

Zweite Abtheilung.

N ä h e r e

Bestimmung der Erb- und Lebensversicherungen.

Erklärung und Gebrauch der Mortalitätstafel.

§. 1. Eine Mortalitätstafel soll angeben, wie viel von einer gegebenen Anzahl in demselben Jahre geborner Menschen nach einem, zwei, drei . . . Jahren noch leben.

Hätte man z. B. beobachtet, daß von 1000 in einem Jahre gestorbenen Menschen

500 von dem Alter von 0 bis 20 Jahren waren,

200 — — — 20 bis 50 und

300 — — — 50 bis 90

so sind die ersten 500 vor 1 bis 20 Jahren geboren worden,

die andern 200 vor 20 bis 50 und

die letzten 300 vor 50 bis 90,

woraus folgt, daß von 1000 in demselben Jahre oder zugleich gebornen Menschen gestorben sind

500 in den ersten 20 Jahren,

700 in den ersten 50 Jahren und

1000 in allen 90 Jahren,

oder daß von 1000 zugleich gebornen Menschen am Ende des

20sten Jahres noch leben 500

50sten — — — 300

90sten — — — 0

und diese letzten Zahlen 500, 300, 0 . . sind es, welche die Mortalitätstafel bilden.

Wenn daher in einer Stadt oder in einem ganzen Lande, während einer größeren Reihe von Jahren, in welchen die Volksmenge nahe dieselbe geblieben ist, wenn z. B. wie man aus den Volkszählungen oder Kirchenbüchern finden kann, während 100 Jahren in einem Lande A Menschen gestorben sind, und zwar von diesen

a Menschen in dem Alter von 0 bis 1 Jahr

a' — — — — 1 bis 5

a'' — — — — 5 bis 10

a''' — — — — 10 bis 15 u. f. f.,

so folgt daraus, daß in diesem Lande von A zugleich gebornen Menschen noch leben oder noch übrig sind

im Alter von Menschen

0 Jahren A

1 A — a

5 A — a — a'

10 A — a — a' — a''

15 A — a — a' — a'' — a''' u. f. w.,

wo man dann die Mittelglieder für die 2-, 3-, 4-, 6-, jährigen noch übrigen Menschen durch die bekannten Mittel der Interpolation mit zweiten und höheren Differenzen leicht finden wird.

§. 2. Je größer die Anzahl der dieser Berechnung unterworfenen Jahre, je größer die Menschenmenge und je näher die Bevölkerung des Landes dem Beharrungszustande ist, desto genauer wird die Mortalitätstafel seyn. Durch besondere Unglücksfälle, durch verheerende Krankheiten oder Kriege ausgezeichnete Jahre wird man besser ausschließen. Volkszählungen sind nur selten verläßlich, da man Kopfgelder, Soldatenaushebungen u. dgl. fürchtet, und daher die jüngeren Perso-

nen zu jung und die älteren zu alt, manche auch gar nicht angibt. Richtig geführte Kirchenbücher wären das sicherste Mittel, aber sie sind selten und die besseren noch sämmtlich zu neu, um auf sie mit voller Verlässlichkeit bauen zu können.

Die bei uns oder für Deutschland als die vorzüglichste angenommene Mortalitätstafel ist die von Süßmilch, wie sie von Baumann verbessert, in dessen Ausgabe von »Süßmilchs göttlicher Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechtes, Berlin 1775« enthalten ist. Sie ist in der That auf eine große Menge von Beobachtungen gegründet und mit besonderer Sorgfalt entworfen worden. Diese Tafel, auf welche sich auch vorzüglich das gegenwärtige Werk bezieht, ist in den beiden ersten Columnen der Taf. I enthalten, und sie zeigt z. B., daß von 1000 zugleich Gebornen nach 18 Jahren noch 499, also nur mehr die Hälfte, nach 46 Jahren noch 332, also nur mehr ein Dritttheil lebt u. s. w. Man kann sie von dem zehnten Jahre an genau genug durch die Gleichung darstellen, $y = 598.1673 - 8.417455x + 0.230895x^2 - 0.005247x^3 + 0.000032x^4$, wo y die Zahl der Lebenden und x das Alter derselben bezeichnet.

Ehe wir den Gebrauch dieser Tafel genauer erläutern, führen wir zuerst einige andere der vorzüglichsten Mortalitätstabellen an, die in der Tafel II zur bequemeren Uebersicht zusammengestellt wurden. Die erste derselben ist die so eben erwähnte von Baumann und Süßmilch. Die zweite von Wargentin ist aus seinen Beobachtungen in Schweden mit besonderer Sorgfalt verfertigt. Die dritte von Deparcieur verfaßt und von Florencourt (Abhdlg. aus der polit. Rechenkunst. Altenburg 1781) verbessert, ist aus der Ursache merkwürdig, weil sie die erste ist, die, nicht aus der ganzen Volksmenge einer Stadt oder eines Landes, sondern aus den in Rentengesellschaften selbst beobachteten Sterbefällen abgeleitet ist, daher man sie anfangs, obschon mit Unrecht, zur Begründung anderer ähnlicher Gesellschaften als besonders geeignet hielt. Die Mortalitätstafel von Halley, dem Zeitgenossen Newtons, ist eigent-

lich die älteste der wissenschaftlich construirten Tafeln dieser Art, aber ist nicht mehr gebräuchlich, da sie sich, wie man sieht, zu sehr von allen anderen als gut anerkannten entfernt. Ihr liegen Beobachtungen aus der Stadt Breslau zu Grunde, die sich weder auf eine bedeutende Volksmenge beziehen, noch durch eine längere Periode der Beobachtungen auszeichnen. Die Tafel Simpsons für London kann nur für diese Stadt oder für ähnliche große Städte gelten, in welcher die Sterblichkeit immer viel stärker ist, als in kleinen Städten oder auf dem Lande. Die von Baumann für die Kurmark (einen Theil der Preuss. Mark Brandenburg) gegebene Tafel bezieht sich nur auf diese Provinz, und ist daher, obgleich sie für ihre Gegend sehr genau scheint, nicht wohl allgemein anwendbar. Die Tafel von Duillard bezieht sich auf sehr ausgedehnte Beobachtungen in Frankreich und scheint daher besonderes Vertrauen zu verdienen. Duillard theilte sie zuerst in seinem Werke mit, *Analyse de l'influence de la Petit-Verole sur la mortalité*. Paris 1806. Die Tabelle Kitters wurde von ihm für die bekannte Calenbergische Witwencasse vorgeschlagen und fand häufigen, nicht unverdienten Beifall. Price gab die Mortalitätstafel für die Stadt Northampton in England in seinen *Observations on reversionary payments*. Sie ist zwar nur auf 46jährige Beobachtungen dieser Stadt, aber mit seltener Sorgfalt gebaut, daher sie, besonders in England, mit allgemeinem Beifall aufgenommen wurde und ist noch den meisten Versorgungsanstalten dieses Landes zu Grunde liegt. Die letzte der angeführten Tafeln ist die von Kerseboom, der sie aus seinen Beobachtungen in Holland und Westfriesland abgeleitet hat. Sie soll mit diesem Lande sehr wohl übereinstimmen, obschon sie sich von den übrigen Tafeln bedeutend entfernt.

Als die vorzüglichste rühmt man die von Baumann und Süßmilch für Deutschland, die von Price für Northampton, die von Duillard für Frankreich und die von Wargentin für Schweden. Obschon diese vier Tafeln an mehreren Orten nicht unbeträchtlich von einander verschieden sind, so gehen doch die

Differenzen derselben, in Beziehung auf Leibrenten und andere Pensionen, nicht leicht über eine Jahreshebung, so daß also die Klagen derjenigen als ungegründet abgewiesen werden müssen, welche die Unsicherheit dieser Tafeln meistens nur in der Absicht proclamiren, um ihren noch viel weniger sicheren und oft ganz ungegründeten Vorschlägen Eingang zu verschaffen.

§. 3. Uebrigens wird man gern gestehen, daß auch diese Tafeln noch Verbesserungen bedürfen, und daß es daher sehr wünschenswerth wäre, wenn alle diejenigen, welche die Mittel dazu haben, sich zu diesem wohlthätigen und für die ganze Menschheit in einem sehr hohen Grade interessanten Zwecke vereinigen wollten. Besonders sollten die schon längere Zeit bestehenden Versorgungsanstalten ihre Erfahrungen über die in solchen Anstalten statt habende Sterblichkeit der Mitglieder öffentlich mittheilen, da diese es vorzüglich sind, welche den Berechnungen jener Versorgungen zu Grunde gelegt werden sollen. In diese Gesellschaften werden gewöhnlich nur solche Menschen aufgenommen, die durch ärztliche Zeugnisse ihren gegenwärtigen, guten Gesundheitsstand und ihre Befreiung von allen einen früheren Tod herbeiführenden Uebeln beweisen. Auch werden meistens nur Mitglieder aus den mittleren und höheren Ständen eintreten, die von vielen, die niederen Stände drückenden Lasten befreit sind und daher auch ein längeres Leben hoffen können. Endlich werden alle, deren Gewerbe oder Beschäftigungen mit Gefahren verbunden oder lebensverkürzend sind, ausgeschossen. Aus allen diesen Ursachen wird die Sterblichkeit in solchen gewählten Gesellschaften beträchtlich geringer seyn, als in der ganzen übrigen Volksmenge des Landes. Wenn daher diese Anstalten nur die allgemeinen Mortalitätstafeln bei ihren Berechnungen anwenden, so werden, selbst wenn diese Tafeln in Beziehung auf das ganze Land vollkommen genau wären, doch die Beiträge der Mitglieder zu groß oder die Leistungen der Casse zu klein seyn, was eben so wenig, als das Gegentheil, gebilligt werden kann. Schon die oben erwähnte Tafel von Kritter, die aus den Erfahrungen einer

solchen Rentengesellschaft in Calemberg abgeleitet ist, so wie die von Deparcieur, zeigt durchaus eine geringere Sterblichkeit, als die besten Tafeln von Süßmilch = Baumann, Price, Duviillard oder Wargentin. Die Equitable Society in London, die im J. 1762 errichtet worden und noch ist als eine der vorzüglichsten Rentenanstalt dieser Stadt anerkannt ist, hielt sich anfangs an die Northhamptonsche Tafel von Price, aber sie erkannte schon nach wenig Jahren, daß die Sterblichkeit ihrer Gesellschaft viel geringer ist, als die jener Tafeln, und sie änderte daher ihre Rechnungen, indem sie i. J. 1786 ihre Leistungen an die Mitglieder erhöhte, ganz entgegengesetzt mit den meisten unserer Anstalten, welche nur die Beiträge der Mitglieder erhöhen oder die Leistungen der Cassé vermindern und doch alle vor der Zeit zu Grunde gehen. Morgan hat aus diesen Erfahrungen der Equit. Society eine Sterblichkeitstabelle abzuleiten gesucht, die von der Baumann'schen sehr verschieden ist, wie folgendes kleine Schema zeigt.

Alter.	Baumann.	Eq. Society nach Morgan.
20	491	491
30	439	456
40	374	410
50	300	356
60	210	283
70	112	199
80	37	97

Mit diesem Schema stimmt auch die von Gompertz in der Philos. Transactions f. d. J. 1825 mitgetheilte und auf umfassende Untersuchungen gegründete Mortalitätstafel nahe überein. Ähnliche Bemerkungen würden ohne Zweifel auch die Amicable Society in London, die schon seit 124 Jahren besteht, und andere Gesellschaften mehr liefern, wenn sie ihre Erfahrungen bekannt machen wollten.

§. 4. Bei einer näheren Untersuchung dieses Gegenstandes wird man auf Bemerkungen kommen, die einer besondern Berücksichtigung werth sind, aber bisher noch nicht völlig aufgeklärt scheinen. Wir wollen einige derselben hier anzeigen.

Die ersten zehn bis fünfzehn Jahre des menschlichen Alters werden sich nur schwer unter bestimmte Regeln bringen lassen, da die Erfahrungen darüber zu großen Schwankungen unterworfen sind, die wahrscheinlich von den vielen Kinderkrankheiten und von den Einflüssen der ersten Wartung und Erziehung kommen, welche selbst wieder mit der Cultur des Volkes veränderlich sind.

Listen, die sich auf Geburts- und Sterbefälle vor mehr als 50 bis 70 Jahren erstrecken, werden sich nicht mit den heutigen vermengen lassen, selbst wenn jene, was selten genug seyn wird, genau seyn sollten, weil die Abhaltung der orientalischen Pest durch unsere Quarantainen und besonders die Einführung der Vaccination die Sterblichkeit der neueren Zeiten sehr vermindert haben. Nach Duvillards oben erwähntem Werke hat sich durch die Vaccination die mittlere Dauer des menschlichen Lebens um nahe $3\frac{1}{2}$ Jahre vermehrt.

Die beiden Geschlechter scheinen eine verschiedene Sterblichkeit zu haben, und zwar, gegen die Erwartung, das männliche eine größere, als das weibliche Geschlecht, da doch das Letztere schwächer angenommen und durch ihre natürliche Bestimmung größeren Gefahren ausgesetzt wird. Nach Florencourt verhalten sich die Sterbefälle der Männer zu denen der Frauen wie 1 zu 0.96 oder wie 100 zu 96; nach Mathieu soll aber dieses Verhältniß für Frankreich nur 100 zu 98 seyn. Florencourt will bemerkt haben, daß die Sterblichkeit der Frauen kleiner ist von dem 40- bis 70sten Lebensjahre, und größer von dem 20- bis 40sten Jahre, welche letzte Erscheinung ihren Grund in den Wochenbetten zu haben scheint. Ritter, Wargentin u. A. haben es daher für nöthig gefunden, für jedes der beiden Geschlechter eine besondere Mortalitätsstafel zu entwerfen. So hat man nach Wargentin für Schweden

Alter.	Männer.	Frauen.
0	1000	1000
10	601	621
20	558	581
30	505	533
40	445	473
50	367	403
60	270	317
70	154	198
80	48	69
90	4	6

Gewöhnlich findet man die Anzahl der Geburten der Knaben größer, als die der Mädchen, nach Florencourt in dem Verhältnisse 100 zu 96, nach Matthieu in Frankreich wie 100 zu 94. Der Letzte findet für Frankreich bei außerehelichen Kindern dieses Verhältniß umgekehrt, nämlich 100 zu 105.

Die Anzahl der Ehen soll sich zu der Zahl der jährlichen Geburten wie 100 zu 22 verhalten, oder 50 Ehen geben jährlich nur 11 Kinder. Die Anzahl der Ehen zu der Anzahl der Einwohner soll 1:133 in großen Städten, 1:103 in kleinen Städten, und 1:115 auf dem Lande seyn. Die Zahl der Witwer verhält sich zu der Zahl der Witwen, wie 100:335. Die Zahl der ersten Ehen verhält sich zur Zahl der zweiten Ehen bei den Männern wie 100:29 und bei den Frauen wie 100:19 oder von 100 Witwen treten 19 oder nahe der 5te Theil derselben in eine zweite Ehe. Die ehelichen Kinder endlich sollen sich zu den unehelichen in Frankreich wie 13 zu 1 verhalten u. s. f. Aber alle diese Bestimmungen bedürfen wahrscheinlich noch beträchtlicher Verbesserungen.

Die Summe der in einem Jahre Gestorbenen verhält sich zur Summe der in demselben Jahre Lebenden

in großen Städten wie 1:24 oder wie 1:25

in kleinen Städten wie 1:32

auf dem Lande wie 1:40

Man nennt dieses Verhältniß 1:s das Maß der Sterblichkeit.

Die Summe der jährlichen Geburten verhält sich zu der Summe der Lebenden

in großen Städten wie 1:29 oder 1:31

in kleinen Städten wie 1:24 oder 1:25

auf dem Lande wie 1:22 oder 1:23

Man nennt dieses Verhältniß 1:f das Maß der Fruchtbarkeit.

Beide Maße werden sich nach der Dertlichkeit und andern Umständen oft beträchtlich ändern. Am sichersten wird man sie für bestimmte Orte suchen, da allgemeine Angaben nicht wohl zu erhalten seyn werden. Kennt man diese beiden Maße, so ist auch das Verhältniß f:s der Todesfälle zu den Geburten bekannt. So findet man z. B. für große Städte $\frac{f}{s} = \frac{29}{24} = 1.21$

und für das Land $\frac{f}{s} = \frac{22}{40} = 0.55$, so daß also auf 100 Geburten in großen Städten 121, und auf dem Lande nur 55 Sterbefälle kommen. Wie es sich aber auch mit diesen Zahlen verhalten mag, immer wird man die Nachtheile nicht bezweifeln können, welche das Zusammenleben der Menschen in großen Städten auf die mittlere Lebensdauer derselben und auf die Bevölkerung des Landes selbst hat. Die oben von Simpson für London gegebene Tafel hat durchaus beträchtlich kleinere Zahlen, als alle übrigen Tafeln. Wenn nach dem vorhergehenden Maß der Sterblichkeit von 24 Bewohnern einer großen Stadt jährlich einer stirbt, während auf dem Lande erst von 40 einer stirbt, so sterben z. B. in London, welche Stadt 1230000 Einwohner hat, jährlich 51250 Menschen, während von eben so viel Landleuten jährlich nur 30750 sterben, eine Differenz, die in 50 Jahren bereits über eine Million Menschen beträgt, die in der Stadt mehr, als auf dem Lande, für den Staat verloren gegangen sind. Wenn auf der ganzen Erde, wie man annimmt, 960 Millionen Menschen leben, so wür-

den, wenn sie alle in große Städte zusammengepreßt wären, jährlich sechszehn Millionen mehr sterben, als wenn sie alle die freie, gesunde Luft unserer Landleute athmeten. Nach dem gewöhnlichen Verhältnisse der Städte und Dörfer beträgt das Uebermaß der Sterblichkeit in den Städten über das in den Dörfern bei den meisten Ländern in 25 Jahren so viel, als sonst eine allgemeine Pest wegzuraffen pflegte, so daß also der Staat durch das Zusammenpferchen der Menschen in Städten einen Schaden an seiner Bevölkerung leidet, der einer alle 25 Jahre wiederkommenden Pest gleich ist. — Und wer mag den noch viel größeren Schaden berechnen, der durch die moralische Pest, an welcher die Sitten der Bewohner großer Städte immerwährend leiden, über die Unschuld des sie umgebenden Landvolkes gebracht wird?

§. 5. Gehen wir nun zu der näheren Betrachtung der in Tafel I. gegebenen Mortalitätstabelle über, so zeigt diese, wie bereits erinnert wurde, wie viele von 1000 zusammen gebornen Menschen nach 1, 2, 3 . . Jahren noch am Leben sind. Man sieht, daß am Ende des zweiten Jahres nur mehr $\frac{2}{3}$ und am Ende des dritten nur mehr $\frac{3}{5}$ von der ersten Anzahl leben, an welcher entsetzlichen Sterblichkeit ohne Zweifel die Blattern die meiste Schuld tragen, da jene Tafel sich noch auf die Zeiten bezieht, in welchen die Vaccination noch nicht allgemein verbreitet war. Ueberhaupt lebt von der ursprünglichen Anzahl

nach 18 Jahren nur mehr $\frac{1}{2}$ oder die Hälfte,

nach 46 — — — $\frac{1}{3}$

nach 56 — — — $\frac{1}{4}$

nach 61 — — — $\frac{1}{5}$

nach 71 — — — $\frac{1}{10}$

nach 84 — — — $\frac{1}{50}$

und in 96 Jahren ist diese ganze Generation ausgestorben.

In Paris sollen nach den neuesten Zählungen jährlich 26000 Kinder geboren werden. Davon kommt also nur die Hälfte oder 13000 zu dem Alter von 18 Jahren, das Drit-

theil oder 8666 zu dem Alter von 46 Jahren, und der 50ste Theil oder nur 520 zu dem Alter von 84 Jahren. Wer daher 18 Jahre alt wird, darf sich eines Zufalles rühmen, daß nur der Hälfte der Menschen zu Theil wird, und wer sein 84stes Jahr erlebt, genießt ein Glück, welches nur dem 50sten Theile der Menschen gegönnt ist. Um zu wissen, wie viel von den in Paris in einem Jahre gebornen Menschen zu einem Alter von 80 Jahren kommen, hat man $1000:26000 = 37:x$ also $x = 962$ Menschen oder nahe der $\frac{1}{27}$ sten Theil des Ganzen.

Um aber zu erfahren, wie viele von 1000 zusammenlebenden Menschen, deren jeder z. B. 40 Jahre alt ist, in dem nächsten Jahre sterben, so zeigt die Tafel, daß von 374 vierzigjährigen Menschen in einem Jahre 7 sterben, also hat man

$$374:7 = 1000:x \text{ oder } x = 19.$$

Man könnte diese Zahl $\frac{1}{x}$ die Lebenskraft des 40jährigen Alters nennen, und sie ist am größten für das Alter von 11 bis 18 Jahren, wo von 1000 Menschen nur 8 im nächsten Jahre sterben. Setzt man daher die Lebenskraft für dieses Alter gleich der Einheit, so ist sie für jedes andere Lebensalter gleich $\frac{8}{x}$, wo x auf die so eben gezeigte Weise gefunden wird. Setzt man dieses auf mehrere Zahlen der Tafel I. fort, so erhält man für eine Anzahl von 1000 Personen desselben Alters

In dem Alter	sterben in einem Jahre x	Lebenskraft $\frac{8}{x}$	In dem Alter	sterben in einem Jahre x	Lebenskraft $\frac{8}{x}$
0	250	0.03	16	8	1.00
1	199	0.04	17	8	1.00
2	65	0.12	18	8	1.00
3	40	0.20	20	9	0.99
4	24	0.33	25	11	0.73
5	21	0.36	30	14	0.57
6	19	0.42	35	17	0.47
7	16	0.50	40	19	0.42
8	15	0.53	45	21	0.39
9	13	0.62	50	30	0.27
10	9	0.99	55	35	0.23
11	8	1.00	60	43	0.19
12	8	1.00	65	62	0.13
13	8	1.00	70	80	0.10
14	8	1.00	75	102	0.08
15	8	1.00	80	135	0.06

Die Lebenskraft ist daher in den beiden ersten Jahren sehr gering, aber zu Ende des zweiten schon viermal, und zu Ende des dritten Jahres schon über siebenmal größer, als im Anfange. Zwischen den 10ten und 20sten Lebensjahre ist sie am größten, und von da nimmt sie wieder ab, bis sie nach dem 80sten Jahre wieder so schwach wird, wie im ersten. Die Wahrscheinlichkeit weiter zu leben, wächst also von der Stunde der Geburt, je weiter man sich von dieser Stunde entfernt, bis nahe zum 10ten Jahre, wo sie bis zum 20sten stationär wird und dann mit jedem folgenden Jahre wieder abnimmt.

§. 6. Nennt man nun m die Zahlen der ersten Columne der Taf. I oder ist m das Lebensalter eines Menschen und bezeichnet man eben so durch Am die jenen m entsprechende Zahl

der zweiten Columne, so drückt diese Zahl A_m aus, wie viele von 1000 zusammen gebornen Menschen am Ende des m^{ten} Jahres noch am Leben sind. Wenn aber von 1000 zugleich Gebornen z. B. nach 20 Jahren noch 491 leben, so werden auch von 2000 noch 982 oder von 10000 noch 4910 leben u. s. w., und überhaupt werden von einer Anzahl M in demselben Jahre gebornen Menschen nach m Jahren noch leben $M \cdot \frac{A_m}{A_0}$.

Man kann diese Bemerkung anwenden, um jede gegebene Mortalitätstafel auf eine andere gleichbedeutende zu bringen, in welcher das erste Glied A_0 gleich 1000 ist, wodurch die Vergleichung der verschiedenen Mortalitätstafeln erleichtert wird. So wird man z. B. die Zahlen der oben erwähnten Northampton'schen Tafel durch $\frac{1000}{1165} = 0.8584$ multipliciren, und so erhalten

m	A_m für Northampton
0	1000
10	487
20	440 u. f.

I. Eben so zeigt diese Tafel, daß von 374 jetzt zusammenlebenden 40jährigen Menschen nach 10 Jahren, wo jeder von ihnen 50 Jahre alt ist, nur mehr 300 leben, also auch von 748 nur mehr 600 oder von 1000 nur noch $1000 \cdot \frac{300}{374} = 802$ u. s. f., überhaupt also, daß von M jetzt zusammenlebenden m jährigen Menschen nach p Jahren nur noch leben

$$M \cdot \frac{A_{m+p}}{A_m},$$

und daß daher von ihnen in diesen p Jahren gestorben sind

$$M - M \cdot \frac{A_{m+p}}{A_m} = M \frac{A_m - A_{m+p}}{A_m}.$$

Nämlich von diesen M zusammenlebenden m jährigen Menschen leben noch am Ende

$$\text{des 1ten Jahres } M \cdot \frac{A_{m+1}}{A_m}$$

$$\text{des 2ten } \dots M \cdot \frac{A_{m+2}}{A_m}$$

$$\text{des 3ten} \dots M \cdot \frac{A_{m+3}}{A_m}$$

$$\vdots$$

$$\text{des pten} \dots M \cdot \frac{A_{m+p}}{A_m}$$

und es sind daher von ihnen gestorben

$$\text{in einem Jahre } M \frac{(A_m - A_{m+1})}{A_m} \text{ oder in dem ersten}$$

$$\text{Jahre } M \frac{(A_m - A_{m+1})}{A_m}$$

$$\text{in zwei Jahren } M \frac{(A_m - A_{m+2})}{A_m}, \text{ in dem zweiten}$$

$$\text{Jahre } M \frac{(A_{m+1} - A_{m+2})}{A_m}$$

$$\text{in drei Jahren } M \frac{(A_m - A_{m+3})}{A_m}, \text{ in dem dritten Jahre}$$

$$\vdots$$

$$M \frac{(A_{m+2} - A_{m+3})}{A_m}$$

$$\text{in p Jahren } M \frac{(A_m - A_{m+p})}{A_m}, \text{ in dem pten Jahre}$$

$$M \frac{(A_{m+p-1} - A_{m+p})}{A_m}$$

II. Die Zahlen der dritten Columnne, die wir durch B_m bezeichnen, sind die Differenzen der ihr entsprechenden und der nächstfolgenden Zahl der zweiten Columnne, oder es ist

$$B_m = A_m - A_{m+1}$$

Die Zahl B_m drückt daher aus, wie viel von 1000 zugleich Gebornen während einem jeden Jahre m sterben. Von jenen 1000 erreichen z. B. 374 das Ende des 40sten Jahres und im nächsten Jahre sterben 7 von diesen 374 oder von 53 vierzigjährigen Personen stirbt einer in dem nächsten Jahre. Ueberhaupt aber werden von M zugleich gebornen Personen im ihrem m^{ten} Lebensjahre sterben $M \cdot B_m$ und von M zusammen lebenden m jährigen Personen werden im nächsten Jahre sterben

$$M \cdot \frac{B_m}{A_m}$$

III. Die Zahlen der dritten Columne der Tafel I, die wir durch C_m bezeichnen, sind die Summen aller Zahlen der zweiten Columne A, von unten auf addirt. Diese Columne zeigt also, daß von 1000 zusammen gebornen Menschen nur 3 leben, die 94 Jahre oder darüber sind, und daß von ihnen 6 leben, deren jeder 93 Jahre oder noch älter ist, u. s. w. Die Zahlen C_m dieser Tafel können daher so ausgedrückt werden

$$C_m = A_m + A_{m+1} + A_{m+2} + A_{m+3} + \dots$$

diese Reihe so weit fortgesetzt, bis eines ihrer Glieder und sonach auch alle folgenden verschwinden. Die Zahlen dieser Columne zeigen also an, daß von 1000 zusammen Gebornen nach m Jahren noch eine Anzahl gleich C_m solcher Personen leben, die entweder m Jahre oder auch noch älter sind.

§. 7. Nach dem Vorhergehenden leben von M jetzt m jährigen Personen am Ende

$$\text{des 1ten Jahres} \quad . \quad . \quad M \cdot \frac{A_{m+1}}{A_m}$$

$$\text{des 2ten} \quad \text{---} \quad . \quad . \quad M \cdot \frac{A_{m+2}}{A_m}$$

$$\text{des 3ten} \quad \text{---} \quad . \quad . \quad M \cdot \frac{A_{m+3}}{A_m} \text{ u. s. f.}$$

welche Reihe so weit fortgesetzt wird, bis eines ihrer Glieder nach der Taf. I verschwindet, wo dann auch alle folgenden gleich Null werden. Addirt man alle diese Glieder und dividirt ihre Summe durch die ursprüngliche Anzahl M der Personen, so erhält man die mittlere Lebensdauer eines m jährigen Menschen, oder die Zahl, welche anzeigt, wie viele Jahre jede dieser M Personen, die jetzt m Jahre alt sind, noch leben würden, wenn sie alle gleich alt werden sollten. Diese mittlere Lebensdauer ist daher gleich

$$\frac{1}{A_m} (A_{m+1} + A_{m+2} + A_{m+3} \dots)$$

$$\text{oder nach der Bezeichnung des §. 6 gleich } \frac{C_{m+1}}{A_m}.$$

Nimmt man aber der Natur der Sache gemäßer an, daß sie während dem Laufe des Jahres gleichförmig absterben, daß

sie also im Allgemeinen alle noch die Mitte des Jahres erreichen, so wird man zu dem vorhergehenden Quotienten noch $\frac{1}{2}$ addiren, und so für die mittlere Lebensdauer F den Ausdruck erhalten

$$F_m = \frac{1}{2} + \frac{C_{m+1}}{A_m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A_m} (A_{m+1} + A_{m+2} + A_{m+3} + \dots)$$

So ist z. B. für 30jährige Personen $m=30$, $A_m=439$, $C_{m+1}=12324$ also $F_{30} = 28.07 + \frac{1}{2} = 28.57$.

Die Tafel III enthält diese Größe F_m für alle Werthe von m . Ihr ist auch eine kleine Tabelle beigelegt, welche die Größe m für alle Werthe von F_m gibt, und die uns erst in der Folge nützlich seyn wird.

I. Diese mittlere Lebensdauer muß aber von der sogenannten wahrscheinlichen Lebensdauer unterschieden werden, welche letztere die Zeit ist, in welcher die Hälfte der Personen dieses Alters gestorben sind. Um z. B. die wahrscheinliche Lebensdauer eines 50jährigen Menschen zu finden, gibt die Columne A die Zahl 300, und deren Hälfte 150 steht in derselben Columne bei 66.2, also ist die wahrscheinliche Lebensdauer $66.2 - 50 = 16.2$ Jahre. Man findet so

Alter	waarsch. Lebensdauer
5	46
10	44
15	40
20	34
30	29
40	23
50	16
60	11
70	7
80	5

§. 8. Nach §. 6. I. leben von M Personen, deren jede jetzt m Jahr alt ist, nach p Jahren noch $M \cdot \frac{A_{m+p}}{A_m}$. Nach

den ersten Gründen der Probabilitätsrechnung ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß von A gleichmöglichen Fällen, unter welchen a günstige und b ungünstige sind, ein günstiger Fall eintrete, gleich $\frac{a}{A}$ und ein ungünstiger gleich $\frac{b}{A} = \frac{A-a}{A}$. Da

nun unter M Personen des Alters m nur $M \cdot \frac{A_{m+p}}{A_m}$ das p^{te} Jahr erreichen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine von diesen M Personen das p^{te} Jahr erreicht, gleich der Größe

$M \cdot \frac{A_{m+p}}{A_m}$ dividirt durch M , oder gleich $\frac{A_{m+p}}{A_m}$ und daher

auch die Wahrscheinlichkeit des Gegentheils, daß nämlich einer von diesen M Personen des Alters m das p^{te} Jahr nicht erreiche, gleich $1 - \frac{A_{m+p}}{A_m} = \frac{A_m - A_{m+p}}{A_m}$.

Ex. Ist $m = 20$ und $p = 30$, so ist $A_m = 491$, $A_{m+p} = 300$, also ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein 20jähriger Mensch das 50ste Jahr erreiche, $\frac{A_{m+p}}{A_m} = 0.61$ oder nur der $\frac{61}{100}$ ste Theil der Gewißheit, und da diese Wahrscheinlichkeit größer ist, als $\frac{1}{2}$, so ist es auch wahrscheinlicher, daß er dieses Alter erreichen, als daß er es nicht erreichen wird. Die Wahrscheinlichkeit nämlich, daß er das 50ste Jahr seines Lebens nicht erreichen wird, ist $1 - \frac{A_{m+p}}{A_m} = 0.39$.

I. Da von 1000 zusammen Gebornen die Anzahl der m jährigen gleich A_m , die der p jährigen gleich A_p und die der $p+q$ jährigen gleich A_{p+q} ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein solcher Mensch zwischen seinen p und $p+q^{\text{ten}}$ Jahr sterbe, gleich $\frac{A_p - A_{p+q}}{A_m}$ und die Wahrscheinlichkeit des Gegentheils, daß er nämlich in dieser Zwischenzeit nicht sterbe, ist $1 - \frac{(A_p - A_{p+q})}{A_m}$.

Dies schließt aber den Fall nicht aus, daß er früher oder auch später sterbe, als zwischen seinem p^{ten} und $p+q^{\text{ten}}$ Jahre.

Die Wahrscheinlichkeit nämlich, daß er das $p + q^{\text{te}}$ Jahr noch erleben werde, ist gleich $\frac{A_{m+p+q}}{A_m}$.

Ex. m = 20, p = 30 und q = 10 gibt die Wahrscheinlichkeit, daß ein 20jähriger Mensch zwischen seinem 50 und 60sten Jahr sterbe $\frac{A_p - A_{p+q}}{A_m} = 0.13$, und die Wahrscheinlichkeit, daß er noch 40 Jahre lebe oder daß er das 60ste Altersjahr erreiche, $\frac{A_{m+p+q}}{A_m} = 0.42$, also die letzte Wahrscheinlichkeit viel größer, als die erste.

Ex. II. m = 20, p = 30, q = 20 gibt die Wahrscheinlichkeit, daß ein 20jähriger Mann binnen den nächsten 30 und 50 Jahren, d. h. zwischen seinem 50 und 70sten Jahre sterben wird, gleich $\frac{A_p - A_{p+q}}{A_m} = 0.28$, also auch die Wahrscheinlichkeit, daß er in dieser Zwischenzeit nicht, daß er nämlich vor oder nach dieser Zeit sterben wird, gleich 0.72. Die Wahrscheinlichkeit aber, daß ein 20jähriger Mann noch volle 50 Jahre leben wird, ist $\frac{A_{m+p+q}}{A_m} = 0.23$; hier und immer vorausgesetzt, daß die Gewißheit eines solchen Ereignisses durch die Einheit ausgedrückt wird, und daß also z. B. ein Ereigniß eben so wahrscheinlich als unwahrscheinlich ist, wenn seine Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{2}$ ist.

§. 9. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein mjähriger Mensch nach p Jahren noch leben wird, ist, nach §. 8, gleich $\frac{A_{m+p}}{A_m}$. Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein njähriger Mann nach p Jahren noch lebe, gleich $\frac{A_{n+p}}{A_n}$. Also ist auch, nach einem andern bekannten Grundsatz der Probabilitätsrechnung, die Wahrscheinlichkeit, daß beide nach p Jahren noch leben, gleich dem Producte jener beiden Ausdrücke oder gleich

$$\frac{A_{m+p}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+p}}{A_n}.$$

I. Da aber, wie immer, diese Wahrscheinlichkeit und die des Gegentheils zusammen gleich der Gewisheit oder gleich der Einheit seyn müssen, so ist auch die Wahrscheinlichkeit, daß jene beiden Personen nach p Jahren nicht mehr zusammen leben, daß also entweder die eine derselben oder vielleicht beide gestorben sind, gleich $1 - \frac{A_{m+p}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+p}}{A_n}$.

II. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte dieser beiden Personen, z. B. die erste m jährige nach p Jahren noch lebe, die andere n jährige aber dann schon todt sei, ist

$$\frac{A_{m+p}}{A_m} \left(1 - \frac{A_{n+p}}{A_n}\right).$$

III. Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die zweite n jährige noch lebe, die erste aber schon todt sei,

$$\frac{A_{n+p}}{A_n} \left(1 - \frac{A_{m+p}}{A_m}\right).$$

IV. Endlich ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren beide schon todt sind $\left(1 - \frac{A_{m+p}}{A_m}\right) \left(1 - \frac{A_{n+p}}{A_n}\right)$, also auch die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren nicht alle zwei todt sind, sondern einer oder auch alle beide noch leben,

$$1 - \left(1 - \frac{A_{m+p}}{A_m}\right) \left(1 - \frac{A_{n+p}}{A_n}\right) \\ = \frac{A_{m+p}}{A_m} + \frac{A_{n+p}}{A_n} - \frac{A_{m+p}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+p}}{A_n}.$$

§. 10. Wollte man diese Betrachtungen auf mehr als zwei Personen fortsetzen, so hat man z. B. für drei Personen, deren die erste jetzt m , die zweite n und die dritte o Jahr alt ist, die Wahrscheinlichkeit, daß sie nach p Jahren alle drei noch zusammen leben, $\frac{A_{m+p}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+p}}{A_n} \cdot \frac{A_{o+p}}{A_o}$; also auch, wenn sie alle von gleichem Alter sind, $\left(\frac{A_{m+p}}{A_m}\right)^3$.

Die Wahrscheinlichkeit aber, daß nach p Jahren die beiden ersten Personen noch leben, die dritte aber schon todt sei, ist

$$\frac{A_{m+p}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+p}}{A_n} \left(1 - \frac{A_{o+p}}{A_o}\right).$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren der erste und der zweite schon todt sei, der dritte aber noch lebe, oder die Wahrscheinlichkeit, daß der dritte die beiden andern nach p Jahren überlebt habe, ist

$$\left(1 - \frac{A_{m+p}}{A_m}\right) \left(1 - \frac{A_{n+p}}{A_n}\right) \cdot \frac{A_{o+p}}{A_o}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß von diesen drei Personen nach p Jahren wenigstens eine gestorben sei, ist

$$1 - \frac{A_{m+p} \cdot A_{n+p} \cdot A_{o+p}}{A_m \cdot A_n \cdot A_o}$$

und die, daß nach p Jahren wenigstens eine dieser Personen noch lebe, ist

$$1 - \left(1 - \frac{A_{m+p}}{A_m}\right) \left(1 - \frac{A_{n+p}}{A_n}\right) \left(1 - \frac{A_{o+p}}{A_o}\right) \text{ u. s. w.}$$

§. 11. Es sei M eine Anzahl von zwei zu irgend einem Zwecke verbundener Menschen, z. B. eine Anzahl von Ehepaaren, von welchen alle Männer jetzt m , und alle Frauen n Jahre alt sind. Wie werden sich diese Paare nach p Jahren verhalten?

Wendet man das in §. 10 Gesagte auf diese Frage an, so findet man, daß nach p Jahren seyn werden

$$\text{noch zusammen lebende Paare} \dots M \cdot \frac{A_{m+p}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+p}}{A_n}$$

Witwen (wo die m jährigen Männer schon todt sind) . . .

$$M \cdot \frac{A_{n+p}}{A_n} \left(1 - \frac{A_{m+p}}{A_m}\right)$$

Witwer (wo die n jährigen Frauen schon todt sind) . . .

$$M \cdot \frac{A_{m+p}}{A_m} \left(1 - \frac{A_{n+p}}{A_n}\right)$$

und ganz ausgestorbene Paare . . .

$$M \left(1 - \frac{A_{m+p}}{A_m}\right) \left(1 - \frac{A_{n+p}}{A_n}\right).$$

Ex. Von 1000 Ehepaaren seyen die Männer jetzt 30 und die Frauen 20 Jahre alt, so wird man nach 10 Jahren haben, da $m=30$, $n=20$, $p=10$ ist,

Noch lebende Paare	762
Witwen	132
Witwer	90
Ausgestorbene Paare	16

Summe aller Paare 1000.

Nach vierzig Jahren aber, wo die noch lebenden Männer 70 und die Frauen 60 Jahre alt seyn werden, wird man haben

Noch lebende Paare	109
Witwen	319
Witwer	146
Ausgestorbene Paare	426

Summe aller Paare 1000.

§. 12. Wir wollen nun die letzte Frage so wenden, daß man die Zeit oder die Anzahl Jahre sucht, während welchen ein gegebenes Paar noch zusammen lebt, bis eines von ihnen stirbt. Man nennt diese Zeit die Dauer des Zusammenlebens oder die Verbindungsdauer, wofür wir kurz die Ehedauer setzen wollen.

Von M Paaren, in welchen jeder Mann jetzt m , und jede Frau n Jahre alt ist, leben (nach §. 11) noch zusammen in dem folgenden

$$\begin{aligned} \text{ersten Jahre} & \quad . \quad . \quad M \cdot \frac{A_{m+1}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+1}}{A_n} \\ \text{zweiten} & \quad - \quad . \quad . \quad M \cdot \frac{A_{m+2}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+2}}{A_n} \\ \text{dritten} & \quad - \quad . \quad . \quad M \cdot \frac{A_{m+3}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+3}}{A_n} \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

und diese Reihe wird offenbar so lange fortgesetzt, bis nach der Tafel I eines der Glieder $\frac{A_{m+p}}{A_m}$ oder $\frac{A_{n+p}}{A_n}$ gleich Null wird, wo dann die übrigen alle ebenfalls verschwinden. Addirt man dann alle diese Glieder, und dividirt diese Summe durch M , so erhält man für die gesuchte mittlere Ehedauer

$$G_n^m = \frac{1}{A_m A_n} \cdot [A_{m+1} A_{n+1} + A_{m+2} A_{n+2} + A_{m+3} A_{n+3} + \dots]$$

I. Ganz eben so erhält man für die mittlere Dauer des Ueberlebens der zweiten Person n oder der Frau, d. h. für die Dauer des Witwenstandes $\frac{1}{A_n} A_{n+1} (1 - \frac{A_{m+1}}{A_m})$

$$+ \frac{1}{A_n} \cdot A_{n+2} (1 - \frac{A_{m+2}}{A_m}) + \frac{1}{A_n} \cdot A_{n+3} (1 - \frac{A_{m+3}}{A_m}) + \dots$$

oder, da nach §. 7 die mittlere Lebensdauer

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} + \frac{A_{n+2}}{A_n} + \frac{A_{n+3}}{A_n} + \dots = \frac{C_{n+1}}{A_n} \text{ ist, so ist die Dauer}$$

des Witwenstandes $\frac{C_{n+1}}{A_n} - G_n^m$.

II. Für die Dauer des Ueberlebens der ersten Person m oder des Mannes, d. h. für die Dauer des Witwerstandes ist eben so

$$\frac{1}{A_m} \cdot A_{m+1} (1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}) + \frac{1}{A_m} \cdot A_{m+2} (1 - \frac{A_{n+2}}{A_n}) + \frac{1}{A_m} \cdot A_{m+3} (1 - \frac{A_{n+3}}{A_n}) + \dots \text{ oder einfacher } \frac{C_{m+1}}{A_m} - G_n^m.$$

III. Endlich ist für die mittlere Dauer des gänzlichen Aussterbens dieses Paares $(1 - \frac{A_{m+1}}{A_m})(1 - \frac{A_{n+1}}{A_n})$

$$+ (1 - \frac{A_{m+2}}{A_m})(1 - \frac{A_{n+2}}{A_n}) + (1 - \frac{A_{m+3}}{A_m})(1 - \frac{A_{n+3}}{A_n}) +$$

oder kürzer $N - \frac{C_{m+1}}{A_m} - \frac{C_{n+1}}{A_n} + G_n^m$ wo N die Anzahl der Glieder der letzten Reihe ist.

Das Vorhergehende setzt voraus, daß alle Trennungen der Paare im Anfange des Jahres geschehen. Da sie aber im Laufe des ganzen Jahres im allgemeinen gleichförmig vor sich gehen, so wird man (wie S. 65) zu allen diesen vier Ausdrücken noch die Zahl $\frac{1}{2}$ addiren.

Ex. Sei das Alter des Mannes $m = 90$ und das der Frau $n = 80$, so gibt die Tafel I

$A_{m+1} = 5$	$A_{n+1} = 32$	und ihr Product . .	160
4	28		112
3	24		72
2	20		40
1	17		17
0	14		0

Summe . . 401

Weiter ist $A_m = 6$, $A_n = 37$ also die Ehedauer

$$G_n^m = \frac{401}{222} + \frac{1}{2} = 2.31.$$

Die Dauer des Ueberlebens von n oder die Dauer des Witwenstandes ist

$$\frac{C_{n+1}}{A_n} - G_n^m + \frac{1}{2} = \frac{186}{37} - 2.31 + \frac{1}{2} = 3.22 \text{ Jahre}$$

oder wenn n eher stirbt, die Dauer des Witwenstandes

$$\frac{C_{m+1}}{A_m} - G_n^m + \frac{1}{2} = \frac{15}{6} - 2.31 + \frac{1}{2} = 0.69 \text{ Jahre.}$$

Eben so hat man für $m = 40$ und $n = 30$ die Dauer der Ehe, $G_n^m = 17.11$, die Dauer des Witwenstandes

$$\frac{C_{n+1}}{A_n} - G_n^m + \frac{1}{2} = \frac{12324}{439} - 17.11 + \frac{1}{2} = 11.46$$

und die Dauer des Witwenstandes

$$\frac{C_{m+1}}{A_m} - G_n^m + \frac{1}{2} = \frac{8279}{374} - 17.11 + \frac{1}{2} = 5.53$$

Die Tafel IV und V geben diese Dauer der Ehe sowohl, als die des Ueberlebens für jedes Paar, deren Alter m und n bekannt sind.

§. 13. Man sieht aus dem Vorhergehenden, daß man, wenn man nur die Dauer der Verbindung oder der Ehe kennt, daraus die Dauer der Witwenschaft, der Witwerschaft und des gänzlichen Aussterbens des Paares durch eine leichte Rechnung finden kann. Da man diese Größe in der Folge noch oft brauchen wird, so wird es vortheilhaft seyn, wenigstens die der Ehedauer G_n^m in eine Tafel wie Tab. IV zu bringen, weil sich

die drei übrigen leicht aus dieser Tafel finden lassen. Zur bequemern Berechnung des Werthes G_n^m oder, was dasselbe ist, des Werthes G_m^n , kann man sich des folgenden Verfahrens bedienen.

Hat man durch eine unmittelbare Berechnung des Ausdruckes oder der Ehedauer

$$G_n^m = \frac{1}{A_m A_n} [A_{m+1} A_{n+1} + A_{m+2} A_{n+2} + \dots]$$

für einen gegebenen Werth von m und n gefunden, so läßt sich daraus auch die Ehedauer G_{n+p}^{m+p} für ein anderes Paar, in welcher beide Personen um p Jahr älter sind, als in dem ersten Paare, ohne Mühe bestimmen.

Es war

$$G_n^m = \frac{1}{A_m A_n} [A_{m+1} A_{n+1} + A_{m+2} A_{n+2} + \dots A_{n+p} A_{n+p}]$$

$$+ \frac{1}{A_m A_n} [A_{m+p+1} A_{n+p+1} + A_{m+p+2} A_{n+p+2} + \dots]$$

Sei die erste Reihe, die nur bis zu den p^{ten} Gliede fortgesetzt wird, gleich Q , so hat man, da

$$G_{n+p}^{m+p} = \frac{1}{A_{m+p} A_{n+p}} [A_{m+p+1} A_{n+p+1} + A_{m+p+2} A_{n+p+2} + \dots]$$

ist, auch sofort

$$G_{n+p}^{m+p} = [G_n^m - Q] \cdot \frac{A_m A_n}{A_{m+p} A_{n+p}}.$$

Ex. Für $m=40$ und $n=30$ findet man

$$G_n^m = G_{30}^{40} = 17.11. \text{ Man suche } G_{51}^{41}.$$

$$\text{Setzt man } p=1 \text{ so ist } Q = \frac{A_{m+1} A_{n+1}}{A_m A_n} = 0.968$$

also ist auch

$$G_{51}^{41} = (17.11 - 0.968) \cdot \frac{374}{367} \cdot \frac{439}{435} = 16.66.$$

I. Nimmt man, was in einer ersten Annäherung erlaubt ist, die Abnahme der Größen $A_m, A_{m+1}, A_{m+2} \dots$ in der Ta-

fel I. gleichförmig an, so kann man für den oben (§. 70) gegebenen analytischen Ausdruck der Verbindungsdauer auch den folgenden setzen

$$G_n^m = \frac{1}{A_m A_n} \cdot \int (A_m - \Delta A_m) \cdot (A_n - \Delta A_n) dx$$

wo $\Delta A_m = \frac{x \cdot A_m}{2 F_m}$ und $\Delta A_n = \frac{x \cdot A_n}{2 F_n}$ ist, und F_m, F_n die oben (§. 65) erwähnte mittlere Lebensdauer bezeichnet. Dieser Ausdruck gibt

$$G_n^m = \int \left[1 - \frac{x}{2} \left(\frac{1}{F_m} + \frac{1}{F_n} \right) + \frac{x^2}{4} \cdot \frac{1}{F_m F_n} \right] dx$$

also auch, wenn man integrirt,

$$G_n^m = x - \frac{x^2}{4} \left(\frac{1}{F_m} + \frac{1}{F_n} \right) + \frac{x^3}{12} \cdot \frac{1}{F_m F_n}.$$

und endlich, wenn man dieses Integral von $x=0$ bis $x=2 F_m$ nimmt, wo m die größere Zahl von den beiden m und n ist,

$$G_n^m = F_m - \frac{1}{3} \cdot \frac{(F_m)^2}{F_n}$$

wozu man wieder, wie §. 65, die Größe $\frac{1}{2}$ addiren wird.

Ex. I. $m = 50, n = 20$ gibt $F_m = 16.95, F_n = 35.03$

also $G_n^m = 14.72$. Nach der Tafel IV ist $G_n^m = 14.63$.

Ex. II. $m = 40, n = 30$ gibt $F_m = 22.64, F_n = 28.57$

also $G_n^m = 17.16$. Nach Tafel IV ist $G_n^m = 17.11$.

§. 14. Bisher haben wir uns nur mit der Dauer des einfachen menschlichen Lebens sowohl, als auch mit der Dauer der Verbindungen von zwei oder mehreren Leben beschäftigt. Wir gehen nun zu Fragen anderer Art über, deren Antworten durch das Vorhergehende vorbereitet wurden. Welche Summe wird z. B. ein Mann von m Jahren einem anderen oder einer zu solchen Zwecken eingerichteten Cassé jetzt geben müssen, wenn

er dafür von dieser Casse bis an seinen Tod jährlich eine bestimmte Rente verlangt, oder wenn diese Casse, ohne ihm selbst, so lange er lebt, etwas zurückzuzahlen, bei seinem Tode seinen Erben eine bestimmte Summe als Capital, oder wenn sie bei seinem Tode einer bestimmten Person, z. B. seiner Witwe jährlich eine bestimmte Rente bis an den Tod dieser Person entrichten soll u. s. w. Da das Alter dieses Mannes sowohl, als das seiner bestimmten Erben bekannt ist, so wird sich, nach dem Vorhergehenden, auch das wahrscheinliche Alter dieser Personen und daher der eigentliche Werth dieser von der Casse geforderten Zahlungen bestimmen lassen.

Diese Zahlungen müssen, wenn weder der Mann, noch die Casse verlieren soll, offenbar so eingerichtet seyn, daß die Summe oder die Summen, welche die Casse in verschiedenen Zeiträumen bezahlt, denselben wahren Werth haben, welcher die anfängliche Zahlung des Mannes an die Casse hat. Wenn z. B. die Casse heute 100 Gulden erhält, so wird sie am Ende eines oder mehrerer Jahre nicht nur diese 100 Gulden, als das empfangene Capital, sondern sie wird auch die Zinsen zurückgeben müssen, welche ihr dieses Capital in der Zwischenzeit getragen hat, da dieser Nutzen, welchen die Zinsen bringen, dem Verleiher des Capitals zu gute kommen müssen, indem man der allgemeinen Billigkeit gemäß bei Unternehmungen dieser Art voraussetzt, daß die Casse weder einen Gewinn sucht, noch auch, da sie noch ferner bestehen soll, einen Schaden leiden darf.

Gewöhnlich wird angenommen, daß die Casse die von den Mitgliedern erhaltenen Capitalien auf Zinseszinsen auslegt, daher die Mitglieder zu den in ihrem Vertrage bestimmten Zeiten auch ihre Capitalien mit den Zinseszinsen derselben wieder erhalten sollen. Wir wollen hier und im Folgenden dieselbe Voraussetzung beibehalten.

§. 15. Um zu finden, wie groß ein heute auf Zinseszinsen ausgelegtes Capital a nach n Jahren seyn wird, sei r der Zinsfuß, auf welchen das Capital angelegt wird (also z. B. $1 = 1.05$,

wenn es zu 5 pCt. oder $r=1.04$, wenn es zu 4 pCt. angelegt wird, so, daß 1 Gulden Capital jährlich $(r-1)$ Gulden Interesse trägt.)

Am Ende des ersten Jahres wird das so vermehrte Capital x gleich ar seyn, weil $1:r=a:x$ ist. Am Ende des zweiten Jahres wird das Capital y^1 gleich ar^2 seyn, weil $1:r=x:y^1$ ist. Eben so wird es am Ende des dritten Jahres gleich ar^3 und überhaupt am Ende des n ten Jahres gleich ar^n seyn. Die Tafel XXIII gibt diese Werthe von ar^n für $a=100$ Gulden.

Also auch umgekehrt: eine Summe, die jetzt gleich a ist, hatte vor einem Jahre nur den Werth $\frac{a}{r}$, vor zwei Jahren den Werth $\frac{a}{r^2}$ und vor n Jahren den Werth $\frac{a}{r^n}$. Wenn also in Folge eines Vertrages die Cassé von heute nach n Jahren die Summe a zahlen soll, so ist der heutige Werth dieser Summe nur $\frac{a}{r^n}$, oder so ist es, in Beziehung auf den Vor- oder Nachtheil der Cassé, dasselbe, ob sie von heute nach n Jahren die Summe a zahlt, oder ob sie heute schon die kleinere Summe $\frac{a}{r^n}$ entrichtet. Die Tafel XXIV gibt diese Werthe von $\frac{a}{r^n}$ für $a=100$. Wenn also diese Zinsen alle Jahre einmal gezahlt und wieder zu dem Capital auf Interessen gelegt werden, so ist der Werth eines Capitals a nach n Jahren gleich $A=a.r^n$ und vor n Jahren gleich $A=\frac{a}{r^n}$. Wenn aber diese Zinsen alle t^{tel} Jahre gezahlt und wieder zum Capital geschlagen werden, so findet man den Werth des Capitals a nach n Jahren gleich $A=a\left(1+\frac{r-1}{t}\right)^{tn}$ und vor n Jahren gleich $A'=\frac{a}{\left(1+\frac{r-1}{t}\right)^{tn}}$, wo z. B. $t=2, 4, 12$ ist, wenn die Zinsen

alle 6, alle 3 oder alle Monate gezahlt werden. Nähme man $t=\infty$, d. h. setzt man voraus, daß die Zinsen alle Augenblicke gezahlt werden, so erhält man, wenn man die Größe

$(1 + \frac{r-1}{t})^{tn}$ nach dem Binomium auflöst, für den Werth des Capitals a nach n Jahren $A = a \cdot s^n (r-1)$, wo $\log. \text{nat. } s = 1$ ist. Die Tafel XXVII gibt die Werthe von s^m .

§. 16. Wenn wir diese Betrachtungen auf die verschiedenen Fragen anwenden, die sich nun darbieten und von denen wir im Anfange des §. 14 einige erwähnt haben; so kann man voraussehen, daß Ausdrücke der Art, wie

$$\frac{A_m}{r}, \frac{A_m}{r^m}, \frac{A_m}{r} \cdot \frac{A_n}{r}, \frac{A_m}{r^m} \cdot \frac{A_n}{r^n}$$

so wie auch Reihen von der Form

$$\frac{A_m}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \frac{A_{m+2}}{r^3} + \text{oder}$$

$$\frac{A_m A_n}{r^m \cdot r^n} + \frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r^{m+1} r^{n+1}} + \frac{A_{m+2}}{r^{m+2}} \cdot \frac{A_{n+2}}{r^{n+2}} + \dots$$

öfter vorkommen werden. Es wird daher zweckmäßig seyn, schon jetzt einige abkürzende Bezeichnungen einzuführen, um jene Ausdrücke leichter darzustellen, und zur Berechnung bequemer machen zu können.

Es sei also, wenn m wieder, wie bisher, die Werthe der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3. hat $D_m = \frac{A_m}{r^m}$ und

$$E_m = \frac{1}{r^m - 1} \left(\frac{A_m}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \frac{A_{m+2}}{r^3} + \dots \right)$$

also auch $D_{m+1} = \frac{A_{m+1}}{r^{m+1}}$ und

$$E_{m+1} = \frac{1}{r^{m+1}} \left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} + \dots \right).$$

I. Substituirt man in dem letztern Ausdrücke die Werthe

von $\frac{A_{m+1}}{r^{m+1}} = D_{m+1}$, $\frac{A_{m+2}}{r^{m+2}} = D_{m+2}$, $\frac{A_{m+3}}{r^{m+3}} = D_{m+3}$ u. s. w.

so erhält man $E_{m+1} = D_{m+1} + D_{m+2} + D_{m+3} +$

und eben so $E_m = D_m + D_{m+1} + D_{m+2} +$

also auch der beiden letzten Größen Unterschied

$$E_m - E_{m+1} = D_m.$$

II. Setzt man die Reihe $\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} + \dots$
 nur bis $\frac{A_{m+p}}{r^p}$ fort, so ist der Werth derselben gleich

$$\left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} + \dots \text{ ohne Ende} \right) \\
- \left(\frac{A_{m+p+1}}{r^{p+1}} + \frac{A_{m+p+2}}{r^{p+2}} + \frac{A_{m+p+3}}{r^{p+3}} + \dots \text{ ohne Ende} \right).$$

Aber der erste Theil dieses Ausdrucks ist gleich $r^m E_{m+1}$
 und der zweite ist nach derselben Bezeichnung gleich

$$\frac{1}{r^p} \left(\frac{A_{m+p+1}}{r} + \frac{A_{m+p+2}}{r^2} + \frac{A_{m+p+3}}{r^3} + \dots \right) \\
= \frac{1}{r^p} \cdot r^{m+p} \cdot E_{m+p+1} = r^m E_{m+p+1},$$

also hat man für die bei p abbrechende Reihe

$$\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} + \dots + \frac{A_{m+p}}{r^p} = r^m (E_{m+1} - E_{m+p+1})$$

und eben so

$$\frac{A_m}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \frac{A_{m+2}}{r^3} + \dots + \frac{A_{m+p-1}}{r^p} = r^{m-1} (E_m - E_{m+p})$$

während man für diese ohne Ende fortlaufende Reihen hat

$$\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} + \dots = r^m \cdot E_{m+1} \text{ und}$$

$$\frac{A_m}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \frac{A_{m+2}}{r^3} + \dots = r^{m-1} \cdot E_m.$$

III. Endlich wollen wir, um die folgenden Ausdrücke noch
 mehr abzukürzen, die Reihe

$$\frac{1}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3} A_{n+3}}{r^3} + \dots \right)$$

durch I_n^m bezeichnen.

§. 17. Die durch D_m und E_m bezeichneten Größen sind zur
 größeren Bequemlichkeit den folgenden Rechnungen bereits in
 der Tafel VI und zwar für den Zinsfuß $r = 1.03$ und 1.04
 und 1.05 angegeben, wodurch wohl alle Gattungen von Zin-
 sen, die bei uns vorkommen, umfaßt werden. Die Größe D_m
 dieser Tafel enthält nämlich die entsprechende Größe A_m der

Tafel I, dividirt durch r^m , und die Zahlen der Columnne E_m sind die Summen der Zahlen D_m der vorhergehenden Columnne, von unten auf addirt, so daß man also hat,
wie §. 16. I, $D_m = \frac{A_m}{r^m}$ und

$$E_m = D_m + D_{m+1} + D_{m+2} + \dots \text{ oder, was dasselbe ist,}$$

$$E_{m+1} = \frac{1}{r^m} \left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} + \dots \right)$$

I. Es ist nun nur noch übrig, auch für die Größe

$$I_n^m = \frac{1}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3} A_{n+3}}{r^3} + \dots \right)$$

ähnliche Tafeln zu haben und die Mittel, diese leicht und bequem zu berechnen, aufzusuchen.

Nehmen wir zuerst, wie oben (§. 73) an, daß man bereits den Werth von I_n^m für einen gegebenen Werth von m und n nach den zuletzt gegebenen Ausdrücke vollständig berechnet habe, und daß man nun den Werth von I_{n+p}^{m+p} daraus ableiten will.

Es ist aber, analog mit dem letzten Ausdrücke,

$$I_{n+p}^{m+p} = \frac{1}{A_{m+p} A_{n+p}} \left(\frac{A_{m+p+1} A_{n+p+1}}{r} + \frac{A_{m+p+2} A_{n+p+2}}{r^2} + \dots \right)$$

und zuvor war

$$I_n^m = \frac{1}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \dots + \frac{A_{m+p} A_{n+p}}{r^p} \right) \\ + \frac{1}{r^p A_m A_n} \left(\frac{A_{m+p+1} A_{n+p+1}}{r} + \frac{A_{m+p+2} A_{n+p+2}}{r^2} + \dots \right)$$

Substituirt man aber in dem letzten Gliede dieses Ausdrucks den Werth der eingeschlossenen Größe aus der vorhergehenden Gleichung, so erhält man, wenn man die endliche Reihe

$$\frac{1}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \dots + \frac{A_{m+p} A_{n+p}}{r^p} \right) = R$$

setzt, folgende Gleichung

$$I_n^m = R + \frac{1}{r^p A_m A_n} \cdot A_{m+p} A_{n+p} \cdot I_{n+p}^{m+p}$$

und man hat daher für den gesuchten Werth von

$$I_{n+p}^{m+p} = (I_n^m - R) \cdot \frac{r^p A_m A_n}{A_{m+p} A_{n+p}}.$$

Ex. Sei $m=40$ und $n=30$, $r=1.04$. Hat man bereits $I_{30}^{40} = 10.78$ gefunden, so ist weiter $R = \frac{A_{41} A_{31}}{r A_{40} A_{30}} = 0.931$ und daher $I_{31}^{41} = (10.78 - 0.931) 1.0745 = 10.58$,

ein Verfahren, welches zur Construction von Tafeln für die Größe I_n^m nicht unbequem ist.

II. Bequemer noch, aber, besonders für einen höheren Zinsfuß, nicht mehr völlig genau, ist folgende Methode.

Es war

$$I_n^m = \frac{1}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3} A_{n+3}}{r^3} + \dots \right)$$

Sei eben so

$$G_\mu = \frac{1}{A_\mu} \left(\frac{A_{\mu+1}}{r} + \frac{A_{\mu+2}}{r^2} + \frac{A_{\mu+3}}{r^3} + \dots \right)$$

Der letzte Ausdruck G_μ ist durch die bereits gegebene Tafel VI sehr leicht zu finden, da (nach §. 16)

$$\frac{A_{\mu+1}}{r} + \frac{A_{\mu+2}}{r^2} + \frac{A_{\mu+3}}{r^3} + \dots = r^\mu E_{\mu+1}, \text{ also auch}$$

$$G_\mu = r_\mu \cdot \frac{E_{\mu+1}}{A_\mu} \text{ ist.}$$

Welches ist aber der Werth der neu eingeführten Größe μ , für welchen I_n^m gleich der Größe G_μ wird?

Es war (§. 12) $G_n^m = \frac{1}{A_m A_n} (A_{m+1} A_{n+1} + A_{m+2} A_{n+2} + \dots)$ die Ehedauer zweier Personen, die gegenwärtig das Alter m und n haben. Eben so war (§. 7)

$F_\mu = \frac{1}{A_\mu} (A_{\mu+1} + A_{\mu+2} + A_{\mu+3} + \dots)$ die mittlere Lebensdauer einer μ -jährigen Person. Um den Werth von μ zu finden, der $F_\mu = G_n^m$ macht, d. h. um das Alter μ einer Per-

son zu finden, deren mittlere Lebensdauer gleich der Ehedauer jener zwei ersten Personen ist, wird man also zuerst (nach der Taf. IV) die Ehedauer der zwei Personen des Alters m und n suchen, und diese Ehedauer als mittlere Lebensdauer F_μ eines Menschen ansehen, dessen gegenwärtiges Alter μ man durch die zweite der Tafeln III leicht finden kann, und dieser Werth von μ wird der Gleichung $F_\mu = G_n^m$ genügen und daher auch sehr nahe, wenn der Zinsfuß nicht zu groß ist, auch der Gleichung $G_\mu = I_n^m$. Kennt man also durch das angezeigte Verfahren den Werth von μ , so wird man bloß den Ausdruck von $G_\mu = \frac{1}{A_\mu} \left(\frac{A_{\mu+1}}{r} + \frac{A_{\mu+2}}{r^2} + \frac{A_{\mu+3}}{r^3} + \dots \right)$ entwickeln, d. h. nach S. 17 mit Hülfe der Tafel VI bloß die GröÙe

$G_\mu = r^\mu \cdot \frac{E_{\mu+1}}{A_m}$ berechnen und dann wird der gesuchte genäherte Werth von I_n^m gleich G_μ seyn.

Ex. Sei $m = 60$ und $n = 25$. Man suche I_{25}^{60} .

Für dieses Paar erhält man nach Taf. IV die Ehedauer 10.70. Wird diese Zahl als die mittlere Lebensdauer F_μ einer Person des Alters μ betrachtet, so gibt die Tafel III mit dem Argumente $F_\mu = 10.70$ die GröÙe $\mu = 62.98$. Für diesen Werth von μ ist aber $E_{\mu+1} = 116.23$ und $A_\mu = 182.2$, also auch für den Zinsfuß $r = 1.04$

$$G_\mu = I_n^m = (1.04)^{62.98} \cdot \frac{116.23}{182.2} = 7.543.$$

Die strenge Rechnung nach dem S. 16. III aufgestellten genauen Formel gibt $I_n^m = 7.550$.

Ex. II. $m = 50$ und $n = 30$ gibt, $F_\mu = 13.82$, also $\mu = 56.39$ und $I_n^m = 9.29$. Nach der strengen Rechnung 9.22.

Ex. III. $m = 70$ und $n = 40$ gibt, $F_\mu = 7.13$ also
 $\mu = 73.586$ und $I_n^m = 5.30$. Nach der genauen Rechnung 5.20.

Die Tafeln VII, VIII und IX enthalten diesen genauen
 Werth von I_n^m für den Zinsfuß $r = 1.03$, 1.04 und 1.05
 unter der Aufschrift der Eherenten, deren Bedeutung weiter
 unten erklärt werden wird.

§. 18. Das Vorhergehende wird hinreichen, alle hierher
 gehörenden Probleme nicht nur aufzulösen, sondern auch diese
 Auflösungen durch Hülfe der angeführten Tafel zur unmittel-
 baren Berechnung sehr bequem zu machen.

Zur besseren Uebersicht stellen wir die bisher gefundenen
 Ausdrücke hier kurz zusammen.

$$B_m = A_m - A_{m+1}$$

$$C_m = A_m + A_{m+1} + A_{m+2} + \dots$$

$$D_m = \frac{A_m}{r^m} = E_m - E_{m+1}$$

$$r^{m-1} E_m = \frac{A_m}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \frac{A_{m+2}}{r^3} + \dots$$

$$r^m \cdot E_{m+1} = \frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} + \dots$$

$$r^{m-1} (E_m - E_{m+p}) = \frac{A_m}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \frac{A_{m+2}}{r^3} + \dots \text{ bis } \frac{A_{m+p-1}}{r^p}$$

$$r^m (E_{m+1} - E_{m+p+1}) = \frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} + \dots \text{ bis } \frac{A_{m+p}}{r^p}$$

$$F_m = \frac{1}{2} + \frac{C_{m+1}}{A_m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A_m} (A_{m+1} + A_{m+2} + A_{m+3} + \dots)$$

$$G_n^m = \frac{1}{A_m A_n} (A_{m+1} A_{n+1} + A_{m+2} A_{n+2} + A_{m+3} A_{n+3} + \dots)$$

$$A_m A_n \cdot I_n^m = \frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3} A_{n+3}}{r^3} + \dots$$

Von diesen Gröſſen gibt die

Zaſel	die Werthe von
I	A_m und C_m
III	F_m
IV	G_n^m oder die Dauer der Ehe
V	$F_m - G_n^m$ oder $F_n - G_m^n$ oder die Dauer des Ueberlebens,
VI	D_m und E_m
VII, VIII und IX	I_n^m oder die Cherente.

I. Nach dieſen Vorbereitungen wollen wir nun zu den vorzüglichſten der Aufgaben übergehen, welche man über Anwartschaften irgend einer Art geben kann, indem wir uns dabei auf diejenigen beſchränken, die man wegen ihrer practiſchen Brauchbarkeit entweder bereits eingeführt hat oder doch noch ferner einführen ſollte. Um dieſe verſchiedenen Probleme leichter zu überſehen, und um unnöthige Wiederholungen zu vermeiden, werden wir ſie, wo es die Natur der Sache und die erforderliche Deutlichkeit erlaubt, allgemein ſtellen, und dann die aus der allgemeinen Auflöſung folgenden speciellen Fälle beſonders anführen.

II. Wir nehmen an, daß ein Mitglied bei ſeinem Eintritt in irgend eine Verſorgungsanſtalt die Summe α und überdieß im Anfange jedes folgenden Jahres die Summe β an die Caſſe entrichtet. Man nennt α das Antrittsgeld und β den jährlichen Beitrag. Wird dieſer Beitrag vor dem Eintritt des Mitgliedes biß an ſeinen Tod entrichtet, ſo heißt er ein lebenslänglicher Beitrag, wird er aber z. B. nur während der erſten a Jahre entrichtet, ſo heißt er ein a jähriger Beitrag.

Dafür ſoll das Mitglied von der Caſſe ein oder mehr Mal die Summe γ erhalten. Wird von der Caſſe dieſe Summe γ

nur einmal, gleichsam als Capital gezahlt, so heißt sie eine Actie. Wird durch mehrere bestimmte, z. B. durch c Jahre, jährlich diese Summe gezahlt, so heißt sie eine mehrjährige Actie. Wird sie aber entweder ihm selbst oder einer bestimmten anderen Person jährlich, bis an seinen Tod, oder bis an den Tod der anderen Person bezahlt, so heißt sie eine Rente. Beide zusammen, ohne Unterschied, heißen überhaupt Versicherungen.

Actien und Renten endlich erhalten verschiedene Beinamen nach den Personen, an welche sie von der Cassé entrichtet werden. Wird die Summe γ dem Mitgliede selbst zu einer bestimmten Zeit einmal oder auch jährlich bis an seinen Tod entrichtet, so heißt sie im ersten Falle eine Lebensactie, im zweiten eine Lebensrente; beide zusammen heißen eine Lebensversicherung. Wird sie bei dem Tode des Mitgliedes an einen von ihm bezeichneten Erben entrichtet, so heißt sie Erbactie oder Erbrente. (Beide zusammen heißen eine Erbversicherung). Wird diese Erbrente seiner hinterlassenen Witwe, von seinem Tode an jährlich bis an ihren Tod, gezahlt, so heißt sie eine Witwenrente (sonst auch Witwenpension). Wird sie seinen hinterlassenen Kindern, von seinem Tode jährlich bis zu einem bestimmten Jahre gezahlt, so heißt sie eine Waisenactie u. s. w.

Wir wollen nun diese verschiedenen Arten von Versicherungen näher betrachten und mit den Lebensrenten den Anfang machen.

Lebensversicherungen.

§. 19. Ein m Jahre altes Mitglied zahlt in eine Versorgungsanstalt bei seinem Eintritte das Antrittsgeld α und am Ende eines jeden Jahres den jährlichen Betrag β . Dieser Beitrag wird aber nur während der ersten a Jahre entrichtet, so daß nach diesen a Jahren keine weiteren Zahlungen des Mitgliedes Statt haben.

Dafür soll die Casse dem Mitgliede die Summe γ als jährliche Actie durch c Jahre entrichten und diese Zahlungen der Casse sollen erst am Ende des b^{ten} Jahres nach dem Eintritte des Mitgliedes anfangen, also von diesem Jahre bis zu dem $b + c^{\text{ten}}$ Jahre nach dem Eintritte dauern.

Sollte nämlich das Mitglied vor dem b^{ten} Jahre nach seinem Eintritte sterben, so verfallen die von ihm der Casse geleisteten Zahlungen an die Casse, ohne daß das Mitglied eine Entschädigung dafür erhielte. Man nennt diese b Jahre die Probejahre, die man in manchen Gesellschaften eingeführt hat, um den Schaden der Casse zu vermeiden, der bei solchen Verträgen aus dem zu frühen Tod der Mitglieder entstehen kann, die während der kurzen Zeit seit ihrem Eintritte nur geringe Leistungen tragen und doch vielleicht beträchtliche Summe von der Casse dafür erhalten könnten.

Die Einrichtung, daß nebst dem Antrittsgelde α auch jährliche Beiträge während der ersten a Jahre entrichtet werden, wird denjenigen Mitgliedern wünschenswerth seyn, die eine größere Actie γ wünschen, um ihren Verhältnissen dadurch in der That bedeutend aufzuhelfen, und die doch vielleicht nicht im Stande sind, das dadurch ebenfalls größere Antrittsgeld α gleich Anfangs und auf einmal zu entrichten. Die Einrichtung aber, daß die Actie γ von der Casse nur durch c Jahre gezahlt wird und dann aufhört, werden jene angemessen finden, die durch ihre Stellung in der menschlichen Gesellschaft am Ende der $b + c$ ersten Jahre einer Erbschaft oder einer Erhöhung ihres Amtsgehaltes u. dgl. entgegensehen, wo sie dann der Unterstützung der Casse nicht mehr bedürfen.

Nehmen wir, um die gegebene Aufgabe aufzulösen, an, daß eine große Anzahl M solcher Mitglieder, die gegenwärtig alle m Jahre alt sind, auf die erwähnten Bedingungen in die Versorgungsanstalt treten, und suchen wir zuerst, welches der gegenwärtige Werth aller ihrer Leistungen (ihrer Antrittsgelder sowohl als ihrer jährlichen Beiträge) ist, die sie nach und nach an die Casse entrichten.

I. Von dieser Anzahl M leben am Ende des 1sten Jahres noch $M \cdot \frac{A_{m+1}}{A_m}$ (nach S. 62) und da am Ende dieses Jahres jeder von den noch Lebenden den jährlichen Beitrag β entrichtet, so geben sie alle die Summe $M\beta \cdot \frac{A_{m+1}}{A_m}$. Da aber die Casse diese Summe ein Jahr nach dem Eintritte der Mitglieder erhält, so hat sie dadurch den Nutzen dieses Capitals durch dessen einjährige Zinsen verloren, die während dieser Zeit den Mitgliedern zu Gute kommen, welche diese Summe so lange für sich selbst behalten haben. Dieser Verlust der Casse muß daher, wenn beide Parteien, wie es bei Unternehmungen dieser Art gefordert wird, weder Nutzen noch Schaden haben sollen, wieder vergütet werden, was dadurch geschieht, daß man annimmt, daß die Casse am Ende des ersten Jahres nicht die Summe $M\beta \cdot \frac{A_{m+1}}{A_m}$, sondern nur die auf den Anfang dieses Jahres reducirte Summe, oder daß sie nur den Werth erhalten habe, den diese Summe zur Zeit des Eintrittes der Mitglieder hatte. Dieser Werth ist aber (nach S. 76) gleich $\frac{M\beta}{r} \cdot \frac{A_{m+1}}{A_m}$, so daß also die Casse von den sämtlichen Mitgliedern bei ihrem Eintritte, nebst den sämtlichen Antrittsgeldern Ma , noch die Summe $\frac{M\beta}{r} \cdot \frac{A_{m+1}}{A_m}$ erhalten hat.

Am Ende des zweiten Jahres sind von der ursprünglichen Anzahl M der Mitglieder nur mehr $M \cdot \frac{A_{m+2}}{A_m}$ übrig, daher die Casse dann von ihnen die Summe $M\beta \cdot \frac{A_{m+2}}{A_m}$ erhält, deren Werth zur Zeit des Eintritts der Mitglieder nur $\frac{M\beta}{r^2} \cdot \frac{A_{m+2}}{A_m}$ ist. Eben so erhält sie am Ende des dritten Jahres die auf den Anfang reducirte Summe $\frac{M\beta}{r^3} \cdot \frac{A_{m+3}}{A_m}$ und so fort bis zu dem Ende des a^{ten} Jahres, wo sie die letzte Zahlung dieser Mit-

glieder erhält, die auf die Zeit ihres Eintrittes reducirt gleich $\frac{M\beta}{r^a} \cdot \frac{A_{m+a}}{A_m}$ ist.

Die Summe aller dieser auf den Anfang reducirten Leistungen der sämtlichen Mitglieder ist daher

$$M\alpha + \frac{M\beta}{A_m} \left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} \dots + \frac{A_{m+a}}{r^a} \right)$$

oder (nach §. 18)

$$M\alpha + \frac{M\beta r^m}{A_m} (E_{m+1} - E_{m+a+1})$$

oder endlich (§. 18)

$$M\alpha + \frac{M\beta}{D_m} (E_{m+1} - E_{m+a+1}).$$

Dividirt man diese Summe durch die anfängliche Anzahl M der Mitglieder, so erhält man den auf die Zeit des Eintrittes reducirten Werth der Zahlungen, welche im Mittel jedes einzelne Mitglied an die Casse geleistet hat, und welcher daher ist

$$\alpha + \frac{\beta}{D_m} (E_{m+1} - E_{m+a+1}).$$

Sollten aber die jährlichen Zahlungen nicht, wie bisher vorausgesetzt wurde, am Ende eines jeden der a ersten Jahre, sondern sollen sie schon am Anfange jedes Jahres oder vorhin ein an die Casse entrichtet werden, so geht, wie man sieht, der letzte Ausdruck in den folgenden über

$$\alpha + \frac{\beta}{D_m} (E_m - E_{m+a}).$$

II. Suchen wir nun auf gleiche Weise den Werth der, ebenfalls auf dieselbe Zeit des Eintrittes reducirten Zahlungen, welche nach dem angeführten Vertrage die Casse an die Mitglieder zu leisten hat.

Die ersten b Probejahre durch hat die Casse keine Zahlungen zu entrichten. Am Ende des $b+1$ ten Jahres, wo diese Zahlungen der Casse anfangen, sind (§. 62) von der ursprünglichen Anzahl M der Mitglieder nur noch $M \cdot \frac{A_{m+b+1}}{A_m}$ übrig, und die Casse entrichtet daher in diesem Augenblicke die Summe

$M\gamma \cdot \frac{A_{m+b+1}}{A_m}$, die auf die Zeit des Eintritts der Mitglieder reducirt $\frac{M\gamma}{r^{b+1}} \cdot \frac{A_{m+b+1}}{A_m}$ beträgt. Am Ende des $b+2^{\text{ten}}$ Jahres ist der gegenwärtige Werth ihrer Zahlungen eben so $\frac{M\gamma}{r^{b+2}} \cdot \frac{A_{m+b+2}}{A_m}$, am Ende des $b+3^{\text{ten}}$ Jahres $\frac{M\gamma}{r^{b+3}} \cdot \frac{A_{m+b+3}}{A_m}$.. und endlich am Ende des $b+c^{\text{ten}}$ Jahres ist der gegenwärtige Werth ihrer letzten Zahlung $\frac{M\gamma}{r^{b+c}} \cdot \frac{A_{m+b+c}}{A_m}$.

Die Summe aller dieser auf die Zeit des Eintritts reducirten Zahlungen der Casse an sämtliche Mitglieder ist daher

$$\frac{M\gamma}{A_m \cdot r^b} \left(\frac{A_{m+b+1}}{r} + \frac{A_{m+b+2}}{r^2} + \frac{A_{m+b+3}}{r^3} \dots + \frac{A_{m+b+c}}{r^c} \right)$$

oder (nach S. 18)

$$\frac{M\gamma}{D_m} (E_{m+b+1} - E_{m+b+c+1})$$

also ist auch der gegenwärtige Werth aller Zahlungen der Casse an jedes einzelne Mitglied

$$\frac{\gamma}{D_m} (E_{m+b+1} - E_{m+b+c+1}).$$

Da aber diese Ausgabe der Casse der oben in I gefundenen Einnahme derselben gleich seyn muß, so hat man, als Auflösung unserer Aufgabe, die Gleichung

$$\alpha + \frac{\beta}{D_m} (E_m - E_{m+a}) = \frac{\gamma}{D_m} (E_{m+b+1} - E_{m+b+c+1}) \dots (A).$$

S. 20. Diese Auflösung enthält eine große Anzahl besonderer Fälle.

1. Sollen z. B. keine jährlichen Beiträge, sondern bloß das Antrittsgeld von den Mitgliedern entrichtet werden, so ist in der letzten Gleichung $\beta = 0$.

2. Soll kein Antrittsgeld, sondern bloß jährliche Beiträge entrichtet werden, so ist $\alpha = 0$.

3. Soll die Actie in demselben Jahre von der Casse gezahlt zu werden anfangen, in welchem die jährlichen Beiträge der Mitglieder aufhören, so ist $b = a$.

4. Soll die jährlich zu entrichtende Actie bis an den Tod des Mitgliedes dauern, also (nach §. 18. II.) eine Lebensrente seyn, so wird man die Größe $m+b+c+1$ gleich dem höchsten Alter des menschlichen Lebens, nach der Tabelle I gleich 96, setzen, wodurch also das letzte Glied $E_{m+b+c+1}$ gleich Null wird oder aus der Gleichung (A) ganz verschwindet.

5. Sollten auch die jährlichen Beiträge, nicht bloß durch die a ersten Jahre, sondern bis an den Tod des Mitgliedes dauern, so ist aus derselben Ursache die Größe $E_{m+a} = 0$.

6. Soll die Rente gleich am Ende des ersten Jahres gezahlt, also keine Probejahre eingeführt werden, so ist $b = 0$.

7. Soll die Summe γ nur einmal und zwar am Ende des b^{ten} Jahres bezahlt werden, so ist $c = 1$.

8. Ist $a = 0$, so ist auch $E_m - E_{m+a} = 0$, d. h. es werden keine Beiträge, sondern bloß das Antrittsgeld bezahlt.

9. Besteht die Gesellschaft nur aus neugeborenen Kindern, für die man Actien oder Renten kaufen will, so ist $m = 0$, also nach Tafel I. $D_0 = 1000$ und $E_0 = 10782.28$.

10. Werden die jährlichen Beiträge nicht, wie bisher vorausgesetzt wurde, am Ende, sondern schon im Anfange eines jeden Jahres bezahlt, so ist der zweite Theil der Gleichung (A)

$$\frac{\beta}{D_m} (E_{m+1} - E_{m+a+1}).$$

Sollen dann die Zahlungen der Casse gerade so lange dauern, als die jährlichen Beiträge, so ist $c = a$ und daher die Gleichung (A), wenn keine Probejahre statt haben, oder wenn $b = 0$ ist

$$\alpha = \frac{(\gamma - \beta)}{D_m} (E_{m+1} - E_{m+a+1})$$

so daß daher auch diese jährlichen Beiträge der Mitglieder ganz wegleiben, aber dafür die Casse statt γ nur die Summe $\gamma - \beta$ entrichtet.

11. Die Casse zahlt, nach dem angeführten Vertrage, die Summe γ jährlich einmal und zwar am Ende des Jahres. Wenn man aber vorzieht, alle halbe, alle viertel oder allgemein

alle $\frac{1}{n}$ tel Jahre eine, offenbar kleinere Summe γ' zu erhalten. Wie groß wird dann γ' seyn?

Der gegenwärtige Werth aller jährlichen Zahlungen der Casse, deren jede gleich γ ist und die durch c Jahre fortgesetzt werden sollen, d. h. also das, was die Casse dem Mitgliede nach dem eingegangenen Vertrage in der That schuldig ist, beträgt

$$\frac{\gamma}{r} + \frac{\gamma}{r^2} + \frac{\gamma}{r^3} \dots + \frac{\gamma}{r^c} = \frac{\gamma(1-r^c)}{r^c(1-r)}$$

Der Werth aller der nun von ihr geforderten $\frac{1}{n}$ jährigen Zahlungen aber, deren jede gleich γ' ist und die ebenfalls durch c Jahre dauern sollen, ist

$$\frac{\gamma'}{r^n} + \frac{\gamma'}{r^{2n}} + \frac{\gamma'}{r^{3n}} + \dots + \frac{\gamma'}{r^{cn}} = \frac{\gamma'(1-r^{cn})}{r^{cn}(1-r^n)}$$

Setzt man beide Werthe einander gleich, so ist

$$\gamma' = \frac{\gamma(1-r^n)}{1-r} \quad \text{oder abkürzend}$$

$$\gamma' = \frac{\gamma}{n} - \frac{\gamma(n-1)}{2n^2} \cdot (r-1)$$

Ex. Ist $\gamma=100$ und $n=2$, so, daß man halbjährige Zahlungen der Casse wünscht, so hat man für $r=1.05$

$$\frac{\gamma(n-1)}{2n^2} (r-1) = \frac{5}{8} \quad \text{also } \gamma' = 50 - \frac{5}{8} = 49.375.$$

12. Soll endlich die Summe γ durch n Jahre von der Casse auf jeden Fall gezahlt werden, das Mitglied mag zu jener Zeit leben oder nicht, so daß diese Zahlung auch auf die Erben des Mitgliedes übergehen kann, so werden in den §. 19 alle anfänglichen M Mitglieder als immer lebende Personen angesehen, und diese Voraussetzung gibt $A_m = A_{m+1} = A_{m+2}$ u. s. w. Wird daher von jedem dieser Mitglieder nur das Antrittsgeld α ohne weitere jährliche Beiträge entrichtet, und soll dafür die Casse auf alle Fälle durch n Jahre die jährliche Summa γ zahlen, und zwar ohne Probejahr, so, daß $b=0$ ist, so gibt die Gleichung (A)

$$\alpha = \frac{\gamma}{D_m} (E_{m+1} - E_{m+n+1}) \text{ oder}$$

$$\alpha = \frac{\gamma \cdot r^m}{A_m} (E_{m+1} - E_{m+n+1}) \text{ oder nach §. 18}$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{A_m} \left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} + \dots \right)$$

und daher, da $A_m = A_{m+1} = A_{m+2} \dots$ ist,

$$\alpha = \gamma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \dots + \frac{1}{r^n} \right) \text{ oder}$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{r^n} \frac{(r^n - 1)}{(r - 1)} \text{ oder } \alpha = \frac{\gamma}{r - 1} \left(1 - \frac{1}{r^n} \right)$$

Die Tafel XXV gibt diese Werthe von α für $\gamma = 100$ Gulden. Um zu sehen, welchen Unterschied der verschiedene Zinsfuß erzeugt, so hat man

Jahre		Antrittsgeld		
n	2 pCt.	5 pCt.	8 pCt.	
10	898.26	772.17	671.01	
20	1635.14	1246.22	981.81	
30	2239.65	1537.25	1125.78	
40	2735.55	1715.91	1192.46	
50	3142.36	1825.59	1223.35	

Man nennt eine solche, von dem Alter und Leben des Mitgliebes unabhängige Actie, die für sein Antrittsgeld von der der Casse an ihn oder an seine Erben durch c Jahre gezahlt wird, eine Zeitactie (oder auch, obwohl gegen die oben aufgestellte Bedeutung des Wortes, eine Zeitrente). Man kann daher auch sagen, daß der heutige Werth dieser Zeitrente gleich

α , d. h. gleich $\frac{\gamma (r^n - 1)}{r^n (r - 1)}$ ist, woraus folgt, daß der Werth derselben nach n Jahren seyn wird $\alpha \cdot r^n$ oder $\frac{\gamma (r^n - 1)}{r - 1}$. Die Werthe dieser GröÙe $\frac{\gamma (r^n - 1)}{r - 1}$ gibt die Tafel XXVI für $\gamma = 100$.

Soll die Zahlung dieser jährlichen Rente von γ Gulden erst nach b Probejahren anfangen und dann durch n Jahre dauern, so ist das Antrittsgeld $\alpha' = \frac{\gamma}{r - 1} \left(\frac{1}{r^b} - \frac{1}{r^{b+n}} \right)$.

Für eine immerdauernde oder ewige Rente, die dem eingetretenen Mitgliede und nach ihm seinen Nachfolgern immerfort ausgezahlt wird, ist $n = \infty$, also das Antrittsgeld

$$\text{bei } b \text{ Probejahren } \alpha' = \frac{\gamma}{(r-1) \cdot r^b}$$

$$\text{und ohne Probejahre } \alpha = \frac{\gamma}{r-1}.$$

Für $r = 1.05$ und $\gamma = 100$ gibt die letzte Gleichung $\alpha = 2000$. Hier ist nämlich α das Capital, welches die jährlichen Zinsen $\alpha(r-1)$, d. h. γ trägt und so lange tragen wird, als das Capital angelegt bleibt. (§. 15).

Sucht man endlich das Antrittsgeld α für eine n jährige Zeitactie, die alle t^{te} Jahre mit γ Gulden auszuzahlen ist, so

$$\text{hat man } \alpha = \frac{\gamma}{r-1} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r-1}{t} \right)^{nt}} \right)$$

wo $\delta = 2, 4, 12 \dots$ für 6, 3, 1 Monate. Für $t = \infty$ oder für eine solche, täglich oder vielmehr alle Augenblicke auszuzahlende

$$\text{Rente wäre (wie §. 15) } \alpha = \frac{\gamma}{r-1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^n (r-1)} \right), \text{ wo}$$

log. nat. $\varepsilon = 1$ ist.

13. Werden endlich der Rechnung nicht, wie bisher, Zinsezinsen, sondern nur einfache Zinsen zu Grunde gelegt und ist

$$\rho = \frac{1}{r-1}, \text{ also z. B. für 5 pCt. } \rho = 20, \text{ für 4 pCt. } \rho = 25,$$

so wird man in dem Vorhergehenden

$$\text{statt } r \text{ setzen } \frac{\rho+1}{\rho}$$

$$r^2 \dots \frac{\rho+2}{\rho}$$

$$r^3 \dots \frac{\rho+3}{\rho} \text{ u. s. w.}$$

so, daß man z. B. in §. 19 I. erhält für die Einnahme der

$$\text{Casse, } M\alpha + \frac{M\beta\rho}{A_m} \left(\frac{A_{m+1}}{\rho+1} + \frac{A_{m+2}}{\rho+2} + \frac{A_{m+3}}{\rho+3} \dots \frac{A_{m+a}}{\rho+a} \right)$$

und in §. 19 II für die Ausgabe derselben

$$\frac{\gamma\rho}{A_m} \left(\frac{A_{m+b+1}}{\rho+b+1} + \frac{A_{m+b+2}}{\rho+b+2} \dots + \frac{A_{m+b+c}}{\rho+b+c} \right)$$

welche beide Ausdrücke man daher einander, wie zuvor, gleich setzen wird.

§. 21. Wir haben also, unter der Voraussetzung, daß die jährlichen Beiträge der Mitglieder nur durch die a ersten Jahre dauern und im Anfange dieser Jahre bezahlt werden, und daß die Zahlungen der Casse erst mit dem b^{ten} Jahre nach dem Eintritt anfangen, von dieser Zeit an nur durch c Jahre dauern, und immer am Ende dieser Jahre bezahlt werden, in §. 19 folgenden Ausdruck erhalten

$$\alpha + \frac{\beta}{D_m} (E_m - E_{m+a}) = \frac{\gamma}{D_m} (E_{m+b+1} - E_{m+b+c+1}).$$

Obgleich wir in §. 20 die Aenderungen dieses Ausdruckes für besondere Fälle angezeigt haben, so wird es doch, zum practischen Gebrauche, noch bequemer seyn, für die vorzüglichsten dieser speciellen Fälle die Formeln selbst anzugeben.

1. Lebensrente

ohne Probejahre und ohne Beiträge.

Hier ist $\beta = b = 0$ und $E_{m+b+c+1} = 0$, also

$$\alpha = \frac{\gamma}{D_m} \cdot E_{m+1}$$

Diese Werthe von α findet man in der Tafel X für $r=1.03$, 1.04 und 1.05 und für $m=0$ bis 90 berechnet. Diese Tafel setzt $\gamma=100$ voraus und sie gibt daher das Antrittsgeld α z. B. in Gulden, welches ein m jähriges Mitglied an die Casse entrichten muß, um dafür am Ende eines jeden folgenden Jahres, so lange es lebt, von der Casse die Summa von 100 Gulden zu erhalten.

Ex. Ein 40 jähriger Mann will eine Lebensrente von 100 Gulden erhalten, so ist $m=40$ und die Tafel gibt $\alpha=1183.3$ Gulden für $r=1.05$, die dieses Mitglied in die Casse erlegen muß. Für eine halb so große Rente von 50 fl. wird es auch nur die Hälfte dieses Antrittsgeldes oder 596.65 entrichten. Hat die Casse den Zinsfuß $r=1.03$ angenommen, so ist das Antrittsgeld für eine Lebensrente von 100 fl. gleich 1475.4 fl., also auch für eine Rente von 50 fl. gleich 737.7 fl. u. s. w.

2. Lebensrente

mit b Probejahren und ohne Beiträge.

Hier ist $\beta = 0$ und $E_{m+b+c+1} = 0$, also

$$\alpha = \frac{\gamma}{D_m} E_{m+b+1}$$

Für dieses Antrittsgeld α erhält also das Mitglied jährlich die Summe γ bis an seinen Tod, wenn es die ersten b Jahre, in welchen es nichts erhält, überlebt hat.

3. Lebensrente

mit b Probejahren, ohne Antrittsgeld, durch a jährige Beiträge.

Hier ist $\alpha = 0$ und $E_{m+b+c+1} = 0$, also

$$\beta = \frac{\gamma E_{m+b+1}}{E_m - E_{m+a}}$$

Für diese während der ersten a Jahre vorhinein entrichteten jährlichen Beiträge β erhält das Mitglied, wenn es die ersten b Jahre überlebt, jährlich die Summe γ bis an seinen Tod.

4. Lebensactie für c Jahre

ohne Probejahre und ohne jährliche Beiträge.

Hier ist $\beta = b = 0$, und

$$\alpha = \frac{\gamma}{D_m} (E_{m+1} - E_{m+c+1}).$$

Für dieses Antrittsgeld α erhält das Mitglied die jährliche Summe γ von dem ersten bis zum c ten Jahre nach seinem Eintritte.

5. Lebensactie für c Jahre

mit b Probejahren, ohne jährliche Beiträge.

Hier ist $\beta = 0$ und

$$\alpha = \frac{\gamma}{D_m} (E_{m+b+1} - E_{m+b+c+1}).$$

Für dieses Antrittsgeld α erhält das Mitglied, wenn es das b te Jahr nach seinem Eintritte überlebt, von da an durch c Jahre die jährliche Summe γ .

6. Lebensactie für c Jahre
mit b Probejahren, durch a jährige Beiträge
ohne Antrittsgeld.

Hier ist $\alpha = 0$ und

$$\beta = \frac{\gamma (E_{m+b+1} - E_{m+b+c+1})}{E_m - E_{m+a}}$$

Für diese die ersten a Jahre dauernden Beiträge erhält das Mitglied, wenn es das b^{te} Jahr nach seinem Eintritte überlebt, von da an durch c Jahre jährlich die Summe γ . Auch die in Nr. 2 . . 6 angeführten Lebensversicherungen können leicht in ähnliche Tafeln, wie die in Nr. 1 gebracht werden.

Erbversicherungen.

§. 22. Eine m jährige Person entrichtet bei ihrem Eintritte in die Gesellschaft das Antrittsgeld α und am Ende eines jeden folgenden Jahres den jährlichen Beitrag β . Dafür soll die Casse bei dem Tode des Mitgliedes den Nachkommen oder Erben derselben die Erbactie γ als ein Capital übergeben. — Sie machen dabei noch folgende Bedingungen. Die erwähnten jährlichen Beiträge β werden nicht immer, sondern nur die ersten a Jahre durch bezahlt. Wenn das Mitglied noch vor den ersten b Jahren stirbt, oder wenn es nach den ersten $b+c$ Jahren stirbt, so zahlt die Casse nichts. Das Erste, weil sich die Casse durch diese b Probejahre (wie in §. 19) vor dem zu frühen Tod der Mitglieder sichern will, und das Zweite, weil vielleicht manche Mitglieder, die noch $b+c$ Jahre nach ihrem Eintritte leben, sich in dieser großen Zwischenzeit so gestellt zu haben hoffen können, daß sie dieser Versorgung der Gesellschaft nicht mehr bedürfen.

Die auf die Zeit des Eintritts reducirten Einnahmen der Casse sind ganz dieselben, wie in §. 19, also gleich

$$\alpha + \frac{\beta}{D_m} (E_{m+1} - E_{m+a+1})$$

oder, wenn die jährlichen Beiträge nicht am Ende, sondern schon im Anfange jedes Jahres bezahlt werden

$$\alpha + \frac{\beta}{D_m} (E_m - E_{m+a}).$$

Die ebenfalls auf den Eintritt reducirten Ausgaben der Casse aber werden so gefunden. Von einer Anzahl M Mitgliedern, die bei ihrem Eintritte alle m Jahre alt sind, sterben während dem b und $(b+1)$ ten Jahre (nach S. 63)

$M \cdot \frac{A_{m+b} - A_{m+b+1}}{A_m}$ Personen, deren jeder daher am Ende dieses $(p+1)$ ten Jahres an die Casse die Summe γ zu entrichten hat, da hier vorausgesetzt wird, daß nach dem Tode derselben immer irgend ein Erbe von ihnen da ist, der diese Summe empfängt. Diese Zahlungen der Casse betragen daher, auf den Tag des Eintrittes reducirt, $M\gamma \cdot \frac{A_{m+b} - A_{m+b+1}}{r^{b+1} \cdot A_m}$.

Eben so sind die reducirten Ausgaben der Casse am Ende des $(b+2)$ ten Jahres $M\gamma \cdot \frac{A_{m+b+1} - A_{m+b+2}}{r^{b+2} \cdot A_m}$ u. s. w.

und endlich am Ende des $(p+c)$ ten Jahres

$$M\gamma \cdot \frac{A_{m+b+c-1} - A_{m+b+c}}{r^{b+c} \cdot A_m}$$

Sammelt man diese Ausdrücke, so erhält man für die reducirte Gesamtsumme der Ausgaben der Casse

$$M\gamma \cdot \frac{r^m - 1}{A_m} (E_{m+b} - E_{m+b+c}) - M\gamma \cdot \frac{r^m}{A_m} (E_{m+b+1} - E_{m+b+c+1}).$$

Dividirt man also diesen Ausdruck durch M und setzt ihn der oben gegebenen Einnahme der Casse gleich, so erhält man für die Auflösung unserer Aufgabe die Gleichung,

$$\alpha + \frac{\beta}{D_m} (E_m - E_{m+a}) = \frac{\gamma}{r \cdot D_m} (E_{m+b} - E_{m+b+c}) - \frac{\gamma}{D_m} (E_{m+b+1} - E_{m+b+c+1}) \dots (B)$$

Sind in diesem Ausdrucke die unter E stehenden Zahlen $m+a$, $m+b$, $m+b+c$. . größer, als die größte Dauer des menschlichen Lebens, also z. B. größer als 96 oder 100, so ist $E_{m+a} = E_{m+b} = E_{m+b+c} = 0$, also auch alle folgenden $E_{m+a+1} =$

E_{m+b+1} u. s. f. gleich Null. Werden also z. B. die jährlichen Beiträge von jedem Mitgliede bis an das Ende seines Lebens bezahlt, so ist a unbestimmt und daher $E_{m+a} = 0$. Werden auch die ältern Mitglieder, die erst nach $(b+c)$ Jahren sterben, nicht ausgeschlossen, sondern wird bei dem Tode aller Mitglieder, welche die b Probejahre überlebt haben, die Summe γ ausbezahlt, so ist $E_{m+b+c} = 0$. Werden endlich die jährlichen Beiträge nicht, wie die letzte Gleichung voraussetzt, am Anfange, sondern erst am Ende jedes Jahres entrichtet, so ist das zweite Glied dieser Gleichung $\frac{\beta}{D_m} (E_{m+1} - E_{m+a+1})$.

§. 23. Wir wollen nun wieder, der größeren Deutlichkeit wegen, einige besondere Fälle dieser Aufgabe einzeln anführen.

1. Partielle Erbactie nach a Jahren zahlbar,
ohne Probejahre und ohne Eintrittsgeld.

Hier ist also $a=b=0$ und $a=c$, wenn die Mitglieder die Beiträge durch a Jahre zahlen und dafür die Erbversicherung γ für den Fall fordern, daß sie noch vor diesen a Jahren sterben, so, daß die das a te Jahr Ueberlebenden keine Ansprüche an die Cassé haben, so ist

$$\beta = \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{(E_m - E_{m+a}) - r(E_{m+1} - E_{m+a+1})}{E_m - E_{m+a}}$$

Für den speciellen Fall $a=c=1$ ist $E_m - E_{m+1} = D_m$ und $E_{m+1} - E_{m+2} = D_{m+1}$; also

$$\beta = \frac{\gamma}{r} - \gamma \cdot \frac{D_{m+1}}{D_m}$$

d. h. wer die Summe β in die Cassé erlegt, erhält dafür, wenn er noch vor dem Ende des ersten Jahres stirbt, die Summe γ für seine Erben.

Ex. Sei hier und im folgenden $r=1.04$ oder $\frac{1}{r}=0.96154$ und $\gamma=100$.

Für $a=c=7$ und $m=20$ gibt die Tafel VI

$$E_m = 3986.58; E_{m+1} = 3762.49$$

$$E_{m+7} = \frac{2628.30}{1358.28}; E_{m+8} = \frac{2470.15}{1292.34}$$

$$\text{also } \beta = \frac{100 (1358.28 - 1344.05)}{1412.61} = 1.01$$

oder ein 20jähriges Mitglied zahlt durch die sieben ersten Jahre jährlich einen Gulden, und erhält dafür, wenn es vor dem siebenten Jahre stirbt, bei seinem Tode 100 Gulden. Wenn er aber das siebente Jahr überlebt, so hat die Cassé nichts zu entrichten, so, daß also durch diesen Vertrag das Mitglied sich nur für die sieben nächsten Jahre versichern will.

Eben so findet man für $m=40$. . . $\beta=1.94$ und
für $m=60$. . . $\beta=5.16$.

Die Tafel XI gibt diese Werthe von β , die in mehreren der vorzüglichsten Versicherungsanstalten Englands für eine Actie $V=100$ gefordert werden. Die letzten beiden Columnen sind nach den gegenwärtigen Formeln mit der Mortalitätstafel von Baumann-Süßmildt berechnet worden.

$$\text{Ist } a=c=1, \text{ so war } \beta = \frac{\gamma}{r} - \gamma \cdot \frac{D_{m+1}}{D_m}$$

So gibt $m=20$

$$\beta = 100 (0.9615 - \frac{213.27}{224.09}) = 0.98$$

und eben so wird $m=40$ geben $\beta=1.80$ und
 $m=60$. . . $\beta=4.12$.

Die Tafel XII gibt auch diese Werthe, wie sie in den so eben erwähnten Gesellschaften Englands gefordert werden. — Obschon der Zinsfuß und die Sterblichkeitstafeln, nach welchen diese Gesellschaften eingerichtet sind, nicht bei allen genau bekannt sind, so wird es doch interessant seyn, ihre Leistungen mit den Resultaten der vorhergehenden Berechnungen in den beiden letzten Columnen vergleichen und die Verhältnisse ihrer Forderungen in diesen Tafeln gleichsam mit Einem Blicke übersehen zu können.

2. Totale Erbactie mit lebenslänglichen Beiträgen, ohne Antrittsgeld und ohne Probejahre und ohne Ausschluß der älteren Mitglieder.

Hier ist $\alpha=b=0$. Da die jährlichen Beiträge bis an den Tod des Mitgliedes währen, so ist $E_{m+a}=0$, und da auch die

Mitglieder, die über $(b+c)$ Jahre in der Gesellschaft leben, nicht ausgeschlossen sind, so ist $E_{m+b+c} = 0$. Man hat daher

$$\beta = \frac{\gamma}{r} \cdot \left(\frac{E_m - r \cdot E_{m+1}}{E_m} \right)$$

Für diesen jährlichen, bis an den Tod des Mitgliedes zu entrichteten Beitrag β erhalten die Erben des Mitgliedes, bei dem Tode desselben, die Summe γ .

Ex. $m=20$, $r=1.04$, $\gamma=100$ gibt $E_m=3986.58$,
 $E_{m+1}=3762.49$, also $\beta=1.78$.

Eben so gibt $m=40$. . . $\beta=3.22$

$m=60$ $\beta=6.90$ u. s. f.

Die Tafel XIII gibt die Werthe von β in den oben erwähnten Gesellschaften.

5. Totale Erbactien ohne jährliche Beiträge,
 ohne Probejahre und ohne Ausschluß der älteren Mitglieder.

Hier ist $\beta=b=0$ und $E_{m+b+c}=0$; also hat man für das zu entrichtende Antrittsgeld

$$\alpha = \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{(E_m - E_{m+1})}{D_m}$$

Ex. $m=20$ gibt für $r=1.04$ und $\gamma=100$ das Antrittsgeld $\alpha=31.1$.

Eben so gibt $m=40$. . . $\alpha=45.5$

$m=60$. . . $\alpha=64.5$.

Die Tafel XIV gibt die Werthe von α für die oben erwähnten Gesellschaften.

4. Totale Erbactie ohne Antrittsgeld, bloß durch
 a jährige Beiträge,

ohne Probejahre und ohne Ausschluß der älteren Mitglieder.

Hier ist $\alpha=b=0$ und $E_{m+b+c}=0$ und daher

$$\beta = \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{E_m - r E_{m+1}}{E_m - E_{m+a}}$$

Für diesen, die ersten a Jahre zu entrichtenden Betrag β , zahlt die Casse bei dem Tode des Mitgliedes die Summe γ .

Ex. $m=20$, $r=1.04$ und $\gamma=100$ gibt

$$\beta = \frac{7359}{r(E_m - E_{m+a})} \text{ also für } \begin{matrix} a=5 \dots \beta=6.9 \\ a=10 \dots \beta=3.9 \text{ u. f. f.} \end{matrix}$$

Ex. II. $m=60$ gibt eben so

$$\beta = \frac{1340}{r(E_m - E_{m+a})} \text{ also für } \begin{matrix} a=5 \dots \beta=15.2 \\ a=10 \dots \beta=9.5 \end{matrix}$$

Die Tafel XV enthält diese Werthe von β für die Union Society in London.

§. 24. Durch diesen Vertrag der Mitglieder mit der Versorgungsanstalt erhalten also die Erben oder die Nachkommen der Mitglieder, bei dem Tode der letzteren, eine bestimmte Summe γ , die ihnen gleichsam als ein Capital, auf einmal und nur einmal, ausgezahlt wird. Dieses Capital mögen dann die Erben entweder auf gewöhnliche Interessen bei Privatleuten anlegen, oder sich davon Grundstücke und andere Realitäten kaufen, um sich dadurch für die künftigen Jahre ihres Lebens zu sichern. Es wird aber auch manchen Mitgliedern wünschenswerth seyn, bei ihrem Tode ihren Erben nicht bloß eine bestimmte, einmal zu zahlende Summe γ zu hinterlassen, die durch unvorherzusehende Unglücksfälle bald gänzlich verloren gehen kann, wodurch z. B. die nachgelassene Familie des Mitgliedes vielleicht dem Mangel ausgesetzt wird. In dieser Beziehung würde es Vielen vortheilhafter scheinen, seinen Freunden und Angehörigen bei der Casse eine wohl kleinere, aber dafür eine durch mehrere, z. B. durch 4 Jahre vor seinem Tode zu zahlende Summe γ' zu versichern.

Die Casse zahlt nämlich jetzt im ersten Jahre nach dem Tode des Mitgliedes die Summe γ' , und am Ende dieses Jahres wieder dieselbe Summe γ' , deren auf die Zeit des Todes reducirte Werth gleich $\frac{\gamma'}{r}$ ist. Eben so ist der reducirte Werth ihrer dritten Zahlung $\frac{\gamma'}{r^2}$ ihrer vierten $\frac{\gamma'}{r^3}$ und ihrer letzten $\frac{\gamma'}{r^{n-1}}$. Es ist daher der reducirte Werth aller ihrer Zahlungen

$$\gamma' \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \dots + \frac{1}{r^{d-1}} \right) = \frac{\gamma' (1-r^d)}{(1-r)r^{d-1}}$$

und da diese GröÙe gleich γ oder gleich derjenigen Summe seyn muß, welche die Cassé bei dem Tode des Mitgliedes eigentlich zu zahlen schuldig ist, so hat man

$$\gamma' = \frac{\gamma(r-1)r^{d-1}}{r^d-1}$$

oder abkürzend

$$\gamma' = \frac{\gamma}{d} + \frac{1}{2} \gamma \frac{(d-1)}{d} (r-1) + \frac{1}{12} \frac{\gamma}{d} (d-1)(d-5)(r-1)^2$$

Die Erben werden daher in einer djährigen Zahlung nur die GröÙe γ' statt der auf einmal zu entrichtenden Summe γ erhalten.

Ex. $r = 1.05$ und $d = 2$ gibt $\gamma' = 0.518 \gamma$ und
 $d = 3$ gibt $\gamma' = 0.349 \gamma$

§. 25. Bisher haben wir nur solche Erbactien betrachtet, welche nach dem Tode des Mitgliedes seinen Erben oder Nachfolgern von der Cassé in allen Fällen entrichtet werden, indem man voraussetzt, daß immer solche Personen da sind, an welche diese Actien zu zahlen seyn werden. Wir wollen nun zu solchen Erbversicherungen übergehen, welche bei dem Tode des Mitgliedes nur an bestimmte oder genannte Personen von der Cassé entrichtet werden sollen. — Bei diesen Versicherungen können nun wieder manche Verschiedenheiten in den dafür aufgestellten Bedingungen statt haben. Die Summe γ kann z. B. von zwei gegebenen Personen einer bestimmten, wenn sie die andere überlebt; oder sie kann jeder von beiden, bei dem Tode der andern; oder sie kann auch beiden, so lange sie zusammen leben, zu entrichten seyn, und zwar als eine Actie, die nur einmal, oder als eine Rente, die alle Jahre bis an den Tod der Person gezahlt wird u. s. w. Wir wollen die vorzüglichsten dieser bestimmten Versicherungsarten besonders betrachten.

Erbactien für eine bestimmte Person oder Witwenactien.

Ein m jähriges Mitglied entrichtet das Antrittsgeld α und, so lange m lebt, den jährlichen Beitrag β , und fordert dafür, daß bei seinem Tode die Casse einer anderen von ihm bestimmten, jetzt n jährigen Person, z. B. seiner Gattin, die Erbactie γ als Capital übergebe.

I. Der Natur der Aufgabe gemäß wird das Mitglied die jährlichen Beiträge β nur so lange an die Casse entrichten, als beide Personen, die m und die n jährigen, noch zusammen leben. Wenn m stirbt, so wird nicht weiter gezahlt, weil m der Zahlende war; und wenn n stirbt, so hören ebenfalls die Zahlungen auf, weil der Zweck, wegen welchen gezahlt werden sollte, durch den Tod von n , der nun keine Versorgung mehr bedarf, wegfällt. Es ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß am Ende des ersten Jahres nach dem Eintritte von m , beide Personen noch leben (S. 67) gleich $\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{A_m A_n}$; und daher ist auch die auf die Zeit des Eintrittes reducirte Einnahme der Casse gleich $\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r \cdot A_m A_n}$. Eben so ist der Werth der Zahlung am Ende des zweiten Jahres gleich $\frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2 \cdot A_m A_n}$, und so weiter, bis eines dieser Glieder A_{m+2} oder A_{n+2} verschwindet.

Sammelt man alle diese einzelnen Zahlungen, und bemerkt man, daß (nach S. 32)

$$I_n^m = \frac{1}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3} A_{n+3}}{r^3} + \dots \right)$$

ist, so erhält man für den auf die Zeit des Eintrittes reducirten Werth aller Einnahmen der Casse von diesem Mitgliede den Ausdruck $\alpha + \beta \cdot I_n^m$.

Werden die jährlichen Beiträge immer im Anfange des Jahres entrichtet, so ist der letzte Ausdruck

$$\alpha + \beta + \beta \cdot I_n^m = \alpha + \beta (1 + I_n^m)$$

II. Um nun eben so den auf dieselbe Epoche reducirten Werth aller Ausgaben der Cassé zu erhalten, hat man (S. 68) für die Wahrscheinlichkeit, daß am Ende des ersten Jahres nach dem Eintritte das zahlende Mitglied m schon todt sei, die andere Person n aber noch lebe, den Ausdruck

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} \left(1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}\right).$$

Es werden daher von N solchen zugleich eingetretenen m und n jährigen Paaren am Ende des ersten Jahres

$$N \cdot \frac{A_{n+1}}{A_n} \left(1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}\right)$$

solche Paare entstanden seyn, in welchen n noch lebt und m schon todt ist. Diese Paare sind es aber, an welche die Cassé, der Aufgabe gemäß, die Summe γ zu entrichten hat, also ist auch der auf den Anfang reducirte Werth dieser Zahlungen der Cassé am Ende des ersten Jahres

$$\frac{N\gamma}{r} \cdot \frac{A_{n+1}}{A_n} \cdot \left(1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}\right).$$

Im Anfange des zweiten Jahres sind aber nicht mehr N Paare, sondern (nach S. 67) nur

$$N' = \frac{A_{m+1} \cdot A_{n+1}}{A_m \cdot A_n} = N'$$

vollständige Paare, wo beide Personen, m und n , noch leben, übrig, und von diesen entstehen im Laufe dieses zweiten Jahres, wie zuvor

$$N' \cdot \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} \left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\right)$$

solche neue Paare, wo n noch lebt und m schon todt ist, und da jedes dieser Paare von der Cassé wieder die Summe γ erhält, so ist der auf den Anfang reducirte Werth der Ausgaben der Cassé am Ende des zweiten Jahres

$$\frac{N'\gamma}{r^2} \cdot \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} \left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\right)$$

oder wenn man den vorhergehenden Werth von N' substituirt,

$$\frac{N\gamma}{r^2} \cdot \frac{A_{m+1} \cdot A_{n+1} \cdot A_{n+2}}{A_m \cdot A_n \cdot A_{n+1}} \left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\right)$$

oder auch, wenn man die GröÙe A_{n+1} und A_{m+1} gegeneinander aufhebt

$$\frac{N\gamma}{r^2} \cdot \frac{A_{m+1} A_{n+2} - A_{m+2} A_{n+1}}{A_m A_n}.$$

Eben so erhält man für den Werth der Zahlungen an Ende des dritten Jahres

$$\frac{N\gamma}{r^3} \cdot \frac{A_{m+2} A_{n+3} - A_{m+3} A_{n+2}}{A_m A_n} \text{ u. s. f.}$$

Addirt man alle diese Werthe und bemerkt man, daß wieder (S. 82)

$$A_m A_n \cdot I_n^m = \frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \dots \text{ also auch}$$

$$A_{m-1} A_n \cdot I_n^{m-1} = \frac{A_m A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+1} A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{m+2} A_{n+3}}{r^3} + \dots$$

ist, so hat man, wenn man die Summe aller vorhergehenden Ausgaben durch N dividirt, für den auf den Anfang reducirten Werth aller Ausgaben der Casse für das gegebene Paar

$$\gamma \cdot \frac{A_{m-1}}{A_m} \cdot I_n^{m-1} - \gamma \cdot I_n^m$$

und da dieser Ausdruck dem oben gegebenen Werthe der sämtlichen Einnahme der Casse gleich seyn soll, so hat man für die Auflösung unserer Aufgabe die Gleichung

$$\alpha + \beta \cdot I_n^m = \gamma \left[\frac{A_{m-1}}{A_m} \cdot I_n^{m-1} - I_n^m \right] \dots (C)$$

§. 26. Dieser Ausdruck setzt voraus, daß die jährlichen Zahlungen β immer am Ende des Jahres entrichtet werden. Sollen sie aber schon am Anfange eines jeden Jahres, oder vorhinein entrichtet werden, so hat man, indem man $\alpha + \beta$ statt α setzt,

$$\alpha + \beta (1 + I_n^m) = \gamma \left[\frac{A_{m-1}}{A_m} \cdot I_n^{m-1} - I_n^m \right].$$

I. Auch lassen sich bei dieser Aufgabe leicht dieselben Bedingungen anbringen, welche wir früher bei den Lebensversicherungen §. 19 und bei den Erbversicherungen §. 22 aufgestellt haben. Sollen z. B. die jährlichen Beiträge des m jährigen Mitgliedes nicht bis an seinen Tod, sondern nur bis zum Ende

des a^{ten} Jahres nach seinem Eintritte dauern, so hat man in
§. 25. I. für den Werth der Einnahme der Casse

$$\frac{1}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3} A_{n+3}}{r^3} \dots \text{bis} \right. \\ \left. + \frac{A_{m+a} A_{n+a}}{r^a} \right).$$

Dieser geschlossene Ausdruck ist aber, nach dem Vorhergehenden gleich

$$I_n^m - \frac{1}{r^a A_m A_n} \left[\frac{A_{m+a+1} A_{n+a+1}}{r} + \frac{A_{m+a+2} A_{n+a+2}}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{A_{m+a+3} A_{n+a+3}}{r^3} + \dots \right] \text{ oder gleich}$$

$$I_n^m - \frac{A_{m+a} A_{n+a}}{r^a A_m A_n} I_{n+a}^{m+a},$$

so daß man also für den ersten Theil der Gleichung (C) erhält

$$\alpha + \beta \left[I_n^m - \frac{A_{m+a} A_{n+a}}{r^a A_m A_n} \cdot I_{n+a}^{m+a} \right].$$

Werden aber diese Beiträge immer im Anfange jedes dieser a Jahre entrichtet, so ist der letzte Ausdruck

$$\alpha + \beta + \beta \left[I_n^m - \frac{1}{r^{a-1}} \cdot \frac{A_{m+a-1} A_{n+a-1}}{A_m A_n} \cdot I_{n+a-1}^{m+a-1} \right].$$

II. Sollen ferner auch hier b Probejahre eingeführt werden, so daß, wenn das m jährige Mitglied noch vor dem b^{ten} Jahre nach seinem Eintritte stirbt, die Casse nichts zu entrichten hat, so wird man die Ausgaben der Casse auf folgende Weise finden.

Am Ende des b^{ten} Jahres sind von den N anfänglichen Paaren noch $N \cdot \frac{A_{m+b} A_{n+b}}{A_m A_n} = N'$ vollständige Paare übrig, und von diesen entstehen im Laufe des $(b+1)^{\text{ten}}$ Jahres $N' \cdot \frac{A_{n+b+1}}{A_{n+b}} \left(1 - \frac{A_{m+b+1}}{A_{m+b}} \right)$ solche Paare, in welchen nur n noch lebt, m aber schon todt ist. Es ist daher der auf dem Anfang reducirte Werth der Ausgaben der Casse bei diesem letzten Paare

$$\frac{N' \cdot A_{n+b+1}}{r^{b+1} A_{n+b}} \left(1 - \frac{A_{m+b+1}}{A_{m+b}} \right).$$

Eben so sind am Ende des $(b+1)^{\text{ten}}$ Jahres noch
 $N \cdot \frac{A_{m+b+1} A_{n+b+1}}{A_m A_n} = N''$ vollständige Paare übrig, und
 von diesen entstehen im $(b+2)^{\text{ten}}$ Jahr

$N'' \cdot \frac{A_{n+b+2}}{A_{n+b+1}} \left(1 - \frac{A_{m+b+2}}{A_{m+b+1}}\right)$ solche Paare, in welchen nur
 n noch lebt, so daß also der reducirte Werth der Zahlungen
 der Cassé am Ende des $(b+2)^{\text{ten}}$ Jahres ist

$$\frac{N'' \gamma \cdot A_{n+b+2}}{r^{b+2} A_{n+b+1}} \left(1 - \frac{A_{m+b+2}}{A_{m+b+1}}\right).$$

Setzt man dieß fort und substituirt man in diesen Aus-
 drücken die vorhergehenden Werthe von N' , N'' ... und divi-
 dirt man endlich die Summe aller dieser Ausdrücke durch die
 ursprüngliche Anzahl N der Paare, so erhält man für den auf
 die Zeit ihres Eintritts reducirten Werth aller Ausgaben der
 Cassé für das gegebene Paar

$$\frac{\gamma}{r^b A_m A_n} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{A_{m+b} A_{n+b+1} - A_{m+b+1} A_{n+b+1}}{r} \\ & + \frac{A_{m+b+1} A_{n+b+2} - A_{m+b+2} A_{n+b+2}}{r^2} \\ & + \frac{A_{m+b+2} A_{n+b+3} - A_{m+b+3} A_{n+b+3}}{r^3} \quad \text{ic.} \end{aligned} \right\}$$

das heißt, wenn man die Bezeichnung von S. 82 wieder
 einführt

$$\frac{\gamma}{r^b A_m A_n} \cdot \left\{ A_{m+b-1} A_{n+b} \cdot I_{n+b}^{m+b-1} - A_{m+b} A_{n+b} \cdot I_{n+b}^{m+b} \right\}$$

welchen Ausdruck man also statt des letzten Gliedes der Gleichung (C) setzen wird, um auf die b Probejahre Rücksicht zu nehmen. Für $b=0$ geht der gegenwärtige Ausdruck in den der Gleichung (C) über.

III. Um daher alles vorhergehende zur bequemeren Ueber-
 sicht zusammen zu fassen, werden wir unsere Aufgabe so
 ausdrücken.

Ein m jähriges Mitglied entrichtet bei seinem Eintritte
 das Antrittsgeld α und überdieß während der ersten a Jahre,
 im Anfange eines jeden dieser Jahre, den jährlichen Beitrag β .

Dafür soll die Casse bei dem Tode dieses Mitgliedes an eine von ihm bestimmte, jetzt n -jährige Person, die Summe γ als Capital entrichten, vorausgesetzt, daß das Mitglied nicht schon vor dem b -ten Jahre nach seinem Eintritte sterbe, in welchem Falle nämlich der Vertrag erlöschen und die Casse nichts zu entrichten haben soll.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist in der folgenden Gleichung enthalten.

$$\alpha + \beta \left[1 + I_n^m - \frac{A_{m+a-1} A_{n+a-1}}{r^{a-1} A_m A_n} \cdot I_{n+a-1}^{m+a-1} \right] \\ = \frac{\gamma \cdot A_{n+b}}{r^b A_m A_n} \cdot \left[A_{m+b-1} I_{n+b}^{m+b-1} - A_{m+b} I_{n+b}^{m+b} \right].$$

Werden die jährlichen Beiträge bis an den Tod des Mitgliedes m entrichtet, so fällt das letzte Glied des Factors von β weg, und werden keine Probejahre eingeführt, sondern erfolgen die Zahlungen der Casse ohne Ausnahme bei dem Tode des Mitgliedes, so ist in dem letzten Theile dieses Ausdruckes die Größe b gleich Null und daher dieses letzte Glied, wie in der Gleichung (C), gleich

$$\frac{\gamma}{A_m} (A_{m-1} \cdot I_n^{m-1} - A_m \cdot I_n^m).$$

Ex. I. Wenn kein Antrittsgeld und keine Probejahre statt haben, und die jährlichen Beiträge bis an den Tod des Mitgliedes m gehen, so hat man für nachträgliche Zahlungen dieser Beiträge, nach der Gleichung (C),

$$\beta = \gamma \left[\frac{A_{m-1}}{A_m} \cdot \frac{I_n^{m-1}}{I_n^m} - 1 \right]$$

$m = 20$ und $n = 30$ gibt nach Taf. VIII für $r = 1.04$ $A_m = 481$, $A_{m-1} = 495$, $I_n^m = 12.67$, $I_n^{m-1} = 12.74$; also auch, wenn wieder $\gamma = 100$ ist, $\beta = 1.37$.

Eben so gibt $m = 30$ und $n = 20$. . $\beta = 2.25$
 $m = 60$. . $n = 20$. . $\beta = 7.22$
 $m = 20$. . $n = 60$. . $\beta = 1.10$

Die Tafel XVI enthält diese Beiträge, wie sie von der Union Society in London für $\gamma = 100$ gefordert werden, so wie auch die nach der Baumann-Süßmisch'schen Tafel berechneten Beiträge.

Ex. II. Haben keine Beiträge, sondern nur Antrittsgelder statt, und werden keine weitere Bedingungen aufgestellt, so gibt die Gleichung (C)

$$\alpha = \gamma \left[\frac{A_{m-1}}{A_m} \cdot I_n^{m-1} - I_n^m \right]$$

$m = 20 \cdot n = 30$ gibt für $r = 1.04$ und $\gamma = 100 \dots \alpha = 17.36$

$m = 30 \cdot n = 20 \dots \alpha = 28.51$

$m = 60 \cdot n = 20 \dots \alpha = 55.25$

$m = 20 \cdot n = 60 \dots \alpha = 8.42$

Gegenseitige Erbactie.

§. 27. In der vorhergehenden Aufgabe (§. 25) sicherte das m jährige Mitglied durch seine Zahlungen einer bestimmten n jährigen Person die bei dem Tode des Mitgliedes zu zahlende Erbactie γ zu. Wenn daher diese n jährige Person noch vor dem Mitgliede stirbt, so hört der Vertrag, so wie die Zahlung des Mitgliedes, auf und die Casse hat nichts zu entrichten.

Wenn aber zwei Personen, deren die eine m und die andere n Jahre alt ist, auf die Bedingung in die Gesellschaft treten, daß sie der Casse das Antrittsgeld α und, so lange beide Personen zusammen leben, den jährlichen Beitrag β geben, und dafür verlangen, daß die Casse, bei dem Tode der einen dieser zwei Personen (gleichviel welcher von beiden), der anderen die Summe γ als Capital entrichte, so wird die Auflösung dieser Aufgabe durch folgende Betrachtungen erhalten werden.

Die Einnahmen, welche die Casse von diesem Paare erhält, verhalten sich ganz, wie in den vorhergehenden Problem (§. 25). Man hat daher für den auf die Zeit des Eintrittes dieses Paares reducirten Werth aller Einnahmen der Casse

$$\alpha + \beta I_n^m$$

oder wenn die Beiträge β immer im Anfange jedes Jahres entrichtet werden

$$\alpha + \beta (1 + I_n^m)$$

Um nun eben so den Werth der Ausgaben der Casse zu bestimmen, so hat man, wenn eine Anzahl N solcher Paare, deren Alter m und n ist, eingetreten sind,

Um Ende des vollständige Paare, in welchen
beide Personen noch leben
ersten Jahres . $N \cdot \frac{A_{m+1} A_{n+1}}{A_m A_n} = N'$

zweiten Jahres $N \cdot \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{A_m A_n} = N''$

dritten Jahres $N \cdot \frac{A_{m+3} A_{n+3}}{A_m A_n} = N'''$ u. s. w.

Solcher Paare aber, in welchen nur eine der beiden Personen, gleichviel welche, noch lebt, die andere aber schon todt ist, entstehen im

ersten Jahre . $\left[\frac{A_{m+1}}{A_m} \left(1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}\right) + \frac{A_{n+1}}{A_n} \left(1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}\right) \right] N$

zweiten Jahre $\left[\frac{A_{m+2}}{A_{m+1}} \left(1 - \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}\right) + \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} \left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\right) \right] N'$

dritten Jahre $\left[\frac{A_{m+3}}{A_{m+2}} \left(1 - \frac{A_{n+3}}{A_{n+2}}\right) + \frac{A_{n+3}}{A_{n+2}} \left(1 - \frac{A_{m+3}}{A_{m+2}}\right) \right] N''$

Substituirt man in diesen Ausdrücken die vorhergehenden Werthe von N' , N'' , N''' , und dividirt sie nach der Ordnung durch N , N' , N'' , so erhält man

$$\frac{A_{m+1} A_n + A_{n+1} A_m - 2 A_{m+1} A_{n+1}}{r A_m A_n}$$

$$\frac{A_{m+2} A_{n+1} + A_{n+2} A_{m+1} - 2 A_{m+2} A_{n+2}}{r^2 A_m A_n}$$

$$\frac{A_{m+3} A_{n+2} + A_{n+3} A_{m+2} - 2 A_{m+3} A_{n+3}}{r^3 A_m A_n} \text{ u. s. w.}$$

Addirt man alle diese Glieder, so erhält man für den auf den Anfang reducirten Werth aller Ausgaben der Casse für dieses Paar

$$\gamma \left[\frac{A_{m-1}}{A_m} I_n^{m-1} + \frac{A_{n-1}}{A_n} I_{n-1}^m - 2 I_n^m \right]$$

so daß man daher für die Auflösung dieser Aufgabe hat

$$\alpha + \beta \cdot I_n^m = \gamma \left[\frac{A_{m-1}}{A_m} I_n^{m-1} + \frac{A_{n-1}}{A_n} I_m^{n-1} - 2 I_n^m \right]$$

Ex. Ist $m = 20$, $n = 30$, $\gamma = 100$, $r = 1.04$ und $\alpha = 0$, so ist

$$A_{m-1} = 495 \quad A_{n-1} = 445 \quad I_n^{m-1} = 12.74$$

$$A_m = 491 \quad A_n = 439 \quad I_m^{n-1} = 12.78$$

$$I_n^m = 12.67$$

also $12.67 \beta = 0.46 \gamma$ oder $\beta = 3.64$.

Ist aber für dasselbe Paar $\beta = 0$, so ist $\alpha = 0.46 \gamma = 46$.

Die Tafel XVII enthält die Werthe der jährlichen Beiträge, wenn kein Antrittsgeld entrichtet wird, für eine gegenseitige Erbactie von 100 Gulden, nach der Einrichtung der Union Society in London.

Daß sich übrigens auch hier temporäre jährliche Beiträge, die bloß während der a ersten Jahre entrichtet werden, so wie b Probejahre einführen lassen, ist für sich klar, und kann hier, Wiederholungen zu vermeiden, übergangen werden.

§. 28. Wir wollen nun auch die Renten oder die lebenslänglichen Zahlungen zu bestimmen suchen, welche dem eingegangenen Vertrage zu Folge einer oder auch beiden Personen eines eintretenden Paares von der Casse zu entrichten sind.

Gegenseitige Erbrente.

Zwei Personen des Alters m und n geben zusammen das Antrittsgeld α und, so lange sie beisammen leben, den jährlichen Beitrag β . Dafür soll die Casse bei dem Tode der einen dieser beiden Personen, gleichviel welcher, der andern bis an ihren Tod jährlich die Rente γ entrichten.

Die Einnahme der Casse von diesem Paare ist, wie §. 25,

gleich $\alpha + \beta \cdot I_n^m$, oder wenn die Beiträge, wie gewöhnlich, im Anfange jedes Jahres bezahlt werden, $\alpha + \beta (1 + I_n^m)$.

Wenn eine von diesen beiden Personen stirbt, so werden keine jährliche Beiträge mehr entrichtet.

Von einer Anzahl N solcher Paare, in welchen die eine Person bei ihrem Eintritte m und die andere n Jahre alt ist, entstehen aber (nach S. 68) solche Paare,

wo m schon todt ist und n noch lebt wo n schon todt ist und m noch lebt

im ersten Jahre $\frac{A_{n+1}}{A_n} (1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}) N \dots \frac{A_{m+1}}{A_m} (1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}) N$

im zweiten Jahre $\frac{A_{n+2}}{A_n} (1 - \frac{A_{m+2}}{A_m}) N \dots \frac{A_{m+2}}{A_m} (1 - \frac{A_{n+2}}{A_n}) N$

u. s. w. und da eben von diesen Paaren die überlebende Person die Rente γ bis an ihren Tod erhalten soll, so ist der anfängliche Werth aller Ausgaben der Cassé für jedes einzelne dieser Paare

$$\gamma \cdot \frac{A_{n+1}}{r A_n} (1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}) + \gamma \cdot \frac{A_{n+2}}{r^2 A_n} (1 - \frac{A_{m+2}}{A_m}) +$$

$$\gamma \cdot \frac{A_{m+1}}{r A_m} (1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}) + \gamma \cdot \frac{A_{m+2}}{r^2 A_m} (1 - \frac{A_{n+2}}{A_n}) +$$

oder mit Hülfe unserer Abkürzungen (§. 18)

$$\gamma \cdot \left[\frac{E_{m+1}}{D_m} + \frac{E_{n+1}}{E_n} - 2 \cdot I_n^m \right],$$

so daß man daher hat

$$\alpha + \beta \cdot I_n^m = \gamma \cdot \left[\frac{E_{m+1}}{D_m} + \frac{E_{n+1}}{D_n} - 2 \cdot I_n^m \right].$$

Ex. $m = 20$, $n = 30$, $r = 1.04$, $\gamma = 100$ gibt

$$\frac{E_{m+1}}{D_m} = 16.790, \frac{E_{n+1}}{D_n} = 15085, I_n^m = 12670 \text{ also}$$

ist, wenn keine jährliche Beiträge bezahlt werden, das Eintrittsgeld

$$\alpha = \gamma (16.790 + 15.085 - 25.340) = 100 (6.535) = 653.5.$$

Eben so gibt $m = 20$ und $n = 60$

$$\alpha = \gamma (16.79 + 8.34 - 15.30) = 983.0.$$

Die Tafel XVIII enthält diese Werthe von α für $\gamma = 100$ und $\beta = 0$. Dividirt man diese Zahlen durch die Größe I_n^m der Tafel VIII, so erhält man den jährlichen Beitrag, welchen das Paar während seines Zusammenlebens, ohne Antrittsgeld, zu entrichten hat, um dem Ueberlebenden jene Rente von 100 fl. zu versichern, die er jährlich bis an seinen Tod bezieht.

Eherenten.

§. 29. Zwei Personen, von welchen die eine m und die andere n Jahre alt ist, geben das Antrittsgeld α und den jährlichen Beitrag β , und verlangen dafür, so lange sie beisammen leben, von der Casse die jährliche Rente γ . Wenn eines dieser beiden Mitglieder stirbt, so hört die Zahlung der Casse auf.

Man nennt diese Rente eine Eherente oder überhaupt eine Verbindungsrente, weil die Zahlung nur eben so lange, als die Verbindung selbst, währt.

Nach dem Vorhergehenden ist der anfängliche Werth der Einnahme der Casse von diesem Paare

$$\alpha + \beta \cdot I_n^m$$

und da von N solchen Paaren am Ende des ersten Jahres noch $N \cdot \frac{A_{m+1} A_{n+1}}{A_m A_n}$, am Ende des zweiten Jahres noch $N \cdot \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{A_m A_n}$ u. s. f. solche Paare übrig sind, in welchen beide Theile noch leben, so ist die anfängliche Ausgabe der Casse für eines dieser Paare gleich

$$\frac{1}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3} A_{n+3}}{r^3} + \dots \right)$$

oder kurz, gleich I_n^m . Wir haben daher

$$\alpha + \beta \cdot I_n^m = \gamma \cdot I_n^m$$

oder wenn, nach der Natur der Aufgabe, keine Beiträge, sondern bloß das Eintrittsgeld α entrichtet wird

$$\alpha = \gamma \cdot I_n^m$$

so daß also I_n^m der anfängliche Werth einer Cherente (vergleiche §. 17 zu Ende) ist, die jährlich mit einem Gulden und zwar so lange bezahlt wird, als die Ehe oder überhaupt die Verbindung dauert. Die drei Tafeln VII, VIII und IX enthalten die Werthe dieser Cherente für $r = 1.04, 1.05$ und 1.06 .

I. Werden b Probejahre eingeführt, so daß das verbundene Paar die Rente γ erst in dem b ten Jahre nach ihrem Eintritte fordert, von welchem Jahre dann die Rente bis zu der Trennung der Verbindung durch den Tod der einen der beiden Personen dauern soll, so hat man

$$\alpha = \gamma \cdot \frac{A_{m+b} A_{n+b}}{A_m A_n} \cdot I_{n+b}^{m+b}$$

Ex. Ist $m = 50, n = 30, r = 1.04$ und $\gamma = 100$, so hat man, ohne Probejahre,

$$\alpha = 100 (9.22) = 922;$$

und wenn 10 Probejahre angenommen werden

$$\alpha = 100 \cdot \frac{210}{300} \cdot \frac{374}{439} (7.06) = 421.1 \text{ u. s. w.}$$

Gegenseitige Lebensrente.

§. 30. Zwei Personen des Alters m und n geben das Eintrittsgeld α und überdies, so lange sie beisammen leben, den jährlichen Beitrag β . Dafür soll die Cassé ihnen jährlich die Rente γ und zwar so lange entrichten, bis beide todt sind, also erstens so lange sie zusammen leben und dann auch, wenn der eine schon todt ist, noch dem Ueberlebenden bis an den Tod dieses Letzten.

Die Einnahme der Cassé von diesem Paare ist, wie zuvor, gleich $\alpha + \beta \cdot I_n^m$.

Da nun (nach S. 68) die Wahrscheinlichkeit, daß nach t Jahren seit dem Eintritte dieses Paares noch nicht alle beide Theile todt sind, oder da die Wahrscheinlichkeit, daß in t Jahren wenigstens einer, und vielleicht auch beide noch leben, gleich ist

$$\frac{A_{m+t}}{A_m} + \frac{A_{n+t}}{A_n} - \frac{A_{m+t} A_{n+t}}{A_m A_n}$$

so erhält man für den anfänglichen Werth der Ausgaben der

$$\text{Casse } \frac{1}{A_m} \left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} + \dots \right)$$

$$+ \frac{1}{A_n} \left(\frac{A_{n+1}}{r} + \frac{A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{n+3}}{r^3} + \dots \right)$$

$$- \frac{1}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \dots \right)$$

oder nach unserer Bezeichnung

$$\frac{E_{m+1}}{D_m} + \frac{E_{n+1}}{D_n} - I_n^m$$

so daß man also hat

$$\alpha + \beta \cdot I_n^m = \gamma \left[\frac{E_{m+1}}{D_m} + \frac{E_{n+1}}{D_n} - I_n^m \right].$$

Ex. $m = 20$, $n = 30$, $r = 1.04$ und $\gamma = 100$ gibt, wenn keine Beiträge entrichtet werden,

$$\alpha = \gamma (16.790 + 15.085 - 12.671) = 1920.4$$

Eben so gibt $m = 20$ und $n = 60$

$$\alpha = \gamma (16.790 + 8.342 - 7.652) = 1748.0$$

Die Tafel XIX enthält diese Werthe von α für $r = 1.04$ und $\gamma = 100$.

Erbrenten für eine bestimmte Person oder Witwenrenten.

§. 31. Ein Mitglied in dem Alter von m Jahren entrichtet das Antrittsgeld α und den jährlichen Beitrag β bis an das Ende seines Lebens. Dafür soll die Casse einer von ihm bezeichneten, jetzt n jährigen Person, z. B. seiner Witwe, von dem Tode des Mitgliedes bis zu dem der Witwe, die jährliche Rente γ entrichten.

Die Einnahmen der Casse, auf die Zeit des Eintritts des Mitgliedes reducirt, sind, wie zuvor,

$$\alpha + \beta \cdot I_n^m$$

weil das Mitglied den jährlichen Beitrag nur so lange entrichten wird, als beide Personen zusammen leben, da, wenn die n-jährige, hier die Frau, eher sterben sollte, als der Mann, der Grund aller weiteren Zahlungen wegfällt. Werden die Beiträge im Anfange jedes Jahres gezahlt, so ist der letzte Ausdruck

$$\alpha + \beta (1 + I_n^m).$$

Da die Wahrscheinlichkeit, das nach t Jahren die n-jährige Person (die Witwe) noch lebe, die m-jährige aber schon todt sei, gleich ist (S. 68) $\frac{A_{n+t}}{A_n} (1 - \frac{A_{m+t}}{A_m})$

so hat man für den anfänglichen Werth der Ausgaben der Casse an dieses Paar

$$\frac{\gamma}{A_n} \left(\frac{A_{n+1}}{r} + \frac{A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{n+3}}{r^3} + \dots \right) - \frac{\gamma}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3} A_{n+3}}{r^3} + \dots \right)$$

das heißt, mit unseren Abkürzungen,

$$\gamma \cdot \left(\frac{E_{n+1}}{D_n} - I_n^m \right)$$

so daß man daher zur Auflösung dieser Aufgabe hat

$$\alpha + \beta \cdot I_n^m = \gamma \cdot \left(\frac{E_{n+1}}{D_n} - I_n^m \right) \dots (A).$$

I. Diese Gleichung gibt also das Antrittsgeld α und den jährlichen Beitrag β , welcher letzte von dem Manne während der Dauer seiner Ehe entrichtet wird, um dadurch seiner Witwe eine jährliche Rente oder die Witwenpension γ zu begründen, die von seinem Tode bis an den der Witwe dauert.

Man bemerke, daß die Größe $\frac{E_{n+1}}{D_n}$ der Werth einer Lebensrente von einem Gulden (S. 21. 1) und die Größe von I_n^m der Werth einer Eherente von einem Gulden ist (S. 29).

Ex. Sei das Alter des Mannes $m=40$ und das der Frau $n=30$ bei ihrem Eintritte, so hat man für $r=1.04$

$$I_n^m \doteq 10.78, E_{n+1} = 2041.71 \text{ und } D_n = 135.35$$

also auch $\alpha + 10.78 \beta = 4.305 \gamma \dots (I)$

Ist also $\gamma = 100$ und $\beta = 0$, so ist $\alpha = 430.5$;

ist aber $\gamma = 100$ und $\alpha = 0$, so ist

$$\beta = \frac{430.5}{10.78} = 39.9 \text{ oder wenn die jährlichen Beiträge}$$

schon im Anfange des Jahres bezahlt werden,

$$\beta = \frac{430.5}{11.78} = 36.55.$$

Dadurch sind also auch die Werthe von α und β für jede andere Rente gegeben. Ist z. B. die Witwenrente $\gamma = 50$, so ist auch in dem vorigen Beispiele

$$\alpha = 215.25 \text{ für } \beta = 0 \text{ und}$$

$$\beta = 19.95 \text{ für } \alpha = 0$$

Wäre die Rente $\gamma = 50$ und zugleich das Antrittsgeld $\alpha = 100$ gegeben, so ist die Gleichung (I)

$$100 + 10.78 \beta = 215.25 \text{ oder } \beta = 10.69$$

Wäre endlich die Rente $\gamma = 50$ und der jährliche Beitrag $\beta = 10$ gegeben, so ist die Gleichung (I)

$$\alpha + 107.8 = 215.25$$

oder dann ist das Antrittsgeld $\alpha = 107.45$ u. s. w.

Die Tafeln XX, XXI und XXII enthalten in der ersten Zeile das Antrittsgeld für $\beta=0$, und in der zweiten den jährlichen Beitrag für $\alpha=0$, für eine Witwenrente von $\gamma=100$ und für den Zinsfuß von $r=1.03, 1.04$ und 1.05 .

II. Tritt man in eine solche Gesellschaft bloß durch das Antrittsgeld a , ohne jährliche Beiträge ein, so ist, wenn α die entsprechende Zahl der Tafel ist, die durch a begründete Witwenpension $x = 100 \frac{a}{\alpha}$, weil $\alpha : 100 = a : x$ ist.

Tritt man aber bloß durch den jährlichen Beitrag b , ohne Antrittsgeld ein, so ist, wenn β die entsprechende Zahl der

Tafel bezeichnet, die durch b begründete Witwenpension

$$x' = 100 \frac{b}{\beta}, \text{ weil } \beta : 100 = b : x' \text{ ist.}$$

Tritt man daher mit dem Eintrittsgelde a und mit dem jährlichen Beitrag b zugleich ein, so ist die dadurch begründete Witwenpension

$$P = x + x' \text{ oder es ist}$$

$$P = 100 \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right).$$

Ex. Ist das Alter des Mannes $m = 40$ und der Frau $n = 25$, ihr Eintrittsgeld $a = 100$ Gulden, und ihr jährlicher Beitrag $b = 20$ Gulden, so hat man, da für $r = 1.05$ die Tafel XXII gibt $\alpha = 390.1$ und $\beta = 35.82$

$$\frac{a}{\alpha} = 0.256 \text{ und } \frac{b}{\beta} = 0.559 \text{ also } P = 81.5.$$

Wäre umgekehrt die Pension P und das Eintrittsgeld a gegeben, so ist der entsprechende jährliche Beitrag

$$b = \beta \left(\frac{P}{100} - \frac{a}{\alpha} \right). \text{ (Vergl. S. 10.)}$$

Ex. Sei $m = 30$, $n = 15$ und $a = P = 1000$ Gulden, so ist nach der Tafel XXII $\alpha = 355.3$ und $\beta = 28.53$

$$\text{also } b = 28.53 \left(10 - \frac{1000}{355.3} \right) = 204.84$$

und so fort in allen ähnlichen Fällen, wo man immer mit Hilfe der erwähnten Tafeln, wenn man von den drei Größen a , b und P zwei kennt, die dritte aus der Gleichung findet

$$P = 100 \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right)$$

wo α und β die beiden, dem gegebenen Paare entsprechende Zahlen der Tafel sind.

III. Man muß noch bemerken, daß die zweiten Zahlen der Tafeln XXI und XXII eigentlich nach der Gleichung

$$\beta' = \frac{\alpha}{1 + \frac{m}{n} + 0.75}$$

berechnet wurden, wo α die erste Zahl dieser Tafeln bezeichnet. So findet man z. B. in der Tafel XXII für $m = 60$ und $n = 40$

die erste Zahl $\alpha = 520.3$ und da die Tafel IX gibt $I_n^m = 6.63$,
 so ist $\beta' = \frac{520.3}{6.63 + 0.75} = \frac{520.3}{7.38} = 70.5$, wie in der Tafel. Sucht
 man aber den wahren, im Anfange jedes Jahres zu zahlenden
 jährlichen Beitrag β , so ist $\beta = \frac{\alpha}{I_n^m + 1}$

Um daher diesen Werth von β aus der Zahl β' der Tafel zu
 finden, hat man

$$\beta = \frac{\alpha}{I_n^m + 0.75 + 0.25} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\beta'} + 0.25} = \frac{\alpha \beta'}{\alpha + 0.25 \beta'} \text{ oder}$$

$$\beta = \beta' - \frac{\beta'^2}{4\alpha}$$

So ist für unser Beispiel $\beta' = 70.5$ also

$$\beta = 70.5 - \frac{4970.25}{4(520.3)} = 70.5 - 2.39 = 68.11$$

§. 32. Sollen die jährlichen Beiträge nicht, wie in §. 31
 vorausgesetzt wurde, bis an das Ende des Lebens der Person m ,
 sondern nur durch die ersten a Jahre nach dem Eintritte dauern,
 so hat man für diese Einnahme der Casse

$$\frac{\beta}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \dots \text{bis } \frac{A_{m+a} A_{n+a}}{r^a} \right)$$

Dieser geschlossene Ausdruck ist gleich der Differenz der beiden
 endlosen Reihen

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \dots \right) \\ & - \frac{\beta}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+1+a} A_{n+1+a}}{r^{a+1}} + \frac{A_{m+2+a} A_{n+2+a}}{r^{a+2}} + \dots \right) \end{aligned}$$

das heißt, nach unserer Bezeichnung

$$\beta \cdot \frac{I_n^m}{r^a A_m A_n} - \frac{\beta A_{m+a} A_{n+a}}{r^a A_m A_n} \cdot \frac{I_{n+a}^{m+a}}$$

so, daß daher die Gleichung (A) des §. 31 in folgende übergeht

$$\alpha + \beta \left(\frac{I_n^m}{r^a A_m A_n} - \frac{A_{m+a} A_{n+a}}{r^a A_m A_n} \cdot \frac{I_{n+a}^{m+a}}{I_n^m} \right) = \gamma \left(\frac{E_{n+1}}{D_n} - \frac{I_n^m}{I_n^m} \right).$$

I. Werden auch diese Beiträge immer im Anfange der er-

sten a Jahre entrichtet, so hat man für diese Einnahme der Casse

$$\beta + \frac{\beta}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \dots \text{bis } \frac{A_{m+a-1} A_{n+a-1}}{r^{a-1}} \right)$$

also auch, wenn man wie zuvor verfährt

$$\alpha + \beta \left[1 + I_n^m - \frac{A_{m+a-1} A_{n+a-1}}{r^{a-1} A_m A_n} I_{n+a-1}^{m+a-1} \right] = \gamma \left[\frac{E_{n+1}}{D_n} - I_n^m \right]$$

II. Diese Ausdrücke wird man auch anwenden, wenn ein Mitglied, durch unverschuldete Unglücksfälle gezwungen, seine jährlichen Beiträge nicht mehr entrichten kann. Manche Institute pflegen solche Mitglieder ganz auszuschließen, was in vielen Fällen ungerecht seyn kann. Da man nämlich zu der Zeit, wo das Mitglied seine Zahlungsunfähigkeit erklärt, weiß, was es an Antrittsgeld und an jährlichen Beiträgen bisher bezahlt hat, so kennt man die Größen α und β nebst der Anzahl a der Jahre, die das Mitglied in dem Institute zugebracht hat, und man wird daher durch die letzte Gleichung die Pension γ bestimmen, welche bei dem Tode des Mitgliedes die Witwe desselben erhalten soll.

III. Kann ein solches Mitglied nach dem a ten Jahre künftighen wenigstens noch den kleinern jährlichen Beitrag β' bis an das Ende seines Lebens entrichten, so wird es dadurch seiner Witwe, nebst der in II bestimmten Pension γ , noch eine zweite Pension γ' kaufen, die bloß durch diese kleineren künftigen Beiträge β' entsteht. Da aber jetzt das Alter der beiden Personen $m+a$ und $n+a$ Jahre ist, so findet man diese Pension γ' (nach §. 31) durch die Gleichung

$$\beta' \cdot I_{n+a}^{m+a} = \gamma' \cdot \left[\frac{E_{n+a+1}}{D_{n+a}} - I_{n+a}^{m+a} \right]$$

und die Pension, welche die Witwe eines solchen Mitgliedes ansprechen kann, wird gleich $\gamma + \gamma'$ seyn, wo γ durch die Gleichung des Nr. I bestimmt wird.

§. 33. Werden auch hier b Probejahre eingeführt, so daß, wenn das zahlende Mitglied des Alters m , oder wenn der Mann, noch vor dem Ende der ersten b Jahre nach seinem Eintritte stirbt, die Casse nichts entrichtet, so hat man für die auf den Anfang reducirten Ausgaben der Casse

$$\frac{\gamma}{A_n} \left(\frac{A_{n+b+1}}{r} + \frac{A_{n+b+2}}{r^2} + \dots \right) \\ - \frac{\gamma}{A_m A_n} \left(\frac{A_{m+b+1} A_{n+b+1}}{r} + \frac{A_{m+b+2} A_{n+b+2}}{r^2} + \dots \right)$$

oder nach unserer Bezeichnung,

$$\gamma \cdot \frac{r^b}{D_n} \cdot E_{n+b+1} - \gamma \cdot \frac{A_{m+b} A_{n+b}}{A_m A_n} \cdot I_{n+b}^{m+b}$$

so daß daher die Gleichung (A) des §. 31 in folgende übergeht

$$\alpha + \beta \cdot I_n^m = \gamma \left[r^b \frac{E_{n+b+1}}{D_n} - \frac{A_{m+b} A_{n+b}}{A_m A_n} \cdot I_{n+b}^{m+b} \right].$$

§. 34. Bisher ist auf die Auslagen, welche die Casse durch ihre Geschäftsführung, Beamtenbesoldung u. dgl. haben kann, keine Rücksicht genommen worden. Sei nun δ diese jährliche Auslage, welche die Casse für jedes einzelne Paar hat. Diese Auslage wird im Allgemeinen dieselbe bleiben, für ein vollständiges Paar, in welchem beide Personen noch leben, und für ein solches, in welchem der Mann schon todt ist und nur die Witwe noch lebt, oder diese Auslage wird bis an das völlige Absterben des Paares dauern.

Ist aber N die Anzahl der Paare, in welchen der Mann bei seinem Eintritte das Alter von m , und die Frau das Alter von n Jahren hatte, so ist (§. 68) nach t Jahren die Anzahl aller ganzen Ehen $\frac{A_{m+t} A_{n+t}}{A_m A_n} \cdot N$

und die Anzahl aller derjenigen Paare, in welchen der Mann schon todt ist, die Frau aber noch lebt, $\frac{A_{n+t}}{A_n} \left(1 - \frac{A_{m+t}}{A_m} \right) \cdot N$

und daher ist Beider Summe, oder die Anzahl aller ganzen Ehen und aller Witwen $\frac{A_{n+t}}{A_n} \cdot N$, woraus folgt, daß die auf den

Anfang reducirte Auslage der Casse für jedes dieser Paare ist:

Am Ende des

ersten Jahres $\delta \cdot \frac{A_{n+1}}{r A_n}$

zweiten Jahres $\delta \cdot \frac{A_{n+2}}{r^2 A_n}$

dritten Jahres $\delta \cdot \frac{A_{n+3}}{r^3 A_n}$ u. s. w.

und die Summe aller dieser Auslagen ist

$$\frac{\delta}{A_n} \left(\frac{A_{n+1}}{r} + \frac{A_{n+2}}{r^2} + \frac{A_{n+3}}{r^3} + \dots \right) = \frac{\delta}{D_n} \cdot E_{n+1}$$

so daß daher die Gleichung (A) des §. 31 wird

$$\alpha + \beta \cdot I_n^m = \gamma \left(\frac{E_{n+1}}{D_n} - I_n^m \right) + \delta \cdot \frac{E_{n+1}}{D_n} \text{ oder}$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) I_n^m = (\gamma + \delta) \cdot \frac{E_{n+1}}{D_n}.$$

§. 35. Um endlich alle vorhergehenden Fälle in einer einzigen Aufgabe zusammenzufassen, sei m das Alter des eintretenden Mannes und n das seiner Frau, α des Eintrittsgeld und β der jährliche Beitrag, welchen der Mann durch die ersten a Jahre, im Anfange eines jeden dieser Jahre, entrichtet. Ferner sei γ die jährliche Rente oder die Witwenpension, welche die Casse bei dem Tode des Mannes jener ihn überlebenden Frau und zwar am Ende jedes Jahres, jährlich bis an ihren Tod entrichtet, mit der Bedingung, daß diese Verbindlichkeit der Casse wegfällt oder daß sie der Witwe keine Pension auszahlt, wenn der Mann nicht bis wenigstens zu Ende des b ten Jahres nach seinem Eintritte gelebt hat. Endlich sei δ die jährliche Auslage, welche die Casse wegen ihrer Geschäftsführung für dieses Paar bis an das gänzliche Aussterben desselben zu tragen hat.

Dieses vorausgesetzt, wird die Abhängigkeit der vier Größen α , β , γ und δ durch folgende Gleichung bestimmt

$$\alpha + \beta \left[1 + I_n^m - \frac{A_{m+a-1} A_{n+a-1}}{r^{a-1} A_m A_n} \cdot I_{n+a-1}^{m+a-1} \right] \\ = \gamma \left[r^b \cdot \frac{E_{n+b+1}}{D_n} - \frac{A_{m+b} A_{n+b}}{A_m A_n} \cdot I_{n+b}^{m+b} \right] + \delta \cdot \frac{E_{n+1}}{D_n}.$$

Werden die jährlichen Beiträge durch a Jahren, aber erst am Ende jedes Jahres bezahlt, so ist das zweite Glied dieser

$$\text{Gleichung } \beta \left[I_n^m - \frac{A_{m+a} A_{n+a}}{r^a A_m A_n} \cdot I_{n+a}^{m+a} \right].$$

Werden diese jährlichen Beiträge bis an den Tod des Mannes bezahlt, so ist das zweite Glied

$$\beta \cdot I_n^m \quad . \quad \text{wenn sie am Ende jedes Jahres, und}$$

$\beta \cdot (1 + I_n^m)$. . wenn sie am Anfang jedes Jahres entrichtet werden.

Werden keine Probejahre eingeführt, sondern ist die Pension bei dem Tode des Mannes immer zahlbar, so ist $b = 0$ und daher das dritte Glied der obigen Gleichung

$$\gamma \left[r \frac{E_{n+1}}{D_n} - I_n^m \right].$$

I. Soll die Pension γ , die nach der bisherigen Voraussetzung, von dem Tode des Mannes bis an den der Witwe, am Ende eines jeden ganzen Jahres ausgezahlt wird, alle $\frac{1}{n}$ tel Jahren ausgezahlt werden, so wird man (nach S. 39) in der vorhergehender Gleichung statt γ die GröÙe $\gamma \frac{(1-r^{\frac{1}{n}})}{1-r}$

oder annähernd . . $\frac{\gamma}{n} - \gamma \frac{(n-1)}{2n^2} \cdot (r-1)$ setzen,

oder, wenn man die Pension γ ungeändert läßt, so wird man dafür den jährlichen Beitrag β etwas vermehren und ihn gleich $\beta' = \frac{\beta(r-1)}{n(r^{\frac{1}{n}}-1)}$ setzen oder nahe $\beta' = \beta + \beta \frac{(n-1)(r-1)}{2n}$.

Sollen aber die Beiträge, statt wie bisher, alle im Anfange oder am Ende eines jeden ganzen Jahres, alle $\frac{1}{n}$ tel Jahre entrichtet werden, so wird man in der vorhergehender Gleichung eben so

statt β die GröÙe . . $\beta \frac{(1-r^{\frac{1}{n}})}{1-r}$

oder annäherd . . $\frac{\beta}{n} - \beta \frac{(n-1)}{2n^2} (r-1)$ setzen,

Für $n=2$ ist z. B. der halbjährige Beitrag, wenn β den ganzjährigen bezeichnet

$$\frac{\beta}{4} - \beta \frac{(r-1)}{8} = \frac{\beta}{2} - 0.00625 \beta \text{ für } r = 1.05 \text{ und}$$

eben so ist für $n=4$ der vierteljährige Beitrag

$$\frac{\beta}{2} - \frac{3\beta(r-1)}{32} = \frac{\beta}{4} - 0.0047 \beta.$$