

LIVRE VIII.

LES TROIS CORPS Ronds.

DÉFINITIONS.

fig. 250. I. On appelle *cylindre* le solide produit par la révolution d'un rectangle ABCD, qu'on imagine tourner autour du côté immobile AB.

Dans ce mouvement les côtés AD, BC, restent toujours perpendiculaires à AB, décrivent des plans circulaires égaux DHP, CGQ, qu'on appelle les *bases du cylindre*, et le côté CD en décrit la *surface convexe*.

La ligne immobile AB s'appelle l'*axe du cylindre*.

Toute section KLM, faite dans le cylindre perpendiculairement à l'axe, est un cercle égal à chacune des bases : car pendant que le rectangle ABCD tourne autour de AB, la ligne IK, perpendiculaire à AB, décrit un plan circulaire égal à la base, et ce plan n'est autre chose que la section faite perpendiculairement à l'axe au point I.

Toute section PQGH, faite suivant l'axe, est un rectangle double du rectangle générateur ABCD.

fig. 251. II. On appelle *cône* le solide produit par la révolution du triangle rectangle SAB, qu'on imagine tourner autour du côté immobile SA.

Dans ce mouvement le côté AB décrit un plan circulaire BDCE, qu'on appelle la *base du cône*, et l'hypoténuse SB en décrit la *surface convexe*.

Le point S s'appelle le *sommet du cône*, SA l'*axe* ou la *hauteur*, et SB le *côté* ou l'*apothème*.

Toute section HKFI, faite perpendiculairement à l'axe, est un cercle ; toute section SDE, faite sui-

vant l'axe, est un triangle isoscele double du triangle générateur SAB.

III. Si du cône SCDB on retranche, par une section parallele à la base, le cône SFKH, le solide restant CBHF s'appelle *cône tronqué* ou *tronc de cône*.

On peut supposer qu'il est décrit par la révolution du trapeze ABHG, dont les angles A et G sont droits, autour du côté AG. La ligne immobile AG s'appelle *l'axe* ou *la hauteur du tronc*, les cercles BDC, HFK, en sont *les bases*, et BH en est *le côté*.

IV. Deux cylindres ou deux cônes sont *semblables* lorsque leurs axes sont entre eux comme les diametres de leurs bases.

V. Si, dans le cercle ACD qui sert de base à un cylindre, on inscrit un polygone ABCDE, et que sur la base ABCDE on élève un prisme droit égal en hauteur au cylindre, le prisme est dit *inscrit dans le cylindre*, ou le cylindre *circonscrit au prisme*. fig. 252.

Il est clair que les arêtes AF, BG, CH, etc. du prisme, étant perpendiculaires au plan de la base, sont comprises dans la surface convexe du cylindre; donc le prisme et le cylindre se touchent suivant ces arêtes.

VI. Pareillement, si ABCD est un polygone circonscrit à la base d'un cylindre, et que sur la base ABCD on construise un prisme droit égal en hauteur au cylindre, le prisme est dit *circonscrit au cylindre*, ou le cylindre *inscrit dans le prisme*. fig. 253.

Soient M, N, etc. les points de contact des côtés AB, BC, etc. et soient élevées par les points M, N, etc. les perpendiculaires MX, NY, etc. au plan de la base; il est clair que ces perpendiculaires seront à-la-fois dans la surface du cylindre et dans celle du prisme circonscrit; donc elles seront leurs lignes de contact.

N. B. Le cylindre, le cône, et la sphere, sont les *trois corps ronds* dont on s'occupe dans les éléments.

Douz. édit.

Lemmes préliminaires sur les surfaces.

I.

fig. 254. *Une surface plane OABCD est plus petite que toute autre surface PABCD, terminée au même contour ABCD.*

Cette proposition est assez évidente pour être rangée au nombre des axiomes; car on pourrait supposer que le plan est parmi les surfaces ce que la ligne droite est parmi les lignes: la ligne droite est la plus courte entre deux points donnés, de même le plan est la surface la plus petite entre toutes celles qui ont un même contour. Cependant comme il convient de réduire les axiomes au plus petit nombre possible, voici un raisonnement qui ne laissera aucun doute sur cette proposition.

Une surface étant une étendue en longueur et en largeur, on ne peut concevoir qu'une surface soit plus grande qu'une autre, à moins que les dimensions de la première n'excèdent dans quelques sens celles de la seconde; et s'il arrive que les dimensions d'une surface soient en tous sens plus petites que les dimensions d'une autre surface, il est évident que la première surface sera la plus petite des deux. Or, dans quelque sens qu'on fasse passer le plan BPD, qui coupera la surface plane suivant BD, et l'autre surface suivant BPD, la ligne droite BD sera toujours plus petite que BPD; donc la surface plane OABCD est plus petite que la surface environnante PABCD.

II.

fig. 255. *Toute surface convexe OABCD est moindre qu'une autre surface quelconque qui envelopperait la première en s'appuyant sur le même contour ABCD.*

Nous répéterons ici que nous entendons par *surface convexe* une surface qui ne peut être rencontrée par une ligne droite en plus de deux points : et cependant il est possible qu'une ligne droite s'applique exactement dans un certain sens sur une surface convexe ; on en voit des exemples dans les surfaces du cône et du cylindre. Nous observerons aussi que la dénomination de surface convexe n'est pas bornée aux seules surfaces courbes ; elle comprend les surfaces *polyédrales* ou composées de plusieurs plans , et aussi les surfaces en partie courbes , en partie polyédrales.

Cela posé , si la surface OABCD n'est pas plus petite que toutes celles qui l'enveloppent , soit parmi celles-ci PABCD la surface la plus petite qui sera au plus égale à OABCD. Par un point quelconque O , faites passer un plan qui touche la surface OABCD sans la couper ; ce plan rencontrera la surface PABCD , et la partie qu'il en retranchera sera plus grande que le plan terminé à la même surface* : donc , en conservant le reste de la surface PABCD , on pourrait substituer le plan à la partie retranchée , et on aurait une nouvelle surface qui envelopperait toujours la surface OABCD , et qui serait plus petite que PABCD. * lem. 1.

Mais celle-ci est la plus petite de toutes par hypothèse ; donc cette hypothèse ne saurait subsister , donc la surface convexe OABCD est plus petite que toute autre surface qui envelopperait OABCD , et qui serait terminée au même contour ABCD.

Scholie. Par un raisonnement entièrement semblable on prouvera ,

1^o Que , si une surface convexe terminée par deux contours ABC , DEF , est enveloppée par une autre surface quelconque terminée aux mêmes contours , la surface enveloppée sera la plus petite des deux. fig. 256

fig. 257.

2° Que, si une surface convexe AB est enveloppée de toutes parts par une autre surface MN, soit qu'elles aient des points, des lignes ou des plans communs, soit qu'elles n'aient aucun point de commun, la surface enveloppée sera toujours plus petite que la surface enveloppante.

Car parmi celles-ci il ne peut y en avoir aucune qui soit la plus petite de toutes, puisque dans tous les cas on pourrait toujours mener le plan CD tangent à la surface convexe, lequel plan serait plus petit que la surface CMD*; et ainsi la surface CND serait plus petite que MN, ce qui est contraire à l'hypothèse que MN est la plus petite de toutes. Donc la surface convexe AB est plus petite que toutes celles qui l'enveloppent.

PROPOSITION PREMIERE.

THÉORÈME.

La solidité d'un cylindre est égale au produit de sa base par sa hauteur.

fig. 258.

Soit CA le rayon de la base du cylindre donné, H sa hauteur; représentons par *surf.* CA la surface du cercle dont le rayon est CA; je dis que la solidité du cylindre sera *surf.* CA $\times$ H. Car, si *surf.* CA $\times$ H n'est pas la mesure du cylindre donné, ce produit sera la mesure d'un cylindre plus grand ou plus petit. Et d'abord supposons qu'il soit la mesure d'un cylindre plus petit, par exemple, du cylindre dont CD est le rayon de la base et H la hauteur.

Circonscrivez au cercle dont le rayon est CD, un polygone régulier GHIP, dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence dont CA est le rayon*; imaginez ensuite un prisme droit qui ait pour base le

* 10. 4.

polygone GHIP, et pour hauteur H, lequel prisme sera circonscrit au cylindre dont CD est le rayon de la base. Cela posé, la solidité du prisme* est égale à * 14. sa base GHIP, multipliée par la hauteur H; la base GHIP est plus petite que le cercle dont CA est le rayon : donc la solidité du prisme est plus petite que *surf.* $CA \times H$. Mais *surf.* $CA \times H$ est, par hypothèse, la solidité du cylindre inscrit dans le prisme; donc le prisme serait plus petit que le cylindre : or, au contraire, le cylindre est plus petit que le prisme, puisqu'il y est contenu; donc il est impossible que *surf.* $CA \times H$ soit la mesure du cylindre dont CD est le rayon de la base et H la hauteur; ou, en termes plus généraux, *le produit de la base d'un cylindre par sa hauteur ne peut mesurer un cylindre plus petit.*

Je dis en second lieu que ce même produit ne peut mesurer un cylindre plus grand : car, pour ne pas multiplier les figures, soit CD le rayon de la base du cylindre donné, et soit, s'il est possible, *surf.* $CD \times H$ la mesure d'un cylindre plus grand, par exemple, du cylindre dont CA est le rayon de la base et H la hauteur.

Si on fait la même construction que dans le premier cas, le prisme circonscrit au cylindre donné aura pour mesure $GHIP \times H$: l'aire GHIP est plus grande que *surf.* CD; donc la solidité du prisme dont il s'agit est plus grande que *surf.* $CD \times H$: le prisme serait donc plus grand que le cylindre de même hauteur qui a pour base *surf.* CA. Or, au contraire, le prisme est plus petit que le cylindre, puisqu'il y est contenu; donc *il est impossible que la base d'un cylindre multipliée par sa hauteur soit la mesure d'un cylindre plus grand.*

Donc enfin la solidité d'un cylindre est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Corollaire I. Les cylindres de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, et les cylindres de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

Corollaire II. Les cylindres semblables sont comme les cubes des hauteurs, ou comme les cubes des diamètres des bases. Car les bases sont comme les quarrés de leurs diamètres; et puisque les cylindres sont semblables, les diamètres des bases sont comme les hauteurs^{*}: donc les bases sont comme les quarrés des hauteurs; donc les bases multipliées par les hauteurs, ou les cylindres eux-mêmes, sont comme les cubes des hauteurs.

* déf. 4.

Scholie. Soit R le rayon de la base d'un cylindre, H sa hauteur, la surface de la base sera πR^2 ^{*}, et la solidité du cylindre sera $\pi R^2 \times H$, ou $\pi R^2 H$.

* 12 4.

PROPOSITION II.

LEMME.

La surface convexe d'un prisme droit est égale au périmètre de sa base multiplié par sa hauteur.

fig. 252.

Car cette surface est égale à la somme des rectangles AFGB, BGHC, CHID, etc. dont elle est composée: or les hauteurs AF, BG, CH, etc. de ces rectangles sont égales à la hauteur du prisme; leurs bases AB, BC, CD, etc. prises ensemble, font le périmètre de la base du prisme. Donc la somme de ces rectangles ou la surface convexe du prisme est égale au périmètre de sa base multiplié par sa hauteur.

Corollaire. Si deux prismes droits ont la même hauteur, les surfaces convexes de ces prismes seront entre elles comme les périmètres de leurs bases.

PROPOSITION III.

LEMME.

La surface convexe du cylindre est plus grande que la surface convexe de tout prisme inscrit, et plus petite que la surface convexe de tout prisme circonscrit.

Car la surface convexe du cylindre et celle du prisme inscrit ABCDEF peuvent être considérées comme ayant même longueur, puisque toute section faite dans l'une et dans l'autre parallèlement à AF est égale à AF; et si pour avoir les largeurs de ces surfaces on les coupe par des plans parallèles à la base ou perpendiculaires à l'arête AF, les sections seront égales, l'une à la circonférence de la base, l'autre au contour du polygone ABCDE plus petit que cette circonférence : donc, puisqu'à longueur égale la largeur de la surface cylindrique est plus grande que celle de la surface prismatique, il s'ensuit que la première surface est plus grande que la seconde.

Par un raisonnement entièrement semblable on prouvera que la surface convexe du cylindre est plus petite que celle de tout prisme circonscrit BCDKLH.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

La surface convexe d'un cylindre est égale à la circonférence de sa base multipliée par sa hauteur.

Soit CA le rayon de la base du cylindre donné, H sa hauteur; si on représente par *circ.* CA la circonférence qui a pour rayon CA, je dis que

fig. 252.

fig. 253.

fig. 258.

circ. $CA \times H$ sera la surface convexe de ce cylindre. Car, si on nie cette proposition, il faudra que *circ.* $CA \times H$ soit la surface d'un cylindre plus grand ou plus petit; et d'abord supposons qu'elle soit la surface d'un cylindre plus petit, par exemple, du cylindre dont CD est le rayon de la base et H la hauteur.

Circonscrivez au cercle dont le rayon est CD un polygone régulier $GHIP$, dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence qui a CA pour rayon; imaginez ensuite un prisme droit qui ait pour hauteur H , et pour base le polygone $GHIP$. La surface convexe de ce prisme sera égale au contour du polygone

- * 2. $GHIP$ multiplié par la hauteur H * : ce contour est plus petit que la circonférence dont le rayon est CA ; donc la surface convexe du prisme est plus petite que *circ.* $CA \times H$. Mais *circ.* $CA \times H$ est, par hypothèse, la surface convexe du cylindre dont CD est le rayon de la base, lequel cylindre est inscrit dans le prisme; donc la surface convexe du prisme serait plus petite que celle du cylindre inscrit. Or, au contraire,
- * 3. elle doit être plus grande* ; donc l'hypothèse d'où l'on est parti est absurde : donc, 1^o la circonférence de la base d'un cylindre multipliée par sa hauteur ne peut mesurer la surface convexe d'un cylindre plus petit.

Je dis en second lieu que ce même produit ne peut mesurer la surface d'un cylindre plus grand. Car, pour ne pas changer de figure, soit CD le rayon de la base du cylindre donné, et soit, s'il est possible, *circ.* $CD \times H$ la surface convexe d'un cylindre qui, avec la même hauteur, aurait pour base un cercle plus grand, par exemple, le cercle dont le rayon est CA . On fera la même construction que dans la première hypothèse, et la surface convexe du prisme sera toujours égale au contour du polygone $GHIP$

multiplié par la hauteur H . Mais ce contour est plus grand que *circ.* CD ; donc la surface du prisme serait plus grande que *circ.* $CD \times H$, qui, par hypothèse, est la surface du cylindre de même hauteur dont CA est le rayon de la base. Donc la surface du prisme serait plus grande que celle de ce cylindre. Mais, quand même le prisme serait inscrit dans le cylindre, sa surface serait plus petite que celle du cylindre*; * 3. à plus forte raison est-elle plus petite lorsque le prisme ne s'étend pas jusqu'au cylindre. Donc la seconde hypothèse ne saurait avoir lieu; donc 2° la *circonférence de la base d'un cylindre multipliée par sa hauteur ne peut mesurer la surface d'un cylindre plus grand.*

Donc enfin la surface convexe d'un cylindre est égale à la circonférence de sa base multipliée par sa hauteur.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

La solidité d'un cône est égale au produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

Soit SO la hauteur du cône donné, AO le rayon de la base; si on désigne par *surf.* AO la surface de la base, je dis que la solidité de ce cône sera égale à *surf.* $AO \times \frac{1}{3} SO$. fig. 259.

En effet, supposons 1° que *surf.* $AO \times \frac{1}{3} SO$ soit la solidité d'un cône plus grand, par exemple, du cône dont SO est toujours la hauteur; mais dont OB , plus grand que AO , est le rayon de la base.

Au cercle dont le rayon est AO circonscrivez un polygone régulier $MNPT$ qui ne rencontre pas la circonférence dont le rayon est OB *; imaginez ensuite une pyramide qui ait pour base le polygone et pour sommet le point S . La solidité de cette py- * 10, 4.

*19, 6. ramide * est égale à l'aire du polygone MNPT multipliée par le tiers de la hauteur SO. Mais le polygone est plus grand que le cercle inscrit représenté par *surf.* AO ; donc la pyramide est plus grande que *surf.* $AO \times \frac{1}{3} SO$, qui, par hypothèse, est la mesure du cône dont S est le sommet et OB le rayon de la base. Or, au contraire, la pyramide est plus petite que le cône, puisqu'elle y est contenue ; donc 1° il est impossible que la base d'un cône multipliée par le tiers de sa hauteur soit la mesure d'un cône plus grand.

Je dis 2° que ce même produit ne peut être la mesure d'un cône plus petit. Car, pour ne pas changer de figure, soit OB le rayon de la base du cône donné, et soit, s'il est possible, *surf.* $OB \times \frac{1}{3} SO$ la solidité du cône qui a pour hauteur SO et pour base le cercle dont AO est le rayon. On fera la même construction que ci-dessus, et la pyramide SMNPT aura pour mesure l'aire MNPT multipliée par $\frac{1}{3} SO$. Mais l'aire MNPT est plus petite que *surf.* OB ; donc la pyramide aurait une mesure plus petite que *surf.* $OB \times \frac{1}{3} SO$, et par conséquent elle serait plus petite que le cône dont AO est le rayon de la base et SO la hauteur. Or, au contraire, la pyramide est plus grande que le cône, puisque le cône y est contenu : donc 2° il est impossible que la base d'un cône multipliée par le tiers de sa hauteur soit la mesure d'un cône plus petit.

Donc enfin la solidité d'un cône est égale au produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

Corollaire. Un cône est le tiers d'un cylindre de même base et de même hauteur ; d'où il suit,

1° Que les cônes d'égaux hauteurs sont entre eux comme leurs bases ;

2° Que les cônes de bases égales sont entre eux comme leurs hauteurs ;

3°. Que les cônes semblables sont comme les cubes des diamètres de leurs bases, ou comme les cubes de leurs hauteurs.

Scholie. Soit R le rayon de la base d'un cône, H sa hauteur; la solidité du cône sera $\pi R^2 \times \frac{1}{3} H$ ou $\frac{1}{3} \pi R^2 H$.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

Le cône tronqué ADEB, dont AO, DP sont les fig. 260.
rayons des bases et PO la hauteur, a pour me-
sure $\frac{1}{3} \pi \cdot OP \cdot (\overline{AO}^2 + \overline{DP}^2 + AO \times DP)$.

Soit TFGH une pyramide triangulaire de même hauteur que le cône SAB, et dont la base FGH soit équivalente à la base du cône. On peut supposer que ces deux bases sont placées sur un même plan; alors les sommets S et T seront à égales distances du plan des bases, et le plan EPD prolongé fera dans la pyramide la section IKL. Or je dis que cette section IKL est équivalente à la base DE; car les bases AB, DE, sont entre elles comme les quarrés des rayons AO, DP*, ou comme les quarrés des hauteurs SO, SP; *11, 4. les triangles FGH, IKL, sont entre eux comme les quarrés de ces mêmes hauteurs*; donc les cercles *15, 6. AB, DE, sont entre eux comme les triangles FGH, IKL. Mais, par hypothèse, le triangle FGH est équivalent au cercle AB; donc le triangle IKL est équivalent au cercle DE.

Maintenant, la base AB multipliée par $\frac{1}{3} SO$ est la solidité du cône SAB, et la base FGH multipliée par $\frac{1}{3} SO$ est celle de la pyramide TFGH; donc, à cause des bases équivalentes, la solidité de la pyramide est égale à celle du cône. Par une raison semblable, la pyramide TIKL est équivalente au cône SDE; donc

le tronc de cône ADEB est équivalent au tronc de pyramide FGHKL. Mais la base FGH, équivalente au cercle dont le rayon est AO, a pour mesure $\pi \times \overline{AO}^2$; de même la base IKL = $\pi \times \overline{DP}^2$, et la moyenne proportionnelle entre $\pi \times \overline{AO}^2$ et $\pi \times \overline{DP}^2$ est $\pi \times AO \times DP$; donc la solidité du tronc de pyramide, ou celle du tronc de cône, a pour mesure $\frac{1}{3} OP \times$
 * 20, 6. $(\pi \times \overline{AO}^2 + \pi \times \overline{DP}^2 + \pi \times AO \times DP)^*$, qui est la même chose que $\frac{1}{3} \pi \times OP \times (\overline{AO}^2 + \overline{DP}^2 + AO \times DP)$.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

La surface convexe d'un cône est égale à la circonférence de sa base multipliée par la moitié de son côté.

fig. 259. Soit AO le rayon de la base du cône donné, S son sommet, et SA son côté; je dis que sa surface sera *circ.* $AO \times \frac{1}{2} SA$. Car soit, s'il est possible, *circ.* $AO \times \frac{1}{2} SA$, la surface d'un cône qui aurait pour sommet le point S et pour base le cercle décrit du rayon OB plus grand que AO.

Circonscrivez au petit cercle un polygone régulier MNPT, dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence qui a pour rayon OB; et soit SMNPT la pyramide régulière, qui aurait pour base le polygone, et pour sommet le point S. Le triangle SMN, l'un de ceux qui composent la surface convexe de la pyramide, a pour mesure sa base MN multipliée par la moitié de la hauteur SA, qui est en même temps le côté du cône donné; cette hauteur étant égale dans tous les autres triangles SNP, SPQ, etc. il s'ensuit que la surface convexe de la pyramide est égale au contour MNPTM multiplié par $\frac{1}{2} SA$. Mais

le contour MNPTM, est plus grand que *circ.* AO; donc la surface convexe de la pyramide est plus grande que *circ.* $AO \times \frac{1}{2} SA$, et par conséquent plus grande que la surface convexe du cône qui avec le même sommet S aurait pour base le cercle décrit du rayon OB. Or, au contraire, la surface convexe du cône est plus grande que celle de la pyramide; car si on adosse base à base la pyramide à une pyramide égale, le cône à un cône égal; la surface des deux cônes enveloppera de toutes parts la surface des deux pyramides; donc la première surface sera plus grande que la seconde*, donc la surface du cône est ^{*1em. 2.} plus grande que celle de la pyramide qui y est comprise. Le contraire était une suite de notre hypothèse; donc cette hypothèse ne peut avoir lieu: donc 1° la circonférence de la base d'un cône multipliée par la moitié de son côté ne peut mesurer la surface d'un cône plus grand.

Je dis 2° que le même produit ne peut mesurer la surface d'un cône plus petit. Car soit BO le rayon de la base du côté donné, et soit, s'il est possible, *circ.* $BO \times \frac{1}{2} SB$ la surface du cône dont S est le sommet, et AO, plus petit que OB, le rayon de la base.

Ayant fait la même construction que ci-dessus, la surface de la pyramide SMNPT sera toujours égale au contour MNPT multiplié par $\frac{1}{2} SA$. Or le contour MNPT est moindre que *circ.* BO, SA est moindre que SB; donc par cette double raison la surface convexe de la pyramide est moindre que *circ.* $BO \times \frac{1}{2} SB$, qui, par hypothèse, est la surface du cône dont AO est le rayon de la base; donc la surface de la pyramide serait plus petite que celle du cône inscrit. Or, au contraire, elle est plus grande; car en adossant base à base la pyramide à une pyramide égale, le cône à un cône égal, la surface des deux pyramides enveloppera celle des deux cônes, et par

conséquent sera la plus grande. Donc 2^o il est impossible que la circonférence de la base d'un cône donné multipliée par la moitié de son côté mesure la surface d'un cône plus petit.

Donc enfin la surface convexe d'un cône est égale à la circonférence de sa base multipliée par la moitié de son côté.

Scholie. Soit L le côté d'un cône, R le rayon de sa base, la circonférence de cette base sera $2\pi R$, et la surface du cône aura pour mesure $2\pi R \times \frac{1}{2}L$, ou πRL .

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

fig. 261. *La surface convexe du tronc de cône ADEB est égale à son côté AD multiplié par la demi-somme des circonférences de ses deux bases AB, DE.*

Dans le plan SAB qui passe par l'axe SO, menez perpendiculairement à SA la ligne AF, égale à la circonférence qui a pour rayon AO; joignez SF, et menez DH parallèle à AF.

A cause des triangles semblables SAO, SDC, on aura $AO:DC :: SA:SD$; et à cause des triangles semblables SAF, SDH, on aura $AF:DH :: SA:SD$; donc $AF:DH :: AO:DC$, ou $:: \text{circ. } AO:\text{circ. } DC$ *. Mais par construction $AF = \text{circ. } AO$; donc $DH = \text{circ. } DC$. Cela posé, le triangle SAF, qui a pour mesure $AF \times \frac{1}{2}SA$, est égal à la surface du cône SAB qui a pour mesure $\text{circ. } AO \times \frac{1}{2}SA$. Par une raison semblable le triangle SDH est égal à la surface du cône SDE. Donc la surface du tronc ADEB est égale à celle du trapeze ADHF. Celle-ci a pour mesure * $AD \times \left(\frac{AF+DH}{2}\right)$; donc la surface du tronc de cône ADEB est égale à son côté AD mul-

* 11, 4.

* 7, 3.

tiplié par la demi-somme des circonférences de ses deux bases.

Corollaire. Par le point I, milieu de AD, menez IKL parallèle à AB, et IM parallèle à AF; on démontrera comme ci-dessus que $IM = \text{circ. IK}$. Mais le trapeze $ADHF = AD \times IM = AD \times \text{circ. IK}$. Donc on peut dire encore que *la surface d'un tronc de cône est égale à son côté multiplié par la circonférence d'une section faite à égale distance des deux bases.*

Scholie. Si une ligne AD, située tout entière d'un même côté de la ligne OC et dans le même plan, fait une révolution autour de OC, la surface décrite par AD aura pour mesure $AD \times \left(\frac{\text{circ. AO} + \text{circ. DC}}{2} \right)$, ou $AD \times \text{circ. IK}$; les lignes AO, DC, IK, étant des perpendiculaires abaissées des extrémités et du milieu de la ligne AD sur l'axe OC.

Car si on prolonge AD et OC jusqu'à leur rencontre mutuelle en S, il est clair que la surface décrite par AD est celle d'un cône tronqué dont OA et DC sont les rayons des bases, le cône entier ayant pour sommet le point S. Donc cette surface aura la mesure mentionnée.

Cette mesure aurait toujours lieu, quand même le point D tomberait en S, ce qui donnerait un cône entier, et aussi quand la ligne AD serait parallèle à l'axe, ce qui donnerait un cylindre. Dans le premier cas DC serait nulle, dans le second DC serait égale à AO et à IK.

PROPOSITION IX.

LEMME.

fig. 262.

Soient AB, BC, CD, plusieurs côtés successifs d'un polygone régulier, O son centre, et OI le rayon du cercle inscrit; si on suppose que la portion de polygone ABCD, située tout entière d'un même côté du diamètre FG, fasse une révolution autour de ce diamètre, la surface décrite par ABCD aura pour mesure $MQ \times \text{circ. OI}$, MQ étant la hauteur de cette surface ou la partie de l'axe comprise entre les perpendiculaires AM, DQ.

* 8. Le point I étant milieu de AB, et IK étant une perpendiculaire à l'axe abaissée du point I, la surface décrite par AB aura pour mesure $AB \times \text{circ. IK}^*$. Menez AX parallèle à l'axe, les triangles ABX, OIK, auront les côtés perpendiculaires chacun à chacun : savoir OI à AB, IK à AX, et OK à BX; donc ces triangles sont semblables et donnent la proportion $AB : AX \text{ ou } MN :: OI : IK$, ou $:: \text{circ. OI} : \text{circ. IK}$; donc $AB \times \text{circ. IK} = MN \times \text{circ. OI}$. D'où l'on voit que la surface décrite par AB est égale à sa hauteur MN multipliée par la circonférence du cercle inscrit. De même la surface décrite par BC, $= NP \times \text{circ. OI}$, la surface décrite par CD, $= PQ \times \text{circ. OI}$. Donc la surface décrite par la portion de polygone ABCD, a pour mesure $(MN + NP + PQ) \times \text{circ. OI}$, ou $MQ \times \text{circ. OI}$; donc elle est égale à sa hauteur multipliée par la circonférence du cercle inscrit.

Corollaire. Si le polygone entier est d'un nombre de côtés pair, et que l'axe FG passe par deux sommets opposés F et G, la surface entière décrite par la

révolution du demi-polygone $FACG$ sera égale à son axe FG multiplié par la circonférence du cercle inscrit. Cet axe FG sera en même temps le diamètre du cercle circonscrit.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

La surface de la sphere est égale à son diamètre multiplié par la circonférence d'un grand cercle.

Je dis 1^o que le diamètre d'une sphere, multiplié par la circonférence de son grand cercle, ne peut mesurer la surface d'une sphere plus grande. Car soit, s'il est possible, $AB \times circ.$ AC la surface de la sphere qui a pour rayon CD . fig. 263.

Au cercle dont le rayon est CA , circonscrivez un polygone régulier d'un nombre pair de côtés qui ne rencontre pas la circonférence dont CD est le rayon; soient M et S deux sommets opposés de ce polygone; et autour du diamètre MS faites tourner le demi-polygone MPS . La surface décrite par ce polygone aura pour mesure $MS \times circ.$ AC^* : mais MS est plus grand que AB ; donc la surface décrite par le polygone est plus grande que $AB \times circ.$ AC , et par conséquent plus grande que la surface de la sphere dont le rayon est CD . Or, au contraire, la surface de la sphere est plus grande que la surface décrite par le polygone, puisque la première enveloppe la seconde de toutes parts. Donc 1^o le diamètre d'une sphere multiplié par la circonférence de son grand cercle ne peut mesurer la surface d'une sphere plus grande. * 9.

Je dis 2^o que ce même produit ne peut mesurer la surface d'une sphere plus petite. Car soit, s'il est

Douz. éd.

possible, $DE \times \text{circ. } CD$ la surface de la sphere qui a pour rayon CA . On fera la même construction que dans le premier cas, et la surface du solide engendré par le polygone sera toujours égale à $MS \times \text{circ. } AC$. Mais MS est plus petit que DE , et $\text{circ. } AC$ plus petite que $\text{circ. } CD$; donc, par ces deux raisons, la surface du solide décrit par le polygone serait plus petite que $DE \times \text{circ. } CD$, et par conséquent plus petite que la surface de la sphere dont le rayon est AC . Or, au contraire, la surface décrite par le polygone est plus grande que la surface de la sphere dont le rayon est AC , puisque la premiere surface enveloppe la seconde; donc 2^o le diametre d'une sphere multiplié par la circonférence de son grand cercle ne peut mesurer la surface d'une sphere plus petite.

Donc la surface de la sphere est égale à son diametre multiplié par la circonférence de son grand cercle.

Corollaire. La surface du grand cercle se mesure en multipliant sa circonférence par la moitié du rayon ou le quart du diametre; donc *la surface de la sphere est quadruple de celle d'un grand cercle.*

Scholie. La surface de la sphere étant ainsi mesurée et comparée à des surfaces planes, il sera facile d'avoir la valeur absolue des fuseaux et triangles sphériques dont on a déterminé ci-dessus le rapport avec la surface entiere de la sphere.

D'abord le fuseau dont l'angle est A , est à la surface
 * 20, 7. de la sphere comme l'angle A est à quatre angles droits*, ou comme l'arc de grand cercle qui mesure l'angle A est à la circonférence de ce même grand cercle. Mais la surface de la sphere est égale à cette circonférence multipliée par le diametre; donc la surface du fuseau est égale à l'arc qui mesure l'angle de ce fuseau multiplié par le diametre.

En second lieu tout triangle sphérique est équivalent à un fuseau dont l'angle est égal à la moitié de l'excès de la somme de ses trois angles sur deux angles droits*. Soient donc P, Q, R, les arcs de ^{*23, 7.} grand cercle qui mesurent les trois angles du triangle; soit C la circonférence d'un grand cercle et D son diamètre; le triangle sphérique sera équivalent au fuseau dont l'angle a pour mesure $\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}$, et par conséquent sa surface sera $D \times \left(\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2} \right)$.

Ainsi, dans le cas du triangle tri-rectangle, chacun des arcs P, Q, R, est égal à $\frac{1}{4}C$, leur somme est $\frac{3}{4}C$, l'excès de cette somme sur $\frac{1}{2}C$ est $\frac{1}{4}C$, et la moitié de cet excès $= \frac{1}{8}C$; donc la surface du triangle tri-rectangle $= \frac{1}{8}C \times D$, ce qui est la huitième partie de la surface totale de la sphere.

La mesure des polygones sphériques suit immédiatement de celle des triangles, et d'ailleurs elle est entièrement déterminée par la prop. xxiv, liv. vii, puisque l'unité de mesure, qui est le triangle tri-rectangle, vient d'être évaluée en surface plane.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

La surface d'une zone sphérique quelconque est égale à la hauteur de cette zone multipliée par la circonférence d'un grand cercle.

Soit EF un arc quelconque plus petit ou plus grand ^{fig. 269.} que le quart de circonférence, et soit abaissée FG perpendiculaire sur le rayon EC; je dis que la zone à une

base, décrite par la révolution de l'arc EF autour de EC, aura pour mesure $EG \times \text{circ. EC}$.

Car supposons d'abord que cette zone ait une mesure plus petite, et soit, s'il est possible, cette mesure $= EG \times \text{circ. CA}$. Inscrivez dans l'arc EF une portion de polygone régulier EMNOPF dont les côtés n'atteignent pas la circonférence décrite du rayon CA, et abaissez CI perpendiculaire sur EM; la surface décrite par le polygone EMF tournant autour de EC, * 9. aura pour mesure $EG \times \text{circ. CI}^*$. Cette quantité est plus grande que $EG \times \text{circ. AC}$, qui, par hypothèse, est la mesure de la zone décrite par l'arc EF. Donc la surface décrite par le polygone EMNOPF serait plus grande que la surface décrite par l'arc circonscrit EF; or, au contraire, cette dernière surface est plus grande que la première, puisqu'elle l'enveloppe de toutes parts; donc 1^o la mesure de toute zone sphérique à une base ne peut être plus petite que la hauteur de cette zone multipliée par la circonférence d'un grand cercle.

Je dis en second lieu que la mesure de la même zone ne peut être plus grande que la hauteur de cette zone multipliée par la circonférence d'un grand cercle. Car supposons qu'il s'agisse de la zone décrite par l'arc AB autour de AC, et soit, s'il est possible, zone $AB > AD \times \text{circ. AC}$. La surface entière de la sphere, composée des deux zones AB, BH, a pour mesure * 10. $AH \times \text{circ. AC}^*$, ou $AD \times \text{circ. AC} + DH \times \text{circ. AC}$; si donc on a zone $AB > AD \times \text{circ. AC}$, il faudra qu'on ait zone $BH < DH \times \text{circ. AC}$; ce qui est contraire à la première partie déjà démontrée. Donc 2^o la mesure d'une zone sphérique à une base ne peut être plus grande que la hauteur de cette zone multipliée par la circonférence d'un grand cercle.

Donc enfin toute zone sphérique à une base a pour

mesure la hauteur de cette zone multipliée par la circonférence d'un grand cercle.

Considérons maintenant une zone quelconque, à deux bases, décrite par la révolution de l'arc FH fig. 220. autour du diamètre DE, et soient abaissées les perpendiculaires FO, HQ sur ce diamètre. La zone décrite par l'arc FH est la différence des deux zones décrites par les arcs DH et DF; celles-ci ont pour mesures $DQ \times \text{circ. CD}$ et $DO \times \text{circ. CD}$; donc la zone décrite par FH a pour mesure $(DQ - DO) \times \text{circ. CD}$ ou $OQ \times \text{circ. CD}$.

Donc toute zone sphérique à une ou à deux bases, a pour mesure la hauteur de cette zone multipliée par la circonférence d'un grand cercle.

Corollaire. Deux zones prises dans une même sphere ou dans des spheres égales, sont entre elles comme leurs hauteurs, et une zone quelconque est à la surface de la sphere comme la hauteur de cette zone est au diamètre.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Si le triangle BAC et le rectangle BCEF de même base et de même hauteur tournent simultanément autour de la base commune BC, le solide décrit par la révolution du triangle sera le tiers du cylindre décrit par la révolution du rectangle. fig. 264, et 265.

Abaissez sur l'axe la perpendiculaire AD; le cône décrit par le triangle ABD est le tiers du cylindre décrit par le rectangle AFBD*, de même le cône décrit * 5.

par le triangle ADC est le tiers du cylindre décrit par le rectangle ADCE ; donc la somme des deux cônes ou le solide décrit par ABC est le tiers de la somme des deux cylindres ou du cylindre décrit par le rectangle BCEF.

fig. 265. Si la perpendiculaire AD tombe au-dehors du triangle, alors le solide décrit par ABC sera la différence des cônes décrits par ABD et ACD ; mais en même temps le cylindre décrit par BCEF sera la différence des cylindres décrits par AFB, AECD. Donc le solide décrit par la révolution du triangle sera toujours le tiers du cylindre décrit par la révolution du rectangle de même base et de même hauteur.

Scholie. Le cercle dont AD est le rayon a pour surface $\pi \times \overline{AD}^2$; donc $\pi \times \overline{AD} \times BC$ est la mesure du cylindre décrit par BCEF, et $\frac{1}{3} \pi \times \overline{AD}^2 \times BC$ est celle du solide décrit par le triangle ABC.

PROPOSITION XIII.

PROBLÈME.

fig. 266. *Le triangle CAB étant supposé faire une révolution autour de la ligne CD, menée comme on voudra hors du triangle par son sommet C, trouver la mesure du solide ainsi engendré.*

Prolongez le côté AB jusqu'à ce qu'il rencontre l'axe CD en D, des points A et B abaissez sur l'axe les perpendiculaires AM, BN.

Le solide décrit par le triangle CAD a pour mesure* $\frac{1}{3} \pi \times \overline{AM}^2 \times CD$; le solide décrit par le triangle CBD a pour mesure $\frac{1}{3} \pi \times \overline{BN}^2 \times CD$; donc la diffé-

rence de ces solides ou le solide décrit par ABC aura pour mesure $\frac{1}{3}\pi \cdot (\overline{AM}^2 - \overline{BN}^2) \times CD$.

On peut donner à cette expression une autre forme. Du point I, milieu de AB, menez IK perpendiculaire à CD, et par le point B menez BO parallèle à CD, on aura $AM + BN = 2IK^*$ et $AM - BN = AO$; donc, * 7, 3.

$AM + BN \times (AM - BN)$, ou $\overline{AM}^2 - \overline{BN}^2 = 2IK \times AO^*$. La mesure du solide dont il s'agit est donc * 10, 5. exprimée aussi par $\frac{2}{3}\pi \times IK \times AO \times CD$. Mais si on abaisse CP perpendiculaire sur AB, les triangles ABO, DCP, seront semblables, et donneront la proportion $AO : CP :: AB : CD$; d'où résulte $AO \times CD = CP \times AB$; d'ailleurs $CP \times AB$ est le double de l'aire du triangle ABC; ainsi on a $AO \times CD = 2ABC$; donc le solide décrit par le triangle ABC a aussi pour mesure $\frac{4}{3}\pi \times ABC \times IK$, ou, ce qui est la même chose, $ABC \times \frac{2}{3} \text{circ. IK}$; (car $\text{circ. IK} = 2\pi \cdot IK$.) Donc le solide décrit par la révolution du triangle ABC, a pour mesure l'aire de ce triangle multipliée par les deux tiers de la circonférence que décrit le point I milieu de sa base.

Corollaire. Si le côté $AC = CB$, la ligne CI sera fig. 267. perpendiculaire à AB, l'aire ABC sera égale à $AB \times \frac{1}{2}CI$, et la solidité $\frac{4}{3}\pi \times ABC \times IK$ deviendra $\frac{2}{3}\pi \times AB \times IK \times CI$. Mais les triangles ABO, CIK, sont semblables et donnent la proportion $AB : BO$ ou $MN :: CI : IK$; donc $AB \times IK = MN \times CI$; donc le solide décrit par le triangle isoscele ABC aura pour mesure $\frac{2}{3}\pi \times MN \times CI$.

Scholie. La solution générale paraît supposer que la ligne AB prolongée rencontre l'axe; mais les résultats n'en seraient pas moins vrais, quand la ligne AB serait parallèle à l'axe.

fig. 263.

En effet le cylindre décrit par $AMNB$ a pour mesure $\pi \cdot \overline{AM}^2 \cdot MN$, le cône décrit par $ACM = \frac{1}{3} \pi \cdot \overline{AM}^2 \cdot CM$, et le cône décrit par $BCN = \frac{1}{3} \pi \cdot \overline{AM}^2 \cdot CN$. Ajoutant les deux premiers solides et retranchant le troisième, on aura pour le solide décrit par ABC , $\pi \cdot \overline{AM}^2 \cdot (MN + \frac{1}{3} CM - \frac{1}{3} CN)$: et puisque $CN - CM = MN$, cette expression se réduit à $\pi \cdot \overline{AM}^2 \cdot \frac{2}{3} MN$, ou $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{CP}^2 \cdot MN$, ce qui s'accorde avec les résultats déjà trouvés.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

fig. 262.

Soient AB, BC, CD , plusieurs côtés successifs d'un polygone régulier, O son centre, et OI le rayon du cercle inscrit; si on imagine que le secteur polygonal AOD , situé d'un même côté du diamètre FG , fasse une révolution autour de ce diamètre, le solide décrit aura pour mesure $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{OI}^2 \cdot MQ$, MQ étant la portion de l'axe terminée par les perpendiculaires extrêmes AM, DQ .

En effet, puisque le polygone est régulier, tous les triangles AOB, BOC , etc. sont égaux et isocèles. Or, suivant le corollaire de la proposition précédente, le solide produit par le triangle isocèle AOB a pour mesure $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{OI}^2 \cdot MN$, le solide décrit par le triangle BOC a pour mesure $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{OI}^2 \cdot NP$, et le solide décrit par le triangle COD a pour mesure $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{OI}^2 \cdot PQ$; donc la somme de ces solides, ou le solide entier décrit par le secteur polygonal AOD , aura pour mesure $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{OI}^2 \cdot (MN + NP + PQ)$ ou $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{OI}^2 \cdot MQ$.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

Tout secteur sphérique a pour mesure la zone qui lui sert de base multipliée par le tiers du rayon, et la sphere entiere a pour mesure sa surface multipliée par le tiers du rayon.

Soit ABC le secteur circulaire qui, par sa révolution autour de AC, décrit le secteur sphérique; la zone décrite par AB étant $AD \times \text{circ. AC}$ ou $2\pi \cdot AC$. AD*, je dis que le secteur sphérique aura pour mesure cette zone multipliée par $\frac{1}{3}AC$, ou $\frac{2}{3}\pi \cdot \overline{AC}^2 \cdot AD$. fig. 269.

En effet, 1^o supposons, s'il est possible, que cette quantité $\frac{2}{3}\pi \cdot \overline{AC}^2 \cdot AD$ soit la mesure d'un secteur sphérique plus grand, par exemple, du secteur sphérique décrit par le secteur circulaire ECF semblable à ACB. * 12.

Inscrivez dans l'arc EF la portion de polygone régulier EMNF dont les côtés ne rencontrent pas l'arc AB, imaginez ensuite que le secteur polygonal ENFC tourne autour de EC en même temps que le secteur circulaire ECF. Soit CI le rayon du cercle inscrit dans le polygone, et soit abaissée FG perpendiculaire sur EC. Le solide décrit par le secteur polygonal aura pour mesure $\frac{2}{3}\pi \cdot \overline{CI}^2 \cdot EG$ * : or CI est plus grand que AC par construction, et EG est plus grand que AD : car, joignant AB, EF, les triangles EFG, ABD, qui sont semblables, donnent la proportion $EG : AD :: FG : BD :: CF : CB$; donc $EG > AD$. * 14.

Par cette double raison $\frac{2}{3}\pi \cdot \overline{CI}^2 \cdot EG$ est plus

grand que $\frac{2}{3}\pi \cdot \overline{CA}^2$. AD : la première expression est la mesure du solide décrit par le secteur polygonal, la seconde est par hypothèse celle du secteur sphérique décrit par le secteur circulaire ECF ; donc le solide décrit par le secteur polygonal serait plus grand que le secteur sphérique décrit par le secteur circulaire. Or, au contraire, le solide dont il s'agit est moindre que le secteur sphérique, puisqu'il y est contenu ; donc l'hypothèse d'où on est parti ne saurait subsister ; donc 1^o la zone ou base d'un secteur sphérique multipliée par le tiers du rayon ne peut mesurer un secteur sphérique plus grand.

Je dis 2^o que le même produit ne peut mesurer un secteur sphérique plus petit. Car, soit CEF le secteur circulaire qui par sa révolution produit le secteur sphérique donné, et supposons, s'il est possible, que $\frac{2}{3}\pi \cdot \overline{CE}^2$. EG soit la mesure d'un secteur sphérique plus petit, par exemple, de celui qui provient du secteur circulaire ACB.

La construction précédente restant la même, le solide décrit par le secteur polygonal aura toujours pour mesure $\frac{2}{3}\pi \cdot \overline{CI}^2$. EG. Mais CI est moindre que CE ; donc le solide est moindre que $\frac{2}{3}\pi \cdot \overline{CE}^2$. EG, qui, par hypothèse, est la mesure du secteur sphérique décrit par le secteur circulaire ACB. Donc le solide décrit par le secteur polygonal serait moindre que le secteur sphérique décrit par ACB. Or, au contraire, le solide dont il s'agit est plus grand que le secteur sphérique, puisque celui-ci est contenu dans l'autre. Donc 2^o il est impossible que la zone d'un secteur sphérique multipliée par le tiers du rayon soit la mesure d'un secteur sphérique plus petit.

Donc tout secteur sphérique a pour mesure la zone qui lui sert de base multipliée par le tiers du rayon.

Un secteur circulaire ACB peut augmenter jusqu'à devenir égal au demi-cercle; alors le secteur sphérique décrit par sa révolution est la sphere entiere. Donc la solidité de la sphere est égale à sa surface multipliée par le tiers de son rayon.

Corollaire. Les surfaces des spheres étant comme les quarrés de leurs rayons, ces surfaces multipliées par les rayons sont comme les cubes des rayons. Donc les solidités de deux spheres sont comme les cubes de leurs rayons, ou comme les cubes de leurs diametres.

Scholie. Soit R le rayon d'une sphere, sa surface sera $4\pi R^2$, et sa solidité $4\pi R^2 \times \frac{1}{3} R$, ou $\frac{4}{3}\pi R^3$. Si on appelle D le diametre, on aura $R = \frac{1}{2} D$, et $R^3 = \frac{1}{8} D^3$; donc la solidité s'exprimera aussi par $\frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8} D^3$, ou $\frac{1}{6}\pi D^3$.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

La surface de la sphere est à la surface totale du cylindre circonscrit (en y comprenant ses bases) comme 2 est à 3. Les solidités de ces deux corps sont entre elles dans le même rapport.

Soit MPNQ le grand cercle de la sphere, ABCD fig. 270. le quarré circonscrit; si on fait tourner à la fois le demi-cercle PMQ et le demi-quarré PADQ autour du diametre PQ, le demi-cercle décrira la sphere, et le demi-quarré décrira le cylindre circonscrit à la sphere.

La hauteur AD de ce cylindre est égale au diametre PQ, la base du cylindre est égale au grand cercle, puisqu'elle a pour diametre AB égale à MN; donc la surface convexe du cylindre* est égale à la *4.

circonférence du grand cercle multipliée par son diamètre. Cette mesure est la même que celle de
 * 10. la surface de la sphere * : d'où il suit que *la surface de la sphere est égale à la surface convexe du cylindre circonscrit.*

Mais la surface de la sphere est égale à quatre grands cercles; donc la surface convexe du cylindre circonscrit est égale aussi à quatre grands cercles : si on y joint les deux bases qui valent deux grands cercles, la surface totale du cylindre circonscrit sera égale à six grands cercles; donc la surface de la sphere est à la surface totale du cylindre circonscrit comme 4 est à 6, ou comme 2 est à 3. C'est le premier point qu'il s'agissait de démontrer.

En second lieu, puisque la base du cylindre circonscrit est égale à un grand cercle et sa hauteur au diamètre, la solidité du cylindre sera égale au grand
 * 1. cercle multiplié par le diamètre *. Mais la solidité de la sphere est égale à quatre grands cercles multipliés
 * 16. par le tiers du rayon *, ce qui revient à un grand cercle multiplié par $\frac{4}{3}$ du rayon, ou $\frac{2}{3}$ du diamètre; donc la sphere est au cylindre circonscrit comme 2 est à 3, et par conséquent les solidités de ces deux corps sont entre elles comme leurs surfaces.

Scholie. Si on imagine un polyèdre dont toutes les faces touchent la sphere, ce polyèdre pourra être considéré comme composé de pyramides qui ont toutes pour sommet le centre de la sphere, et dont les bases sont les différentes faces du polyèdre. Or il est clair que toutes ces pyramides auront pour hauteur commune le rayon de la sphere, de sorte que chaque pyramide sera égale à la face du polyèdre qui lui sert de base, multipliée par le tiers du rayon : donc le polyèdre entier sera égal à sa surface multipliée par le tiers du rayon de la sphere inscrite.

On voit par là que les solidités des polyèdres circonscrits à la sphere sont entre elles comme les surfaces de ces mêmes polyèdres. Ainsi, la propriété que nous avons démontrée pour le cylindre circonscrit est commune à une infinité d'autres corps.

On aurait pu remarquer également que les surfaces des polygones circonscrits au cercle sont entre elles comme leurs contours.

PROPOSITION XVII.

PROBLÈME.

Le segment circulaire BMD étant supposé fig. 271. faire une révolution autour d'un diamètre extérieur à ce segment, trouver la valeur du solide engendré.

Abaissez sur l'axe les perpendiculaires BE, DF; du centre C menez CI perpendiculaire sur la corde BD, et tirez les rayons CB, CD.

Le solide décrit par le secteur $BCA = \frac{2}{3} \pi \cdot \overline{CB}^2 \cdot AE^*$; le solide décrit par le secteur $DCA = \frac{2}{3} \pi \cdot \overline{CD}^2 \cdot AF^*$. * 15.
 $\overline{CB}^2 \cdot AF$; donc la différence de ces deux solides, ou le solide décrit par le secteur $DCB = \frac{2}{3} \pi \cdot \overline{CB}^2 \cdot (AF - AE) = \frac{2}{3} \pi \cdot \overline{CB}^2 \cdot EF$. Mais le solide décrit par le triangle isoscele DCB a pour mesure $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{CI}^2 \cdot EF^*$; donc * 14.
 le solide décrit par le segment BMD $= \frac{2}{3} \pi \cdot \overline{CB}^2 \cdot EF - (\overline{CB}^2 - \overline{CI}^2) \cdot EF$. Or dans le triangle rectangle CBI, on a $\overline{CB}^2 - \overline{CI}^2 = \overline{BI}^2 = \frac{1}{4} \overline{BD}^2$; donc le solide décrit par le segment BMD aura pour mesure $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{CB}^2 \cdot EF - \frac{1}{4} \overline{BD}^2 \cdot EF$, ou $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{BD}^2 \cdot EF$.

Scholie. Le solide décrit par le segment BMD est à la sphere qui a pour diametre BD, comme $\frac{1}{6} \pi \cdot \overline{BD}^2$. EF est à $\frac{1}{6} \pi \cdot \overline{BD}^3$, ou :: EF : BD.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Tout segment de sphere, compris entre deux plans paralleles, a pour mesure la demi-somme de ses bases multipliée par sa hauteur, plus la solidité de la sphere dont cette même hauteur est le diametre.

fig. 271. Soient BE, DF, les rayons des bases du segment, EF sa hauteur, de sorte que le segment soit produit par la révolution de l'espace circulaire BMDFE autour de l'axe FE. Le solide décrit par le seg-

* 17. ment BMD * $= \frac{1}{6} \pi \cdot \overline{BD}^2 \cdot EF$, le tronc de cône décrit

* 6. par le trapeze BDFE * $= \frac{1}{3} \pi \cdot EF \cdot (\overline{BE}^2 + \overline{DF}^2 + BE \cdot DF)$; donc le segment de sphere qui est la somme de ces deux solides $= \frac{1}{6} \pi \cdot EF \cdot (2 \overline{BE}^2 + 2 \overline{DF}^2 + 2 BE \cdot DF + \overline{BD}^2)$. Mais, en menant BO parallele à EF, on aura DO =

* 9, 3. $DF - BE$, $\overline{DO}^2 = \overline{DF}^2 - 2 DF \cdot BE + \overline{BE}^2$, et par conséquent $\overline{BD}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{DO}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{DF}^2 - 2 DF \times BE + \overline{BE}^2$.

Mettant cette valeur à la place de $\overline{BD}^2$ dans l'expression du segment, et effaçant ce qui se détruit, on aura pour la solidité du segment,

$$\frac{1}{6} \pi \cdot EF \cdot (3 \overline{BE}^2 + 3 \overline{DF}^2 + \overline{EF}^2),$$

expression qui se décompose en deux parties; l'une

$$\frac{1}{6} \pi \cdot EF \cdot (3 \overline{BE}^2 + 3 \overline{DF}^2), \text{ ou } EF \cdot \left(\frac{\pi \cdot \overline{BE}^2 + \pi \cdot \overline{DF}^2}{2} \right)$$

est la demi-somme des bases multipliée par la hauteur;

l'autre $\frac{1}{6}\pi$. $\overline{EF}^3$ représente la sphere dont EF est le diametre * : donc tout segment de sphere, etc.

*15. sch.

Corollaire. Si l'une des bases est nulle, le segment dont il s'agit devient un segment sphérique, à une seule base; donc tout segment sphérique à une base équivaut à la moitié du cylindre de même base et de même hauteur, plus la sphere dont cette hauteur est le diametre.

Scholie général.

Soit R le rayon de la base d'un cylindre, H sa hauteur; la solidité du cylindre sera $\pi R^2 \times H$, ou $\pi R^2 H$.

Soit R le rayon de la base d'un cône, H sa hauteur; la solidité du cône sera $\pi R^2 \cdot \frac{1}{3} H$, ou $\frac{1}{3} \pi R^2 H$.

Soient A et B les rayons des bases d'un cône tronqué, H sa hauteur; la solidité du tronc de cône sera $\frac{1}{3} \pi H (A^2 + B^2 + AB)$.

Soit R le rayon d'une sphere; sa solidité sera $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Soit R le rayon d'un secteur sphérique, H la hauteur de la zone qui lui sert de base; la solidité du secteur sera $\frac{2}{3} \pi R^2 H$.

Soient P et Q les deux bases d'un segment sphérique, H sa hauteur, la solidité de ce segment sera $\left(\frac{P+Q}{2}\right) \cdot H + \frac{1}{6} H^3$.

Si le segment sphérique n'a qu'une base P, l'autre étant nulle, sa solidité sera $\frac{1}{2} PH + \frac{1}{6} \pi H^3$.

l'angle $\angle A$ est représenté par $\angle A$ et l'angle $\angle B$ est représenté par $\angle B$.
Si l'on suppose que l'angle $\angle A$ est plus grand que l'angle $\angle B$, on aura
l'angle $\angle A$ plus grand que l'angle $\angle B$.
Si l'on suppose que l'angle $\angle A$ est plus petit que l'angle $\angle B$, on aura
l'angle $\angle A$ plus petit que l'angle $\angle B$.
Si l'on suppose que l'angle $\angle A$ est égal à l'angle $\angle B$, on aura
l'angle $\angle A$ égal à l'angle $\angle B$.
Si l'on suppose que l'angle $\angle A$ est nul, on aura
l'angle $\angle A$ nul.

DES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE