

Zwey und dreyßigstes Capitel.

Cubatur der Körper.

§. 259. (Element der Körper.) Wenn man, wie in §. 252, einen gegebenen Körper durch zwey nächste der xz , und eben so durch zwey nächste der yz parallele Ebenen schneidet, so erhält man dadurch einen von diesen vier Ebenen eingeschlossenen Theil $MN'RQ'$ (Fig. 101) des Körpers, der die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums hat, dessen endliche Seitenlinien QM , RN , . . . auf der Ebene der xy senkrecht stehen, und dessen Basis $QRQ'R'$ in dieser Ebene der xy , die Seitenlinien $QQ' = RR' = dx$ und $QR = Q'R' = dy$ hat, so daß daher die Fläche dieser Basis, wie in §. 252, gleich dem Producte $dx \cdot dy$ ist.

Schneidet man dann den so erhaltenen Theil $MN'RQ'$ des Körpers noch durch zwey andere einander nächste und der xy parallele Ebenen, deren Distanz von einander daher gleich dz gesetzt werden kann, so wird das zwischen den letzten beyden Ebenen enthaltene Element jenes Theiles des körperlichen Volums ein rechtwinkliges Parallelepipedum seyn, dessen Basis gleich der Basis $QRQ'R'$ des erwähnten Theils, und dessen Höhe gleich dz ist, dessen Volum also auch (nach §. 161.) gleich dem Producte $dx \cdot dy \cdot dz$ seyn wird.

Da man dergleichen schneidende Ebenen durch alle Punkte des Körpers legen kann, so wird dadurch der ganze Körper in solche unendlich kleine senkrechte Parallelepipede zerlegt werden, und ihre Summe wird das Volum dieses Körpers seyn. Nennt man also V dieses Volum, so wird das Element desselben seyn

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz.$$

I. Auch hier wird der Ausdruck für dV einfacher, wenn man nur solche Körper betrachtet, die durch die Rotation der Fläche einer Curve um eine gerade Linie entstanden sind. Ist

diese Gerade zugleich die Axe der x , so wird, wie in §. 252, I., jede auf diese Gerade senkrechte Ebene den Körper in einem Kreise schneiden, dessen Mittelpunkt in der Axe der x , dessen Halbmesser gleich der auf dieser Axe senkrechten Ordinate y , und dessen Fläche daher πy^2 seyn wird.

Zwischen dieser und der nächstfolgenden schneidenden auf derselben Rotationsaxe senkrechten Ebene, deren Entfernung von der ersten daher gleich dx ist, wird ein Theil des Körpers enthalten seyn, der die Gestalt eines Cylinders hat, dessen Basis πy^2 und dessen Höhe dx , dessen Volum daher (§. 163.) auch gleich $\pi y^2 dx$ seyn wird, und da der ganze Körper nur aus solchen Cylindern von kreisförmiger Basis und unendlich kleiner Höhe besteht, so wird auch

$$dV = \pi y^2 dx \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

das Element aller dieser durch Rotation entstandenen Körper bezeichnen.

In der Bestimmung des Integrals dieses Ausdrucks besteht die sogenannte Cubatur der Körper.

§. 260. (Volum des parabolischen Conoids.) Wenn man die Fläche einer Parabel, deren Gleichung ist

$$y^2 = ax,$$

um die Axe der x dreht, so hat man für das Volum des so entstehenden Körpers nach der Gleichung (D)

$$V = \pi \int y^2 dx = a \pi \int x dx = \frac{1}{2} a \pi x^2,$$

wo V mit x verschwindet, und wo (Fig. 85) $AP = x$ und $PM = y$ ist.

Ergänzt man das Rechteck, dessen zwey Seiten AP und PM sind, und dreht man dann dieses Rechteck um die Axe AP der x , so entsteht ein Cylinder mit kreisförmiger Basis, wo y der Halbmesser dieser Basis, und x die Höhe des Cylinders, also auch (§. 163.)

$$V' = \pi y^2 x = a \pi x^2$$

das Volum dieses Cylinders ist. Da sonach $V' = 2V$ ist, so wird das Volum dieses Cylinders durch die Oberfläche jenes parabolischen Conoids in zwey gleiche Theile getheilt.

Ist endlich V'' das Volum des Kegels, der durch Umdre-

hung der geradlinigen Sehne AM um die Axe der x entsteht, und dessen Volum daher

$$V'' = \frac{1}{3} \pi y^2 x = \frac{1}{3} a \pi x^2$$

ist, so hat man

$$\frac{V}{V'} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{V}{V''} = \frac{3}{2}.$$

I. Wenn sich, statt der Parabel, die gerade Linie, deren Gleichung

$$y = ax$$

ist, um die Axe der x dreht, so hat man für den so entstehenden Körper, den senkrechten Kegel mit kreisförmiger Basis,

$$V = \pi \int y^2 dx = \frac{1}{3} a^2 \pi x^3 = \frac{1}{3} \pi y^2 x,$$

übereinstimmend mit §. 163.

§. 261. (Volum des hyperbolischen Conoids.)

Ist in der Hyperbel (Fig. 83) $AP = x$ und $PM = y$, so hat man für die Gleichung dieser Curve (nach §. 200)

$$y^2 = \frac{2b^2 x}{a} + \frac{b^2 x^2}{a^2},$$

und daraus erhält man sofort

$$V = \pi \int y^2 dx = \frac{b^2 \pi}{a^2} \int (2ax + x^2) dx,$$

wovon das Integral nach §. 234, I. ist

$$V = \frac{b^2 \pi}{a^2} (ax^2 + \frac{1}{3} x^3)$$

oder auch

$$V = \frac{1}{3} \pi x y^2 + \frac{b^2 \pi x^2}{3a}.$$

Der erste Theil des letzten Ausdrucks ist der von dem geradlinigen Dreyecke AMP beschriebene Kegel, also ist auch der zweyte Theil oder $\frac{b^2 \pi x^2}{3a}$ dasjenige Volum, welches das hyperbolische Segment, das von der Sehne AM und dem Bogen AM begrenzt wird, während dieser Drehung der Hyperbel um AP beschreibt.

I. Legt man aber der Hyperbel die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zu Grunde, wo $CP = x$ und $PM = y$ ist, und wird dann diese

Curve um eine durch C auf die große Axe AB senkrechte Gerade gedreht, so ist das Volum des so entstehenden Körpers

$$V = \pi \int x^2 dy = \frac{a^2 \pi}{b^2} \int (b^2 + y^2) dy,$$

und daher

$$V = \frac{a^2 \pi}{b^2} (b^2 y + \frac{1}{3} y^3),$$

wenn V mit y zugleich verschwindet.

§. 262. (Volum der Kugel.) Ist BAD (Fig. 103) ein Kreisbogen des Halbmessers $BC = DC = a$, und ist $AP = x$, $PB = y$, so hat man (§. 199.)

$$y^2 = 2ax - x^2.$$

Heißt daher V' das Volum, das durch die Rotation des Kreisabschnittes $ABPD$ um die Axe CA entsteht, so ist

$$V' = \pi \int y^2 dx = \pi (ax^2 - \frac{1}{3} x^3).$$

Nimmt man diesen Ausdruck für $x=a$ doppelt, so erhält man das Volum der ganzen Kugel gleich $\frac{4}{3} a^3 \pi$.

I. Um eben so das Volum V desjenigen Körpers zu erhalten, der durch Rotation des Kreisausschnittes ACB um AC entsteht, so hat man zuerst für das Volum V'' des Kegels, der durch Rotation des rechtwinkligen Dreiecks BPC um AC entsteht (nach §. 260, I.):

$$V'' = \frac{1}{3} \pi (a-x)(2ax - x^2);$$

und da $V = V' + V''$ ist, so hat man auch für das gesuchte Volum V des Ausschnitts ACB

$$V = \frac{2}{3} a^2 \pi x.$$

Nimmt man diesen Ausdruck für $x=a$ doppelt, so erhält man für das Volum der Kugel $\frac{4}{3} a^3 \pi$, wie zuvor.

II. Ist bad ein dem vorhergehenden concentrischer Kreisbogen des Halbmessers $Ca = a'$, und ist $Cp = x'$, so ist das Volum des Ausschnitts bCp (nach I.)

$$v = \frac{2}{3} a'^2 \pi x',$$

also ist auch das Volum des von der Fläche $ABbaA$ um AC beschriebenen Körpers, oder so ist das Volum des gegebenen Theiles einer Kugelschale, deren Dicke $a - a'$ ist, gleich

$$V - v = \frac{2}{3} \pi (a^2 x - a'^2 x'),$$

oder da $\frac{x'}{x} = \frac{a'}{a}$ ist:

$$V - v = \frac{2\pi}{3a} (a^3 - a'^3) \cdot x.$$

Nimmt man auch diesen Ausdruck für $x=a$ doppelt, so erhält man für das Volum der ganzen Kugelschale:

$$V - v = \frac{4\pi}{3} (a^3 - a'^3);$$

und setzt man in diesem letzten Ausdrucke die Gröfse $a'=0$, so erhält man $\frac{4}{3}a^3\pi$ für das Volum der Kugel, deren Halbmesser a ist, wie zuvor.

III. Um eben so das Volum V des Körpers zu erhalten, der durch Rotation des Kreisabschnittes BDA um seine Chorde BD entsteht, sey $CP=b$, $PB=PD=c$ und $PQ=x$, $QN=y$, so hat man für die Gleichung des Kreises

$$(b+y)^2 + x^2 = a^2 \quad \text{oder}$$

$$y^2 = a^2 - b^2 - x^2 - 2by,$$

und daher auch

$$\int y^2 dx = (a^2 - b^2)x - \frac{1}{3}x^3 - 2b \int y dx.$$

Allein für $x=c$ ist

$$\int y dx = \frac{1}{2}a^2 \text{Arc Cos } \frac{b}{a} - \frac{1}{2}bc,$$

also ist auch, wenn $x=c$ genommen wird, das gesuchte Volum

$$V = \frac{2}{3}\pi c(2a^2 + b^2) - 2\pi a^2 b \cdot \text{Arc Cos } \frac{b}{a}.$$

Für $b=0$ ist $c=a$, also auch das Volum der ganzen Kugel gleich $\frac{4}{3}a^3\pi$, wie zuvor.

§. 263. (Volum des verlängerten Sphäroids.) Wenn sich eine Ellipse um ihre grofse Axe $2a$ dreht, so hat man

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also ist auch das Volum des durch diese Rotation entstehenden Sphäroids

$$V = \pi \int y^2 dx = \frac{b^2\pi x}{a^2} (a^2 - \frac{1}{3}x^2),$$

wenn V mit x verschwindet. Wird dieser Ausdruck für $x=a$ doppelt genommen, so erhält man für das Volum des ganzen

Sphäroids

$$V = \frac{4}{3} a b^2 \pi.$$

Für $b = a$ erhält man $V = \frac{4}{3} a^3 \pi$, das Volum der Kugel, wie zuvor.

§. 264. (Volum des abgeplatteten Sphäroids.)

Wenn sich eine Ellipse um ihre kleine Axe dreht, so hat man

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

und daher auch das Volum des so entstehenden Körpers

$$V = \pi \int y^2 dx = \frac{a^2 \pi x}{b^2} (b^2 - \frac{2}{3} x^2).$$

Dieser Ausdruck, für $x = b$ doppelt genommen, gibt das Volum des ganzen abgeplatteten Sphäroids

$$V = \frac{4}{3} a^2 b \pi.$$

Man sieht daraus, daß sich das Volum des abgeplatteten Sphäroids zu dem des verlängerten wie a zu b verhält.

§. 265. (Volum der cycloidischen Sphäroide.)

A. Wenn die Cyclois AMD (Fig. 104) sich um die Gerade AB dreht, so hat man, wenn $AP = x$ und $PM = y$ ist:

$$x = a(\varphi - \sin \varphi),$$

$$y = a(1 - \cos \varphi),$$

also auch

$$y^2 dx = a^3 d\varphi (1 - 3 \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi - \cos^3 \varphi),$$

und davon ist das Integral, wenn dasselbe zugleich mit φ verschwinden soll:

$$\int y^2 dx = a^3 \left(\frac{5}{2} \varphi - \frac{15}{4} \sin \varphi + \frac{3}{4} \sin 2\varphi - \frac{1}{12} \sin 3\varphi \right).$$

Daraus folgt, daß das Volum jedes Theiles des so entstehenden Körpers ist

$$V = \frac{a^3 \pi}{12} [30\varphi - 45 \sin \varphi + 45 \sin 2\varphi - \sin 3\varphi].$$

Nimmt man diesen Ausdruck für $\varphi = \pi$ doppelt, so erhält man für das Volum des Körpers, der durch Rotation der ganzen Cyclois ADB um AB entsteht:

$$V = 5a^3 \pi^2.$$

B. Wenn sich aber dieselbe Cyclois um die Tangente DE des höchsten Punctes D dreht, so hat man

$$x = a(\phi + \sin \phi),$$

$$y = a(1 - \cos \phi),$$

und daher auch

$$V' = \pi \int y^2 dx = \frac{a^3 \pi}{12} (6\phi - 3 \sin \phi - 3 \sin 2\phi + \sin 3\phi).$$

Nimmt man diesen Werth für $\phi = \pi$ doppelt, so erhält man

$$V' = a^3 \pi^2$$

für den Körper, der durch Rotation der doppelten Fläche $AMDE$ um DE entsteht, welcher Körper demnach der Axe DE seine convexe Seite zuwendet.

Es ist demnach, wenn man diesen Werth von V' mit dem V der Nr. A. vergleicht:

$$V = 5V'.$$

Wenn aber das Rechteck, dessen zwey Seiten AB und AE sind, um dieselbe Axe DE gedreht wird, so entsteht ein Cylinder, dessen Volum gleich $8a^3 \pi^2$ ist. Zieht man davon das Volum $V' = a^3 \pi^2$ ab, so erhält man

$$7a^3 \pi^2$$

für das Volum des Körpers, der durch Rotation der Fläche $AMDBCA$ um DE entsteht.

C. Wenn sich ferner die Cyclois um die Axe CD dreht, so hat man

$$x = a(1 - \cos \phi),$$

$$y = a(\phi + \sin \phi),$$

und daher auch

$$y^2 dx = a^3 d\phi (\phi^2 \sin \phi + 2\phi \sin^2 \phi + \sin^3 \phi),$$

also auch für das gesuchte Volum

$$V'' = a^3 \pi \left[\phi^2 \left(\frac{1}{2} - \cos \phi \right) + 2\phi (\sin \phi - \sin 2\phi) + \frac{5}{4} \cos \phi - \cos 2\phi + \frac{1}{12} \cos 3\phi - \frac{1}{2} \right].$$

Für $\phi = \pi$ gibt dieser Ausdruck

$$V'' = \frac{3a^3 \pi}{2} \left[\pi^2 - \frac{16}{9} \right],$$

oder das Volum des Körpers, der durch Rotation der Fläche $AMDC$ um CD entsteht.

D. Wenn sich endlich die cycloidische Fläche um die Tan-

gente AE im Scheitel A dreht, so ist

$$x = a(1 - \cos \varphi),$$

$$y = a(\varphi - \sin \varphi),$$

also auch $V''' = \pi \int y^2 dx$ oder

$$V''' = a^3 \pi \left[\frac{5}{4} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos 2\varphi + \frac{1}{12} \cos 3\varphi - \frac{19}{12} \right] \\ + a^3 \pi \left[2\varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin 2\varphi - \varphi^2 \left(\frac{1}{2} + \cos \varphi \right) \right].$$

Für $\varphi = 2\pi$ erhält man

$$V''' = 6a^3\pi^3$$

als das Volum des Körpers, der durch Rotation der ganzen Fläche $AMDB$ um AE entsteht.

Noch hat man zwischen diesen Körpern die Gleichung

$$V''' = 6\pi V' = \frac{6}{5}\pi V.$$

§. 266. (Anwendung des allgemeinen Ausdrucks (D) auf solche Körper, die nicht durch Rotation entstanden sind.) Wenn ein Körper auch nicht durch Drehung einer Curve um irgend eine Gerade entstanden, wenn er aber doch so beschaffen ist, daß er, in Beziehung auf eine gerade, durch den Körper gehende Linie, zu beyden Seiten dieser Geraden symmetrisch gebaut ist, so bezeichne X die Fläche des Schnittes, welcher durch eine auf die Axe der x senkrechte Ebene in dem Körper entsteht, und man wird dann diesen Körper, eben so wie in §. 259, I., als aus Cylindern bestehend betrachten können, von welchen die, hier nicht mehr kreisförmige, Basis die erwähnte Fläche X , und die Höhe dx ist, so daß man daher für das Element aller dieser Körper haben wird

$$dV = \int X \cdot dx \quad . \quad . \quad . \quad (E).$$

Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

die wir schon oben (§. 216.) betrachtet haben, stellt eine solche in Beziehung auf alle drey Coordinatenaxen symmetrische Fläche dar.

Wird diese Fläche z. B. durch eine auf die Axe der x senkrechte Ebene geschnitten, so wird dieser Schnitt, dessen Fläche wir überhaupt X genannt haben, die Gestalt einer Ellipse haben, und da man allgemein hat

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

so sieht man, wenn man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

zusammenstellt, daß die Halbaxen jenes elliptischen Schnittes sind:

$$b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{und} \quad c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

so daß man daher für die Fläche dieses Schnittes (nach §. 245.) haben wird:

$$X = bc\pi \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Mit diesem Werthe von X gibt die vorhergehende allgemeine Gleichung:

$$V = \int X dx = bc\pi \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right).$$

Dieser Ausdruck für $x=a$ doppelt genommen, gibt das Volum des ganzen Sphäroids mit drey Axen gleich

$$V = \frac{4}{3} abc\pi.$$

Ist $c=b$, so erhält man aus der letzten Gleichung das Volum des verlängerten Sphäroids:

$$V = \frac{4}{3} ab^2\pi.$$

Ist aber $c=a$, so hat man für das Volum des abgeplatteten Sphäroids.

$$V = \frac{4}{3} a^2 b\pi.$$

Ist endlich $c=b=a$, so erhält man für das Volum der Kugel:

$$V = \frac{4}{3} a^3\pi,$$

alles übereinstimmend mit Demjenigen, was für diese Körper schon oben gefunden wurde.