

## Drey und dreyßigstes Capitel.

### Statische Bestimmung der Oberfläche und des Volums der Rotationskörper.

§. 267. (Allgemeine Ausdrücke für diese Bestimmung.) Wir wollen nun annehmen, daß die krumme Linie, durch deren Rotation um die Axe der  $x$  eine Fläche erzeugt werden soll, um irgend einen *innern* Punct derselben, nach allen Richtungen von diesem Puncte aus, symmetrisch gebaut ist, so daß einem *jeden* Elemente der Curve auf der einen Seite dieses Punctes ein eben so weit von diesem Puncte entferntes zweytes Element auf der anderen entgegengesetzten Seite dieses Punctes entspreche, zwischen welchen beyden Elementen daher dieser Punct in der Mitte liegen wird. Da dasselbe, des vorausgesetzten symmetrischen Baues dieser Curve gemäß, von jedem correspondirenden Elementenpaare der Curve, in Beziehung auf denselben inneren Punct, gelten soll, so wird dieser Punct als der *Mittelpunct* der ganzen Curve zu betrachten seyn, wie dieß z. B. in dem Kreise, in der Ellipse, in der Astrois u. f. der Fall ist.

Sey  $MQ'M'$  (Fig. 105) eine solche symmetrische Curve, und  $C$  ihr Mittelpunct, so wie  $MC'M'$  irgend eine durch diesen Mittelpunct gehende Sehne oder ein Durchmesser der Curve. Man ziehe in der Ebene dieser Curve, *aufser derselben*, die Gerade  $PAP'$  in einer willkürlichen Richtung, und nehme diese Gerade für die Axe der  $x$  an, so daß die von den Puncten  $M, C, M'$  auf diese Gerade gefällten Lothe die Ordinaten dieser Curve bezeichnen. Noch sey  $CQ$  und  $M'Q'$  mit der Abscissenaxe  $PP'$  parallel.

Da für die symmetrische Curve, der Voraussetzung gemäß, die Distanz der beyden Puncte  $M$  und  $M'$  von dem Mittelpuncte  $C$  gleich groß, oder da  $CM = CM'$  ist, so hat man auch in den beyden rechtwinkligen Dreyecken  $CMQ$  und  $CM'Q'$  die Seite

$QM = Q'C$ . Bezeichnet man daher durch  $y$  die Ordinaten  $PM$  und  $PM'$  von je zwey zusammengehörenden Puncten  $M$  und  $M'$  der Curve, und nennt man  $Y$  die Ordinate  $AC$  ihres Mittelpunctes  $C$ , so hat man

$$PM = AC + QM \text{ und } PM' = AC - Q'C,$$

also auch, wenn man diese beyden Gleichungen addirt, da  $PM = PM' = y$  und  $AC = Y$ , so wie  $QM = Q'C$  ist:

$$y = Y,$$

und daher auch, da das Element  $ds$  des Bogens in dem Puncte  $M$  dasselbe mit dem in  $M'$  ist:

$$y ds = Y ds.$$

Nimmt man aber die Summe aller dieser Ausdrücke für jedes Punctenpaar der Curve, so hat man

$$\int y ds = \int Y ds,$$

oder da  $Y = AC$  eine constante Gröfse, also auch

$$\int Y ds = Y \int ds,$$

und da überdieß  $\int ds$  oder  $s$  den Umfang der ganzen Curve bezeichnet:

$$\int Y ds = Ys,$$

oder endlich

$$\int y ds = Ys.$$

Allein nach §. 252 (Gleichung C) hat man für die Oberfläche  $\Phi$  eines jeden Rotationskörpers, wenn die Drehungsaxe zugleich die Axe der  $x$  ist, den Ausdruck

$$\Phi = 2\pi \int y ds,$$

also ist auch, wenn man in diesem Ausdrucke den erhaltenen Werth von  $\int y ds = YS$  substituirt:

$$\Phi = 2\pi \cdot YS \dots (F),$$

wo  $S$  den Umfang der ganzen Curve, und  $Y$  den senkrechten Abstand ihres Mittelpunctes von der Rotationsaxe bezeichnet.

I. Man sieht aus dieser Darstellung, daß der erhaltene Werth von  $\Phi$  immer derselbe bleibt, welche Lage auch die Curve um ihren Mittelpunct  $C$  einnimmt, wenn nur die senkrechte Distanz  $Y$  ihres Mittelpunctes von der Drehungsaxe nicht geändert wird.

II. Derselbe Schluß wird sich auch auf das Volum derjenigen Körper anwenden lassen, welche durch Rotation der Fläche einer symmetrischen Curve um irgend eine Axe entstehen. Wie nämlich, nach der Gleichung (F), die Oberfläche dieser Körper als das Product des Umfangs  $S$  der Curve in die Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser  $Y$  ist, betrachtet worden ist, so wird auch das Volum  $V$  dieser Körper durch das Product der Fläche  $F$  dieser Curve (die man nach Cap. 3o findet) in die Peripherie  $2\pi Y$  desselben Kreises dargestellt werden, so daß man demnach für das Volum dieser Körper den Ausdruck haben wird:

$$V = 2\pi \cdot YF \quad . \quad . \quad . \quad (G).$$

In der Statik oder in der Lehre von dem Gleichgewichte der Körper ist dieser Mittelpunkt unter der Benennung des *Schwerpunktes* bekannt.

Gehen wir nun zu der Anwendung der beyden allgemeinen Gleichungen (F) und (G) über, und betrachten wir zuerst einige einfache geradlinige Figuren.

§. 268. (Körper, die durch Rotation eines regelmäßigen Dreyeckes entstehen.) Ist  $a$  der Halbmesser des Kreises, der einem regelmäßigen, d. h. einem gleichseitigen Dreyecke umschrieben ist, so hat man (nach §. 121.) die Seite dieses Dreyeckes gleich  $a\sqrt{3}$ , also auch für den Umfang  $S$  und die Oberfläche  $F$  desselben

$$S = 3a\sqrt{3} \quad \text{und} \quad F = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}.$$

Nennt man daher  $Y=d$  die senkrechte Distanz des Mittelpunktes dieses Dreyeckes von seiner Rotationsaxe, so hat man für die Oberfläche  $\Phi$ , und für das Volum  $V$  des Körpers, der durch Rotation des gleichseitigen Dreyeckes um jene Axe entsteht, nach den Gleichungen (F) und (G) die Ausdrücke

$$\Phi = 6ad\pi\sqrt{3} \quad \text{und}$$

$$V = \frac{3}{2}a^2d\pi\sqrt{3}.$$

I. Dreht sich demnach das Dreyeck  $ABC$  (Fig. 106) um eine durch seinen Scheitel  $C$  mit der Basis  $AB$  parallel gehende Axe, so ist  $d=a$ , also auch

$$\Phi' = 6a^2\pi\sqrt{3} \quad \text{und} \quad V' = \frac{3}{2}a^3\pi\sqrt{3},$$

oder auch, wenn  $b = a\sqrt{3}$  die Seite des Dreyecks bezeichnet:

$$\Phi' = 2b^2\pi\sqrt{3} \quad \text{und} \quad V' = \frac{1}{3}b^3\pi.$$

II. Dreht sich aber dasselbe Dreyeck um seine Basis  $AB$ , so ist  $d = \frac{1}{3}a$ , und daher

$$\Phi'' = 3a^2\pi\sqrt{3} = b^2\pi\sqrt{3} \quad \text{und}$$

$$V'' = \frac{3}{4}a^3\pi\sqrt{3} = \frac{1}{4}b^3\pi.$$

### §. 269. (Rotation des regelmässigen Vierecks.)

Ist  $a$  der Halbmesser des dem Quadrate umschriebenen Kreises, so ist die Seite desselben  $b = a\sqrt{2}$ , der Umfang  $S = 4a\sqrt{2}$  und die Fläche  $F = 2a^2$ . Bezeichnet daher wieder, hier und in der Folge,  $d$  den senkrechten Abstand des Mittelpunctes der Figur von der Rotationsaxe, so ist

$$\Phi = 8ad\pi\sqrt{2} \quad \text{und}$$

$$V = 4a^2d\pi.$$

I. Dreht sich daher das Quadrat  $ABCD$  (Fig. 107) um eine seiner Seiten  $AB$ , so ist  $d = \frac{a}{\sqrt{2}}$ , und daher

$$\Phi' = 8a^3\pi = 4b^2\pi \quad \text{und}$$

$$V' = 2a^3\pi\sqrt{2} = b^3\pi.$$

II. Dreht sich aber dasselbe Quadrat um eine Gerade  $ab$  (Fig. 108), die durch eine Spitze  $A$  des Quadrats parallel mit der Diagonale  $BD$  geht, so hat man  $d = a$ , und daher

$$\Phi'' = 8a^2\pi\sqrt{2} = 4b^2\pi\sqrt{2} \quad \text{und}$$

$$V'' = 4a^3\pi = b^3\pi\sqrt{2}.$$

### §. 270. (Rotation des regelmässigen Fünfecks.)

Ist wieder  $a$  der Radius dieses Polygons, so ist (§. 121, III.) die Seite desselben

$$a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

und daher der Umfang des Fünfecks

$$S = 5a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

und die Fläche desselben

$$F = \frac{5a^2}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Mit diesen Werthen erhält man aus den Gleichungen (F)

und (G) für die Oberfläche und das Volum des durch Rotation dieses Polygons entstandenen Körpers:

$$\Phi = 10 a d \pi \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}},$$

$$V = \frac{5}{2} a^2 d \pi \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}.$$

I. Wird dieses Fünfeck um eine seiner Seiten gedreht, so ist

$$d = \frac{1}{4} a (1 + \sqrt{5}),$$

und daher

$$\Phi' = 5 a^2 \pi \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}},$$

$$V' = \frac{5}{4} a^3 \pi \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

II. Wird es aber um eine Gerade gedreht, die durch eine Spitze des Polygons senkrecht auf den Radius desselben geht, so ist  $d = a$ , und daher

$$\Phi'' = 10 a^2 \pi \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}},$$

$$V'' = \frac{5}{2} a^3 \pi \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Eben so erhält man für das regelmäßige Sechseck, wenn  $a$  den Radius, oder was dasselbe ist, die Seite desselben bezeichnet:

$$S = 6 a \quad \text{und} \quad F = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3},$$

und daher auch

$$\Phi = 12 a d \pi \quad \text{und} \quad V = 3 a^2 d \pi \sqrt{3}.$$

§. 271. (Rotation des Kreises.) Wenn der Kreis des Halbmessers  $a$  um eine gerade, aufer ihr liegende Linie gedreht wird, so hat man für den Umfang des Kreises

$$S = 2 a \pi,$$

und für die Fläche desselben

$$F = a^2 \pi,$$

also ist auch, wenn  $d$  den senkrechten Abstand des Mittelpunktes von jener Rotationsaxe bezeichnet:

$$\Phi = 4 a d \pi^2 \quad \text{und}$$

$$V = 2 a^2 d \pi^2.$$

Ist  $d = a$  oder wird der Kreis um eine seiner Tangenten gedreht, so hat man

$$\Phi' = 4 a^2 \pi^2 \quad \text{und}$$

$$V' = 2 a^3 \pi^2,$$

und die beyden letzten Ausdrücke geben die Complanation und

die Cubatur desjenigen Körpers, dessen Gleichung

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{a^2 - z^2} = a$$

wir bereits oben (§. 224, II. und §. 225, Ex. I.) mitgetheilt haben.

I. Eben so hat man für die Fläche  $F$  der Ellipse, deren Halbachsen  $a$  und  $b$  sind (nach §. 245.):

$$F = ab\pi.$$

Wird diese Ellipse um ihre Tangente im Endpunkte der großen Axe gedreht, so ist  $d=a$ , und daher

$$V'' = 2a^2 b \pi^2.$$

Wird sie aber um ihre Tangente im Endpunkte der kleinen Axe gedreht, so ist  $d=b$  und

$$V''' = 2ab^2 \pi^2.$$

Setzt man in den beyden letzten Ausdrücken von  $V''$  und  $V'''$  die Gröfse  $b=a$ , so erhält man

$$V' = 2a^3 \pi^2$$

für die Rotation des Kreises um seine Tangente, wie zuvor.

§. 272. (Rotation der Lemniscate.) Für diese Curve haben wir oben (§. 247.) gefunden

$$F = 2a^2,$$

wo (Fig. 89)  $AC = AB = a\sqrt{2}$  ist. Da der Mittelpunkt dieser Curve in dem Anfangspuncte  $A$  der Coordinaten liegt, so hat man, wenn die Drehungsaxe durch den Scheitel  $B$  senkrecht auf die Abscissenaxe  $BC$  geht:

$$Y = AB = a\sqrt{2}, \text{ also auch}$$

$$V = 2\pi \cdot YF = 4a^3 \pi \sqrt{2}.$$

Da ferner der größte Werth der Ordinate  $PM = P'M' = y$  zu beyden Seiten des Anfangspunctes  $A$  gleich  $\frac{1}{2}a$  ist, so hat man, wenn die Rotationsaxe  $MM'$  durch die Endpunkte  $M$  und  $M'$  dieser zwey größten Ordinaten parallel mit  $BC$  geht:

$$Y = \frac{1}{2}a, \text{ und wie zuvor } F = 2a^2,$$

also auch für den so entstehenden Rotationskörper

$$V' = 2a^3 \pi.$$

§. 273. (Rotation der Astrois.) Für diese Curve haben wir oben (§. 235. und 248.) gefunden

$$S = 6a \quad \text{und} \quad F = \frac{3a^2 \pi}{8}.$$

Ist also wieder  $d$  der senkrechte Abstand des Mittelpunctes

$A$  (Fig. 90) der Astrois von der Rotationsaxe, so ist

$$\Phi = 12 a d \pi \quad \text{und}$$

$$V = \frac{3}{4} a^2 d \pi^2.$$

Wird die Astrois um eine Gerade gedreht, die durch den Punct  $D$  oder  $E$  parallel mit der Abscissenaxe  $BC$  geht, so ist  $d = a$ , und daher

$$\Phi' = 12 a^2 \pi,$$

$$V' = \frac{3}{4} a^3 \pi^2.$$

Geht aber die Rotationsaxe durch zwey benachbarte Spitzen

$C$  und  $E$ , oder  $C$  und  $D$  der Curve, so ist  $d = \frac{a}{\sqrt{2}}$ , und daher

$$\Phi'' = \frac{12 a^2 \pi}{\sqrt{2}},$$

$$V'' = \frac{3 a^3 \pi^2}{4 \sqrt{2}}.$$

§. 274. (Rotation der Cyclois.) Obschon uns der Ort des Mittelpunctes für diese Curve sowohl als auch für ihre Fläche nicht gegeben ist, so ist doch bekannt, daß er irgendwo in der Geraden  $CD$  (Fig. 104) liegen muß, weil die Curve zu beyden Seiten dieser Geraden symmetrisch vertheilt ist.

Nimmt man daher die Rotationsaxe mit dieser Geraden  $CD$  parallel und von ihr um die senkrechte Distanz  $d$  entfernt an, so wird man, da (nach §. 238. und 249.)

$$F = 3 a^2 \pi \quad \text{und} \quad S = 8 a$$

ist, für den so entstehenden Rotationskörper die Ausdrücke haben:

$$\Phi = 16 a d \pi,$$

$$V = 6 a^2 d \pi^2.$$

Ist daher die Rotationsaxe zugleich die Tangente  $AB$  im Scheitel  $A$  der Cyclois, so ist  $d = CA = a \pi$ , und daher

$$\Phi' = 16 a^2 \pi^2,$$

$$V' = 6 a^3 \pi^3,$$

übereinstimmend mit §. 258, D. und §. 265, D.

Fig. 5.

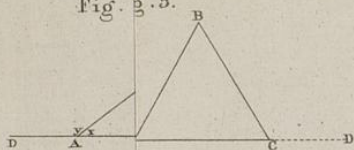


Fig. 6.



Fig. 7.

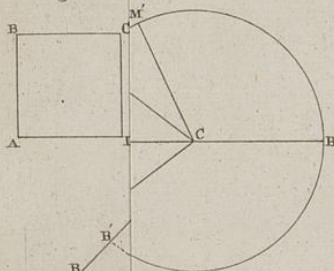


Fig. 10.

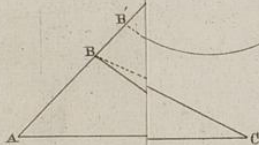


Fig. 11.

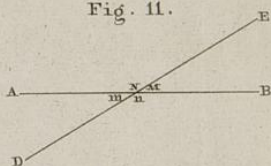


Fig. 17.

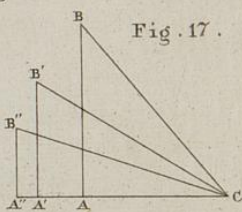


Fig. 21.

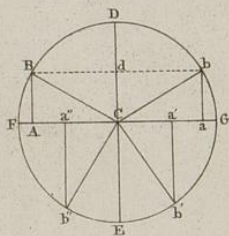


Fig. 27.

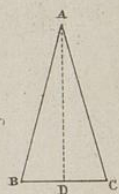


Fig. 15.

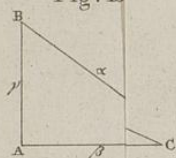


Fig.

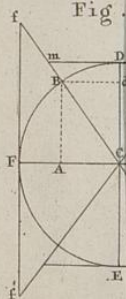


Fig. 28.

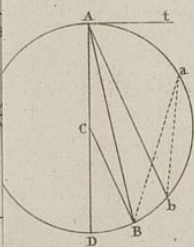


Fig. 29.

