

## LIVRE IV.

### LES POLYGONES RÉGULIERS, ET LA MESURE DU CERCLE.

#### DÉFINITION.

UN polygone qui est à-la-fois équiangle et équilatéral, s'appelle *polygone régulier*.

Il y a des polygones réguliers de tout nombre de côtés. Le triangle équilatéral est celui de trois côtés; et le quarré, celui de quatre.

#### PROPOSITION PREMIERE.

##### THÉORÈME.

*Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont deux figures semblables.*

Soient, par exemple, les deux hexagones réguliers ABCDEF, *abcdef*; la somme des angles est la même dans l'une et dans l'autre figure; elle est égale à huit angles droits \*. L'angle A est la sixieme partie de cette somme aussi bien que l'angle *a*; donc les deux angles A et *a* sont égaux; il en est par conséquent de même des angles B et *b*, des angles C et *c*, etc.

De plus, puisque par la nature de ces polygones les côtés AB, BC, CD, etc., sont égaux, ainsi que *ab*, *bc*, *cd*, etc., il est clair qu'on a les proportions AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd*, etc.; donc les deux figures dont il s'agit ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels; donc elles sont semblables \*.

fig. 155.

\* 28, 1.

\* déf. 2.  
liv. 3.

*Corollaire.* Les périmètres de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont entre eux comme les côtés homologues, et leurs surfaces sont  
 \* 27, 3. comme les quarrés de ces mêmes côtés \*.

*Scholie.* L'angle d'un polygone régulier se détermine par le nombre de ses côtés comme celui d'un  
 \* 20, 1. polygone équiangle \*.

## PROPOSITION II.

## THÉORÈME.

*Tout polygone régulier peut être inscrit dans le cercle, et peut lui être circonscrit.*

fig. 156. Soit ABCDE, etc., le polygone dont il s'agit, imaginez qu'on fasse passer une circonférence par les trois points A, B, C; soit O son centre, et OP la perpendiculaire abaissée sur le milieu du côté BC; joignez AO et OD.

Le quadrilatere OPCD et le quadrilatere OPBA peuvent être superposés : en effet le côté OP est commun, l'angle  $OPC = OPB$ , puisqu'ils sont droits; donc le côté PC s'appliquera sur son égal PB, et le point C tombera en B. De plus, par la nature du polygone, l'angle  $PCD = PBA$ , donc CD prendra la direction BA, et puisque  $CD = BA$ , le point D tombera en A, et les deux quadrilateres coïncideront entièrement l'un avec l'autre. La distance OD est donc égale à AO, et par conséquent la circonférence qui passe par les trois points A, B, C, passera aussi par le point D : mais, par un raisonnement semblable, on prouvera que la circonférence qui passe par les trois sommets B, C, D, passera par le sommet suivant E, et ainsi de suite; donc la même circonférence qui passe par les points A, B, C, passe par tous les sommets des angles du polygone, et le polygone est inscrit dans cette circonférence.

En second lieu, par rapport à cette circonférence, tous les côtés AB, BC, CD, etc., sont des cordes égales; elles sont donc également éloignées du centre\*; donc si du point O, comme centre, et du rayon OP, on décrit une circonférence, cette circonférence touchera le côté BC et tous les autres côtés du polygone, chacun dans son milieu, et la circonférence sera inscrite dans le polygone, ou le polygone circonscrit à la circonférence. \* 8, 2.

*Scholie I.* Le point O, centre commun du cercle inscrit et du cercle circonscrit, peut être regardé aussi comme le centre du polygone, et par cette raison on appelle *angle au centre*, l'angle AOB formé par les deux rayons menés aux extrémités d'un même côté AB.

Puisque toutes les cordes AB, BC, etc., sont égales, il est clair que tous les angles au centre sont égaux, et qu'ainsi la valeur de chacun se trouve en divisant quatre angles droits par le nombre des côtés du polygone.

*Scholie II.* Pour inscrire un polygone régulier d'un certain nombre de côtés dans une circonférence donnée, il ne s'agit que de diviser la circonférence en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés; car, les arcs étant égaux, les cordes AB, BC, CD, etc., seront égales; les triangles ABO, BOC, COD, etc., seront égaux aussi, parce qu'ils sont équilatéraux entre eux; donc tous les angles ABC, BCD, CDE, etc., seront égaux; donc la figure ABCDE, etc., sera un polygone régulier. fig. 158.

### PROPOSITION III.

#### PROBLÈME.

*Inscrire un quarré dans une circonférence donnée.*

fig. 157. Tirez deux diamètres AC, BD, qui se coupent à angles droits; joignez les extrémités A, B, C, D, et la figure ABCD sera le quarré inscrit: car les angles AOB, BOC, etc., étant égaux, les cordes AB, BC, etc., sont égales.

\* 11, 3. *Scholie.* Le triangle BOC étant rectangle et isoscele, on a  $BC:BO :: \sqrt{2}:1$ ; donc le côté du quarré inscrit est au rayon comme la racine quarrée de 2 est à l'unité.

## PROPOSITION IV.

## PROBLÈME.

*Inscrire un hexagone régulier et un triangle équilatéral dans une circonférence donnée.*

fig. 158. Supposons le problème résolu, et soit AB un côté de l'hexagone inscrit; si on mene les rayons AO, OB, je dis que le triangle AOB sera équilatéral.

Car l'angle AOB est la sixieme partie de quatre angles droits; ainsi en prenant l'angle droit pour unité, on aura  $AOB = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ : les deux autres angles ABO, BAO, du même triangle valent ensemble  $2 - \frac{2}{3}$  ou  $\frac{4}{3}$ , et comme ils sont égaux, chacun d'eux  $= \frac{2}{3}$ ; donc le triangle ABO est équilatéral; donc le côté de l'hexagone inscrit est égal au rayon.

Il suit de là que pour inscrire un hexagone régulier dans une circonférence donnée, il faut porter le rayon six fois sur la circonférence, ce qui ramenera au même point d'où on était parti.

L'hexagone ABCDEF étant inscrit, si l'on joint les sommets des angles alternativement, on formera le triangle équilatéral ACE.

\* 14, 3. *Scholie.* La figure ABCO est un parallélogramme et même un losange, puisque  $AB = BC = CO = AO$ ; donc \* la somme des quarrés des diagonales  $\overline{AC}^2 + \overline{BO}^2$ , est égale à la somme des quarrés des côtés,

laquelle est  $4 \overline{AB}^2$  ou  $4 \overline{BO}^2$ ; retranchant de part et d'autre  $\overline{BO}^2$ , il restera  $\overline{AC}^2 = 3 \overline{BO}^2$ ; donc  $\overline{AC}:\overline{BO}::3:1$ , ou  $\overline{AC}:\overline{BO}::\sqrt{3}:1$ ; donc le côté du triangle équilatéral inscrit est au rayon comme la racine quarrée de 3 est à l'unité.

## PROPOSITION V.

## PROBLÈME.

*Inscrire dans un cercle donné un décagone régulier, ensuite un pentagone et un pentédécagone.*

Divisez le rayon AO en moyenne et extrême raison au point M\*, prenez la corde AB égale au plus grand segment OM, et AB sera le côté du décagone régulier qu'il faudra porter dix fois sur la circonférence.

Car en joignant MB, on a par construction AO:OM::OM:AM; ou, à cause de  $AB=OM$ , AO:AB::AB:AM; donc les triangles ABO, AMB, ont un angle commun A compris entre côtés proportionnels; donc ils sont semblables\*. Le triangle OAB est isoscele, donc le triangle AMB l'est aussi, et on a  $AB=BM$ : d'ailleurs  $AB=OM$ ; donc aussi  $MB=OM$ ; donc le triangle BMO est isoscele.

L'angle AMB, extérieur au triangle isoscele BMO, est double de l'intérieur O\*; or l'angle  $AMB=MAB$ ; donc le triangle OAB est tel que chacun des angles à la base, OAB ou OBA, est double de l'angle au sommet O; donc les trois angles du triangle valent cinq fois l'angle O, et ainsi l'angle O est la cinquième partie de deux angles droits, ou la dixième de quatre: donc l'arc AB est la dixième partie de la circonférence, et la corde AB est le côté du décagone régulier.

fig. 159.

\*prob. 4.

liv. 3.

\*20, 3.

\*19, 1.

*Corollaire I.* Si on joint de deux en deux les sommets du décagone régulier, on formera le pentagone régulier ACEGI.

*Corollaire II.* AB étant toujours le côté du décagone, soit AL le côté de l'hexagone; alors l'arc BL sera, par rapport à la circonférence,  $\frac{1}{2} - \frac{1}{10}$  ou  $\frac{1}{5}$ ; donc la corde BL sera le côté du pentédécagone ou polygone régulier de 15 côtés. On voit en même temps que l'arc CL est le tiers de CB.

*Scholie.* Un polygone régulier étant inscrit, si on divise les arcs sous-tendus par ses côtés en deux parties égales, et qu'on tire les cordes des demi-arcs, celles-ci formeront un nouveau polygone régulier d'un nombre de côtés double: ainsi on voit que le carré peut servir à inscrire successivement les polygones réguliers de 8, 16, 32, etc., côtés. De même l'hexagone servira à inscrire les polygones réguliers de 12, 24, 48, etc., côtés; le décagone, des polygones de 20, 40, 80, etc., côtés; le pentédécagone, des polygones de 30, 60, 120, etc., côtés (1).

## PROPOSITION VI.

### PROBLÈME.

fig. 160.

*Étant donné le polygone régulier inscrit ABCD, etc., circoncrire à la même circonférence un polygone semblable.*

(1) On a cru long-temps que ces polygones étaient les seuls qui pussent être inscrits par les procédés de la géométrie élémentaire, ou, ce qui revient au même, par la résolution des équations du premier et du second degré: mais M. Gauss a prouvé, dans un ouvrage intitulé *Disquisitiones Arithmeticae*, Lipsiae, 1801, qu'on peut inscrire par de semblables moyens le polygone régulier de dix-sept côtés, et en général celui de  $2^n + 1$  côtés, pourvu que  $2^n + 1$  soit un nombre premier.

Au point T, milieu de l'arc AB, menez la tangente GH, qui sera parallèle à AB<sup>\*</sup>; faites la même chose au milieu de chacun des autres arcs BC, CD, etc.; ces tangentes formeront par leurs intersections le polygone régulier circonscrit GHIK, etc., semblable au polygone inscrit. \*10, 2.

Il est aisé de voir d'abord que les trois points O, B, H, sont en ligne droite, car les triangles rectangles OTH, OHN, ont l'hypoténuse commune OH, et le côté OT=ON; donc ils sont égaux<sup>\*</sup>; donc l'angle TOH=HON, et par conséquent la ligne OH passe par le point B milieu de l'arc TN: par la même raison le point I est sur le prolongement de OC, etc. Mais, puisque GH est parallèle à AB et HI à BC, l'angle GHI=ABC<sup>\*</sup>; de même HIK=BCD, etc.; donc les angles du polygone circonscrit sont égaux à ceux du polygone inscrit. De plus, à cause de ces mêmes parallèles, on a GH:AB::OH:OB, et HI:BC::OH:OB; donc GH:AB::HI:BC. Mais AB=BC, donc GH=HI. Par la même raison HI=IK, etc.; donc les côtés du polygone circonscrit sont égaux entre eux; donc ce polygone est régulier et semblable au polygone inscrit. \*18, 1. \*26, 1.

*Corollaire I.* Réciproquement, si on donnait le polygone circonscrit GHIK, etc., et qu'il fallût tracer par son moyen le polygone inscrit ABC, etc., on voit qu'il suffirait de mener aux sommets G, H, I, etc., du polygone donné les lignes OG, OH, etc., qui rencontreraient la circonférence aux points A, B, C, etc.; on joindrait ensuite ces points par les cordes AB, BC, etc., qui formeraient le polygone inscrit. On pourrait aussi, dans le même cas, joindre tout simplement les points de contact, T, N, P, etc., par les cordes TN, NP, etc., ce qui formerait également un polygone inscrit semblable au circonscrit.

*Corollaire II.* Donc on peut circonscrire à un Douz. éd.

cercle donné tous les polygones réguliers qu'on sait inscrire dans ce cercle, et réciproquement.

## PROPOSITION VII.

## THÉORÈME.

*L'aire d'un polygone régulier est égale à son périmètre multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit.*

fig. 160.

Soit, par exemple, le polygone régulier GHIK, etc.; le triangle GOH a pour mesure  $GH \times \frac{1}{2}OT$ , le triangle OHI a pour mesure  $HI \times \frac{1}{2}ON$  : mais  $ON = OT$ ; donc les deux triangles réunis ont pour mesure  $(GH + HI) \times \frac{1}{2}OT$ . En continuant ainsi pour les autres triangles, on verra que la somme de tous les triangles, ou le polygone entier a pour mesure la somme des bases GH, HI, IK, etc., ou le périmètre du polygone, multiplié par  $\frac{1}{2}OT$ , moitié du rayon du cercle inscrit.

*Scholie.* Le rayon du cercle inscrit OT n'est autre chose que la perpendiculaire abaissée du centre sur un des côtés; on l'appelle quelquefois l'*apothème* du polygone.

## PROPOSITION VIII.

## THÉORÈME.

*Les périmètres des polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont comme les rayons des cercles circonscrits, et aussi comme les rayons des cercles inscrits; leurs surfaces sont comme les quarrés de ces mêmes rayons.*

fig. 161.

Soit AB un côté de l'un des polygones dont il s'agit, O son centre, et par conséquent OA le rayon du cercle circonscrit, et OD, perpendiculaire sur AB,

le rayon du cercle inscrit; soit pareillement  $ab$  le côté d'un autre polygone semblable,  $o$  son centre,  $oa$  et  $od$  les rayons des cercles circonscrit et inscrit. Les périmètres des deux polygones sont entre eux comme les côtés  $AB$  et  $ab$ ; mais les angles  $A$  et  $a$  sont égaux comme étant chacun moitié de l'angle du polygone; il en est de même des angles  $B$  et  $b$ ; donc les triangles  $ABO$ ,  $abo$ , sont semblables, ainsi que les triangles rectangles  $ADO$ ,  $ado$ ; donc  $AB:ab::AO:ao::DO:do$ ; donc les périmètres des polygones sont entre eux comme les rayons  $AO$ ,  $ao$ , des cercles circonscrits, et aussi comme les rayons  $DO$ ,  $do$ , des cercles inscrits.

Les surfaces de ces mêmes polygones sont entre elles comme les carrés des côtés homologues  $AB$ ,  $ab$ ; elles sont par conséquent aussi comme les carrés des rayons des cercles circonscrits  $AO$ ,  $ao$ , ou comme les carrés des rayons des cercles inscrits  $OD$ ,  $od$ .

## PROPOSITION IX.

## LEMME.

*Toute ligne courbe ou polygone qui enveloppe d'une extrémité à l'autre la ligne convexe  $AMB$  est plus longue que la ligne enveloppée  $AMB$ .*

Nous avons déjà dit que par ligne convexe nous entendons une ligne courbe ou polygone, ou en partie courbe et en partie polygone, telle qu'une ligne droite ne peut la couper en plus de deux points. Si la ligne  $AMB$  avait des parties rentrantes ou des sinuosités, elle cesserait d'être convexe, parce qu'il est aisé de voir qu'une ligne droite pourrait la couper en plus de deux points. Les arcs de cercle sont essentiellement convexes; mais la proposition dont il s'agit maintenant s'étend à une ligne quelconque qui remplit la condition exigée.

fig. 162.

Cela posé, si la ligne  $AMB$  n'est pas plus petite que toutes celles qui l'enveloppent, il existera parmi ces dernières une ligne plus courte que toutes les autres, laquelle sera plus petite que  $AMB$ , ou tout au plus égale à  $AMB$ . Soit  $ACDEB$  cette ligne enveloppante; entre les deux lignes menez par-tout où vous voudrez la droite  $PQ$ , qui ne rencontre point la ligne  $AMB$ , ou du moins qui ne fasse que la toucher; la droite  $PQ$  est plus courte que  $PCDEQ$ ; donc, si à la partie  $PCDEQ$  on substitue la ligne droite  $PQ$ , on aura la ligne enveloppante  $APQB$  plus courte que  $APDQB$ . Mais, par hypothèse, celle-ci doit être la plus courte de toutes; donc cette hypothèse ne saurait subsister; donc toutes les lignes enveloppantes sont plus longues que  $AMB$ .

fig. 163.

*Scholie.* On démontrera absolument de la même manière qu'une ligne convexe et rentrante sur elle-même  $AMB$ , est plus courte que toute ligne qui l'envelopperait de toutes parts, soit que la ligne enveloppante  $FHG$  touche  $AMB$  en un ou plusieurs points, soit qu'elle l'environne sans la toucher.

## PROPOSITION X.

## LEMME.

*Deux circonférences concentriques étant données, on peut toujours inscrire dans la plus grande un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la plus petite; et on peut aussi circonscrire à la plus petite un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la grande; de sorte que dans l'un et dans l'autre cas les côtés du polygone décrit seront renfermés entre les deux circonférences.*

fig. 164.

Soient  $CA$ ,  $CB$ , les rayons des deux circonférences données. Au point  $A$  menez la tangente  $DE$  terminée à la grande circonférence en  $D$  et  $E$ : inscrivez

dans la grande circonférence l'un des polygones réguliers qu'on peut inscrire par les problèmes précédents, divisez ensuite les arcs sous-tendus par les côtés en deux parties égales, et menez les cordes des demi-arcs; vous aurez un polygone régulier d'un nombre de côtés double. Continuez la bissection des arcs jusqu'à ce que vous parveniez à un arc plus petit que DBE. Soit MBN cet arc (dont le milieu est supposé en B); il est clair que la corde MN sera plus éloignée du centre que DE, et qu'ainsi le polygone régulier dont MN est le côté ne saurait rencontrer la circonférence dont CA est le rayon.

Les mêmes choses étant posées, joignez CM et CN qui rencontrent la tangente DE en P et Q; PQ sera le côté d'un polygone circonscrit à la petite circonférence, semblable au polygone inscrit dans la grande, dont le côté est MN. Or il est clair que le polygone circonscrit qui a pour côté PQ, ne saurait rencontrer la grande circonférence, puisque CP est moindre que CM.

Donc, par la même construction, on peut décrire un polygone régulier inscrit dans la grande circonférence, et un polygone semblable circonscrit à la petite, lesquels auront leurs côtés compris entre les deux circonférences.

*Scholie.* Si on a deux secteurs concentriques FCG, ICH, on pourra de même inscrire dans le plus grand une *portion de polygone régulier*, ou circoncrire au plus petit une portion de polygone semblable, de sorte que les contours des deux polygones soient compris entre les deux circonférences: il suffira de diviser l'arc FBG successivement en 2, 4, 8, 16, etc., parties égales, jusqu'à ce qu'on parvienne à une partie plus petite que DBE.

Nous appelons ici *portion de polygone régulier* la figure terminée par une suite de cordes égales inscrites

dans l'arc FG d'une extrémité à l'autre. Cette portion a les propriétés principales des polygones réguliers, elle a les angles égaux et les côtés égaux, elle est à-la-fois inscriptible et circonscriptible au cercle; cependant elle ne ferait partie d'un polygone régulier proprement dit, qu'autant que l'arc sous-tendu par un de ses côtés serait une partie aliquote de la circonférence.

## PROPOSITION XI.

## THÉORÈME.

*Les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons, et leurs surfaces comme les quarrés des rayons.*

fig. 165.

Désignons, pour abrégér, par *circ.* CA la circonférence qui a pour rayon CA; je dis qu'on aura *circ.* CA : *circ.* OB :: CA : OB.

Car, si cette proportion n'a pas lieu, CA sera à OB comme *circ.* CA est à un quatrième terme plus grand ou plus petit que *circ.* OB : supposons-le plus petit, et soit, s'il est possible, CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OD.

Inscrivez dans la circonférence dont OB est le rayon un polygone régulier EFGKLE, dont les côtés ne rencontrent point la circonférence dont OD est le rayon \*; inscrivez un polygone semblable MNPTSM dans la circonférence dont CA est le rayon.

\* 10.

Cela posé, puisque ces polygones sont semblables, leurs périmètres MNPSM, EFGKE sont entre eux comme les rayons CA, OB, des cercles circonscrits \*, et on aura MNPSM : EFGKE :: CA : OB; mais, par hypothèse, CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OD; donc MNPSM : EFGKE :: *circ.* CA : *circ.* OD. Or, cette proportion est impossible, car le contour MNPSM est moindre que *circ.* CA \*, et au contraire EFGKE

\* 8.

est plus grand que *circ.* OD; donc il est impossible que CA soit à OB comme *circ.* CA est à une circonférence plus petite que *circ.* OB, ou, en termes plus généraux, il est impossible qu'un rayon soit à un rayon comme la circonférence décrite du premier rayon est à une circonférence plus petite que la circonférence décrite du second rayon.

De là je conclus qu'on ne peut avoir non plus, CA est à OB comme *circ.* CA est à une circonférence plus grande que *circ.* OB; car si cela était, on aurait, en renversant les rapports: OB est à CA comme une circonférence plus grande que *circ.* OB est à *circ.* CA, ou, ce qui est la même chose, comme *circ.* OB est à une circonférence plus petite que *circ.* CA; donc un rayon serait à un rayon comme la circonférence décrite du premier rayon est à une circonférence plus petite que la circonférence décrite du second rayon, ce qui a été démontré impossible.

Puisque le quatrième terme de la proportion CA:OB::*circ.* CA:X ne peut être ni plus petit ni plus grand que *circ.* OB, il faut qu'il soit égal à *circ.* OB; donc les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons.

Un raisonnement et une construction entièrement semblables serviront à démontrer que les surfaces des cercles sont comme les quarrés de leurs rayons.

Nous n'entrerons pas dans d'autres détails sur cette proposition, qui d'ailleurs est un corollaire de la suivante.

*Corollaire.* Les arcs semblables AB, DE, sont fig. 166.  
comme leurs rayons AC, DO, et les secteurs semblables ACB, DOE, sont comme les quarrés de ces mêmes rayons.

Car, puisque les arcs sont semblables, l'angle C est égal à l'angle O\*; or l'angle C est à quatre angles droits comme l'arc AB est à la circonférence entière

\* déf. 3.  
liv. 3.

- \* 17, 2. décrite du rayon  $AC^*$ , et l'angle  $O$  est à quatre angles droits comme l'arc  $DE$  est à la circonférence décrite du rayon  $OD$ ; donc les arcs  $AB$ ,  $DE$ , sont entre eux comme les circonférences dont ils font partie: ces circonférences sont comme les rayons  $AC$ ,  $DO$ , donc  $\text{arc } AB : \text{arc } DE :: AC : DO$ .

Par la même raison les secteurs  $ACB$ ,  $DOE$ , sont comme les cercles entiers, ceux-ci sont comme les carrés des rayons; donc  $\text{sect. } ACB : \text{sect. } DOE :: AC : DO$ .

## PROPOSITION XII.

## THÉORÈME.

*L'aire du cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon.*

Désignons par *surf.*  $CA$  la surface du cercle dont le rayon est  $CA$ ; je dis qu'on aura  $\text{surf. } CA = \frac{1}{2} CA \times \text{circ. } CA$ .

- fig. 176. Car si  $\frac{1}{2} CA \times \text{circ. } CA$  n'est pas l'aire du cercle dont  $CA$  est le rayon, cette quantité sera la mesure d'un cercle plus grand ou plus petit. Supposons d'abord qu'elle est la mesure d'un cercle plus grand, et soit, s'il est possible,  $\frac{1}{2} CA \times \text{circ. } CA = \text{surf. } CB$ .

- Au cercle dont le rayon est  $CA$  circonscrivez un polygone régulier  $DEFG$ , etc., dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence qui a  $CB$  pour rayon \*;  
 \* 10. la surface de ce polygone sera égale à son contour  
 \* 7.  $DE + EF + FG + \text{etc.}$  multiplié par  $\frac{1}{2} AC^*$ : mais le contour du polygone est plus grand que la circonférence inscrite, puisqu'il l'enveloppe de toutes parts; donc la surface du polygone  $DEFG$ , etc., est plus grande que  $\frac{1}{2} AC \times \text{circ. } AC$ , qui, par hypothèse, est la mesure du cercle dont  $CB$  est le rayon; donc le polygone serait plus grand que le cercle. Or au contraire

il est plus petit, puisqu'il y est contenu; donc il est impossible que  $\frac{1}{2} CA \times \text{circ. CA}$  soit plus grand que *surf. CA*, ou, en d'autres termes, il est impossible que la circonférence d'un cercle multipliée par la moitié de son rayon soit la mesure d'un cercle plus grand.

Je dis en second lieu que le même produit ne peut être la mesure d'un cercle plus petit; et, pour ne pas changer de figure, je supposerai qu'il s'agit du cercle dont CB est le rayon; il faut donc prouver que  $\frac{1}{2} CB \times \text{circ. CB}$  ne peut être la mesure d'un cercle plus petit, par exemple, du cercle dont le rayon est CA. En effet, soit, s'il est possible,  $\frac{1}{2} CB \times \text{circ. CB} = \text{surf. CA}$ .

Ayant fait la même construction que ci-dessus, la surface du polygone DEFG, etc., aura pour mesure  $(DE + EF + FG + \text{etc.}) \times \frac{1}{2} CA$ ; mais le contour  $DE + EF + FG + \text{etc.}$ , est moindre que *circ. CB* qui l'enveloppe de toutes parts; donc l'aire du polygone est moindre que  $\frac{1}{2} CA \times \text{circ. CB}$ , et à plus forte raison moindre que  $\frac{1}{2} CB \times \text{circ. CB}$ . Cette dernière quantité est, par hypothèse, la mesure du cercle dont CA est le rayon; donc le polygone serait moindre que le cercle inscrit, ce qui est absurde; donc il est impossible que la circonférence d'un cercle, multipliée par la moitié de son rayon, soit la mesure d'un cercle plus petit.

Donc enfin la circonférence d'un cercle multipliée par la moitié de son rayon est la mesure de ce même cercle.

*Corollaire I.* La surface d'un secteur est égale à l'arc de ce secteur multiplié par la moitié du rayon. fig. 168.

Car le secteur ACB est au cercle entier comme l'arc AMB est à la circonférence entière ABD\*, ou comme  $AMB \times \frac{1}{2} AC$  est à  $ABD \times \frac{1}{2} AC$ . Mais le cercle entier =  $ABD \times \frac{1}{2} AC$ ; donc le secteur ACB a pour mesure  $AMB \times \frac{1}{2} AC$ .

\* 17, 2.

*Corollaire II.* Appelons  $\pi$  la circonférence dont le diamètre est l'unité; puisque les circonférences sont comme les rayons ou comme les diamètres, on pourra faire cette proportion : le diamètre 1 est à sa circonférence  $\pi$  comme le diamètre  $2CA$  est à la circonférence qui a pour rayon  $CA$ ; de sorte qu'on aura  
 fig. 165.  $1 : \pi :: 2CA : \text{circ. } CA$ ; donc  $\text{circ. } CA = 2\pi \times CA$ . Multipliant de part et d'autre par  $\frac{1}{2} CA$ , on aura  
 $\frac{1}{2} CA \times \text{circ. } CA = \pi \times \overline{CA}^2$ , ou  $\text{surf. } CA = \pi \cdot \overline{CA}$ ; donc la surface d'un cercle est égale au produit du carré de son rayon par le nombre constant  $\pi$ , qui représente la circonférence dont le diamètre est 1, ou le rapport de la circonférence au diamètre.

Pareillement la surface du cercle qui a pour rayon  $OB$  sera égale à  $\pi \times \overline{OB}^2$ ; or  $\pi \times \overline{CA}^2 : \pi \times \overline{OB}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{OB}^2$ ; donc les surfaces des cercles sont entre elles comme les carrés de leurs rayons, ce qui s'accorde avec le théorème précédent.

*Scholie.* Nous avons déjà dit que le problème de la quadrature du cercle consiste à trouver un carré égal en surface à un cercle dont le rayon est connu; or on vient de prouver que le cercle est équivalent au rectangle fait sur la circonférence et la moitié du rayon, et ce rectangle se change en carré en prenant une  
 \* pr. 6, moyenne proportionnelle entre ses deux dimensions\*: ainsi le problème de la quadrature du cercle se réduit à trouver la circonférence quand on connaît le rayon, et pour cela il suffit de connaître le rapport de la circonférence au rayon ou au diamètre.

Jusqu'à présent on n'a pu déterminer ce rapport que d'une manière approchée; mais l'approximation a été poussée si loin, que la connaissance du rapport exact n'aurait aucun avantage réel sur celle du rapport approché. Aussi cette question, qui a beaucoup occupé les géomètres lorsque les méthodes d'approxi-

mation étaient moins connues, est maintenant reléguée parmi les questions oiseuses dont il n'est permis de s'occuper qu'à ceux qui ont à peine les premières notions de géométrie.

*Archimède* a prouvé que le rapport de la circonférence au diamètre est compris entre  $3\frac{1}{7}$  et  $3\frac{1}{71}$ ; ainsi  $3\frac{1}{7}$  ou  $\frac{22}{7}$  est une valeur déjà fort approchée du nombre que nous avons représenté par  $\pi$ , et cette première approximation est fort en usage à cause de sa simplicité. *Métius* a trouvé pour le même nombre la valeur beaucoup plus approchée  $\frac{355}{113}$ . Enfin la valeur de  $\pi$ , développée jusqu'à un certain ordre de décimales, a été trouvée par d'autres calculateurs 3,1415926535897932, etc., et on a eu la patience de prolonger ces décimales jusqu'à la cent vingt-septième ou même jusqu'à la cent-quarantième. Il est évident qu'une telle approximation équivaut à la vérité, et qu'on ne connaît pas mieux les racines des puissances imparfaites.

On expliquera, dans les problèmes suivants, deux des méthodes élémentaires les plus simples pour obtenir ces approximations.

## PROPOSITION XIII.

## PROBLÈME.

*Étant données les surfaces d'un polygone régulier inscrit et d'un polygone semblable circonscrit, trouver les surfaces des polygones réguliers inscrits et circonscrits d'un nombre de côtés double.*

Soit AB le côté du polygone donné inscrit, EF fig. 169. parallèle à AB, celui du polygone semblable circonscrit, C le centre du cercle; si on tire la corde AM et les tangentes AP, BQ, la corde AM sera le côté du

polygone inscrit d'un nombre de côtés double, et PQ double de PM sera celui du polygone semblable circonscrit \*. Cela posé, comme la même construction aura lieu dans les différents angles égaux à ACM, il suffit de considérer l'angle ACM seul, et les triangles qui y sont contenus seront entre eux comme les polygones entiers. Soit A la surface du polygone inscrit dont AB est un côté, B la surface du polygone semblable circonscrit, A' la surface du polygone dont AM est un côté, B' la surface du polygone semblable circonscrit; A et B sont connus, il s'agit de trouver A' et B'.

1° Les triangles ACD, ACM, dont le sommet commun est A, sont entre eux comme leurs bases CD, CM; d'ailleurs ces triangles sont comme les polygones A et A' dont ils font partie; donc  $A:A'::CD:CM$ . Les triangles CAM, CME, dont le sommet commun est M, sont entre eux comme leurs bases CA, CE; ces mêmes triangles sont comme les polygones A' et B dont ils font partie; donc  $A':B::CA:CE$ . Mais à cause des parallèles AD, ME, on a  $CD:CM::CA:CE$ ; donc  $A:A'::A':B$ ; donc le polygone A', l'un de ceux que l'on cherche, est moyen proportionnel entre les deux polygones connus A et B, et on

a par conséquent  $A' = \sqrt{A \times B}$ .

2° A cause de la hauteur commune CM, le triangle CPM est au triangle CPE comme PM est à PE; mais la ligne CP divisant en deux parties égales l'angle MCE, on a \*  $PM:PE::CM:CE::CD:CA::A:A'$ ; donc  $CPM:CPE::A:A'$ , et par suite,  $CPM:CPM+CPE$ , ou  $CME::A:A+A'$ . Mais CMPA ou 2CMP et CME sont entre eux comme les polygones B' et B dont ils font partie; donc  $B':B::2A:A+A'$ . On a déjà déterminé A'; cette nouvelle proportion déterminera B', et on aura  $B' =$

$\frac{2A \times B}{A + A'}$ ; donc, au moyen des polygones A et B, il est facile de trouver les polygones A' et B' qui ont deux fois plus de côtés.

## PROPOSITION XIV.

## PROBLÈME.

*Trouver le rapport approché de la circonférence au diamètre.*

Soit le rayon du cercle = 1, le côté du carré inscrit sera  $\sqrt{2}^*$ , celui du carré circonscrit sera  $\sqrt{2}^*$ , égal au diamètre 2; donc la surface du carré inscrit = 2, et celle du carré circonscrit = 4. Maintenant, si on fait  $A = 2$  et  $B = 4$ , on trouvera par le problème précédent l'octogone inscrit  $A' = \sqrt{8} = 2,8284271$ , et l'octogone circonscrit  $B' = \frac{16}{2 + \sqrt{8}} = 3,3137085$ . Connaissant ainsi les octogones inscrit et circonscrit, on trouvera par leur moyen les polygones d'un nombre de côtés double; il faudra de nouveau supposer  $A = 2,8284271$ ,  $B = 3,3137085$ , et on aura  $A' = \sqrt{A \times B} = 3,0614674$ , et  $B' = \frac{2A \times B}{A + A'} = 3,1825979$ . Ensuite ces polygones de 16 côtés serviront à connaître ceux de 32, et on continuera ainsi jusqu'à ce que le calcul ne donne plus de différence entre les polygones inscrit et circonscrit, au moins dans l'ordre de décimales auquel on s'est arrêté, qui est le septième dans cet exemple. Arrivé à ce point, on conclura que le cercle est égal au dernier résultat, car le cercle doit toujours être compris entre le polygone inscrit et le polygone circonscrit; donc si ceux-ci ne diffèrent point entre eux jusqu'à un certain

\*3.

ordre de décimales, le cercle n'en différera pas non plus jusqu'au même ordre.

Voici le calcul de ces polygones prolongé jusqu'à ce qu'ils ne diffèrent plus dans le septième ordre de décimales.

| Nombre des côtés. | Polygone inscrit. | Polygone circonscrit. |
|-------------------|-------------------|-----------------------|
| 4 .....           | 2,0000000         | 4,0000000             |
| 8 .....           | 2,8284271         | 3,3137085             |
| 16 .....          | 3,0614674         | 3,1825979             |
| 32 .....          | 3,1214451         | 3,1517249             |
| 64 .....          | 3,1365485         | 3,1441184             |
| 128 .....         | 3,1403311         | 3,1422236             |
| 256 .....         | 3,1412772         | 3,1417504             |
| 512 .....         | 3,1415138         | 3,1416321             |
| 1024 .....        | 3,1415729         | 3,1416025             |
| 2048 .....        | 3,1415877         | 3,1415951             |
| 4096 .....        | 3,1415914         | 3,1415933             |
| 8192 .....        | 3,1415923         | 3,1415928             |
| 16384 .....       | 3,1415925         | 3,1415927             |
| 32768 .....       | 3,1415926         | 3,1415926             |

De là je conclus que la surface du cercle = 3,1415926. On pourrait avoir du doute sur la dernière décimale à cause des erreurs qui viennent des parties négligées; mais le calcul a été fait avec une décimale de plus, pour être sûr du résultat que nous venons de trouver jusque dans la dernière décimale.

Puisque la surface du cercle est égale à la demi-circonférence multipliée par le rayon, le rayon étant 1, la demi-circonférence est 3,1415926; ou bien le diamètre étant 1, la circonférence est 3,1415926; donc le rapport de la circonférence au diamètre désigné ci-dessus par  $\pi = 3,1415926$ .

## PROPOSITION XV.

## LEMME.

Le triangle CAB est équivalent au triangle isoscele DCE, fig. 170. qui a le même angle C, et dont le côté CE égal à CD est moyen proportionnel entre CA et CB. De plus, si l'angle CAB est droit, la perpendiculaire CF abaissée sur la base du triangle isoscele, sera moyenne proportionnelle entre le côté CA et la demi-somme des côtés CA, CB.

Car, 1<sup>o</sup> à cause de l'angle commun C, le triangle ABC est au triangle isoscele DCE comme  $AC \times CB$  est à  $DC \times CE$ , ou  $DC^2$ ; donc ces triangles seront équivalents, si  $DC = AC \times CB$ , ou si DC est moyenne proportionnelle entre AC et CB. \* 24, 3.

2<sup>o</sup> La perpendiculaire CGF coupant en deux parties égales l'angle ACB, on a  $AG : GB :: AC : CB$ , d'où résulte, *componendo*,  $AG : AG + GB$  ou  $AB :: AC : AC + CB$ ; mais AG est à AB comme le triangle ACG est au triangle ACB ou 2CDF; d'ailleurs, si l'angle A est droit, les triangles rectangles ACG, CDF, seront semblables, et donneront  $ACG : CDF :: AC : CF$ , donc, \* 17, 3.

$$AC : 2 CF :: AC : AC + CB.$$

Multipliant le second rapport par AC, les antécédents deviendront égaux, et on aura par conséquent  $2 CF = AC \times (AC + CB)$ , ou  $CF = AC \times \left( \frac{AC + CB}{2} \right)$ ; donc 2<sup>o</sup> si l'angle A est droit, la perpendiculaire CF sera moyenne proportionnelle entre le côté AC et la demi-somme des côtés AC, CB.

## PROPOSITION XVI.

## PROBLÈME.

Trouver un cercle qui diffère aussi peu qu'on voudra d'un polygone régulier donné.

Soit proposé, par exemple, le quarré BMNP; abaissez du fig. 172.

centre C la perpendiculaire CA sur le côté MB, et joignez CB.

Le cercle décrit du rayon CA est inscrit dans le carré, et le cercle décrit du rayon CB est circonscrit à ce même carré; le premier sera plus petit que le carré, le second sera plus grand; mais il s'agit de resserrer ces limites.

Prenez CD et CE égales chacune à la moyenne proportionnelle entre CA et CB, et joignez ED; le triangle isoscele \*51. CDE sera équivalent au triangle CAB\*; faites de même pour chacun des huit triangles qui composent le carré, vous formerez ainsi un octogone régulier équivalent au carré BMNP. Le cercle décrit du rayon CF, moyen proportionnel entre CA et  $\frac{CA+CB}{2}$ , sera inscrit dans l'octogone, et

le cercle décrit du rayon CD lui sera circonscrit. Ainsi le premier sera plus petit que le carré donné et le second plus grand.

Si on change de la même manière le triangle rectangle CDF en un triangle isoscele équivalent, on formera par ce moyen un polygone régulier de seize côtés, équivalent au carré proposé. Le cercle inscrit dans ce polygone sera plus petit que le carré, et le cercle circonscrit sera plus grand.

On peut continuer ainsi jusqu'à ce que le rapport entre le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit diffère aussi peu qu'on voudra de l'égalité. Alors l'un et l'autre cercle pourront être regardés comme équivalents au carré proposé.

*Scholie.* Voici à quoi se réduit la recherche des rayons successifs. Soit  $a$  le rayon du cercle inscrit dans l'un des polygones trouvés,  $b$  le rayon du cercle circonscrit au même polygone; soient  $a$  et  $b'$  les rayons semblables pour le polygone suivant qui a un nombre de côtés double. Suivant ce que nous avons démontré,  $b'$  est une moyenne proportionnelle entre  $a$  et  $b$ , et  $a'$  est une moyenne proportionnelle entre  $a$  et  $\frac{a+b}{2}$ ; de sorte qu'on aura  $b' = \sqrt{a \times b}$ , et  $a' = \sqrt{a \times \frac{a+b}{2}}$ ; donc les rayons  $a$  et  $b$  d'un polygone étant

connus, on en conclut facilement les rayons  $a'$  et  $b'$  du polygone suivant : et on continuera ainsi jusqu'à ce que la différence entre les deux rayons soit devenue insensible ; alors l'un ou l'autre de ces rayons sera le rayon du cercle équivalent au carré ou au polygone proposé.

Cette méthode est facile à pratiquer en lignes, puisque elle se réduit à trouver des moyennes proportionnelles successives entre des lignes connues ; mais elle réussit encore mieux en nombres, et c'est une des plus commodes que la géométrie élémentaire puisse fournir pour trouver promptement le rapport approché de la circonférence au diamètre. Soit le côté du carré  $= 2$ , le premier rayon inscrit CA sera 1, et le premier rayon circonscrit CB sera  $\sqrt{2}$  ou 1,4142136. Faisant donc  $a = 1$ ,  $b = 1,4142136$ , on trouvera  $b' = 1,1892071$ , et  $a' = 1,0986841$ . Ces nombres serviront à calculer les suivants d'après la loi de continuation.

Voici le résultat du calcul fait jusqu'à sept ou huit chiffres par les tables de logarithmes ordinaires.

| Rayons des cercles circonscrits. | Rayons des cercles inscrits. |
|----------------------------------|------------------------------|
| 1,4142136 .....                  | 1,0000000.                   |
| 1,1892071 .....                  | 1,0986841.                   |
| 1,1430500 .....                  | 1,1210863.                   |
| 1,1320149 .....                  | 1,1265639.                   |
| 1,1292862 .....                  | 1,1279257.                   |
| 1,1286063 .....                  | 1,1282657.                   |

Maintenant que la première moitié des chiffres est la même des deux côtés, on pourra, au lieu des moyens géométriques, prendre les moyens arithmétiques, qui n'en diffèrent que dans les décimales ultérieures. De cette manière l'opération s'abrege beaucoup, et les résultats sont :

|                 |            |
|-----------------|------------|
| 1,1284360 ..... | 1,1283508. |
| 1,1283934 ..... | 1,1283721. |
| 1,1283827 ..... | 1,1283774. |
| 1,1283801 ..... | 1,1283787. |
| 1,1283794 ..... | 1,1283791. |
| 1,1283792 ..... | 1,1283792. |
| Douz. éd.       | 9          |

Donc 1,1283792 est à très-peu près le rayon du cercle égal en surface au carré dont le côté est 2. De là il est facile de trouver le rapport de la circonférence au diamètre : car on a démontré que la surface du cercle est égale au carré de son rayon multiplié par le nombre  $\pi$  ; donc, si on divise la surface 4 par le carré de 1,1283792, on aura la valeur de  $\pi$ , qui se trouve par ce calcul de 3,1415926, etc., comme on l'a trouvée par une autre méthode.

## APPENDICE AU LIVRE IV.

### DÉFINITIONS.

I. On appelle *maximum* la quantité la plus grande entre toutes celles de la même espèce ; *minimum* la plus petite.

Ainsi le diamètre du cercle est un *maximum* entre toutes les lignes qui joignent deux points de la circonférence, et la perpendiculaire est un *minimum* entre toutes les droites menées d'un point donné à une ligne donnée.

II. On appelle figures *isopérimètres* celles qui ont des périmètres égaux.

### PROPOSITION PREMIERE.

#### THÉORÈME.

*Entre tous les triangles de même base et de même périmètre, le triangle maximum est celui dans lequel les deux côtés non déterminés sont égaux.*

fig. 172. Soit  $AC = CB$ , et  $AM + MB = AC + CB$  ; je dis que le triangle isoscele  $ACB$  est plus grand que le triangle  $AMB$  qui a même base et même périmètre.

Du point  $C$ , comme centre, et du rayon  $CA = CB$ , décrivez une circonférence qui rencontre  $CA$  prolongé en  $D$  ; joignez  $DB$  ; et l'angle  $DBA$ , inscrit dans le demi-cercle, sera un angle droit \*. Prolongez la perpendiculaire  $DB$  vers  $N$ , faites  $MN = MB$ , et joignez  $AN$ . Enfin des points  $M$  et  $C$  abaissez  $MP$  et  $CG$ , perpendiculaires sur  $DN$ . Puisque  $CB =$

\* 15, 2.

CD et MN = MB, on a  $AC + CB = AD$ , et  $AM + MB = AM + MN$ . Mais  $AC + CB = AM + MB$ ; donc  $AD = AM + MN$ ; donc  $AD > AN$ : or si l'oblique AD est plus grande que l'oblique AN, elle doit être plus éloignée de la perpendiculaire AB; donc  $DB > BN$ ; donc BG, qui est moitié de BD\*, \* 12, 1. sera plus grande que BP moitié de BN. Mais les triangles ABC, ABM, qui ont même base AB, sont entre eux comme leurs hauteurs BG, BP; donc, puisqu'on a  $BG > BP$ , le triangle isoscele ABC est plus grand que le non-isoscele ABM de même base et de même périmètre.

## PROPOSITION II.

## THÉORÈME.

*Entre tous les polygones isopérimètres et d'un même nombre de côtés, celui qui est un maximum a ses côtés égaux.*

Car soit ABCDEF le polygone *maximum*; si le côté BC fig. 173. n'est pas égal à CD, faites sur la base BD un triangle isoscele BOD qui soit isopérimètre à BCD, le triangle BOD sera plus grand que BCD\*, et par conséquent le polygone \* pr. 1. ABODEF sera plus grand que ABCDEF; donc ce dernier ne serait pas le *maximum* entre tous ceux qui ont le même périmètre et le même nombre de côtés, ce qui est contre la supposition. On doit donc avoir  $BC = CD$ : on aura par la même raison  $CD = DE$ ,  $DE = EF$ , etc.; donc tous les côtés du polygone *maximum* sont égaux entre eux.

## PROPOSITION III.

## THÉORÈME.

*De tous les triangles formés avec deux côtés donnés faisant entre eux un angle à volonté, le maximum est celui dans lequel les deux côtés donnés font un angle droit.*

Soient les deux triangles BAC, BAD, qui ont le côté AB fig. 174. commun, et le côté  $AC = AD$ ; si l'angle BAC est droit, je dis que le triangle BAC sera plus grand que le triangle BAD, dans lequel l'angle en A est aigu ou obtus.

Car la base AB étant la même, les deux triangles BAC, BAD, sont comme les hauteurs AC, DE : mais la perpendiculaire DE est plus courte que l'oblique AD ou son égale AC ; donc le triangle BAD est plus petit que BAC.

## PROPOSITION IV.

## THÉORÈME.

*De tous les polygones formes avec des côtés donnés et un dernier à volonté, le maximum doit être tel que tous ses angles soient inscrits dans une demi-circonférence dont le côté inconnu sera le diamètre.*

fig. 175. Soit ABCDEF le plus grand des polygones formés avec les côtés donnés AB, BC, CD, DE, EF, et un dernier AF à volonté ; tirez les diagonales AD, DF. Si l'angle ADF n'était pas droit, on pourrait, en conservant les parties ABCD, DEF, telles qu'elles sont, augmenter le triangle ADF, et par conséquent le polygone entier, en rendant l'angle ADF droit, conformément à la proposition précédente ; mais ce polygone ne peut plus être augmenté, puisqu'il est supposé parvenu à son *maximum* ; donc l'angle ADF est déjà un angle droit. Il en est de même des angles ABF, ACF, AEF ; donc tous les angles A, B, C, D, E, F, du polygone *maximum* sont inscrits dans une demi-circonférence dont le côté indéterminé AF est le diamètre.

fig. 176. *Scholie.* Cette proposition donne lieu à une question ; savoir, s'il y a plusieurs manières de former un polygone avec des côtés donnés, et un dernier inconnu qui sera le diamètre de la demi-circonférence dans laquelle les autres côtés sont inscrits. Avant de décider cette question, il faut observer que si une même corde AB sous-tend des arcs décrits de différents rayons AC, AD, l'angle au centre appuyé sur cette corde sera le plus petit dans le cercle dont le rayon est le plus grand ; ainsi  $\angle ACB < \angle ADB$ . En effet l'angle ADO  $= \angle ACD + \angle CAD^*$  ; donc  $\angle ACD < \angle ADO$ , et en doublant de part et d'autre on aura  $\angle ACB < \angle ADB$ .

\* 27, 1.

## PROPOSITION V.

## THÉORÈME.

*Il n'y a qu'une manière de former le polygone ABCDEF, avec des côtés donnés et un dernier inconnu qui soit le diamètre de la demi-circonférence dans laquelle les autres côtés sont inscrits.*

Car, supposons qu'on a trouvé un cercle qui satisfasse à la question; si on prend un cercle plus grand, les cordes AB, BC, CD, etc., répondront à des angles au centre plus petits. La somme de ces angles au centre sera donc moindre que deux angles droits; ainsi les extrémités des côtés donnés n'aboutiront plus aux extrémités d'un diamètre. L'inconvénient contraire aura lieu si on prend un cercle plus petit; donc le polygone dont il s'agit ne peut être inscrit que dans un seul cercle. fig. 175.

*Scholie.* On peut changer à volonté l'ordre des côtés AB, BC, CD, etc., et le diamètre du cercle circonscrit sera toujours le même, ainsi que la surface du polygone; car, quel que soit l'ordre des arcs AB, BC, etc., il suffit que leur somme fasse la demi-circonférence, et le polygone aura toujours la même surface, puisqu'il sera égal au demi-cercle moins les segments AB, BC, etc., dont la somme est toujours la même.

## PROPOSITION VI.

## THÉORÈME.

*De tous les polygones formés avec des côtés donnés, le maximum est celui qu'on peut inscrire dans un cercle.*

Soit ABCDEFG le polygone inscrit, et abcdefg le non-inscriptible formé avec des côtés égaux, en sorte qu'on ait  $AB = ab$ ,  $BC = bc$ , etc.; je dis que le polygone inscrit est plus grand que l'autre. fig. 177.

Tirez le diamètre EM; joignez AM, ME; sur  $ab = AB$  faites le triangle  $abm$  égal à ABM, et joignez em.

En vertu de la proposition IV, le polygone EFGAM est

plus grand que *efgam*, à moins que celui-ci ne puisse être pareillement inscrit dans une demi-circonférence dont le côté *em* serait le diamètre, auquel cas les deux polygones seraient égaux en vertu de la proposition V. Par la même raison le polygone EDCBM est plus grand que *edcbm*, sauf la même exception où il y aurait égalité. Donc le polygone entier EFGAMBCDE est plus grand que *efgambcde*, à moins qu'ils ne soient entièrement égaux : mais ils ne le sont pas, puisque l'un est inscrit dans le cercle, et que l'autre est supposé non-inscriptible; donc le polygone inscrit est le plus grand. Retranchant de part et d'autre les triangles égaux ABM, *abm*, il restera le polygone inscrit ABCDEFG plus grand que le non-inscriptible *abcdefg*.

*Scholie.* On démontrera, comme dans la proposition V, qu'il ne peut y avoir qu'un seul cercle, et par conséquent qu'un seul polygone *maximum* qui satisfasse à la question; et ce polygone serait encore de même surface, de quelque manière qu'on changeât l'ordre de ses côtés.

## PROPOSITION VII.

## THÉORÈME.

*Le polygone régulier est un maximum entre tous les polygones isopérimètres et d'un même nombre de côtés.*

Car, suivant le théorème II, le polygone *maximum* a tous ses côtés égaux; et, suivant le théorème précédent, il est inscriptible dans le cercle; donc ce polygone est régulier.

## PROPOSITION VIII.

## LEMME.

*Deux angles au centre, mesurés dans deux cercles différents, sont entre eux comme les arcs compris divisés par leurs rayons.*

fig. 178. Ainsi l'angle C est à l'angle O comme le rapport  $\frac{AB}{AC}$  est au rapport  $\frac{DE}{DO}$ .

D'un rayon OF égal à AC décrivez l'arc FG compris entre

les côtés OD, OE, prolongés; à cause des rayons égaux AC, OF, on aura d'abord  $C:O::AB:FG$  \*, ou  $::\frac{AB}{AC}:\frac{FG}{FO}$ . Mais \* 17.  
à cause des arcs semblables FG, DE, on a \*  $FG:DE::FO:$  \* 11.  
DO; donc le rapport  $\frac{FG}{FO}$  est égal au rapport  $\frac{DE}{DO}$ , et on a  
par conséquent  $C:O::\frac{AB}{AC}:\frac{DE}{DO}$ .

## PROPOSITION IX.

## THÉOREME.

*De deux polygones réguliers isopérimètres, celui qui a le plus grand nombre de côtés est le plus grand.*

Soit DE le demi-côté de l'un des polygones, O son centre, fig. 179.  
OE son apothème; soit AB le demi-côté de l'autre polygone, C son centre, CB son apothème. On suppose les centres O et C situés à une distance quelconque OC, et les apothèmes, OE, CB, dans la direction OC: ainsi DOE et ACB seront les demi-angles au centre des polygones, et comme ces angles ne sont pas égaux, les lignes CA, OD, prolongées se rencontreront en un point F; de ce point abaissez sur OC la perpendiculaire FG; des points O et C, comme centres, décrivez les arcs GI, GH, terminés aux côtés OF, CF.

Cela posé, on aura par le lemme précédent  $O:C::\frac{GI}{OG}:\frac{GH}{CG}$ ;

mais DE est au périmètre du premier polygone comme l'angle O est à quatre angles droits, et AB est au périmètre du second comme l'angle C est à quatre angles droits; donc, puisque les périmètres des polygones sont égaux,  $DE:AB$

$::O:C$ , ou  $DE:AB::\frac{GI}{OG}:\frac{GH}{CG}$ . Multipliant les antécédents

par OG et les conséquents par CG, on aura  $DE \times OG:AB \times CG::GI:GH$ . Mais les triangles semblables ODE, OFG, donnent  $OE:OG::DE:FG$ , d'où résulte  $DE \times OG = OE \times FG$ ; on aura de même  $AB \times CG = CB \times FG$ ; donc  $OE \times FG:CB \times FG::GI:GH$ , ou  $OE:CB::GI:GH$ . Si donc on fait voir que l'arc GI est plus grand que l'arc GH, il s'ensuivra que l'apothème OE est plus grand que CB.

De l'autre côté de CF soit faite la figure CKx entièrement égale à la figure CGx, de sorte qu'on ait  $CK = CG$ , l'angle  $HCK = HCG$ , et l'arc  $Kx = xG$ ; la courbe KxG enveloppera l'arc KHG, et sera plus grande que cet arc \*. Donc Gx, moitié de la courbe, est plus grande que GH moitié de l'arc; donc, à plus forte raison, GI est plus grand que GH.

Il résulte de là que l'apothème OE est plus grand que CB : mais les deux polygones ayant même périmètre sont entre eux comme leurs apothèmes \*; donc le polygone qui a pour demi-côté DE est plus grand que celui qui a pour demi-côté AB : le premier a le plus de côtés, puisque son angle au centre est le plus petit; donc de deux polygones réguliers isopérimètres, celui qui a le plus de côtés est le plus grand.

## PROPOSITION X.

## THÉORÈME.

fig. 180. *Le cercle est plus grand que tout polygone isopérimètre.*

Il est déjà prouvé que de tous les polygones isopérimètres et d'un même nombre de côtés le polygone régulier est le plus grand; ainsi il ne s'agit plus que de comparer le cercle à un polygone régulier quelconque isopérimètre. Soit AI le demi-côté de ce polygone, C son centre. Soit dans le cercle isopérimètre l'angle  $DOE = ACI$ , et conséquemment l'arc DE égal au demi-côté AI. Le polygone P est au cercle C comme le triangle ACI est au secteur ODE; ainsi on aura  $P : C :: \frac{1}{2} AI \times CI : \frac{1}{2} DE \times OE :: CI : OE$ . Soit menée au point E la tangente EG qui rencontre OD prolongé en G; les triangles semblables ACI, GOE, donneront la proportion  $CI : OE :: AI$  ou  $DE : GE$ ; donc  $P : C :: DE : GE$ , ou comme  $DE \times \frac{1}{2} OE$  qui est la mesure du secteur DOE est à  $GE \times \frac{1}{2} OE$  qui est la mesure du triangle GOE : or le secteur est plus petit que le triangle; donc P est plus petit que C, donc le cercle est plus grand que tout polygone isopérimètre.