments; et cependant, faute d'y avoir égard, certaines démonstrations fondées sur la coïncidence des figures ne sont pas exactes. Telles sont les démonstrations par lesquelles plusieurs auteurs prétendent prouver l'égalité des triangles sphériques dans les mêmes cas et de la même manière que celle des triangles rectilignes: on en voit sur-tout un exemple frappant, lorsque Robert Simson (1), attaquant la démonstration de la prop. xxviii, liv. xi, d'Euclide, tombe lui-même dans l'inconvénient de fonder sa démonstration sur une coïncidence qui n'existe pas. Nous avons donc cru devoir donner un nom particulier à cette égalité qui n'entraîne pas la coïncidence; nous l'avons appelée *égalité par symétrie*; et les figures qui sont dans ce cas, nous les appelons figures *symétriques*.

Ainsi les dénominations de figures *égales*, figures *symétriques*, figures *équivalentes*, se rapportent à des choses différentes, et ne doivent pas être confondues en une seule dénomination.

Dans les propositions qui concernent les polygones, les angles solides et les polyèdres, nous avons exclu formellement ceux qui auraient des angles rentrants. Car, outre qu'il convient de se borner dans les éléments aux figures les

(1) Voyez l'ouvrage de cet auteur, intitulé: *Euclidis Elementorum libri sex, etc. Glasgux, 1756.*

plus simples, si cette exclusion n'avait pas lieu, certaines propositions ou ne seraient pas vraies, ou auraient besoin de modification. Nous nous sommes donc réduits à la considération des lignes et des surfaces que nous appelons *convexes*, et qui sont telles qu'une ligne droite ne peut les couper en plus de deux points.

Nous avons employé assez fréquemment l'expression *produit de deux ou d'un plus grand nombre de lignes*; par où nous entendons le produit des nombres qui représentent ces lignes, en les évaluant d'après une unité linéaire prise à volonté. Le sens de ce mot étant ainsi fixé, il n'y a aucune difficulté à en faire usage. On entendrait de même ce que signifie le produit d'une surface par une ligne, d'une surface par un solide, etc.: il suffit d'avoir établi une fois pour toutes que ces produits sont ou doivent être considérés comme des produits de nombres, chacun de l'espece qui lui convient. Ainsi le produit d'une surface par un solide n'est autre chose que le produit d'un nombre d'unités superficielles par un nombre d'unités solides.

Souvent, dans le discours, on se sert du mot *angle* pour désigner le point situé à son sommet: cette expression est vicieuse. Il serait plus clair et plus exact de désigner par un nom particulier, tel que celui de *sommets*, les points situés aux sommets des angles d'un polygone et d'un polyèdre. C'est ainsi qu'on doit entendre la dénomination de *sommets d'un polygone* et d'un *polyèdre* dont nous avons fait usage.

Nous avons suivi la définition ordinaire des *figures rectilignes semblables*; mais nous observerons qu'elle contient trois conditions superflues. Car, pour construire un polygone dont le nombre des côtés est n , il faut d'abord connaître un côté, et ensuite avoir la position des sommets des angles situés hors de ce côté. Or, le nombre de ces angles est $n-2$, et la position de chaque sommet exige deux données; d'où il suit que le nombre total des données nécessaires pour construire un polygone de n côtés est $1+2n-4$, ou $2n-3$. Mais dans le polygone semblable il y a un côté à volonté; ainsi le nombre de conditions pour qu'un polygone soit semblable à un polygone donné, est $2n-4$. Or la définition ordinaire exige, 1^o que les angles soient égaux

chacun à chacun, ce qui fait n conditions; 2° que les côtés homologues soient proportionnels, ce qui fait $n-1$ conditions. Il y a donc en tout $2n-1$ conditions, ce qui fait trois de trop. Pour obvier à cet inconvénient, on pourrait décomposer la définition en deux autres, de cette manière :

1° Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.

2° Deux polygones sont semblables lorsqu'on peut former dans l'un et dans l'autre un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés.

Mais, pour que cette dernière définition ne contienne pas elle-même de conditions superflues, il faut que le nombre des triangles soit égal au nombre des côtés du polygone moins deux; ce qui peut avoir lieu de deux manières. On peut mener de deux angles homologues des diagonales aux angles opposés, alors tous les triangles formés dans chaque polygone auront un sommet commun, et leur somme sera égale au polygone; ou bien, on peut supposer que tous les triangles formés dans un polygone, ont pour base commune un côté du polygone, et pour sommets ceux des différents angles opposés à cette base. Dans l'un ou l'autre cas le nombre des triangles formés de part et d'autre étant $n-2$, les conditions de leur similitude seront au nombre de $2n-4$; et la définition ne contiendra rien de superflu. Cette nouvelle définition étant posée, l'ancienne deviendra un théorème qu'on pourra démontrer immédiatement.

Si la définition des figures rectilignes semblables est imparfaite dans les livres d'éléments, celle des *solides polyèdres semblables* l'est encore bien davantage. Dans Euclide, cette définition dépend d'un théorème non démontré; dans d'autres auteurs elle a l'inconvénient d'être fort redondante. Nous avons donc rejeté ces définitions des solides semblables, et nous leur en avons substitué une fondée sur les principes que nous venons d'exposer. Mais, comme il y a beaucoup d'autres observations à faire à ce sujet, nous y reviendrons dans une note particulière.

La définition de la *perpendiculaire à un plan* peut être regardée comme un théorème; celle de l'*inclinaison de deux plans* a besoin aussi d'être justifiée par un raisonnement;

plusieurs autres sont dans le même cas. C'est pourquoi, en conservant ces définitions suivant l'ancien usage, nous avons eu soin de renvoyer aux propositions où elles sont démontrées; quelquefois nous nous sommes contentés d'y ajouter un éclaircissement succinct.

L'*angle* formé par la rencontre de deux plans, et l'*angle solide* formé par la rencontre de plusieurs plans en un même point, sont des grandeurs, chacune de son espèce, auxquelles il serait peut-être bon de donner des noms particuliers. Sans cela il est difficile d'éviter l'obscurité et les circonlocutions lorsqu'on parle de l'arrangement des plans qui composent la surface d'un polyèdre. Et comme la théorie de ces solides a été peu cultivée jusqu'à présent, il y a moins d'inconvénient à y introduire des expressions nouvelles, si elles sont réclamées par la nature des choses.

Je proposerais d'appeler *coin* l'angle formé par deux plans; l'*arête* ou *faîte* du coin serait l'intersection commune des deux plans. Le coin se désignerait par quatre lettres dont les deux moyennes répondraient à l'arête. Alors un *coin droit* serait l'angle formé par deux plans perpendiculaires entre eux. Quatre coins droits rempliraient tout l'espace angulaire solide autour d'une ligne donnée. Cette nouvelle dénomination n'empêcherait pas que le coin n'eût toujours pour mesure l'angle formé par les deux perpendiculaires menées dans chacun des plans à un même point de l'arête ou intersection commune.

NOTE II.

Sur la démonstration de la proposition XIX, liv. I, et de quelques autres propositions fondamentales de la géométrie.

La démonstration que nous donnons dans le texte de la proposition XIX, est peut-être la plus simple et la plus directe qu'on puisse trouver dans le genre purement élémentaire; nous espérons qu'elle sera accueillie par les amateurs de l'exactitude géométrique et qu'elle fera enfin dis-

paraître des élémens l'imperfection à laquelle la théorie des parallèles a été sujette jusqu'à présent.

Nous saisisons cette occasion de faire quelques nouvelles remarques sur la démonstration que nous avons donnée de la même proposition, dans la 3^{ème} édition de cet ouvrage, publiée en 1800, et dans les éditions suivantes jusqu'à la 8^{ème} inclusivement; il est nécessaire pour cela de rappeler en peu de mots le principe sur lequel cette démonstration était fondée.

Nous avons prouvé d'abord d'une manière rigoureuse que la somme des angles d'un triangle ne peut être plus grande que deux angles droits, proposition qui sépare tout d'un coup par une différence essentielle, les triangles rectilignes des triangles sphériques. Cette première partie étant établie il restait à prouver que la somme des angles ne peut être plus petite que deux angles droits; or comme l'excès des trois angles sur deux angles droits, qui a lieu dans les triangles sphériques, est proportionnel à l'aire du triangle; de même le *déficit*, s'il y en avait un dans les triangles rectilignes, serait proportionnel à l'aire du triangle. Dès-lors il est aisé de voir que si on réussit à construire, d'après un triangle donné, un autre triangle dans lequel le triangle donné soit contenu au moins m fois, le *déficit* de ce nouveau triangle égalera au moins m fois le *déficit* du triangle donné, de sorte que la somme des angles du grand triangle diminuera progressivement à mesure que m augmente, jusqu'à devenir nulle ou négative. Résultat absurde et qui prouve que la somme des angles d'un triangle ne peut-être moindre que deux angles droits.

Prenant pour guide ce principe de démonstration qui est infaillible, nous avons fait voir que toute la difficulté se réduisait à construire un triangle qui contînt au moins deux fois le triangle donné; mais la solution que nous avons donnée de ce problème, en apparence très simple, suppose que par un point donné dans un angle moindre que deux tiers d'angle droit, on peut toujours faire passer une ligne droite qui rencontre à-la-fois les deux côtés de l'angle.

Nous avons ainsi beaucoup approché de notre but, mais nous ne l'avons pas atteint entièrement, puisque notre démonstration dépendait d'un *postulatum* qui à toute force

pouvait être nié. (1) C'est cette considération qui nous a fait revenir dans la 9^{ème} édition, à la simple marche d'Euclide, en renvoyant aux notes pour la démonstration rigoureuse.

En examinant les choses avec plus d'attention nous sommes resté convaincu que pour démontrer complètement notre *postulatum* il fallait déduire de la définition de la ligne droite une propriété caractéristique de cette ligne qui exclût toute ressemblance avec la forme d'une hyperbole comprise entre ses deux asymptotes. Voici quel est à cet égard le résultat de nos recherches.

Soit BAC un angle donné, et M un point donné au dedans de cet angle; divisez l'angle BAC en deux également par la droite AD et du point M menez MP perpendiculaire sur AD: je dis que la droite MP prolongée dans un sens et dans l'autre, rencontrera nécessairement les deux côtés de l'angle BAC. fig. 274.

Car si elle rencontre un des côtés de cet angle, elle rencontrera l'autre, tout étant égal des deux côtés à partir du point P; si elle ne rencontrait pas un côté, elle ne rencontrerait pas l'autre par la même raison; ainsi, dans ce dernier cas elle devrait être renfermée tout entière dans l'espace compris entre les côtés de l'angle BAC; or, il répugne à la nature de la ligne droite qu'une telle ligne, indéfiniment prolongée, puisse être renfermée dans un angle.

En effet, toute ligne droite AB tracée sur un plan, et indéfiniment prolongée dans les deux sens, divise ce plan en deux parties qui étant superposées coïncident dans toute leur étendue et sont parfaitement égales. La partie AMB du plan total, située d'un côté de AB, est égale en tout à la partie AM'B située de l'autre côté; car si l'on prend un point fig. 275.

(1) On voit dans un article du *Philosophical magazine* de mars 1822, qu'un savant géomètre a essayé de perfectionner cette démonstration et de la rendre indépendante de tout *postulatum*; mais la construction employée pour démontrer la seconde partie consiste à mener d'un point donné différentes droites à tous les sommets d'une ligne qu'on doit considérer comme polygonale, pour raisonner dans l'hypothèse de celui qui nie la proposition: or la convexité de cette ligne, si elle avait lieu, ne permettrait pas de continuer indéfiniment la construction de l'auteur, comme il le faudrait pour l'exactitude de sa démonstration.

fixe C sur la droite AB, tout autre point M de la partie AMB sera déterminé par la distance CM et l'angle ACM; prenant donc de l'autre côté un angle $ACM' = ACM$, et une distance $CM' = CM$, il est évident que les points M et M' auront la même situation dans les deux parties du plan, et que ces deux parties étant superposées, les points M et M' se confondront en un seul.

Supposons maintenant, s'il est possible, qu'une ligne droite indéfinie XY soit renfermée tout entière dans un espace angulaire quelconque, par exemple, dans l'angle BCM, elle ne pourra que diviser en deux parties égales ou inégales la partie du plan comprise dans l'angle BCM; cette partie a sa correspondante BCM' située de l'autre côté de BC; mais comme outre ces deux parties égales du plan, il y en a deux autres renfermées dans les angles égaux ACM, ACM', on voit que l'espace angulaire BCM n'est pas la moitié de tout le plan; donc la ligne droite XY qu'on suppose partager en deux portions l'espace BCM, ne pourra partager qu'en deux parties inégales la totalité du plan, ce qui est contraire à la nature de la ligne droite.

Par ce principe très simple, non seulement le *postulatum* qui empêchait notre démonstration d'être rigoureuse, se trouve démontré, mais on peut aussi démontrer immédiatement le *postulatum* d'Euclide. Ce *postulatum* se réduit aisément, comme on sait, au cas où l'une des droites AC étant perpendiculaire à AB, l'autre droite BD fait avec AB un angle ABD moindre qu'un droit. Il s'agit donc de prouver que dans ce cas BD prolongée doit rencontrer AC.

fig. 276.

En effet, cela n'était pas, en prolongeant AC vers C' et faisant l'angle $ABD' = ABD$, la droite CC' serait comprise tout entière dans l'angle DBD' moindre que deux droits, ce qui est impossible.

Nous laissons aux géomètres à décider si cette démonstration ne mériterait pas d'être admise dans les élémens, de préférence à toute autre, pour rétablir la marche d'Euclide devenue entièrement rigoureuse par la suppression de son *postulatum*.

Nous nous proposons maintenant de faire voir qu'on peut employer l'analyse avec beaucoup d'avantage, pour

démontrer rigoureusement la proposition XIX et les autres propositions fondamentales de la géométrie. C'est ce que nous allons développer avec tout le détail nécessaire, en commençant par le théorème sur la somme des trois angles du triangle.

On démontre immédiatement par la superposition, et sans aucune proposition préliminaire que *deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun*. Appelons p le côté dont il s'agit, A et B les deux angles adjacents, C le troisième angle. Il faut donc que l'angle C soit entièrement déterminé, lorsqu'on connaît les angles A et B , avec le côté p ; car, si plusieurs angles C pouvaient correspondre aux trois données A, B, p , il y aurait autant de triangles différents qui auraient un côté égal adjacent à deux angles égaux, ce qui est impossible: donc l'angle C doit être une fonction déterminée des trois quantités A, B, p ; ce que j'exprime ainsi, $C = \varphi : (A, B, p)$.

Soit l'angle droit égal à l'unité, alors les angles A, B, C , seront des nombres compris entre 0 et 2; et puisque $C = \varphi : (A, B, p)$, je dis que la ligne p ne doit point entrer dans la fonction φ . En effet, on a vu que C doit être entièrement déterminé par les seules données A, B, p , sans autre angle ni ligne quelconque, mais la ligne p est hétérogène avec les nombres A, B, C ; et si on avait une équation quelconque entre A, B, C, p , on en pourrait tirer la valeur de p en A, B, C ; d'où il résulterait que p est égal à un nombre, ce qui est absurde: donc p ne peut entrer dans la fonction φ , et on a simplement $C = \varphi : (A, B) \dots (1)$

(1) On a objecté contre cette démonstration que, si elle était appliquée, mot pour mot, aux triangles sphériques, il en résulterait que deux angles connus suffissent pour déterminer le troisième, ce qui n'a pas lieu dans ces sortes de triangles. La réponse est que, dans les triangles sphériques, il y a un élément de plus que dans les triangles plans, et cet élément est le rayon de la sphère dont on ne doit pas faire abstraction. Soit donc r le rayon, alors au lieu d'avoir $C = \varphi (A, B, p)$, on aura $C = \varphi (A, B, p, r)$, ou seulement $C = \varphi \left(A, B, \frac{p}{r} \right)$, en vertu de la loi des homogènes.

Cette formule prouve déjà que, si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième doit être égal au troisième; et, cela posé, il est facile de parvenir au théorème que nous avons en vue.

fig. 109. Soit d'abord ABC un triangle rectangle en A; du point A abaissez AD perpendiculaire sur l'hypoténuse. Les angles B et D du triangle ABD sont égaux aux angles B et A du triangle BAC; donc, suivant ce qu'on vient de démontrer, le troisième BAD est égal au troisième C. Par la même raison l'angle $DAC = B$, donc $BAD + DAC$, ou $BAC = B + C$: or l'angle BAC est droit; donc *les deux angles aigus d'un triangle rectangle, pris ensemble, valent un angle droit.*

fig. 112. Soit ensuite BAC un triangle quelconque et BC un côté qui ne soit pas moindre que chacun des deux autres: si de l'angle opposé A on abaisse la perpendiculaire AD sur BC, cette perpendiculaire tombera au-dedans du triangle ABC, et le partagera en deux triangles rectangles BAD, DAC: or, dans le triangle rectangle BAD, les deux angles BAD, ABD, valent ensemble un angle droit; dans le triangle rectangle DAC, les deux angles DAC, ACD, valent aussi un angle droit. Donc les quatre réunis, ou seulement les trois BAC, ABC, ACB, valent ensemble deux angles droits; donc *dans tout triangle la somme des trois angles est égale à deux angles droits.*

On voit par-là que ce théorème, considéré *a priori*, ne dépend point d'un enchaînement de propositions, et qu'il se déduit immédiatement du principe de l'homogénéité; principe qui doit avoir lieu dans toute relation entre des quantités quelconques. Mais poursuivons, et faisons voir qu'on peut tirer de la même source les autres théorèmes fondamentaux de la géométrie.

Conservons les mêmes dénominations que ci-dessus, et appelons de plus m le côté opposé à l'angle A, et n le côté

Or, puisque le rapport $\frac{p}{r}$ est un nombre, ainsi que A, B, C, rien n'empêche que $\frac{p}{r}$ ne se trouve dans la fonction φ , et alors on n'en peut plus conclure $C = \varphi(A, B)$

opposé à l'angle B. La quantité m doit être entièrement déterminée par les seules quantités A, B, p ; donc m est une fonction de A, B, p , et $\frac{m}{p}$ en est une aussi, de sorte qu'on peut faire $\frac{m}{p} = \psi : (A, B, p)$. Mais $\frac{m}{p}$ est un nombre, ainsi que A et B ; donc la fonction ψ ne doit point contenir la ligne p , et on a simplement $\frac{m}{p} = \psi : (A, B)$, ou $m = p \psi : (A, B)$. On a donc semblablement $n = p \psi : (B, A)$.

Soit maintenant un autre triangle formé avec les mêmes angles A, B, C , auxquels soient opposés les côtés m', n', p' , respectivement. Puisque A et B ne changent pas, on aura dans ce nouveau triangle $m' = p' \psi : (A, B)$, et $n' = p' \psi : (B, A)$. Donc $m : m' :: n : n' :: p : p'$. Donc, *dans les triangles équiangles, les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels.*

De cette proposition générale on déduit comme cas particulier celle que nous avons supposée dans le texte, pour la démonstration de la proposition XX. En effet, les triangles AFG, AML ont deux angles égaux, chacun à chacun, savoir, l'angle A commun, et un angle droit. Donc ces triangles sont équiangles; donc on a la proportion $AF : AL :: AG : AM$, au moyen de laquelle la prop. XX est pleinement démontrée.

La proposition du carré de l'hypoténuse est, comme on sait, une suite de celle des triangles équiangles. Voilà donc trois propositions fondamentales de la géométrie, celle des trois angles d'un triangle, celle des triangles équiangles, et celle du carré de l'hypoténuse, qui se déduisent très-simplement et très-immédiatement de la considération des fonctions. On peut par la même voie démontrer très-succinctement les propositions concernant les figures semblables et les solides semblables.

Soit $ABCD$ un polygone quelconque; ayant choisi un côté AB , comme base, formez autant de triangles ABC, ABD , etc. sur cette base, qu'il y a d'angles C, D, E , etc. au-dehors. Soit la base $AB = p$; soient A et B les deux angles du triangle ABC adjacents au côté AB ; soient A' et

B' lès deux angles du triangle ABD adjacents au même côté AB, et ainsi de suite. La figure ABCDE sera entièrement déterminée, si on connaît le côté p avec les angles A, B, A', B', A'', B'' , etc., et le nombre des données sera en tout $2n-3$, n étant le nombre des côtés du polygone. Cela posé, un côté ou une ligne quelconque x , menée comme on voudra dans le polygone, avec les seules données qui constituent ce polygone, sera une fonction de ces données; et comme $\frac{x}{p}$ doit être un nombre, on pourra supposer $\frac{x}{p} = \psi : (A, B, A', B', \text{etc.})$, ou $x = p \psi : (A, B, A', B', \text{etc.})$; et la fonction ψ ne contiendra point p . Si, avec les mêmes angles $A, B, A' B'$, etc. et un autre côté p' , on forme un second polygone, on aura pour la ligne x' , correspondante ou homologue à x , la valeur $x' = p' \psi : (A, B, A', B', \text{etc.})$; donc $x : x' :: p : p'$. On peut définir les figures ainsi construites, *figures semblables*; donc dans les figures semblables les lignes homologues sont proportionnelles. Ainsi, non-seulement les côtés homologues, les diagonales homologues, mais les lignes terminées de la même manière dans les deux figures, sont entre elles comme deux autres lignes homologues quelconques.

Appelons S la surface du premier polygone, cette surface est homogène au carré p^2 ; il faut donc que $\frac{S}{p^2}$ soit un nombre qui ne contienne que les angles A, B, A', B' , etc., de sorte qu'on aura $S = p^2 \varphi : (A, B, A', B', \text{etc.})$. Par la même raison, si S' est la surface du second polygone, on aura $S' = p'^2 \varphi : (A, B, A', B', \text{etc.})$. Donc $S : S' :: p^2 : p'^2$; donc les surfaces des figures semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.

Venons maintenant aux polyèdres. On peut supposer qu'une face est déterminée au moyen d'un côté connu p et de plusieurs angles A, B, C , etc. Ensuite les sommets des angles solides, hors de cette base, seront déterminés chacun par le moyen de trois données, qu'on peut regarder comme autant d'angles; de sorte que la détermination entière du polyèdre dépend d'un côté p , et de plusieurs angles A, B, C , etc., dont le nombre varie suivant la nature du polyè-

dre. Cela posé, une ligne qui joint deux sommets, ou, plus généralement, toute ligne x menée d'une manière déterminée dans le polyèdre, avec les seules données qui constituent ce solide, sera une fonction des données p , A , B , C , etc.; et comme $\frac{x}{p}$ doit être un nombre, la fonction égale à $\frac{x}{p}$ ne contiendra que les angles A , B , C , etc., et on pourra supposer $x = p \varphi : (A, B, C, \text{etc.})$. La surface du solide est homogène à p^2 ; ainsi, cette surface peut se représenter par $p^2 \psi : (A, B, C, \text{etc.})$; sa solidité est homogène à p^3 , et peut se représenter par $p^3 \Pi : (A, B, C, \text{etc.})$, les fonctions désignées par ψ et Π étant indépendantes de p .

Supposons qu'on construise un second solide avec les mêmes angles A, B, C , etc., et un côté p' différent de p : nous appellerons les solides ainsi construits *solides semblables*; et, cela posé, la ligne qui était $p \varphi : (A, B, C, \text{etc.})$, ou simplement $p \varphi$ dans un solide sera $p' \varphi$ dans un autre; la surface qui était $p^2 \psi$ dans l'un sera $p'^2 \psi$ dans l'autre, et enfin la solidité qui était $p^3 \Pi$ dans l'un sera $p'^3 \Pi$ dans l'autre. Donc, 1° *dans les solides semblables les côtés ou lignes homologues sont proportionnels*; 2° *leurs surfaces sont comme les carrés des côtés homologues*; 3° *leurs solidités sont comme les cubes de ces mêmes côtés*.

Les mêmes principes s'appliquent aisément au cercle. Soit c la circonférence et s la surface du cercle dont le rayon est r ; puisqu'il ne peut y avoir deux cercles inégaux décrits du même rayon, les quantités $\frac{c}{r}$ et $\frac{s}{r^2}$ doivent être des fonctions déterminées de r : mais, comme ces quantités sont des nombres, elles ne doivent point contenir dans leur expression la ligne r ; ainsi on aura $\frac{c}{r} = \alpha$, et $\frac{s}{r^2} = \epsilon$, α et ϵ étant des nombres constants. Soit c' la circonférence et s' la surface d'un autre cercle dont le rayon est r' ; on aura donc aussi $\frac{c'}{r'} = \alpha$, et $\frac{s'}{r'^2} = \epsilon$. Donc $c : c' :: r : r'$, et $s : s' :: r^2 : r'^2$; donc *les circonférences des cercles sont comme les rayons, et leurs surfaces comme les carrés des rayons*.

Considérons un secteur dont r soit le rayon et A l'angle au centre; soit x l'arc qui termine le secteur, et y la surface de ce même secteur. Puisque le secteur est entièrement déterminé lorsqu'on connaît r et A , il faut que x et y soient des fonctions déterminées de r et de A , donc $\frac{x}{r}$ et $\frac{y}{r^2}$ sont aussi de pareilles fonctions. Mais $\frac{x}{r}$ est un nombre,

ainsi que $\frac{y}{r^2}$; donc ces quantités ne doivent point contenir r , et elles sont simplement fonctions de A , de sorte qu'on aura $\frac{x}{r} = \varphi : A$, et $\frac{y}{r^2} = \psi : A$. Soient x' et y' l'arc et la surface d'un autre secteur dont l'angle est A et le rayon r' ; nous appellerons ces deux secteurs *secteurs semblables*; et puisque l'angle A est égal de part et d'autre, on aura $\frac{x'}{r'} = \varphi : A$, et $\frac{y'}{r'^2} = \psi : A$. Donc $x : x' :: r : r'$, et $y : y' :: r^2 : r'^2$;

donc les arcs semblables ou les arcs des secteurs semblables sont proportionnels aux rayons, et les secteurs eux-mêmes sont proportionnels aux quarrés des rayons.

Il est clair qu'on prouverait, de la même manière, que les sphères sont comme les cubes de leurs rayons.

On suppose, dans tout ce qui précède, que les surfaces se mesurent par le produit de deux lignes, et les solidités par le produit de trois; c'est ce qu'il est facile de démontrer aussi par voie d'analyse. Considérons un rectangle dont les dimensions sont p et q , et sa surface qui est une fonction de p et q , représentons-la par $\varphi : (p, q)$. Si on considère un autre rectangle dont les dimensions sont $p + p'$ et q , il est clair que ce rectangle est composé de deux autres, l'un qui a pour dimensions p et q , l'autre qui a pour dimensions p' et q ; de sorte qu'on aura

$$\varphi : (p + p', q) = \varphi : (p, q) + \varphi : (p', q).$$

Soit $p' = p$, on aura $\varphi : (2p, q) = 2\varphi : (p, q)$. Soit $p' = 2p$, on aura $\varphi : (3p, q) = \varphi : (p, q) + \varphi : (2p, q) = 3\varphi : (p, q)$. Soit $p' = 3p$, on aura $\varphi : (4p, q) = \varphi : (p, q) + \varphi : (3p, q) = 4\varphi : (p, q)$. Donc en général, si k est un nombre entier quelconque, on aura $\varphi : (kp, q) = k\varphi : (p, q)$ ou

$\frac{\varphi(p, q)}{p} = \frac{\varphi(kp, q)}{kp}$. Il résulte de là que $\frac{\varphi(p, q)}{p}$ est une telle fonction de p , qu'elle ne change pas en mettant à la place de p un multiple quelconque kp . Donc cette fonction est indépendante de p , et ne doit renfermer que q . Mais par une raison semblable $\frac{\varphi(p, q)}{q}$ doit être indépendante

de q ; donc $\frac{\varphi(p, q)}{pq}$ ne renferme ni p ni q , et ainsi cette quantité doit se réduire à une constante α . Donc on aura $\varphi(p, q) = \alpha pq$; et comme rien n'empêche de prendre $\alpha = 1$, on aura $\varphi(p, q) = pq$; ainsi la surface d'un rectangle est égale au produit de ses deux dimensions.

On démontrerait, d'une manière absolument semblable, que la solidité d'un parallépipède rectangle dont les dimensions sont p, q, r , est égale au produit pqr de ses trois dimensions.

Nous observerons, au reste, que la considération des fonctions, qui fournit ainsi une démonstration très-simple des propositions fondamentales de la Géométrie, a déjà été employée avec succès pour la démonstration des principes fondamentaux de la Mécanique. Voyez les Mémoires de Turin, tome II.

Enfin, quoique la théorie précédente soit établie sur les fondements les plus solides, nous ne devons pas dissimuler qu'elle a été attaquée par M. Leslie, célèbre professeur d'Édimbourg, dans ses élémens de géométrie, 2^{ème} et 3^{ème} éditions; mais sans entrer dans aucun détail à ce sujet, il nous suffira de dire que les objections de M. Leslie ont été pleinement réfutées, d'abord par M. Playfair, son compatriote, dans l'*Edimburg Review* Tome XX, et ensuite par M. Maurice, de l'Académie des sciences de Paris, dans la *Bibliothèque universelle* de Genève, Octobre 1819. On peut voir aussi la discussion de ces mêmes objections, dans l'Édition Anglaise de nos élémens donnée par M. David Brewster, Édimbourg 1822.

NOTE III.

*Sur l'approximation de la proposition XVI,
livre IV.*

Dès qu'on a trouvé un rayon excédant et un déficient qui s'accordent dans les premiers chiffres, on peut achever le calcul d'une manière très-prompte par le moyen d'une formule algébrique.

Soit a le rayon déficient et b l'excédant, dont la différence est petite; soient a' et b' les rayons suivants qui s'en déduisent par les formules $b' = \sqrt{ab}$, $a' = \sqrt{a \cdot \frac{a+b}{2}}$

Ce que l'on cherche, c'est le dernier terme de la suite $a, a', a'',$ etc., qui est en même temps celui de la suite $b, b', b'',$ etc. Appelons ce dernier terme x , et soit $b = a(1 + \omega)$; on pourra supposer $x = a(1 + P\omega + Q\omega^2 + \text{etc.})$, P et Q étant des coefficients indéterminés. Or les valeurs de b' et a' donnent

$$b' = a(1 + \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{8}\omega^2 + \text{etc.});$$

$$a' = a(1 + \frac{1}{4}\omega^2 - \frac{1}{32}\omega^3 + \text{etc.}).$$

Et si on fait pareillement $b' = a'(1 + \omega')$, on aura

$$\omega' = \frac{1}{4}\omega - \frac{5}{32}\omega^2 \text{ etc.}$$

Mais la valeur de x doit être la même, soit que la suite $a, a', a'',$ etc. commence par a ou par a' ; donc on aura

$a(1 + P\omega + Q\omega^2 + \text{etc.}) = a'(1 + P\omega' + Q\omega'^2 + \text{etc.})$.
Substituant dans cette équation les valeurs de a' et de ω' en a et ω , et comparant les termes semblables, on en déduira $P = \frac{1}{3}$, et $Q = -\frac{1}{15}$; donc

$$x = a(1 + \frac{1}{3}\omega - \frac{1}{15}\omega^2).$$

Si les rayons a et b s'accordent dans la première moitié de leurs chiffres, on pourra rejeter le terme ω^2 , et la valeur

précédente se réduira à $x = a(1 + \frac{1}{3}\omega) = a + \frac{b-a}{3}$

Ainsi, en faisant $a = 1, 1282657$, et $b = 1, 1286063$, on en déduira immédiatement $x = 1, 1283792$.

Si les rayons a et b ne s'accordent que dans le premier tiers de leurs chiffres, il faudra prendre les trois termes de la formule précédente; ainsi en faisant $a = 1, 1265639$ et $b = 1, 1320149$, on trouvera $x = 1, 1283791$.

On pourrait supposer que a et b sont encore moins près l'un de l'autre; mais alors il faudrait calculer la valeur de x avec un plus grand nombre de termes.

L'approximation de la prop. XIV, qui est de Jacques Gregory, est susceptible de semblables abrégés. Nous renvoyons à l'ouvrage de cet auteur, intitulé : *Vera circuli et hyperbolæ quadratura*, ouvrage d'un grand mérite pour le temps où il a paru.

NOTE IV.

Où l'on démontre que le rapport de la circonférence au diamètre et son quarré, sont des nombres irrationnels.

Considérons la suite infinie

$$1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z \cdot z + 1} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2} + \text{etc.}$$

dont le terme général est $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \dots (z + n - 1)}$

et supposons que $\varphi : z$ en représente la somme. Si on met $z + 1$ à la place de z , $\varphi : (z + 1)$ sera pareillement la somme de la suite

$$1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z+1 \cdot z+2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{z+1 \cdot z+2 \cdot z+3} + \text{etc.}$$

Retranchons ces deux suites, terme à terme, l'une de l'autre et nous aurons $\varphi : z - \varphi : (z + 1)$ pour la somme du reste qui sera

$$\frac{a}{z \cdot z + 1} + \frac{a^2}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \text{etc.}$$

Mais ce reste peut être mis sous la forme

$$\frac{a}{z \cdot z + 1} \cdot \left(1 + \frac{a}{z+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z+2 \cdot z+3} + \text{etc.} \right),$$

et alors il se réduit à $\frac{a}{z \cdot z + 1} \varphi : (z + 2)$. Donc on aura généralement

$$\varphi : z - \varphi : (z + 1) = \frac{a}{z \cdot z + 1} \varphi : (z + 2).$$

Divisons cette équation par $\varphi : (z + 1)$, et, pour simplifier le résultat, soit $\psi : z$ une nouvelle fonction de z , telle

Douz. éd.

que $\psi : z = \frac{a}{z} \cdot \frac{\varphi : (z+1)}{\varphi : (z)}$; alors on pourra mettre $\frac{a}{z\psi : z}$ au lieu de $\frac{\varphi : z}{\varphi : (z+1)}$, et $\frac{(z+1)\psi : (z+1)}{a}$ au lieu de $\frac{\varphi : (z+2)}{\varphi : (z+1)}$. La substitution faite, on aura

$$\psi : z = \frac{a}{z + \psi : (z+1)},$$

Mais en mettant successivement dans cette équation $z+1$, $z+2$, etc., à la place de z , il en résultera

$$\psi : (z+1) = \frac{a}{z+1 + \psi : (z+2)},$$

$$\psi : (z+2) = \frac{a}{z+2 + \psi : (z+3)}; \text{ etc.}$$

Donc la valeur de $\psi : z$ peut s'exprimer par la fraction continue :

$$\psi : z = \frac{a}{z + \frac{a}{z+1 + \frac{a}{z+2 + \text{etc.}}}}$$

Réciproquement cette fraction continue, prolongée à l'infini, a pour somme $\psi : z$, ou son égale $\frac{a}{z} \cdot \frac{\varphi : (z+1)}{\varphi : z}$; et cette somme, développée en suites ordinaires, est

$$\frac{a}{z} \cdot \frac{1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z+1 \cdot z+2} + \text{etc.}}{1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z \cdot z+1} + \text{etc.}}$$

Soit maintenant $z = \frac{1}{2}$, la fraction continue deviendra

$$\frac{2a}{1 + \frac{4a}{3 + \frac{4a}{5 + \text{etc.}}}}$$

dans laquelle les numérateurs, excepté le premier, sont tous égaux à $\frac{4}{3}a$, et les dénominateurs forment la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, etc. La valeur de cette fraction continue peut donc aussi s'exprimer par

$$\frac{1 + \frac{4a}{2.3} + \frac{16a^2}{2.3.4.5} + \frac{64a^3}{2.3..7} + \text{etc.}}{2a.}$$

$$1 + \frac{4a}{2} + \frac{16a^2}{2.3.4} + \frac{64a^3}{2.3...6} + \text{etc.}$$

Mais ces suites se rapportent à des formules connues, et on sait qu'en représentant par e le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1, l'expression précédente se réduit à

$$\frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}} \cdot \sqrt{a}; \text{ de sorte qu'on aura en général}$$

$$\frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}} \cdot 2\sqrt{a} = \frac{4a}{1} + \frac{4a}{1} + \frac{4a}{5} + \text{etc.}$$

De là résultent deux formules principales selon que a est positif ou négatif. Soit d'abord $4a = x^2$, on aura

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \text{etc.}$$

Soit ensuite $4a = -x^2$, et en vertu de la formule connue

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1} \cdot \text{tang. } x, \text{ on aura}$$

$$\text{tang. } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

Celle-ci est la formule qui servira de base à notre démonstration. Mais il faut, avant tout, démontrer les deux lemmes suivants.

LEMME I. Soit une fraction continue prolongée à l'infini,

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''} + \text{etc.}$$

dans laquelle tous les nombres $m, n, m', n', \text{ etc.}$ sont des entiers positifs ou négatifs; si on suppose que les fractions

composantes $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$, etc. soient toutes plus petites que l'unité, je dis que la valeur totale de la fraction continue sera nécessairement un nombre irrationnel.

D'abord, je dis que cette valeur sera plus petite que l'unité. En effet, sans diminuer la généralité de la fraction continue, on peut supposer tous les dénominateurs $n, n', n'',$ etc. positifs; or, si on prend un seul terme de la suite proposée, on aura, par hypothèse, $\frac{m}{n} < 1$. Si on prend les deux premiers, à cause de $\frac{m'}{n'} < 1$, il est clair que $n + \frac{m'}{n'}$ est plus grand que $n - 1$: mais m est plus petit que n ; et, puisqu'ils sont l'un et l'autre des entiers, m sera aussi plus petit que $n + \frac{m'}{n'}$. Donc la valeur qui résulte des deux termes

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}$$

est plus petite que l'unité. Calculons trois termes de la fraction continue proposée; et d'abord, suivant ce qu'on vient de voir, la valeur de la partie

$$\frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''}$$

sera plus petite que l'unité. Appelons cette valeur ω , et il est clair que $\frac{m}{n + \omega}$ sera encore plus petite que l'unité: donc la valeur qui résulte des trois termes

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''}$$

est plus petite que l'unité. Continuant le même raisonnement, on verra que, quel que soit le nombre de termes qu'on calcule de la fraction continue proposée, la valeur qui en résulte est plus petite que l'unité; donc la valeur totale de cette fraction prolongée à l'infini, est aussi plus

petite que l'unité. Elle ne pourrait être égale à l'unité que dans le seul cas où la fraction proposée serait de la forme

$$\frac{m}{m+1} - \frac{m'}{m'+1} - \frac{m''}{m''+1} - \text{etc.}$$

dans tout autre cas elle sera plus petite.

Cela posé, si on nie que la valeur de la fraction continue proposée soit égale à un nombre irrationnel, supposons qu'elle est égale à un nombre rationnel, et soit ce nombre

$\frac{B}{A}$, B et A étant des entiers quelconques; on aura donc

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''} + \text{etc.}$$

Soient C, D, E, etc. des indéterminées telles qu'on ait

$$\frac{C}{n'} = \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''} + \frac{m'''}{n'''} + \text{etc.}$$

$$\frac{D}{n''} = \frac{m''}{n''} + \frac{m'''}{n'''} + \frac{m'''}{n'''} + \text{etc.}$$

et ainsi à l'infini. Ces différentes fractions continues ayant tous leurs termes plus petits que l'unité, leurs valeurs ou

sommes $\frac{B}{A}, \frac{C}{n'}, \frac{D}{n''}, \text{etc.}$ seront plus petites que l'unité,

suivant ce qui vient d'être démontré, et ainsi on aura $B < A, C < B, D < C, \text{etc.}$; d'où l'on voit que la suite A, B, C, D, E, etc. est décroissante à l'infini. Mais l'enchaînement des fractions continues dont il s'agit donne

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{n} + \frac{C}{B}; \text{ d'où résulte } C = mA - nB,$$

$$\frac{C}{n'} = \frac{m'}{n'} + \frac{D}{C}; \text{ d'où résulte } D = m'B - n'C,$$

$$\frac{D}{n''} = \frac{m''}{n''} + \frac{E}{D}; \text{ d'où résulte } E = m''C - n''D,$$

etc.

etc.

Et puisque les deux premiers nombres A et B sont entiers par hypothèse, il s'ensuit que tous les autres C, D, E, etc., qui jusqu'à ce moment étaient indéterminés, sont aussi des nombres entiers. Or, il implique contradiction qu'une suite infinie A, B, C, D, E, etc. soit à-la-fois décroissante et composée de nombres entiers; car d'ailleurs aucun des nombres A, B, C, D, E, etc. ne peut être zéro, puisque la fraction continue proposée s'étend à l'infini, et qu'ainsi les sommes représentées par $\frac{B}{A}, \frac{C}{B}, \frac{D}{C}$, etc. doivent toujours être quelque chose. Donc l'hypothèse, que la somme de la fraction continue proposée est égale à une quantité rationnelle $\frac{B}{A}$, ne saurait subsister; donc cette somme est nécessairement un nombre irrationnel.

LEMME II. *Les mêmes choses étant posées, si les fractions composantes $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$, etc. sont d'une grandeur quelconque au commencement de la suite; mais qu'après un certain intervalle, elles soient constamment plus petites que l'unité; je dis que la fraction continue proposée, en supposant toujours qu'elle s'étende à l'infini, aura une valeur irrationnelle.*

Car, si à compter de $\frac{m'''}{n'''}$, par exemple, toutes les fractions $\frac{m'''}{n'''}, \frac{m'''}{n'''}, \frac{m'''}{n'''},$ etc. à l'infini, sont plus petites que l'unité, alors, suivant le lemme I, la fraction continue

$$\frac{m'''}{n'''} + \frac{m'''}{n'''} + \frac{m'''}{n'''} + \frac{m'''}{n'''} + \frac{m'''}{n'''} + \text{etc.}$$

aura une valeur irrationnelle. Appelons cette valeur ω , et la fraction continue proposée deviendra

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''} + \frac{m'''}{n'''} + \frac{m'''}{n'''} + \frac{m'''}{n'''} + \frac{m'''}{n'''} + \frac{m'''}{n'''} + \text{etc.}$$

Mais si on fait successivement

$$\frac{m'''}{n'''} = \omega', \quad \frac{m'''}{n'''} + \omega' = \omega'', \quad \frac{m'''}{n'''} + \omega'' = \omega''',$$

il est clair que, ω étant irrationnelle, toutes les quantités ω' , ω'' , ω''' , doivent l'être pareillement. Or, la dernière ω''' est égale à la fraction continue proposée; donc la valeur de celle-ci est irrationnelle.

Nous pouvons maintenant, pour revenir à notre sujet, démontrer cette proposition générale.

THÉORÈME.

Si un arc est commensurable avec le rayon, sa tangente sera incommensurable avec le même rayon.

En effet, soit le rayon $= 1$, et l'arc $x = \frac{m}{n}$, m et n étant des nombres entiers, la formule trouvée ci-dessus donnera, en faisant la substitution,

$$\text{tang. } \frac{m}{n} = \frac{m}{n} - \frac{m^2}{3n} - \frac{m^2}{5n} - \frac{m^2}{7n} - \text{etc.}$$

Or cette fraction continue est dans le cas du lemme II; car il est clair que les dénominateurs $3n$, $5n$, $7n$, etc. augmentant continuellement, tandis que le numérateur m^2 reste de la même grandeur, les fractions composantes seront ou deviendront bientôt plus petites que l'unité, donc la valeur de $\text{tang. } \frac{m}{n}$ est irrationnelle; donc, si l'arc est com-

mensurable avec le rayon, sa tangente sera incommensurable.

De là résulte, comme conséquence très-immédiate, la proposition qui fait l'objet de cette note. Soit π la demi-circonférence dont le rayon est 1; si π était rationnel, l'arc $\frac{4}{\pi}$ le serait aussi, et par conséquent sa tangente devrait être irrationnelle: mais on sait, au contraire, que la tangente de l'arc $\frac{\pi}{4}$ est égale au rayon 1; donc π ne peut être rationnel. Donc le rapport de la circonférence au diamètre, est un nombre irrationnel (1).

(1) Cette proposition a été démontrée pour la première fois par Lambert, dans les Mémoires de Berlin, année 1761.

Il est probable que le nombre π n'est pas même compris dans les irrationnelles algébriques, c'est-à-dire, qu'il ne peut être la racine d'une équation algébrique d'un nombre fini de termes dont les coefficients sont rationnels : mais il paraît très-difficile de démontrer rigoureusement cette proposition ; nous pouvons seulement faire voir que le carré de π est encore un nombre irrationnel.

En effet, si dans la fraction continue qui exprime tang. x , on fait $x = \pi$, à cause de tang. $\pi = 0$, on doit avoir

$$0 = 3 - \frac{\pi^2}{5} - \frac{\pi^2}{7} - \frac{\pi^2}{9} - \text{etc.}$$

Mais si π^2 était rationnel, et qu'on eût $\pi^2 = \frac{m}{n}$, m et n étant des entiers, il en résulterait

$$3 = \frac{m}{5n} - \frac{m}{7n} - \frac{m}{9n} - \frac{m}{11n} - \text{etc.}$$

Or, il est visible que cette fraction continue est encore dans le cas du lemme II, sa valeur est donc irrationnelle, et ne saurait être égale au nombre 3. Donc le carré du rapport de la circonférence au diamètre, est un nombre irrationnel.

NOTE V.

Où l'on donne la solution analytique de divers problèmes concernant le triangle, le quadrilatère inscrit, le parallélepède et la pyramide triangulaire.

PROBLÈME PREMIER.

Étant donnés les trois côtés d'un triangle, trouver sa surface, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit.

fig. 126.

Soient les côtés $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; si du sommet A on abaisse la perpendiculaire AD sur le côté opposé

* 12. 3. BC , on aura $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BD$; donc $BD =$

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \text{ Cette valeur donne } \overline{AB} - \overline{BD} \text{ ou } \overline{AD} = c^2 \\ - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}; \text{ donc AD} \\ = \frac{\sqrt{[4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]}}{2a}. \text{ Soit S l'aire du triangle,}$$

on aura $S = \frac{1}{2} BC \times AD$; donc

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{[4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]} = \frac{1}{4} \sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$$

Cette formule peut encore se réduire à une autre forme plus commode pour le calcul logarithmique; pour cela il faut observer que la quantité $4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$ est le produit des deux facteurs $2ac + (a^2 + c^2 - b^2)$ et $2ac - (a^2 + c^2 - b^2)$; le premier $= (a+c)^2 - b^2 = (a+c+b)(a+c-b)$; le second $= b^2 - (a-c)^2 = (b+a-c)(b-a+c)$; donc on aura

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

Enfin si on fait $\frac{a+b+c}{2} = p$, ce qui donne $a+b+c = 2p$,

$a+b-c = 2p-2c$, $a+c-b = 2p-2b$, $b+c-a = 2p-2a$, on aura encore plus simplement

$$S = \sqrt{(p \cdot p - a \cdot p - b \cdot p - c)}.$$

D'où l'on voit que pour avoir la surface d'un triangle dont les trois côtés sont donnés, il faut prendre la demi-somme des trois côtés, de cette demi-somme retrancher successivement chacun des côtés, ce qui donnera trois restes, multiplier ces trois restes entre eux et par la demi-somme des côtés, et enfin extraire la racine quarrée du produit: cette racine sera l'aire du triangle.

Soient maintenant z le rayon du cercle circonscrit au triangle, et u le rayon du cercle inscrit dans ce même triangle, on aura suivant la prop. xxxii, liv. iii,

$$z = \frac{\frac{1}{4}abc}{S} \text{ et } u = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{S}{p}; \text{ donc en substituant la}$$

valeur trouvée de S , il viendra

$$z = \frac{\frac{1}{4}abc}{\sqrt{(p \cdot p - a \cdot p - b \cdot p - c)}}, \quad u = \sqrt{\left(\frac{p-a \cdot p - b \cdot p - c}{p} \right)},$$

PROBLÈME II.

Etant donnés les quatre côtés d'un quadrilatère inscrit, trouver le rayon du cercle, la surface du quadrilatère et ses angles.

fig. 135. Soient les côtés donnés $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, et les diagonales inconnues $AC=x$, $BD=y$, on aura, suivant le théor. 33, liv. III, $xy=ac+bd$ et $\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$, d'où l'on tire

$$x=\sqrt{\left(\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}\right)}, y=\sqrt{\left(\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}\right)}$$

Mais, suivant le problème précédent, le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, dont les côtés sont a , b , x , peut

$$\text{s'exprimer par la formule } z = \frac{abx}{\sqrt{[4a^2b^2-(a^2+b^2-x^2)^2]}}$$

Substituant au lieu de x la valeur qu'on vient de trouver et décomposant le résultat en facteurs, on aura

$$z = \sqrt{\left[\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)} \right]}$$

Cela posé, l'aire du triangle ABC $= \frac{\frac{1}{4}abx}{z}$, celle du triangle

ADC $= \frac{\frac{1}{4}cdx}{z}$; donc l'aire du quadrilatère ABCD $=$

$$\frac{\frac{1}{4}(ab+cd)x}{z}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)]}.$$

Et si on fait, pour abrégier, $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$, on aura l'aire ABCD $= \sqrt{(p-a)p(p-b)p-c.p-d)}$. Enfin pour avoir l'un des angles, par exemple, l'angle B, on obser-

$$\text{vera que le triangle ABC donne } \cos B = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab};$$

substituant la valeur de x et réduisant, on aura $\cos B = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}$. De là on tire $\frac{1-\cos B}{1+\cos B}$, ou $\tan^2 \frac{1}{2} B$

$$= \frac{(c+a)^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2 - (c-d)^2} = \frac{(a+c+d-b)(b+c+d-a)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)}. \text{ Donc}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} B = \sqrt{\left(\frac{p-a}{p-c} \cdot \frac{p-b}{p-d} \right)}.$$

PROBLÈME III.

Dans le quadrilatère $ABDC$ dont les angles opposés B fig. 277. et C sont droits, étant donnés les deux côtés AB , AC avec l'angle compris BAC , trouver les deux autres côtés et la diagonale AD .

Soit $AC = b$, $AB = c$, et l'angle $BAC = A$; si l'on prolonge BD et AC jusqu'à leur rencontre en E , le triangle BAE rectangle en B , où l'on connaît l'angle BAE et le côté AB , donnera $AE = \frac{c}{\cos A}$; donc $CE = \frac{c}{\cos A} - b$. Ensuite le triangle DCE rectangle en C , où l'on connaît le côté CE et l'angle $CDE = A$, donnera $CD = CE \cot A = \frac{c - b \cos A}{\sin A}$. On aura donc semblablement $BD = \frac{b - c \cos A}{\sin A}$.

Ce sont les valeurs des deux côtés cherchés du quadrilatère.

De-là résulte la diagonale $AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{\left(b^2 + \left(\frac{c - b \cos A}{\sin A} \right)^2 \right)} = \frac{\sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos A)}}{\sin A}$. Mais par

le triangle BAC on aurait $BC = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos A)}$. Donc la diagonale AD , qui joint les deux angles obliques, est à la diagonale BC qui joint les deux angles droits :: $1 : \sin A$.

Scholie. La diagonale AD est en même temps le diamètre du cercle dans lequel le quadrilatère $ABDC$ serait inscrit.

Dans ce cercle on aurait l'angle $ABC = ADC$, donc en abaissant CF perpendiculaire sur AB , les triangles BFC , ADC sont semblables et donnent $AD : BC :: AC : FC :: 1 : \sin A$; ce qui s'accorde avec le résultat précédent.

PROBLÈME IV.

Étant données les trois arêtes d'un parallélepède avec les angles qu'elles font entre elles, trouver la solidité du parallélepède.

fig. 278. Soient les arêtes $SA=f$, $SB=g$, $SC=h$, et les angles compris $ASB=\gamma$, $ASC=\epsilon$, $BSC=\alpha$. Si du point C on abaisse CO perpendiculaire sur le plan ASB, le triangle rectangle CSO donnera $CO=CS \sin CSO=h \sin CSO$. D'ailleurs la surface du parallélogramme ASBP $=fg \sin \gamma$. Donc si on appelle S la solidité du parallélepède ST, on aura $S=fg h \sin \alpha \sin CSO$. Il reste à trouver $\sin CSO$.

Pour cela du point S comme centre et d'un rayon $=1$, décrivez une surface sphérique qui rencontre en D, E, F, G les droites SA, SB, SC, SO; vous aurez un triangle DEF dans lequel l'arc FG est perpendiculaire sur ED, puisque le plan CSO est perpendiculaire sur ASB. Or le triangle DEF, où l'on a les trois côtés $DE=\gamma$, $DF=\epsilon$, $EF=\alpha$, donne $\cos E = \frac{\cos \epsilon - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma}$, et $\sin E = \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \epsilon - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \epsilon \cos \gamma)}}{\sin \alpha \sin \gamma}$.

Ensuite le triangle rectangle EFG donne $\sin GF$ ou $\sin CSO = \sin E \sin EF = \sin \alpha \sin E$. Donc $S = fgh \sin \alpha \sin \gamma \sin E$.

ou $S = fgh \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \epsilon - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \epsilon \cos \gamma)}$. Dans cette expression la quantité sous le radical est le produit des deux facteurs $\sin \alpha \sin \gamma + \cos \epsilon - \cos \alpha \cos \gamma$ et $\sin \alpha \sin \gamma - \cos \epsilon + \cos \alpha \cos \gamma$. Le premier $= \cos \epsilon - \cos(\alpha + \gamma)$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \epsilon + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma - \epsilon}{2}, \text{ le second} = \cos(\alpha - \gamma) - \cos \epsilon$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \epsilon - \gamma}{2} \sin \frac{\epsilon + \gamma - \alpha}{2}, \text{ Donc la solidité cherchée}$$

$$S = 2fgh \sqrt{\left[\sin \frac{\alpha + \epsilon + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma - \epsilon}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma - \epsilon}{2} \sin \frac{\epsilon + \gamma - \alpha}{2} \right]}.$$

PROBLÈME V.

Les mêmes choses étant données que dans le problème précédent, trouver l'expression de la diagonale qui joint deux sommets opposés.

Soit la diagonale de la base $SP = z$ et la diagonale cherchée $ST = u$; le triangle ASP dans lequel $\cos SAP = -\cos \gamma$, donnera $z^2 = f^2 + g^2 + 2fg \cos \gamma$; pareillement le triangle TSP dans lequel $\cos TPS = -\cos CSP$, donnera $u^2 = z^2 + h^2 + 2hz \cos CSP$. Il ne s'agit plus que d'avoir le cosinus de l'angle CSP ou de l'arc FH : or dans le triangle sphérique EFH , on a $\cos FH = \cos EF \cos EH + \sin EF \sin EH \cos E$; substituant les valeurs $EF = a$ et $\cos E = \frac{\cos \ell - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma}$, il viendra

$$\cos FH = \cos \alpha \cos EH + \frac{\sin EH}{\sin \gamma} (\cos \ell - \cos \alpha \cos \gamma) = \frac{\sin EH \cos \ell}{\sin \gamma} + \frac{\sin (\gamma - EH) \cos \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin EH \cos \ell + \sin DH \cos \alpha}{\sin \gamma}.$$

Donc $2hz \cos FH$, ou $2hz \cos CSP = 2h \cos \ell \cdot \frac{z \sin EH}{\sin \gamma} + 2h \cos \alpha \cdot \frac{z \sin DH}{\sin \gamma}$. Mais dans le triangle BSP

$$\text{on a } BP = \frac{SP \sin BSP}{\sin SBP} \text{ et } BS = \frac{SP \sin BPS}{\sin SBP}, \text{ ce qui donne } \frac{z \sin EH}{\sin \gamma} = f \text{ et } \frac{z \sin DH}{\sin \gamma} = g. \text{ Donc } 2hz \cos CSP = 2fh$$

$\cos \ell + 2gh \cos \alpha$. Donc enfin le carré de la diagonale cherchée :

$$u^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos \gamma + 2fh \cos \ell + 2gh \cos \alpha.$$

Corollaire. L'angle solide A est formé par les arêtes f, g, h , faisant entre elles deux à deux les angles $200^\circ - \gamma$, $200^\circ - \ell$, α ; ainsi il suffit de changer les signes de $\cos \gamma$ et $\cos \ell$ dans l'expression de $\overline{SE}^2$ pour avoir celle de $\overline{AM}^2$. Faisant de même pour les deux autres diagonales, on aura les valeurs de leurs carrés comme il suit :

$$\overline{ST}^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos \gamma + 2fh \cos \epsilon + 2gh \cos \alpha$$

$$\overline{AM}^2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg \cos \gamma - 2fh \cos \epsilon + 2gh \cos \alpha$$

$$\overline{BN}^2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg \cos \gamma + 2fh \cos \epsilon - 2gh \cos \alpha$$

$$\overline{CP}^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos \gamma - 2fh \cos \epsilon - 2gh \cos \alpha$$

$$\text{De là on tire } \overline{ST}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CP}^2 = 4f^2 + 4g^2 + 4h^2.$$

Donc, dans tout parallépipède, la somme des quarrés des quatre diagonales est égale à la somme des quarrés des douze arêtes. Ce théorème remarquable et analogue à celui

* 14. 3.
cor.

qui a lieu dans le parallélogramme*, pourrait se déduire immédiatement de ce dernier. Car au moyen des parallélogrammes SCTP, ABMN, on a

$$\overline{ST}^2 + \overline{CP}^2 = 2\overline{SC}^2 + 2\overline{SP}^2,$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{AB}^2.$$

Ajoutant ces deux équations et observant qu'on a $\overline{SC} = \overline{BM}$

et $\overline{SP} + \overline{AB} = 2\overline{SA} + 2\overline{SB}$, il viendra $\overline{ST}^2 + \overline{AM}^2 +$

$$\overline{BN}^2 + \overline{CP}^2 = 4\overline{SA}^2 + 4\overline{SB}^2 + 4\overline{SC}^2.$$

PROBLÈME VI.

Étant données les trois arêtes qui aboutissent à un même sommet d'une pyramide triangulaire, et les trois angles que ces arêtes forment entre elles, trouver la solidité de la pyramide.

fig. 278.

Soit $SABC$ la pyramide triangulaire proposée, dans laquelle on connaît les arêtes $SA = f$, $SB = g$, $SC = h$, et les angles compris $ASB = \gamma$, $ASC = \epsilon$, $BSC = \alpha$. Si sur les arêtes SA , SB , SC , données de grandeur et de position, on décrit le parallépipède ST , la pyramide qui est le tiers du prisme triangulaire $BSANMC$ sera le sixième du parallépipède ST . Donc en appelant P la solidité de la pyramide, on aura, d'après le probl. iv,

$$P = \frac{1}{6} fgh \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \epsilon - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \epsilon \cos \gamma)}$$

$$\text{ou } P = \frac{1}{6} fgh \sqrt{\left[\sin \frac{\alpha + \epsilon + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \epsilon - \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma - \epsilon}{2} \sin \frac{\gamma + \epsilon - \alpha}{2} \right].}$$

PROBLÈME VII.

Étant donnés les six côtés ou arêtes d'une pyramide triangulaire, trouver sa solidité.

Si l'on conserve les mêmes dénominations que dans le problème précédent, et qu'on fasse de plus $BC = f'$,

$CA = g'$, $BA = h'$, on aura $\cos \gamma = \frac{f^2 + g^2 - h'^2}{2fg}$, $\cos \varrho =$

$\frac{f^2 + h^2 - g'^2}{2fh}$, $\cos \alpha = \frac{g^2 + h^2 - f'^2}{2gh}$. Substituant ces va-

leurs dans la formule trouvée, et faisant pour abrégier $g^2 + h^2 - f'^2 = F$, $f^2 + h^2 - g'^2 = G$, $f^2 + g^2 - h'^2 = H$, on aura la solidité demandée

$$P = \frac{1}{12} \sqrt{(4f^2 g^2 h^2 - f^2 F^2 - g^2 G^2 - h^2 H^2 + FGH)}.$$

Dans l'application de ces formules on observera que f' , g' , h' , désignent les côtés d'une même face ou base, et f , g , h , les trois autres arêtes, qui aboutissent au sommet, leur disposition étant telle que f est opposée à f' , g à g' et h à h' .

Scholie. Soit A la somme des quatre triangles qui composent la surface de la pyramide, soit r le rayon de la sphere inscrite; il est aisé de voir qu'on a $P = A \times \frac{1}{3} r$; car on peut concevoir la pyramide décomposée en quatre autres, qui auraient pour sommet commun le centre de la sphere, et pour bases, les différentes faces de la pyramide. On a donc le rayon de la sphere inscrite $r = \frac{3P}{A}$.

PROBLÈME VIII.

Les mêmes choses étant données que dans le problème VI, trouver le rayon de la sphere circonscrite à la pyramide.

Soit M le centre du cercle circonscrit au triangle SAB , MO la perpendiculaire menée par le point M sur le plan SAB ; soit pareillement N le centre du cercle circonscrit au triangle SAC , NO la perpendiculaire élevée par le point N sur le plan SAC . Ces deux perpendiculaires situées dans un même plan MDN perpendiculaire à SA , se rencontreront en un point O qui sera le centre de la sphere

fig. 278.

fig. 279.

circonscrite; car le point O, comme appartenant à la perpendiculaire MO, est à égale distance des trois points S, B, A; et ce même point, comme appartenant à la perpendiculaire NO, est à égale distance des trois points S, A, C; donc il est à égale distance des quatre points S, A, B, C.

On peut imaginer que le point M est déterminé dans le plan SAB, au moyen du quadrilatère SDMH, dont les deux angles D et H sont droits, et où l'on a $SD = \frac{1}{2}f$, $SH = \frac{1}{2}g$, et $ASB = \gamma$. Donc on aura (d'après le problème III), $DM = \frac{\frac{1}{2}g - \frac{1}{2}f \cos \gamma}{\sin \gamma}$; semblablement on aura $DN = \frac{\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}f \cos \epsilon}{\sin \epsilon}$.

Appelons D l'angle MDN qui mesure l'inclinaison des deux plans SAB, SAC; dans le triangle sphérique dont α, ϵ, γ , sont les côtés, D sera l'angle opposé au côté α , et ainsi on aura $\cos D = \frac{\cos \alpha - \cos \gamma \cos \epsilon}{\sin \gamma \sin \epsilon}$, de sorte que l'angle D peut être supposé connu.

Cela posé, dans le quadrilatère OMDN dont les deux angles M et N sont droits, et où l'on connaît les deux côtés MD, DN et l'angle compris $MDN = D$, on aura par le problème III, le carré de la diagonale $OD = \frac{DM^2 + DN^2 - 2DM \times DN \cos D}{\sin^2 D}$. Ensuite dans le triangle

OSD rectangle en D, on aura $\overline{SO}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{SD}^2$: c est la valeur du carré du rayon de la sphere circonscrite.

Si on fait la substitution des valeurs de DM, DN et ensuite celle des valeurs de cos D et de sin D, afin d'avoir immédiatement l'expression du rayon SO, par le moyen des données du problème VI, on trouvera pour résultat :

$$SO = \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} f^2 \sin^2 \alpha + g^2 \sin^2 \epsilon + h^2 \sin^2 \gamma - 2fg(\cos \gamma - \cos \epsilon \cos \alpha) \\ - 2fh(\cos \epsilon - \cos \alpha \cos \gamma) - 2gh(\cos \alpha - \cos \gamma \cos \epsilon) \\ 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \epsilon - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \epsilon \cos \gamma \end{array} \right\}}$$

NOTE VI.

Sur la plus courte distance de deux droites non situées dans le même plan.

Soient AB, CD, deux droites données, non situées dans le même plan, dont il s'agit de trouver la plus courte distance. fig 280.

Suivant AB faites passer deux plans perpendiculaires entre eux qui rencontrent CD l'un en C, l'autre en D; des points C et D abaissez CA et DB perpendiculaires sur AB; dans le plan ABD menez DE parallèle et AE perpendiculaire à BA, ce qui formera le rectangle ABDE; dans le plan CAE joignez CE et menez AI perpendiculaire à CE; enfin dans le plan CDE menez IK parallèle à DE jusqu'à la rencontre de CD en K, faites $AL = IK$ et joignez KL; je dis, 1° que la droite KL est perpendiculaire à-la-fois aux deux droites données AB, CD; 2° que cette même droite KL est plus courte que toute autre qui joindrait deux points des lignes AB, CD, et qu'ainsi KL, ou son égale AI, est la plus courte distance demandée.

En effet, 1° les trois droites AB, AC, AE étant par construction perpendiculaires entre elles, l'une d'elles AB est perpendiculaire au plan des deux autres; donc AB est perpendiculaire à AI; d'ailleurs KI est parallèle à DE, et DE à AB, donc KI est parallèle à AB, et puisqu'on a fait $AL = KI$, il s'ensuit que la figure AIKL est un rectangle. Cela posé, l'angle AIK est droit ainsi que AIC, donc la droite AI est perpendiculaire au plan KIC ou CDE; donc sa parallèle KL est perpendiculaire au même plan CDE, et par conséquent est perpendiculaire à CD. Donc, 1° la droite KL est perpendiculaire à-la-fois aux deux droites AB, CD.

2° Soit M un point quelconque de la droite CD; si par ce point on mène MN parallèle à DE ou à AB, la distance du point M à la droite AB sera égale à AN, puisque l'angle BAN est droit. Or on a $AN > AI$; donc AI est la plus courte distance des lignes données AB, CD.

Soient les perpendiculaires $CA = a$, et $DB = AE = b$,

Douz. éd.

on aura $CE = \sqrt{a^2 + b^2}$; et parce que l'aire du triangle ACE s'exprime également par $\frac{1}{2} AC \times AE$ et par $\frac{1}{2} CE \times AI$, on aura $AI = \frac{AC \times EA}{CE} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. C'est l'expression de la plus courte distance des lignes données.

Si en même temps on fait la distance $AB = c$, et qu'on appelle A l'angle compris entre les deux lignes données, c'est-à-dire l'angle CDE, compris entre la ligne CD et une parallèle DE à la ligne AB, le triangle CDE rectangle en E donnera $\cos CDE = \frac{DE}{CD}$, ou $\cos A = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$; car on a $\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 = a^2 + b^2 + c^2$. De là on tirerait aussi $\sin A = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ et $\cot A = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

NOTE VII.

Sur les polyèdres symétriques.

C'est pour plus de simplicité que nous avons supposé dans la déf. 16, liv. VI, que le plan auquel les polyèdres symétriques sont rapportés, est le plan d'une face : on pourrait supposer que ce plan est un plan quelconque, et alors la définition deviendrait plus générale, sans qu'il y eût rien à changer à la démonstration de la propos. II, par laquelle nous avons établi les relations mutuelles des deux polyèdres. On peut aussi prendre une idée très-juste de la manière d'être de ces deux solides, en regardant l'un des deux comme l'image de l'autre formée dans un miroir plan, lequel tiendra lieu du plan dont nous venons de parler.

NOTE VIII.

Sur la proposition XXV, livre VII.

Ce théorème qu'Euler a démontré le premier dans les Mémoires de Pétersbourg, année 1758, offre plusieurs conséquences qui méritent d'être développées.

1^o Soit a le nombre des triangles, b le nombre des qua-

drilateres, c le nombre des pentagones, etc. qui composent la surface d'un polyèdre; le nombre total des faces sera $a + b + c + d + \text{etc.}$, et le nombre total de leurs côtés sera $3a + 4b + 5c + 6d + \text{etc.}$. Ce dernier nombre est double de celui des arêtes, puisque la même arête appartient à deux faces, ainsi on aura

$$H = a + b + c + d + \text{etc.}$$

$$2A = 3a + 4b + 5c + 6d + \text{etc.}$$

Et puisque, suivant le théorème dont il s'agit, $S + H = A + 2$, on en tire

$$2S = 4 + a + 2b + 3c + 4d + \text{etc.}$$

Une première remarque que fournissent ces valeurs, c'est que le nombre des faces impaires $a + c + e + \text{etc.}$ est toujours pair.

On peut faire pour abrégé $\omega = b + 2c + 3d + \text{etc.}$, et alors on aura

$$A = \frac{3}{2}H + \frac{1}{2}\omega,$$

$$S = 2 + \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}\omega.$$

Ainsi dans tout polyèdre on a toujours $A > \frac{3}{2}H$, et $S > 2 + \frac{1}{2}H$, où il faut observer que le signe $>$ n'exclut pas l'égalité, attendu qu'on pourrait avoir $\omega = 0$.

Le nombre de tous les angles plans du polyèdre est $2A$, celui des angles solides est S , de sorte que le nombre moyen des angles plans qui forment chaque angle solide, est $\frac{2A}{S}$.

Ce nombre ne peut être moindre que 3, puisqu'il faut au moins trois angles plans pour former un angle solide; ainsi on doit avoir $2A > 3S$, le signe $>$ n'excluant pas l'égalité. Si on met au lieu de A et S leurs valeurs en H et ω , on aura $3H + \omega > 6 + \frac{3}{2}H + \frac{3}{2}\omega$, ou $3H > 12 + \omega$. Remettant les valeurs de H et ω en $a, b, c, \text{etc.}$, il en résultera

$$3a + 2b + c > 12 + e + 2f + 3g + \text{etc.}$$

d'où l'on voit que a, b, c , ne peuvent pas être zéro à-la-fois, et qu'ainsi il n'existe aucun polyèdre dont toutes les faces aient plus de cinq côtés.

Puisqu'on a $H > 4 + \frac{1}{3}\omega$, la substitution dans les valeurs de S et de A donnera $S > 4 + \frac{2}{3}\omega$, et $A > 6 + \omega$. Mais en même temps on a $\omega < 3H - 12$; et de là il résulte $S < 2H - 4$,

et $A < 3H - 6$, où l'on se souviendra que les signes $>$ et $<$ n'excluent pas l'égalité. Ces limites ont lieu généralement dans tous les polyèdres.

2° Supposons $2A > 4S$, ce qui convient à une infinité de polyèdres, et nommément à ceux dont tous les angles solides sont formés de quatre plans ou plus, on aura dans ce cas $H > 8 + \omega$, ou, en faisant la substitution,

$$a > 8 + c + 2d + 3e + \text{etc.}$$

Donc il faut que le solide ait au moins huit faces triangulaires; la limite $H > 8 + \omega$ donne $S > 6 + \omega$, et $A > 2 + \omega$. Mais on a en même temps $\omega < H - 8$; et de là résulte $S < H - 2$, $A < 2H - 4$.

3° Supposons $2A > 5S$, ce qui renferme entre autres polyèdres ceux dont tous les angles solides sont au moins quintuples, il en resultera $H > 20 + 3\omega$, ou

$$a > 20 + 2b + 5c + 8d + \text{etc.}$$

Et on aura en même temps $S > 12 + 2\omega$, et $A > 30 + 5\omega$; enfin de ce que $\omega < \frac{1}{3}(H - 20)$, on tire les limites $S < \frac{2}{3}(H - 2)$, $A < \frac{5}{3}(H - 2)$.

On ne peut supposer $2A = 6S$; car on a en général $2A + 2\omega + 12 = 6S$; donc il n'y a aucun polyèdre dont tous les angles solides soient formés de six angles plans ou plus; et en effet la moindre valeur qu'aurait chaque angle plan, l'un portant l'autre, serait l'angle d'un triangle équilatéral, et six de ces angles feraient quatre angles droits, ce qui est trop grand pour un angle solide.

4° Considérons un polyèdre dont toutes les faces soient triangulaires, on aura $\omega = 0$, ce qui donnera $A = \frac{3}{2}H$, et $S = 2 + \frac{1}{2}H$. Supposons en outre que tous les angles solides du polyèdre soient en partie quintuples, en partie sextuples; soit p le nombre des angles solides quintuples, q celui des sextuples, on aura $S = p + q$ et $2A = 5p + 6q$, ce qui donne $6S - 2A = p$; mais on a d'ailleurs $A = \frac{3}{2}H$, et $S = 2 + \frac{1}{2}H$; donc $p = 6S - 2A = 12$. Donc si un polyèdre a toutes ses faces triangulaires, et que ses angles solides soient en partie quintuples, en partie sextuples, les angles solides quintuples seront toujours au nombre de 12. Les sextuples peuvent être en nombre quelconque: ainsi, en laissant q indéterminé, on aura dans tous ces solides $S = 12 + q$, $H = 20 + 2q$, $A = 30 + 3q$.

Nous terminerons ces applications par la recherche du nombre de conditions ou données nécessaires pour déterminer un polyèdre; question intéressante, et qu'il ne paraît pas qu'on ait encore résolue.

Supposons d'abord que le polyèdre soit d'une espèce déterminée, c'est-à-dire qu'on connaisse le nombre de ses faces, le nombre de leurs côtés individuellement, et leur disposition les unes à l'égard des autres. On connaît donc les nombres H , S , A , ainsi que a , b , c , d , etc.; il ne s'agit plus que d'avoir le nombre de données effectives, lignes ou angles, par le moyen desquelles le polyèdre peut être construit et déterminé.

Considérons une des faces du polyèdre que nous prendrons pour sa base. Soit n le nombre de ses côtés; il faudra $2n - 3$ données pour déterminer cette base. Les angles solides hors de la base sont au nombre de $S - n$; le sommet de chaque angle exige trois données pour sa détermination; ainsi la position de $S - n$ sommets exigerait $3S - 3n$ données, auxquelles ajoutant les $2n - 3$ de la base, on aurait en tout $3S - n - 3$. Mais ce nombre est en général trop grand, il doit être diminué du nombre de conditions nécessaires pour que les sommets qui répondent à une même face soient dans un même plan. Nous avons appelé n le nombre de côtés de la base, appelons de même n' , n'' , etc. les nombres de côtés des autres faces. Trois points déterminent un plan; ainsi ce qui se trouvera de plus que 3 dans chacun des nombres n' , n'' , etc. donnera autant de conditions pour que les différents sommets soient situés dans les plans des faces auxquelles ils appartiennent, et le nombre total de ces conditions sera égal à la somme $(n' - 3) + (n'' - 3) + (n''' - 3) + \text{etc.}$ Mais le nombre des termes de cette suite est $H - 1$, et d'ailleurs $n + n' + n'' + \text{etc.} = 2A$: donc la somme de la suite sera $2A - n - 3(H - 1)$. Retranchant cette somme de $3S - n - 3$, il restera $3S - 2A + 3H - 6$, quantité qui, à cause de $S + H = A + 2$, se réduit à A . Donc le nombre de données nécessaires pour déterminer un polyèdre, parmi tous ceux de la même espèce, est égal au nombre de ses arêtes.

Remarquez cependant que les données dont il s'agit ne

doivent pas être prises au hasard parmi les lignes et les angles qui constituent les éléments du polyèdre; car, quoiqu'on eût autant d'équations que d'inconnues, il pourrait se faire que certaines relations entre les quantités connues rendissent le problème indéterminé. Ainsi il semblerait, d'après le théorème qu'on vient de trouver, que la connaissance des arêtes seules suffit en général pour déterminer un polyèdre; mais il y a des cas où cette connaissance n'est pas suffisante. Par exemple, étant donné un prisme non triangulaire quelconque, on pourra former une infinité d'autres prismes qui auront des arêtes égales et placées de la même manière. Car, dès que la base a plus de trois côtés, on peut, en conservant les côtés, changer les angles, et donner ainsi à cette base une infinité de formes différentes; on peut aussi changer la position de l'arête longitudinale du prisme par rapport au plan de la base, enfin on peut combiner ces deux changements l'un avec l'autre; et il en résultera toujours un prisme dont les arêtes ou côtés n'auront pas changé. D'où l'on voit que les arêtes seules ne suffisent pas dans ce cas pour déterminer le solide.

Les données qu'il convient de prendre pour déterminer un solide, sont celles qui ne laissent aucune indétermination, et qui ne donnent absolument qu'une solution. Et d'abord la base ABCDE sera déterminée entre autres manières, si on connaît le côté AB, avec les angles adjacents BAC, ABC, pour le point C; les angles BAD, ABD, pour le point D, et ainsi des autres. Soit ensuite M un point dont il faut déterminer la position hors du plan de la base; ce point sera déterminé, si, en imaginant la pyramide MABC, ou seulement le plan MAB, on connaît les angles MAB, ABM, et l'inclinaison du plan MAB sur la base ABC. Si on détermine, par le moyen de trois données pareilles la position de chacun des sommets du polyèdre hors du plan de la base, il est clair que le polyèdre sera déterminé absolument et d'une manière unique, de sorte que deux polyèdres construits avec les mêmes données seront nécessairement égaux; ils seraient cependant symétriques l'un de l'autre, s'ils étaient construits de différents côtés du plan de la base.

fig. 281.

Il n'est pas toujours nécessaire d'avoir trois données pour déterminer chaque sommet d'un polyèdre ; car si le point M doit se trouver sur un plan déjà déterminé dont l'intersection avec la base soit FG, il suffira, après avoir pris FG à volonté, de connaître les angles MGF, MFG ; ainsi il faudra une donnée de moins. Si le point M doit se trouver sur deux plans déjà déterminés, ou sur leur intersection commune MK qui rencontre le plan ABC en K, on connaîtra déjà le côté AK, l'angle AKM, et l'inclinaison du plan AKM sur la base ; il suffira donc d'avoir pour nouvelle donnée l'angle MAK. C'est ainsi que le nombre de données nécessaires pour déterminer un polyèdre absolument et d'une manière unique, se réduira toujours au nombre de ses arêtes A.

Le côté AB et un nombre $A - 1$ d'angles donnés déterminent un polyèdre ; un autre côté à volonté et les mêmes angles détermineront un polyèdre semblable. D'où il suit que *le nombre de conditions nécessaires pour que deux polyèdres de la même espèce soient semblables, est égal au nombre des arêtes moins un.*

La question qu'on vient de résoudre serait beaucoup plus simple si on ne connaissait pas l'espèce du polyèdre, mais seulement le nombre de ses angles solides S. Déterminez alors trois sommets à volonté par le moyen d'un triangle où il y aura trois données ; ce triangle sera regardé comme la base du solide, ensuite les sommets hors de cette base seront au nombre de $S - 3$; et la détermination de chacun d'eux exigeant trois données, il est clair que le nombre total de données nécessaires pour déterminer le polyèdre, sera $3 + 3(S - 3)$, ou $3S - 6$.

Il faudra donc $3S - 7$ conditions pour que deux polyèdres qui ont un égal nombre S d'angles solides soient semblables entre eux.

NOTE IX.

Sur les polyèdres réguliers. (Voyez l'appendice au livre VII.)

Nous nous sommes attachés dans la proposition II de cet appendice à démontrer l'existence des cinq polyèdres régu-

liers, c'est-à-dire, la possibilité d'arranger un certain nombre de plans égaux de manière qu'il en résulte un solide uniforme dans toute son étendue. Il nous a paru que dans d'autres ouvrages on suppose cet arrangement existant, sans trop en rendre raison; ou bien on ne le démontre, comme a fait Euclide, que par des figures compliquées et difficiles à entendre.

Le problème de déterminer l'inclinaison de deux faces adjacentes du polyèdre, et celui de déterminer les rayons des sphères inscrite et circonscrite, sont réduits dans les problèmes III et IV à des constructions fort simples; mais il ne sera pas inutile d'appliquer à ces mêmes problèmes le calcul trigonométrique qui fournira d'ailleurs de nouvelles propositions.

fig. 222. Soient a, b, c , les trois angles plans qui composent l'angle solide O, et soit proposé de trouver l'inclinaison des plans où sont les angles a et b , on décrira du centre O le triangle sphérique ABC, dans lequel on connaîtra les trois côtés $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, et il faudra trouver l'angle C compris entre les côtés a et b . Or, par les formules connues, on a $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$. Cette formule appliquée aux cinq polyèdres réguliers, va nous faire connaître l'inclinaison de deux faces adjacentes dans chacun de ces solides.

fig. 43. Dans le tétraèdre, les trois angles plans qui composent l'angle solide S, sont des angles de triangles équilatéraux; soit donc la demi-circonférence ou l'arc de $200^\circ = \pi$, on aura $a = b = c = \frac{1}{2}\pi$; donc $\cos C = \frac{\cos a - \cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{\cos a (1 - \cos a)}{1 - \cos^2 a} = \frac{\cos a}{1 + \cos a}$; mais on sait que $\cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$, donc $\cos C = \frac{1}{3}$.

fig. 244. Dans l'hexaèdre ou cube, les trois angles plans qui forment l'angle solide A, sont des angles droits; ainsi on a $a = b = c = \frac{1}{2}\pi$, et $\cos a = 0$, donc $\cos C = 0$. Donc l'angle de deux faces adjacentes est un angle droit.

fig. 245. Dans l'octaèdre, si l'on fait $a = DAS = \frac{1}{3}\pi$, $b = DAT = \frac{1}{3}\pi$, $c = TAS = \frac{1}{2}\pi$, on aura $\cos C = \frac{\cos \frac{1}{2}\pi - \cos^2 \frac{1}{3}\pi}{\sin^2 \frac{1}{3}\pi}$

Or, $\cos \frac{1}{2} \pi = 0$, $\cos \frac{1}{3} \pi = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{1}{3} \pi = \frac{1}{2} \sqrt{3}$; donc $\cos C = -\frac{1}{2}$. D'où l'on voit que l'inclinaison des faces de l'octaèdre et l'inclinaison des faces du tétraèdre sont deux angles suppléments l'une de l'autre.

Dans le dodécaèdre, un angle solide est formé de trois angles plans égaux, chacun, à l'angle d'un pentagone régulier; ainsi, en faisant $a = b = c = \frac{3}{5} \pi$, on aura

$$\cos C = \frac{\cos a}{1 + \cos a}; \text{ mais } \cos \frac{3}{5} \pi = -\sin \frac{1}{5} \pi = \frac{1 - \sqrt{5}}{4},$$

$$\text{donc } \cos C = \frac{1 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \sin C = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ et } \tan C = -2.$$

Dans l'icosaèdre, il faut faire $c = C' B' D' = \frac{3}{5} \pi$, $a =$ fig. 247.

$$b = C' B' A' = \frac{1}{3} \pi, \text{ et on aura } \cos C = \frac{\cos \frac{3}{5} \pi - \cos^2 \frac{1}{3} \pi}{\sin^2 \frac{1}{3} \pi} =$$

$$\frac{\frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}) - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{-\sqrt{5}}{3}; \text{ donc } \sin C = \frac{2}{3}. \text{ Telles sont les}$$

expressions très-simples par lesquelles on détermine l'inclinaison de deux faces dans les cinq polyèdres réguliers. Mais nous remarquerons qu'on aurait pu les comprendre dans une seule et même formule.

En effet, soit n le nombre de côtés de chaque face, m le nombre d'angles plans qui se réunissent dans chaque angle solide; si du centre O et d'un rayon $= 1$, on décrit une surface sphérique qui rencontre en p, q, r , les lignes OA, OC, OD , on aura un triangle sphérique pqr , dans lequel on connaît l'angle droit r , l'angle $p = \frac{\pi}{m}$, et l'angle $q = \frac{\pi}{n}$;

on aura donc, par les formules connues, $\cos q r = \frac{\cos p}{\sin q}$

Mais $\cos q r = \cos COD = \sin CDO = \sin \frac{1}{2} C$, C dési-

gnant l'angle CDE; donc $\sin \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}}$. Formule générale

qui, appliquée successivement aux cinq polyèdres, donnerait les mêmes valeurs de $\cos C$ ou de $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} C$

qu'on a trouvées par une autre voie; pour cela, il faut substituer, dans chaque cas, les valeurs de m et n , savoir :

Tétraèdre, Hexaèdre, Octaèdre, Dodécaèdre, Icosaèdre.

$$\begin{array}{cccccc} m = & 3 & , & 3 & , & 4 & , & 3 & , & 5. \\ n = & 3 & , & 4 & , & 3 & , & 5 & , & 3. \end{array}$$

Le même triangle sphérique pqr , d'où l'on vient de déduire l'inclinaison de deux faces adjacentes, donne

$$\cos pq = \cot p \cot q, \text{ ou } \frac{CO}{OA} = \cot \frac{\pi}{m} \cot \frac{\pi}{n}. \text{ Donc, si on}$$

appelle R le rayon de la sphere circonscrite au polyèdre, et r le rayon de la sphere inscrite dans le même polyèdre,

$$\text{on aura } \frac{R}{r} = \tan \frac{\pi}{m} \tan \frac{\pi}{n}; \text{ d'ailleurs, en faisant le côté}$$

$$AB = a, \text{ on a } CA = \frac{\frac{1}{2}a}{\sin \frac{\pi}{n}}, \text{ et par conséquent } R^2 = r^2 +$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2}{\sin^2 \frac{\pi}{n}}. \text{ Ces deux équations donneront pour chaque polyèdre,}$$

les valeurs des rayons R et r des spheres circonscrite et inscrite. On a aussi, en supposant C connu, $r = \frac{1}{2}a \cot \frac{\pi}{n}$

$$\tan \frac{1}{2}C \text{ et } R = \frac{1}{2}a \tan \frac{\pi}{m} \tan \frac{1}{2}C.$$

Dans le dodécaèdre et l'icosaèdre, on voit que le rapport

$$\frac{R}{r} \text{ a la même valeur } \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{5}. \text{ Donc, si } R \text{ est le même}$$

pour tous les deux, r sera aussi le même; c'est-à-dire, que si ces deux solides sont inscrits dans une même sphere, ils seront aussi circonscrits à une même sphere, et *vice versa*.

La même propriété a lieu entre l'hexaèdre et l'octaèdre,

puisque la valeur de $\frac{R}{r}$ est, pour l'un et pour l'autre,

$$\tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}.$$

Remarquons que les polyèdres réguliers ne sont pas les seuls solides qui soient compris sous des polygones réguliers égaux; car, si on adosse par une face commune deux té-

traèdres réguliers égaux, il en résultera un solide compris sous six triangles égaux et équilatéraux. On pourrait encore former un autre solide avec dix triangles égaux et équilatéraux; mais les polyèdres réguliers sont les seuls qui aient en même temps les angles solides égaux.

NOTE X.

Sur l'aire du triangle sphérique.

Soit 1 le rayon de la sphere, π la demi-circonférence d'un grand cercle; soient a, b, c , les trois côtés d'un triangle sphérique; A, B, C , les arcs de grand cercle qui mesurent les angles opposés. Soit $A + B + C - \pi = S$, suivant ce qui a été démontré dans le texte*, l'aire du triangle sphérique est égale à l'arc S multiplié par le rayon, et ainsi est représentée par S . Or, par les analogies de *Néper*,
 * 23, 7.
 on a :

$$\operatorname{tang} \frac{A+B}{2} : \cot \frac{C}{2} :: \cos \frac{a-b}{2} : \cos \frac{a+b}{2};$$

de là, tirant la valeur de $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B)$, on en déduira aisément celle de $\operatorname{tang} \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \right) = -\cot \frac{1}{2}S$: on aura ainsi

$$\cot \frac{1}{2}S = \frac{\cot \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}b + \cos C}{\sin C},$$

formule très-simple qui peut servir à calculer l'aire d'un triangle sphérique lorsqu'on connaît deux côtés a, b , et l'angle compris C . On peut aussi en déduire plusieurs conséquences remarquables.

1^o Si l'angle C est constant, ainsi que le produit $\cot \frac{a}{2} \cot \frac{b}{2}$, l'aire du triangle sphérique représentée par S ,

demeurera constante. Donc deux triangles CAB, CDE , fig. 282. qui ont un angle égal C , seront équivalents, si on a $\operatorname{tang} \frac{1}{2}CA : \operatorname{tang} \frac{1}{2}CD :: \operatorname{tang} \frac{1}{2}CE : \operatorname{tang} \frac{1}{2}CB$, c'est-à-dire, si les tangentes des moitiés des côtés qui comprennent l'angle égal, sont réciproquement proportionnelles.

2^o Pour faire sur le côté donné CD et avec le même

angle C, un triangle CDE équivalent au triangle donné CAB, il faut déterminer CE par la proportion :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{CD} : \operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{CA} :: \operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{CB} : \operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{CE}.$$

3° Pour faire avec l'angle du sommet C un triangle isocèle DCE équivalent au triangle donné CAB, il faut prendre $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{CD}$, ou $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{CE}$, moyenne proportionnelle entre $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{CA}$ et $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{CB}$.

$$4^{\circ} \text{ La même formule } \cot \frac{1}{2} \text{S} = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C}$$

peut servir à démontrer d'une manière très-simple la proposition XXVI du livre VII; savoir, que de tous les triangles sphériques formés avec deux côtés donnés a et b , le plus grand est celui dans lequel l'angle C compris par les côtés donnés, est égal à la somme des deux autres angles A et B.

fig. 283.

Du rayon $\text{OZ} = 1$ décrivez la demi-circonférence VMZ, faites l'arc $\text{ZX} = C$, et de l'autre côté du centre prenez $\text{OP} = \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b$; enfin joignez PX et abaissez XY perpendiculaire sur PZ.

Dans le triangle rectangle PXY on a $\cot P = \frac{\text{PY}}{\text{XY}} = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C}$; donc $P = \frac{1}{2} \text{S}$; donc la surface S

sera un *maximum*, si l'angle P en est un. Or, il est évident que si on mène PM tangente à la circonférence, l'angle MPO sera le *maximum* des angles P, et alors on aura $\text{MPO} = \text{MOZ} - \frac{1}{2} \pi$. Donc le triangle sphérique, formé avec deux côtés donnés, sera un *maximum* si on a $\frac{1}{2} \text{S} = C - \frac{1}{2} \pi$, ou $C = A + B$, ce qui s'accorde avec la proposition citée.

On voit en même temps, par cette construction, qu'il n'y aurait pas lieu à *maximum* si le point P était au-dedans du cercle, c'est-à-dire, si l'on avait $\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b < 1$. Condition d'où l'on tire successivement $\cot \frac{1}{2} a < \operatorname{tang} \frac{1}{2} b$, $\operatorname{tang} (\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} a) < \operatorname{tang} \frac{1}{2} b$, $\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} a < \frac{1}{2} b$, et enfin $\pi < a + b$, ce qui s'accorde encore avec le scholie de la même proposition.

PROBLÈME I. *Trouver la surface d'un triangle sphérique par le moyen de ses trois côtés.*

Pour cela, il faudra dans la formule

$$\cot \frac{1}{2} S = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C}.$$

substituer les valeurs de $\sin C$ et $\cos C$ exprimées en a, b, c :

$$\text{or, on a } \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \text{ et } \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b =$$

$$\frac{1 + \cos a}{\sin a} \cdot \frac{1 + \cos b}{\sin b}; \text{ de là résulte :}$$

$$\cos C + \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{\sin a \sin b}.$$

Ensuite la valeur de $\cos C$ donne

$$1 + \cos C = \frac{\cos c - \cos(a+b)}{\sin a \sin b} = \frac{2 \sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin a \sin b}$$

$$1 - \cos C = \frac{\cos(a-b) - \cos c}{\sin a \sin b} = \frac{2 \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin a \sin b}.$$

Multipliant ces deux quantités entre elles et extrayant la racine du produit, on aura

$$\sin C = \frac{2 \sqrt{\left(\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2} \right)}}{\sin a \sin b}.$$

Donc enfin

$$\cot \frac{1}{2} S = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{2 \sqrt{\left(\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2} \right)}}.$$

Cette formule résout le problème proposé, mais on peut parvenir à un résultat plus simple.

Pour cela reprenons la formule

$$\cot \frac{1}{2} S = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C},$$

nous en tirerons d'abord $1 + \cot^2 \frac{1}{2} S$, ou

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2} S} = \frac{\cot^2 \frac{1}{2} a \cot^2 \frac{1}{2} b + 2 \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b \cos C + 1}{\sin^2 C}.$$

Or, la valeur de $\cos C$ donne $2 \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{2 \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b}$; mettant dans le numérateur, au lieu de $\cos c$, $\cos a$, $\cos b$, leurs valeurs $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} c$, $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} a$, $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} b$, et réduisant, on aura

$$2 \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b \cos C = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} a + \sin^2 \frac{1}{2} b - \sin^2 \frac{1}{2} c}{\sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b} - 2.$$

$$\text{On a d'ailleurs } \cot^2 \frac{1}{2} a \cdot \cot^2 \frac{1}{2} b = \frac{1 - \sin^2 \frac{1}{2} a}{\sin^2 \frac{1}{2} a} \cdot \frac{1 - \sin^2 \frac{1}{2} b}{\sin^2 \frac{1}{2} b} = \frac{1 - \sin^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2} b}{\sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b} + 1. \text{ Donc, en substituant ces va-}$$

leurs, on aura $\frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2} S} = \frac{1 - \sin^2 \frac{1}{2} c}{\sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b \sin^2 C}$, ce qui donne

$$\sin \frac{1}{2} S = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} c}, \text{ et, en remettant la valeur de}$$

$\sin C$, on a

$$\sin \frac{1}{2} S = \frac{\sqrt{\left(\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2} \right)}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}.$$

Formule commode pour le calcul logarithmique.

Si on multiplie celle-ci par la valeur de $\cot \frac{1}{2} S$, il en résultera

$$\cos \frac{1}{2} S = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} a + \cos^2 \frac{1}{2} b + \cos^2 \frac{1}{2} c - 1}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}.$$

Nouvelle formule qui a l'avantage d'être composée de termes rationnels.

De là on tire encore $\frac{1 - \cos \frac{1}{2} S}{\sin \frac{1}{2} S}$, ou

$$\tan \frac{1}{4} S = \frac{1 - \cos^2 \frac{1}{2} a - \cos^2 \frac{1}{2} b - \cos^2 \frac{1}{2} c + 2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}{\sqrt{\left(\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2} \right)}}$$

Or, le numérateur de cette expression peut se décomposer en facteurs, comme on l'a fait pour une quantité semblable, note V, problème IV; on aura ainsi

$$\tan \frac{1}{4} S = \frac{\frac{1}{4} \sin \frac{a+b+c}{4} \sin \frac{a+b-c}{4} \sin \frac{a+c-b}{4} \sin \frac{b+c-a}{4}}{\sqrt{\left(\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2} \right)}}$$

Mais on a $\frac{\sin \frac{1}{2} p}{\sqrt{\sin p}} = \sqrt{\left(\frac{\sin^2 \frac{1}{2} p}{2 \sin \frac{1}{2} p \cos \frac{1}{2} p} \right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \tan \frac{1}{2} p \right)}$;

donc enfin

$$\tan \frac{1}{4} S = \sqrt{\left(\tan \frac{a+b+c}{4} \tan \frac{a+b-c}{4} \tan \frac{a+c-b}{4} \tan \frac{b+c-a}{4} \right)}$$

Cette formule très-élégante est due à Simon Lhuillier.

PROBLÈME II. *Etant donnés les trois côtés* $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, *fig. 284.*
déterminer la position du point I, pôle du cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit l'angle $ACI=x$, et l'arc $AI=CI=BI=\varphi$; dans les triangles CAI, CBI, on aura par les formules connues

$$\cos x = \frac{\cos \varphi - \cos b \cos \varphi}{\sin b \sin \varphi} = \frac{1 - \cos b}{\sin b} \cot \varphi = \frac{\sin b}{1 + \cos b} \cot \varphi,$$

$$\cos (C-x) = \frac{1 - \cos a}{\sin a} \cot \varphi. \text{ Donc } \frac{\cos (C-x)}{\cos x}, \text{ ou}$$

$$\cos C + \sin C \tan x = \frac{(1 + \cos b)(1 - \cos a)}{\sin a \sin b};$$

substituant dans cette équation les valeurs de $\cos C$ et $\sin C$ exprimées en a, b, c , et faisant, pour abréger,

$$M = \sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c)},$$

$$\text{on en déduira } \tan x = \frac{1 + \cos b - \cos c - \cos a}{M}, \text{ formule}$$

qui détermine l'angle ACI. On peut observer qu'à cause des triangles isocèles ACI, ABI, BCI, on a $ACI = \frac{1}{2}(C+A-B)$; on aurait de même $BCI = \frac{1}{2}(B+C-A)$, $BAI = \frac{1}{2}(A+B-C)$. De là résultent ces formules remarquables :

$$\tan \frac{1}{2}(A+C-B) = \frac{1 + \cos b - \cos a - \cos c}{M}$$

$$\tan \frac{1}{2}(B+C-A) = \frac{1 + \cos a - \cos b - \cos c}{M}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B-C) = \frac{1 + \cos c - \cos a - \cos b}{M},$$

auxquelles on peut joindre celle qui donne $\cot \frac{1}{2}S$, et qui peut se mettre sous la forme :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B+C) = \frac{-1 - \cos a - \cos b - \cos c}{M}.$$

La valeur de $\operatorname{tang} x$ qu'on vient de trouver, donne

$$1 + \operatorname{tang}^2 x \text{ ou } \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2(1 + \cos b)(1 - \cos c)(1 - \cos a)}{M^2}$$

$$= \frac{16 \cos^2 \frac{1}{2}b \sin^2 \frac{1}{2}c \sin^2 \frac{1}{2}a}{M^2}; \text{ donc } \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{4 \cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}a}{M}. \text{ Mais de l'équation}$$

$$\cos x = \frac{1 - \cos b}{\sin b} \cot \varphi = \operatorname{tang} \frac{1}{2}b \cot \varphi, \text{ on tire}$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}b}{\cos x}; \text{ donc } \operatorname{tang} \varphi = \frac{4 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{M}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\sqrt{\left(\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2} \right)}}$$

PROBLÈME III. Déterminer sur la surface de la sphère la ligne sur laquelle sont situés tous les sommets des triangles de même base et de même surface.

fig. 285. Soit ABC l'un des triangles sphériques dont la base commune est $AB=c$, et la surface donnée $A+B+C-\pi=S$. Soit IPK une perpendiculaire indéfinie élevée sur le milieu de AB; ayant pris IP égal au quadrant, P sera le pôle de l'arc AB, et l'arc PCD mené par les points P, C, sera perpendiculaire sur AB. Soit $ID=p$, $CD=q$; les triangles rectangles ACD, BCD, dans lesquels on a $AC=b$, $BC=a$, $AD=p+\frac{1}{2}c$, $BD=p-\frac{1}{2}c$, donneront $\cos a = \cos q \cos(p-\frac{1}{2}c)$, $\cos b = \cos q \cos(p+\frac{1}{2}c)$. Mais on a trouvé ci-dessus :

$$\cot \frac{1}{2}S = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{\sin a \sin b \sin C};$$

substituant dans cette formule les valeurs $\cos a + \cos b =$

$2 \cos q \cos p \cos \frac{1}{2} c$, $1 + \cos c = 2 \cos^2 \frac{1}{2} c$, $\sin b \sin C = \sin c \sin B = 2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c \sin B$; on aura

$$\cot \frac{1}{2} S = \frac{\cos \frac{1}{2} c + \cos p \cos q}{\sin a \sin \frac{1}{2} c \sin B}.$$

D'ailleurs dans le triangle rectangle BCD, on a encore

$$\sin a \sin B = \sin q; \text{ donc } \cot \frac{1}{2} S = \frac{\cos \frac{1}{2} c + \cos p \cos q}{\sin \frac{1}{2} c \sin q},$$

ou $\cos p \cos q = \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c \sin q - \cos \frac{1}{2} c$; c'est la relation entre p et q qui doit déterminer la ligne sur laquelle sont situés tous les points C.

Ayant prolongé IP d'une quantité PK = x , joignez KC et soit KC = y ; dans le triangle PKC, où l'on a PC = $\frac{1}{2} \pi - q$ et l'angle KPC = $\pi - p$, le côté KC se trouvera par la formule $\cos KC = \cos KPC \sin PK \sin PC + \cos PK \cos PC$, ou

$$\cos y = \sin q \cos x - \sin x \cos q \cos p;$$

dans laquelle substituant au lieu de $\cos q \cos p$ sa valeur $\cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c \sin q - \cos \frac{1}{2} c$, on aura

$$\cos y = \sin x \cos \frac{1}{2} c + \sin q (\cos x - \sin x \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c).$$

De là on voit que si l'on prend $\cos x - \sin x \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c = 0$, ou $\cot x = \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c$, on aura $\cos y = \sin x \cos \frac{1}{2} c$, et ainsi la valeur de y deviendra constante.

Donc si après avoir mené l'arc IP perpendiculaire sur le milieu de la base AB, on prend au-delà du pôle la partie PK telle que $\cot PK = \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c$, tous les sommets des triangles qui ont la même base c et la même surface S , seront situés sur le petit cercle décrit du point K comme pôle à la distance KC telle que $\cos KC = \sin PK \cos \frac{1}{2} c$.

Ce beau théorème est dû à Lexell. (Voyez le tome V, part. I des *novæ Acta Petropolitana*.)

NOTE XI.

Sur la proposition III, livre VIII.

Cette proposition peut être démontrée plus rigoureusement en la ramenant aux lemmes préliminaires, de la manière suivante.

Je dis d'abord que la surface convexe terminée par les arêtes AF, BG, et par les arcs A u B, F x G, ne saurait fig. 25a.

Douz. éd.

être plus petite que le rectangle ABGF, partie correspondante de la surface du prisme inscrit.

En effet, soit S la surface convexe dont il s'agit, et soit, s'il est possible, le rectangle ABGF ou $AB \times AF = S + M$, M étant une quantité positive.

Prolongez la hauteur AF du prisme et du cylindre jusqu'à une distance AF' égale à n fois AF, n étant un nombre entier quelconque; si l'on prolonge en même temps le cylindre et le prisme, il est clair que la surface convexe S' comprise entre les arêtes AF', BG', contiendra n fois la surface S; de sorte qu'on aura $S' = nS$, et parce que $n \times AF = AF'$, on aura $AB \times AF' = nS + nM = S' + nM$. Or n étant un nombre entier à volonté et M une surface donnée, on peut prendre n de manière qu'on ait nM plus grand que le double du segment A u B, puisqu'il suffit pour

cela de faire $n > \frac{2 \text{ A u B}}{M}$; donc alors le rectangle $AB \times AF'$

ou la surface plane ABG'F' serait plus grande que la surface enveloppante, composée de la surface convexe S' et de deux segments circulaires égaux A u B, F' x' G'. Or, au contraire, la seconde surface est plus grande que la première, suivant le premier lemme préliminaire; donc, 1^o on ne peut avoir $S < ABGF$.

Je dis en second lieu que la même surface convexe S ne saurait être égale à celle du rectangle ABGF. Car supposons, s'il est possible, qu'en prenant $AE = AB$, la surface convexe AMK soit égale au rectangle AFKE; par un point quelconque M de l'arc AME, menez les cordes AM, ME, et élevez MN perpendiculaire sur le plan de la base. Les trois rectangles AMNF, MEKN, AEKF, ayant même hauteur, sont entre eux comme leurs bases AM, ME, AE. Or on a $AM + ME > AE$, donc la somme des rectangles AMNF, MEKN est plus grande que le rectangle AFKE. Celui-ci est équivalent par hypothèse à la surface convexe AMK, composée des deux surfaces partielles AN, MK. Donc la somme des rectangles AMNF, MEKN est plus grande que la somme des surfaces convexes correspondantes AN, MK. Donc il faudra que l'un au moins des rectangles AMNF, MEKN soit plus grand que la surface convexe

correspondante. Cette conséquence est contraire à la première partie déjà démontrée. Donc, 2^o la surface convexe S ne saurait être égale à celle du rectangle correspondant $ABGF$.

Il suit de là qu'on a $S > ABGF$, et qu'ainsi la surface convexe du cylindre est plus grande que celle de tout prisme inscrit.

Par un raisonnement absolument semblable, on prouvera que la surface convexe du cylindre est plus petite que celle de tout prisme circonscrit.

NOTE XII.

Sur l'égalité et la similitude des polyèdres.

On trouve à la tête du XI^e livre d'Euclide, les définitions 9 et 10 ainsi conçues :

9. *Deux solides sont semblables, lorsqu'ils sont compris sous un même nombre de plans semblables chacun à chacun.*

10. *Deux solides sont égaux et semblables, lorsqu'ils sont compris sous un même nombre de plans égaux et semblables chacun à chacun.*

L'objet de ces définitions étant un des points les plus difficiles des éléments de géométrie, nous l'examinerons avec quelque détail, et nous discuterons en même temps les remarques faites à ce sujet par Robert Simson dans son édition des éléments, pag. 388 et suiv.

D'abord nous observerons avec Robert Simson que la définition 10 n'est pas proprement une définition, mais bien un théorème qu'il faudrait démontrer; car il n'est pas évident que deux solides soient égaux par cela seul qu'ils ont les faces égales; et si cette proposition est vraie, il faut la démontrer soit par la superposition, soit de toute autre manière. On voit ensuite que le vice de la définition 10 est commun à la définition 9. Car, si la définition 10 n'est pas démontrée, on pourra croire qu'il existe deux solides inégaux et dissemblables dont les faces sont égales; mais alors, suivant la définition 9, un troisième solide qui aurait les faces semblables à celles des deux premiers serait semblable à chacun d'eux, et ainsi serait semblable à deux

corps de différente forme, conclusion qui implique contradiction, ou du moins qui ne s'accorde pas avec l'idée qu'on attache naturellement au mot *semblable*.

Plusieurs propositions des XI^e et XII^e livres d'Euclide sont fondées sur les définitions 9 et 10, entre autres la proposition XXVIII, livre XI, de laquelle dépend la mesure des prismes et des pyramides. Il semble donc qu'on pourrait reprocher aux éléments d'Euclide de contenir un assez grand nombre de propositions qui ne sont pas rigoureusement démontrées. Mais il y a une circonstance qui sert à affaiblir cette inculpation, et qu'il ne faut pas omettre.

Les figures dont Euclide démontre l'égalité ou la similitude en se fondant sur les définitions 9 et 10, sont telles, que leurs angles solides n'assemblent pas plus de trois angles plans : or, si deux angles solides sont composés de trois angles plans égaux chacun à chacun, il est démontré assez clairement dans plusieurs endroits d'Euclide que ces angles solides sont égaux. D'un autre côté, si deux polyèdres ont les faces égales ou semblables chacune à chacune, les angles solides homologues seront composés d'un même nombre d'angles plans égaux, chacun à chacun. Donc, tant que les angles plans ne sont pas en plus grand nombre que trois dans chaque angle solide, il est clair que les angles solides homologues sont égaux. Mais, si les faces homologues sont égales et les angles solides homologues égaux, il n'y a plus de doute que les solides ne soient égaux ; car ils pourront être superposés, ou au moins ils seront symétriques l'un de l'autre. On voit donc que l'énoncé des définitions 9 et 10 est vrai et admissible, au moins dans le cas des angles solides triples, qui est le seul dont Euclide ait fait usage. Ainsi le reproche d'inexactitude qu'on pourrait faire à cet auteur, ou à ses commentateurs, cesse d'être aussi grave et ne tombe plus que sur des restrictions et des explications qu'il n'a pas données.

Il reste à examiner si l'énoncé de la définition 10, qui est vrai dans le cas des angles solides triples, est vrai en général. Robert Simson assure qu'il ne l'est pas, et qu'on peut construire deux solides inégaux qui seront compris

sous un même nombre de faces égales chacune à chacune. Il cite, à l'appui de son assertion, un exemple qu'on peut généraliser ainsi.

Si à un polyèdre quelconque on ajoute une pyramide, en lui donnant pour base une des faces du polyèdre; si ensuite, au lieu d'ajouter la pyramide, on la retranche, en formant dans le polyèdre une cavité égale à la pyramide, on aura ainsi deux nouveaux solides qui auront les faces égales chacune à chacune, et cependant ces deux solides seront inégaux.

Il n'y a aucun doute sur l'inégalité des deux solides ainsi construits; mais nous observerons que l'un de ces solides contient des angles solides rentrants: or, il est plus que probable qu'Euclide a entendu exclure les corps irréguliers qui ont des cavités ou des angles solides rentrants, et qu'il s'est borné aux polyèdres convexes. En admettant cette restriction, sans laquelle d'ailleurs d'autres propositions ne seraient pas vraies, l'exemple de Robert Simson ne conclut point contre la définition ou le théorème d'Euclide.

Quoi qu'il en soit, il résulte de toutes ces observations que les définitions 9 et 10 d'Euclide ne peuvent être conservées telles qu'elles sont. Robert Simson supprime la définition des solides égaux, qui en effet ne doit trouver place que parmi les théorèmes; et il définit *solides semblables* ceux qui sont compris sous un même nombre de plans semblables, et qui ont les angles solides égaux chacun à chacun. Cette définition est vraie, mais elle a l'inconvénient de contenir bien des conditions superflues. Si on supprimait la condition des angles solides égaux, on retomberait dans l'énoncé d'Euclide, qui est défectueux en ce qu'il suppose la démonstration du théorème sur les polyèdres égaux. Pour éviter tout embarras, nous avons cru à propos de diviser la définition des solides semblables en deux parties: d'abord nous avons donné la définition des pyramides triangulaires semblables, ensuite nous avons défini *solides semblables* ceux qui ont des bases semblables, et dont les sommets homologues hors de ces bases sont déterminés par des pyramides triangulaires semblables chacune à chacune.

Cette définition exige pour les bases, en les supposant triangulaires, deux conditions, et pour chacun des sommets hors des bases, trois conditions; de sorte que, si S est le nombre des angles solides de chacun des polyèdres, la similitude de ces deux polyèdres exigera $2 + 3(S - 3)$ angles égaux de part et d'autre, ou $3S - 7$ conditions; et aucune de ces conditions n'est superflue ou comprise dans les autres. Car nous considérons ici deux polyèdres comme ayant simplement le même nombre de sommets ou d'angles solides; alors il faut rigoureusement, et sans en omettre une, les $3S - 7$ conditions pour que les deux solides soient semblables; mais si on supposait avant tout qu'ils sont de la même espèce l'un et l'autre, c'est-à-dire qu'ils ont un égal nombre de faces, et que ces faces comparées chacune à chacune ont un égal nombre de côtés, cette supposition renfermerait des conditions dans le cas où il y aurait des faces de plus de trois côtés, et ces conditions diminueraient d'autant le nombre $3S - 7$, de sorte qu'au lieu de $3S - 7$ conditions il n'en faudrait plus que $A - 1$; sur quoi voyez la note VIII. On voit par là ce qui donne lieu à la difficulté de poser une bonne définition des solides semblables; c'est qu'on peut les considérer comme étant de la même espèce, ou seulement comme ayant un égal nombre d'angles solides. Dans ce dernier cas toute difficulté est écartée, et il faut que les $3S - 7$ conditions renfermées dans la définition soient remplies toutes pour que les solides soient semblables, et on en conclura à plus forte raison qu'ils sont de la même espèce. Au reste, notre définition étant complète, nous en avons déduit comme théorème la définition de Robert Simson.

On voit donc qu'il est possible de se passer, dans les éléments, du théorème concernant l'égalité des polyèdres; mais, comme ce théorème est intéressant par lui-même, on sera bien aise d'en trouver ici la démonstration, qui servira à compléter la théorie des polyèdres (1).

(1) La démonstration que nous donnons ici est, à quelques développements près, la même que M. Cauchy a présentée à l'Institut en 1812, et qu'il a déconverte en partant de quelques idées qui

La question qu'il faut examiner, est de savoir si, en faisant varier les inclinaisons des plans qui composent la surface d'un polyèdre convexe donné, on peut former un second polyèdre convexe, compris sous les mêmes plans polygonaux, assemblés entre eux dans le même ordre.

Nous observerons d'abord que, s'il y a un second polyèdre qui satisfait à la question, ce ne peut pas être le polyèdre symétrique du polyèdre donné, puisque dans ces deux polyèdres les plans égaux sont disposés dans un ordre inverse autour des angles solides correspondants. Ainsi la considération des polyèdres symétriques doit être entièrement écartée de l'objet dont nous nous occupons.

Nous observerons, en second lieu, que si le polyèdre donné contient un ou plusieurs angles solides triples, ces angles sont de leur nature invariables, puisque la connaissance de trois angles plans suffit pour déterminer les inclinaisons mutuelles de ces plans, lorsqu'ils sont réunis en angle solide. On peut donc supprimer dans le solide proposé toutes les pyramides triangulaires qui forment les angles solides triples (1); et si le nouveau polyèdre qui résulte de cette suppression, offre encore des angles solides triples, on pourra de même les supprimer, et ainsi successivement, jusqu'à ce qu'on parvienne à un polyèdre dont tous les angles solides n'assemblent pas moins de quatre angles plans chacun. En effet, si le solide proposé peut changer de figure par des variations quelconques dans les inclinaisons de ses plans, ce changement ne peut avoir lieu sur les pyramides triangulaires retranchées, et il devra s'opérer tout entier sur le polyèdre restant après la suppression de toutes les pyramides triangulaires. Nous ne nous occuperons donc dans ce qui suit, que des polyèdres dont tous les angles solides assemblent au moins quatre angles plans.

Cela posé, soit S l'un quelconque des angles solides du fig. 286.

avaient été proposées pour le même objet dans la première édition de ces *Eléments*, pag. 327 et suiv.

(1) Si une même arête était commune à deux angles solides triples, on ne supprimerait dans la première opération qu'un de ces angles.

polyèdre, et soit décrit, du sommet S comme centre, une surface sphérique dont l'intersection avec les plans de l'angle solide formera le polygone sphérique ABCDEF. Les côtés de ce polygone AB, BC, etc. servent de mesure aux angles plans ASB, BSC, etc. et sont par conséquent invariables; quant aux angles A, B, C, etc. du polygone, chacun d'eux est la mesure de l'inclinaison de deux plans adjacents de l'angle solide: ainsi l'angle B est la mesure de l'inclinaison des plans ASB, SBC, que nous appellerons, pour abrégé, *inclinaison sur l'arête SB*; de même l'angle C est la mesure de l'inclinaison sur l'arête SC, et ainsi de suite.

Nous pourrions donc juger des changements de figure de chaque angle solide S, par ceux du polygone sphérique ABCDEF, dont les côtés sont constants, et dont les angles varient d'une manière quelconque, pourvu que le polygone ne cesse pas d'être convexe. Or, dans ces polygones, les signes des variations sur les angles offrent des lois assez remarquables, que nous allons exposer dans les deux lemmes suivants.

LEMME I.

fig. 286.

Tous les côtés d'un polygone sphérique AB, BC, CD, DE, étant donnés, à l'exception du dernier AF, si l'on fait varier l'un des angles B, C, D, E, opposés au côté AF, les autres étant constants, je dis que le côté AF augmentera si l'angle augmente, et qu'il diminuera si l'angle diminue. Dans tous les cas, on suppose que le polygone est convexe avant et après son changement de figure.

Supposons d'abord qu'on fasse varier l'angle B, les trois autres C, D, E, étant constants, si l'on joint BF, la figure BCDEF n'éprouvera aucune variation, et BF sera constant. On aura donc un triangle sphérique ABF, dont les côtés AB, BF, sont constants, et dans lequel l'angle ABF varie d'une même quantité que l'angle ABC du polygone, puisque la partie FBC reste constante. Or, par les propriétés con-

nues (1), on sait que le côté AF augmentera si l'angle ABF augmente, et qu'il diminuera si l'angle ABF diminue.

Supposons maintenant que l'angle C varie, les trois autres B, D, E, étant constants; si on tire les diagonales AC, FC, il est visible que ces diagonales demeureront constantes, ainsi que les angles ACB, FCD; on aura donc encore un triangle sphérique ACF, dont les côtés AC, CF, sont constants, et dans lequel l'angle ACF varie de la même quantité que l'angle C du polygone; d'où l'on conclura de même que le côté AF augmentera si l'angle C augmente, et qu'il diminuera si l'angle C diminue.

Il est évident que le même raisonnement peut s'appliquer à la variation de l'un ou l'autre des angles D et E, et qu'il aurait également lieu pour tout autre polygone sphérique de plus de trois côtés. Ainsi la conclusion sera, dans tous les cas, conforme à l'énoncé de la proposition, si toutefois le polygone est convexe avant et après son changement de figure. Cette restriction est nécessaire, car si l'angle E, par exemple, diminuait jusqu'à ce que le point F tombât sur la diagonale AE, alors AF serait un *minimum*; et si, à compter de ce point, on continuait de diminuer l'angle E, il est visible que le côté AF augmenterait au lieu de diminuer; mais, dans ce dernier cas, l'angle AFE deviendrait un angle rentrant, et le polygone cesserait d'être convexe.

Corollaire. Les mêmes choses étant posées, si plusieurs des angles opposés au dernier côté AF augmentent, et qu'aucun d'eux ne diminue, le côté AF augmentera nécessairement par l'effet de toutes les variations réunies. Le contraire aura lieu, si plusieurs des angles opposés au côté AF diminuent, et qu'aucun d'eux n'augmente.

Car, si par l'effet de l'augmentation ou de la diminution simultanée, les angles A, B, C, etc. du polygone doivent être changés en A', B', C', etc. on pourra passer successivement du polygone proposé à celui qui ne contient qu'un angle varié A'; de celui-ci au polygone qui ne contient que

(1) Cette proposition se démontre de la même manière que la proposition X, liv. I, pour les triangles rectilignes.

les deux angles variés A' et B' , et ainsi de suite. Or, dans chacun de ces passages, l'application de la proposition est manifeste, et conduit toujours au même résultat.

LEMME II.

Etant donné un polygone sphérique convexe dont les côtés sont constants, et qui en a plus de trois, si on fait varier les angles d'une manière quelconque, sans cependant que le polygone cesse d'être convexe; si on met ensuite le signe $+$ au sommet de chaque angle qui augmente, le signe $-$ au sommet de chaque angle qui diminue, et qu'on ne mette aucun signe aux angles qui demeurent constants; je dis qu'en faisant le tour du polygone, on devra trouver au moins quatre changements de signe d'un sommet au sommet suivant.

En effet, 1^o si n est le nombre des angles du polygone, il ne pourrait y avoir $n - 2$ angles consécutifs, qui augmentent tous à-la-fois, ou dont les uns augmentent et les autres restent constants; car si l'un ou l'autre de ces cas avait lieu, il s'ensuivrait, par le corollaire du lemme précédent, que le côté du polygone qui est opposé à ces $n - 2$ angles, augmenterait; ce qui est contraire à l'hypothèse que tous les côtés du polygone sont constants. Par une raison semblable, on ne pourra supposer que $n - 2$ angles consécutifs diminuent tous à-la-fois, ou que quelques-uns diminuent, les autres restant constants. Donc, dans la série de $n - 2$ angles consécutifs, il devra y avoir au moins un changement de signe; à plus forte raison ce changement devra-t-il être observé dans la série des n angles consécutifs, lorsqu'on fera le tour entier du polygone.

2^o Les variations dans les angles du polygone ne peuvent être telles, qu'elles offrent seulement une série de signes $+$, et une de signes $-$, de sorte qu'il n'y ait que deux changements de signe dans le tour entier du polygone.

fig. 287.

Car soient, par exemple, A, B, C , les trois angles marqués du signe $+$, et D, E, F, G , les quatre marqués du signe $-$ (cette hypothèse comprend celle où il y aurait un

nombre de signes moindre dans chaque série, à raison de l'invariabilité de quelques angles). Si la figure représente l'état initial du polygone, la diagonale GD devra augmenter lorsqu'on augmentera tous les angles A, B, C, ou seulement quelques-uns d'eux; mais la même diagonale GD, comme appartenant au polygone GFED, dont les autres côtés sont constants, devra diminuer en même temps que les angles F et E, ou au moins rester constante, si des quatre angles D, E, F, G, il n'y a que D et G, ou seulement l'un d'eux qui diminue; donc l'hypothèse dont il s'agit ne saurait avoir lieu; donc la variation des angles ne peut être telle, qu'elle offre seulement deux séries, l'une de signes +, l'autre de signes —.

3° Il est encore impossible qu'en faisant le tour du polygone, on ne trouve que trois séries alternatives de signes + et de signes —; car, dans cette hypothèse, la première et la troisième série seraient de même signe, et se suivraient immédiatement, de sorte qu'elles ne formeraient qu'une seule série; d'où l'on voit qu'il n'y aurait réellement dans le tour du polygone que deux séries, l'une de signes +, autre de signes —; ce que nous avons démontré impossible.

Donc enfin, les changements de signe qu'on trouvera en faisant le tour du polygone, doivent être au moins au nombre de quatre.

Corollaire. Ce que nous venons de démontrer pour les polygones sphériques, s'applique immédiatement aux angles solides dont ces polygones sont la mesure. Ainsi, *étant donné un angle solide convexe, qui assemble plus de trois angles plans, si on fait varier les inclinaisons sur les arêtes d'une manière quelconque, telle cependant que l'angle solide ne cesse pas d'être convexe; si ensuite on met le signe + ou le signe — sur chaque arête, selon que l'inclinaison sur cette arête augmente ou diminue, et qu'on ne marque d'aucun signe les arêtes sur lesquelles l'inclinaison reste constante, je dis qu'en faisant le tour de l'angle solide, on devra trouver au moins quatre changements de signe d'une arête à la suivante.*

Au moyen de cette proposition et du théorème d'Euler

*25, 7. sur les polyèdres *, nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant dans toute sa généralité.

THÉORÈME.

Etant donné un polyèdre convexe, dont tous les angles solides assemblent plus de trois angles plans, il est impossible de faire varier les inclinaisons des plans de ce solide, de manière à produire un second polyèdre, qui serait formé avec les mêmes plans disposés entre eux de la même manière que dans le polyèdre donné.

Pour démontrer cette proposition, il faut distinguer deux cas, selon qu'on fait varier les inclinaisons sur toutes les arêtes, ou seulement quelques-unes de ces inclinaisons.

Premier cas.

Supposons qu'on fasse varier à-la-fois les inclinaisons sur toutes les arêtes, et soit N le nombre total des changements de signe qu'on trouvera d'une arête à la suivante, en faisant le tour de chaque angle solide.

On a vu dans le lemme II, que le nombre des changements de signe ne peut être moindre que quatre pour chaque angle solide.

Donc si on appelle S le nombre des angles solides, on aura $N > 4S$, le signe $>$ n'excluant pas l'égalité.

J'observe maintenant que deux arêtes consécutives d'un angle solide appartiennent toujours à une face du polyèdre, et n'appartiennent qu'à une seule; donc le nombre total des changements de signe observés sur les arêtes consécutives de chaque angle solide, doit être égal au nombre total de changements de signe observés sur les côtés consécutifs de chaque face; car il n'est aucun changement de signe dans un système qui ne réponde à un pareil changement dans l'autre.

Or, pour chaque face triangulaire, le nombre des changements de signe ne peut être plus grand que deux; car en faisant rentrer sur elle-même la suite $+ - +$, ou la suite $+ - -$, on n'obtient que deux changements de signe.

Pour chaque face quadrangulaire, le nombre des changements de signe est de quatre au plus, ce qui est évident.

En général, si le nombre des côtés d'une face est pair $= 2n$, le plus grand nombre des changements de signe qu'on puisse trouver en faisant le tour des côtés, est $2n$; ce qui aura lieu lorsque les côtés portent alternativement les signes $+$ et $-$.

Mais si le nombre des côtés d'une face est impair, $= 2n + 1$, le plus grand nombre des changements de signe sera $2n$ seulement, parce qu'en donnant alternativement aux côtés les signes $+$ et $-$, le premier et le dernier auront nécessairement le même signe; ce qui fait un changement de moins qu'il n'y a de côtés.

Cela posé, soit a le nombre des triangles, b le nombre des quadrilatères, c le nombre des pentagones, etc. qui composent la surface du polyèdre donné, il résulte de ce qu'on vient de dire, que le nombre total des changements de signe observés en faisant le tour de chaque face, ne pourra excéder $2a$ sur les faces triangulaires, $4b$ sur les faces de quatre côtés, $4c$ sur celles de cinq côtés, $6d$ sur celles de six côtés. Donc on aura :

$$N < 2a + 4b + 4c + 6d + 6e + 8f + 8g + \text{etc.}$$

Soit A le nombre des arêtes du polyèdre, et H celui de ses faces, on aura :

$$2A = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + 8f + 8g + \text{etc.}$$

$$H = a + b + c + d + e + f + g + \text{etc.}$$

Mais suivant le théorème d'Euler, $S + H = A + 2$; donc $4S = 8 + 4A - 4H$, et en faisant les substitutions :

$$4S = 8 + 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \text{etc.}$$

Comparant cette valeur à la limite trouvée ci-dessus, on en tire :

$$N < 4S - 8.$$

Mais on ne saurait avoir à-la-fois $N > 4S$ et $N < 4S - 8$; donc il est impossible que les inclinaisons sur les arêtes du polyèdre varient toutes à-la-fois, sans détruire la cohérence des plans qui forment la surface du polyèdre.

Second cas.

Supposons maintenant que les inclinaisons sur les arêtes

ne varient pas toutes à-la-fois, et qu'il y en ait quelques-unes qui demeurent constantes.

fig. 204. Soit FI une de ces arêtes, on pourra imaginer qu'elle soit supprimée, et que les deux faces adjacentes FIG , $EFIH$, se réunissent en une seule non plane terminée par le contour de forme invariable $EFGIH$. Appelons S' , H' et A' ce que deviennent les nombres S , H et A , après la suppression d'une arête, nous aurons $H' = H - 1$, et $A' = A - 1$; d'ailleurs on a $S' = S$, puisque le nombre des angles solides est le même dans les deux solides; donc on aura $S' + H' - A' = S + H - A = 2$. D'où l'on voit que le théorème d'Euler a encore lieu dans le nouveau solide qui contient une arête de moins, et une face de moins, puisque deux faces se sont réunies en une seule non plane.

Si de ce second solide on retranche encore l'une des arêtes sur lesquelles l'inclinaison reste invariable; la suppression de cette arête occasionnera de nouveau la réunion de deux faces contiguës en une seule; et on prouvera de même que le théorème d'Euler a encore lieu dans le troisième solide qui résulte de la suppression de deux arêtes.

On peut continuer à supprimer tant d'arêtes qu'on voudra, pourvu que cette suppression n'entraîne celle d'aucun angle solide; et le théorème d'Euler aura toujours lieu dans le solide restant; c'est aussi ce qu'on peut voir directement et généralement, en examinant la démonstration que nous avons donnée du théorème d'Euler; en effet, cette démonstration ne suppose pas que les faces du polyèdre sont planes; elle aurait également lieu, quand même ces faces seraient terminées par des contours non situés dans les mêmes plans; elle suppose seulement que chaque contour soit représenté, suivant notre construction, par un polygone sphérique, et que la somme des surfaces de ces polygones soit égale à la surface de la sphère. Et il n'est pas même nécessaire que tous ces polygones soient convexes; il suffit que chacun d'eux puisse être regardé comme la somme de plusieurs polygones convexes; ce qui arrivera toujours, lorsque, par la suppression de plusieurs arêtes appartenant au polyèdre donné, plusieurs faces planes se

réuniront en une seule non plane; car alors le polygone sphérique qui représente celle-ci, sera composé de la somme des polygones sphériques convexes qui représentaient les faces planes supprimées.

Venons maintenant au cas où la suppression des arêtes sur lesquelles l'inclinaison ne varie pas, entraîne celle d'un ou de plusieurs angles solides, soit parce que les inclinaisons sur toutes les arêtes, dans chacun de ces angles, sont invariables, soit parce que ces inclinaisons ne pourraient varier que sur trois arêtes seulement, et qu'alors elles seraient nécessairement constantes.

Supposons d'abord qu'on ne supprime qu'un angle solide, et soit m le nombre des faces de cet angle, ou le nombre d'arêtes qui aboutissent à son sommet. En supprimant l'angle solide dont il s'agit, on supprimera en même temps m arêtes, et les m faces formant l'angle solide se réduiront à une seule; donc, si on appelle S', A', H' , ce que deviennent les nombres S, A, H , après la suppression d'un angle solide, on aura $S' = S - 1, A' = A - m, H' = H - (m - 1)$. De là on tire $S' + H' - A' = S + H - A = 2$: donc le théorème d'Euler a encore lieu dans le nouveau solide.

Il est clair maintenant qu'on peut supprimer tant d'angles solides qu'on voudra du polyèdre donné, et que le théorème d'Euler aura toujours lieu dans le polyèdre restant; car en supprimant les angles solides un à un, on a successivement différents polyèdres, dont deux consécutifs rentrent dans le cas que nous venons d'examiner.

Donc en général, si du polyèdre proposé on supprime toutes les arêtes sur lesquelles l'inclinaison ne varie pas; soit que par cette suppression le nombre des angles solides reste le même, ou qu'il devienne moindre, le polyèdre restant satisfera toujours au théorème d'Euler, c'est-à-dire qu'en appelant s, h, a , les quantités qui pour ce polyèdre correspondent aux quantités S, H, A , du polyèdre proposé, on aura $s + h - a = S + H - A = 2$.

Mais dans ce dernier solide, les inclinaisons sur les arêtes devront varier toutes à-la-fois, puisqu'on a supprimé toutes les arêtes sur lesquelles l'inclinaison ne varie pas; donc ce

solide rentre dans le premier cas; donc la variation simultanée de toutes ces inclinaisons ne saurait avoir lieu sans dénaturer le solide.

Donc enfin un polyèdre convexe quelconque ne peut être changé en un autre polyèdre convexe qui serait compris sous les mêmes plans polygonaux, et disposés dans le même ordre les uns à l'égard des autres.

FIN DES NOTES.

Il est bien maintenant de se peut supposer tant d'angles
solide, qu'on voudrait un polyèdre donné, et que le théorème
d' Euler aura toujours lieu dans le polyèdre restant; car en
supprimant les angles solides un à un, on a successivement
différents polyèdres, dont deux consécutifs contiennent dans
le cas que nous venons d'examiner, le même nombre de
faces en général, si le polyèdre proposé on suppose
toutes les arêtes sur lesquelles l'inclinaison varie par;
soit que par cette suppression le nombre des angles solides
reste le même, ou qu'il devienne moindre, le polyèdre res-
tant satisfera toujours au théorème d' Euler, c'est-à-dire
on en appellera x, y, z, w , les quantités qui sont ce polyèdre
correspondent aux quantités S, H, A , du polyèdre pro-
posé, on aura $x + A - a = S + H - A = 2$, d'où il
résulte que dans ce dernier solide, les inclinaisons sur les arêtes
sont toutes les fois, qu'on en supprime une
les arêtes sur lesquelles l'inclinaison varie par, donc ce