

Ein und dreyßigstes Capitel.

Complanation der Flächen.

§. 252. (Element der krummen Oberflächen.)

Wenn man, wie in §. 216, die krumme Oberfläche eines Körpers durch zwey nächste der xz parallele Ebenen MQQ' und NRN'' (Fig. 101), und eben so durch zwey andere nächste der yz parallelen Ebenen MQP und $M'Q'P'$ schneidet, so erhält man dadurch einen von diesen vier Flächen eingeschlossenen Theil $MNM'N'$ der Oberfläche ϕ des Körpers, den man als das Element $d\phi$ dieser Oberfläche betrachten kann.

Dieselben vier, auf der Ebene der xy senkrechten Ebenen schliessen aber auch, in dieser Ebene, das ebene Rechteck $QRQ'R'$ ein, und da $QQ' = PP' = dx$, $QR = Q'R' = dy$ ist, so ist die Fläche dieses Rechteckes $QRQ'R'$ (nach §. 118.) gleich dem Producte $dx \cdot dy$.

Allein dieses Rechteck ist zugleich die Projection (§. 181, I.) des Vierecks $MNM'N'$ oder des Elements $d\phi$ der krummen Fläche, so daß daher, nach der a. a. O. gegebenen Erklärung der Projection, wenn n die Neigung der unendlich kleinen Ebene $MNM'N'$ gegen die coordinirte Ebene der xy bezeichnet, die Gleichung bestehen wird:

$$d\phi \cdot \cos n = dx dy.$$

Diese Neigung n ist aber identisch mit der Neigung der die krumme Fläche in M berührenden Ebene gegen dieselbe Ebene der xy , und da (nach §. 216, III.) dieser Winkel n durch die Gleichung

$$\cos n = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

erhalten wird, so ist auch der allgemeine Ausdruck des Elements einer krummen Fläche

$$d\phi = dx dy \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

wo $p = \left(\frac{dx}{dz}\right)$ und $q = \left(\frac{dy}{dz}\right)$ die partiellen Differentialien von z in Beziehung auf x und auf y bezeichnen, die man aus der gegebenen Gleichung der krummen Fläche ebenfalls als gegeben annimmt. — In der Bestimmung dieses Integrals besteht die sogenannte *Complanation der Flächen*.

I. Einfacher wird dieser Ausdruck für solche krumme Flächen, die durch die Rotation einer gegebenen Curve um eine feste Gerade entstehen.

Nimmt man die Axe der x in dieser fixen Geraden, und schneidet man dann die Rotationsfläche durch zwey einander nächste, auf dieser Axe der x senkrecht stehende Ebenen PM und $P'M'$ (Fig. 97 oder Fig. 97, A.), so werden diese Schnitte Kreise seyn, deren Mittelpuncte $P, P' \dots$ in der Rotationsaxe AX liegen, und deren Halbmesser $PM, P'M'$ die Ordinaten y der Curve MNQ ausdrücken, durch deren Rotation um die fixe Gerade AX jene Fläche entstanden ist.

Die Peripherie des Kreises, zu welchem der Halbmesser $PM = y$ gehört, wird gleich $2\pi y$, und die des nächstfolgenden Kreises, zu welchem der Halbmesser $P'M' = y + dy$ gehört, wird gleich $2\pi (y + dy)$ seyn. Zwischen beyden Peripherien wird sich ein ringförmiger Theil der gesuchten Oberfläche des Rotationskörpers befinden, den man, da MM' mit der Tangente TM der Curve NMQ zusammenfällt, als die Oberfläche eines abgestumpften Kegels betrachten kann, von welchem die Halbmesser der beyden Grundflächen

$$r = y \text{ und } R = y + dy,$$

und von welchen die Seitenlinie m oder

$$MM' = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

das Element des Bogens der gegebenen Curve NMQ ist, so daß man daher für die Oberfläche dieses abgestumpften Kegels, d. h. für das gesuchte Element der Rotationsfläche (nach §. 163.) hat:

$$d\Phi = (R + r) m \pi,$$

oder, wenn man die vorhergehenden Werthe von R, r und $m = ds$ substituirt:

$$d\Phi = (2y + dy) \pi ds,$$

das heißt, nach dem oben aufgestellten Princip der Differentialrechnung:

$$d\Phi = 2\pi y ds \quad . \quad . \quad . \quad (C);$$

und dieß ist der Ausdruck, auf welchen wir nun wieder mehrere specielle Rotationsflächen anwenden wollen.

§. 253. (Oberfläche des parabolischen Conoids.) Wenn sich eine Parabel, deren Gleichung

$$y^2 = ax$$

ist, um die Axe der x dreht, so wird die Oberfläche des so entstehenden kegelförmigen Körpers gleich

$$\Phi = 2\pi \int y ds = \pi \int dx \sqrt{a^2 + 4ax}$$

seyn, wovon das Integral (nach §. 234, I.) ist:

$$\Phi = \frac{\pi}{6a} (a^2 + 4ax)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Soll Φ mit x zugleich verschwinden, so ist $\text{Const} = -\frac{a^2\pi}{6}$, und daher

$$\Phi = \frac{\pi}{6a} (a^2 + 4ax)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} a^2 \pi.$$

I. Wenn sich, statt der Parabel, eine gerade Linie, deren Gleichung

$$y = ax$$

ist, um die Axe der x dreht, so hat man noch einfacher für die Oberfläche des so entstehenden senkrechten Kegels mit kreisförmiger Basis:

$$\Phi = 2\pi \sqrt{1+a^2} \cdot \int ax dx = a\pi x^2 \sqrt{1+a^2} = \pi y \sqrt{x^2 + y^2},$$

also Φ gleich der Peripherie $2\pi y$, multiplicirt in die halbe Seitenlinie $\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$ des Kegels, wie oben §. 163.

§. 254. (Oberfläche der Kugel.) Wenn ein Kreis des Halbmessers a sich um einen seiner Durchmesser dreht, so beschreibt die Peripherie des Kreises während seiner Bewegung die Oberfläche der Kugel.

Ist dieser Durchmesser zugleich die Axe der x , so hat man für die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

also ist auch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und daher

$$\Phi = 2a\pi \int dx = 2a\pi x,$$

wenn Φ mit x zugleich verschwindet. Dieser Ausdruck für $x=a$ doppelt genommen, gibt die Oberfläche der ganzen Kugel gleich

$$4a^2\pi,$$

oder viermal so groß, als die Oberfläche eines ihrer größten Kreise (§. 244.).

I. Nimmt man aber für die Gleichung des Kreises die beyden Ausdrücke

$$x = a \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = a \sin \varphi,$$

so erhält man

$$ds = -a d\varphi,$$

das negative Zeichen, weil s wächst, wenn φ abnimmt. Es ist daher

$$\Phi = 2\pi \int y ds = -2a^2\pi \int d\varphi \sin \varphi = 2a^2\pi \cos \varphi,$$

wenn Φ für $\varphi = 90^\circ$ verschwindet. Dieser Ausdruck für $\varphi = 0$ doppelt genommen, gibt die Oberfläche der Kugel gleich $4a^2\pi$, wie zuvor.

§. 255. (Oberfläche des verlängerten Sphäroids.)

So wird, nach §. 224, derjenige Körper genannt, der durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre große Axe entsteht. Sind $2a$ und $2b$ die große und kleine Axe der Ellipse, und ist die coordinirte Axe der x zugleich die Rotationsaxe der Ellipse, so hat man für die Gleichung dieser Curve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

woraus folgt:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}},$$

wenn $a^2 e^2 = a^2 - b^2$ gesetzt wird.

Man hat demnach

$$\Phi = 2\pi \int y ds = 2b\pi \int dx \sqrt{1 - \frac{e^2 x^2}{a^2}}.$$

Setzt man aber

$$\frac{ex}{a} = \sin \varphi,$$

so ist auch

$$dx = \frac{a}{e} d\varphi \cos \varphi,$$

und daher

$$\Phi = \frac{2ab\pi}{e} \int d\varphi \cos^2 \varphi = \frac{ab\pi}{e} (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi),$$

wenn Φ mit φ oder mit x zugleich verschwindet.

Will man diesen Werth von Φ durch die Abscisse ausdrücken, so hat man, da $ex = a \sin \varphi$ ist:

$$\Phi = \frac{b\pi x}{a} \sqrt{a^2 - e^2 x^2} + \frac{ab\pi}{e} \operatorname{Arc Sin} \frac{ex}{a}.$$

Nimmt man endlich dieses Integral von $x=0$ bis $x=a$ doppelt, so erhält man für die Oberfläche des ganzen verlängerten Sphäroids den Ausdruck

$$2b^2\pi + \frac{2ab\pi}{e} \operatorname{Arc Sin} e.$$

Für $e=0$ oder $a=b$ gibt der letzte Ausdruck die Oberfläche der Kugel $4a^2\pi$, wie oben.

§. 256. (Fläche des abgeplatteten Sphäroids.)

Für denjenigen Körper aber, der durch die Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe $2b$ entsteht, oder für das abgeplattete Sphäroid (§. 224.) hat man

$$\frac{x^2}{b^2} = \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

also auch

$$\Phi = 2\pi \int y ds = 2a\pi \cdot \int dx \sqrt{1 + \frac{a^2 e^2 x^2}{b^4}}.$$

Setzt man aber

$$\frac{aex}{b^2} = \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi,$$

also auch

$$dx = \frac{b^2}{ae} \sqrt{-1} \cdot d\varphi \cos \varphi,$$

so hat man

$$\Phi = \frac{2b^2\pi}{e} \sqrt{-1} \cdot \int d\varphi \cos^2 \varphi,$$

und davon ist das Integral

$$\Phi = \frac{b^2\pi}{e} \sqrt{-1} \cdot [\varphi + \sin \varphi \cos \varphi].$$

Nach §. 105. ist aber

$$\varphi \sqrt{-1} = \log \operatorname{nat} (\cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi),$$

also ist auch, wenn man die Werthe von φ und $\sin \varphi \cos \varphi$ wieder durch x ausdrückt:

$$\Phi = \frac{a\pi x}{b^2} \sqrt{b^4 + a^2 e^2 x^2} + \frac{b^2 \pi}{e} \log \left(\frac{aex + \sqrt{b^4 + a^2 e^2 x^2}}{b^2} \right) + \text{Const},$$

wo man in der Gröfse nach dem Logarithmuszeichen auch den constanten Nenner b^2 ganz weglassen kann, da er schon in der Constante der Integration enthalten vorausgesetzt wird.

Soll dann Φ mit x zugleich verschwinden, so hat man

$$\text{Const} = - \frac{2b^2 \pi}{e} \log b.$$

Setzt man endlich in dem so erhaltenen Ausdrucke zuerst $x = +b$ und dann $x = -b$, so gibt die Differenz beyder Werthe für die gesuchte Oberfläche des ganzen abgeplatteten Sphäroids

$$2a^2 \pi + \frac{b^2 \pi}{e} \log \frac{1+e}{1-e}.$$

Für $e=0$ oder $a=b$ wird der letzte Ausdruck die Oberfläche der Kugel gleich $4a^2 \pi$, wie zuvor, geben.

§. 257. (Complanation des Rotationskörpers der Astrois.) Setzt man, wie oben, für die Astrois

$$x = a \cos^3 \varphi \quad \text{und} \quad y = a \sin^3 \varphi,$$

so erhält man

$$ds = -3a \int d\varphi \sin \varphi \cos \varphi,$$

und daher auch für die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation dieser Curve um die Axe der x entsteht:

$$\Phi = -6a^2 \pi \int d\varphi \sin^4 \varphi \cos \varphi,$$

wovon das Integral, nach §. 230, V., genommen werden könnte. Allein nach der Bemerkung des §. 234, I. erhält man kürzer noch

$$\int d\varphi \cos \varphi \cdot \sin^4 \varphi = \frac{1}{5} \sin^5 \varphi,$$

so dafs man daher hat:

$$\Phi = -\frac{6}{5} a^2 \pi \sin^5 \varphi + \text{Const.}$$

Ist $\Phi=0$ für $\varphi=90$, so ist

$$\text{Const} = \frac{6}{5} a^2 \pi,$$

und daher

$$\Phi = \frac{6}{5} a^2 \pi (1 - \sin^5 \varphi).$$

Dieser Ausdruck für $\varphi = 0$ doppelt genommen, gibt für die Oberfläche des Körpers, der durch die Rotation der ganzen Astrois um die Axe der x entsteht, den Werth

$$\frac{12}{5} a^2 \pi.$$

§. 258. (Complanation derjenigen Flächen, welche durch die Rotation der Cyclois entstehen.)

A. Wenn sich die Cyclois um die Axe AB (Fig. 104) dreht, so hat man, wie in §. 249:

$$x = a (\varphi - \sin \varphi) \quad \text{und}$$

$$y = a (1 - \cos \varphi),$$

also auch

$$y ds = a^2 d\varphi \left(3 \sin \frac{1}{2} \varphi - \sin \frac{3}{2} \varphi \right),$$

und daher, nach §. 230, I.:

$$\Phi = 2\pi \int y ds = 2\pi \left(\frac{2a^2}{3} \cos \frac{3}{2} \varphi - 6a^2 \cos \frac{1}{2} \varphi \right) + \text{Const.}$$

Soll Φ mit φ zugleich verschwinden, so ist

$$\text{Const} = \frac{32}{3} a^2 \pi;$$

also ist auch die Fläche, welche durch die Rotation des Bogens AM der Cyclois um die Axe AB entsteht:

$$\Phi = 2a^2 \pi \left(\frac{2}{3} \cos \frac{3}{2} \varphi - 6 \cos \frac{1}{2} \varphi + \frac{16}{3} \right).$$

Nimmt man diesen Ausdruck für $\varphi = 180$ doppelt, so erhält man für die Fläche, welche durch die Rotation der ganzen Cyclois ADB um AB entsteht:

$$\Phi = \frac{64}{3} a^2 \pi.$$

B. Wenn sich aber der Bogen DM um die Tangente DE der Cyclois in ihrem höchsten Punkte D dreht, so hat man, nach §. 207, I., für die Gleichungen dieser Curve

$$x = a (\varphi + \sin \varphi),$$

$$y = a (1 - \cos \varphi);$$

also auch

$$ds = 2a d\varphi \cos \frac{1}{2} \varphi,$$

und daher

$$\Phi = 2\pi \int y ds = \frac{16a^2 \pi}{3} \sin^3 \frac{1}{2} \varphi,$$

wenn ϕ' mit φ zugleich verschwindet, oder wenn der Bogen DM der Curve von dem Punkte D an gezählt wird.

Nimmt man diesen Ausdruck für $\varphi = 180$ doppelt, so erhält man für die ganze, auf diese Weise entstehende Fläche:

$$\phi' = \frac{32}{3} a^2 \pi;$$

und diese Fläche wendet ihrer Rotationsaxe DE die convexe Seite zu, während die erste (in A) durch ϕ bezeichnete Fläche ihrer Axe AB die concave Seite zukehrt. Auch ist, wie man sieht,

$$\phi = 2\phi' \quad \text{oder} \quad \phi + \phi' = 32 a^2 \pi.$$

C. Wenn sich ferner der Bogen der Cyclois um die Axe CD dreht, so hat man wieder

$$x = a(1 - \cos \varphi) \quad \text{und} \\ y = a(\varphi + \sin \varphi),$$

und daher auch für das Element des Bogens

$$ds = 2a d\varphi \cos \frac{1}{2} \varphi \quad \text{und} \\ y ds = 2a^2 d\varphi (\varphi + \sin \varphi) \cos \frac{1}{2} \varphi,$$

wovon das Integral ist

$$\int y ds = 8a^2 \left(\frac{1}{2} \varphi \sin \frac{1}{2} \varphi + \cos \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{3} \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \right) + \text{Const.}$$

Soll dieses Integral für $\varphi = 0$ verschwinden, so ist

$$\text{Const} = -\frac{16}{3} a^2,$$

und daher

$$\phi'' = 16 a^2 \pi \left(\frac{1}{2} \varphi \sin \frac{1}{2} \varphi + \cos \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{3} \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - \frac{2}{3} \right),$$

woraus man für $\varphi = 180$ erhält:

$$\phi'' = 8 a^2 \pi \left(\pi - \frac{4}{3} \right);$$

und dies ist die Oberfläche des Körpers, der durch die Rotation des halben Bogens DMA der Cyclois um die Axe CD entsteht.

D. Wenn sich endlich der Bogen AD um die Tangente AE in dem Anfangspunkte A , die daselbst senkrecht auf AB steht, dreht, so ist wieder

$$x = a(1 - \cos \varphi), \\ y = a(\varphi - \sin \varphi),$$

also auch

$$ds = a d\varphi \sqrt{2 - 2 \cos \varphi},$$

und daher

$$\int y ds = 2a^2 (4 \sin \frac{1}{2} \phi - 2 \phi \cos \frac{1}{2} \phi - \frac{4}{3} \sin^3 \frac{1}{2} \phi),$$

wenn dieses Integral mit ϕ zugleich verschwindet, so daß man daher hat:

$$\Phi'' = 4a^2 \pi (4 \sin \frac{1}{2} \phi - 2 \phi \cos \frac{1}{2} \phi - \frac{4}{3} \sin^3 \frac{1}{2} \phi).$$

Für $\phi = 360$ gibt dieser Ausdruck

$$\Phi''' = 16a^2 \pi^2,$$

für die Oberfläche des Körpers, der durch die Rotation des ganzen Bogens ADB der Cyclois um die Tangente derselben in A oder B entsteht. Diese Oberfläche ist demnach gleich der Fläche eines Kreises, dessen Halbmesser $4a\sqrt{\pi}$ ist.