

Neun und zwanzigstes Capitel.

Rectification der Curven.

§. 231. (Element des Bogens einer Curve.) Wir wollen nun zu der Anwendung der Ausdrücke der vorhergehenden Tafel auf die oben (§. 226, I.) erwähnten interessanten Probleme übergehen, und unter diesen zuerst diejenigen betrachten, welche sich auf die *Bestimmung der Länge des Bogens* einer Curve zwischen zwey gegebenen Puncten derselben, oder auf die sogenannte *Rectification der Curven* beziehen.

Wir haben bereits oben (§. 210, IV.) den allgemeinen Ausdruck für das Element des Bogens einer Curve kennen gelernt. Sind nämlich M und M' (Fig. 97) zwey nächste Puncte einer Curve NQ , und betrachtet man diese Curve als ein Polygon von unendlich kleinen geradlinien Seiten, so hat man in dem rechtwinkligen Dreyecke MaM' , in welchem $Ma = dx$ und $M'a = dy$ die Differentialien der beyden Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ bezeichnen, wenn man den Bogen NQ der Curve überhaupt durch s bezeichnet, für das Element $MM' = ds$ dieses Bogens den Ausdruck

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \dots (A).$$

Substituirt man dann in diesen allgemeinen Ausdruck für ds den Werth von dy durch x und dx so ausgedrückt, wie er aus der Gleichung irgend einer gegebenen Curve folgt, so erhält man den particulären Werth des Elements ds , wie er für diese gegebene Curve gehört, in einer Gleichung der Form ausgedrückt:

$$ds = f(x) \cdot dx;$$

und wenn man dann von diesem Differentialausdrucke $f(x) \cdot dx$, aus den Vorschriften der letzten Tafel, den *endlichen Ausdruck* in x , das heist, wenn man das *Integral* dieser Gröfse $f(x) \cdot dx$ angeben kann, so hat man dadurch auch s durch x bestimmt, oder man hat dadurch die Länge des Bogens dieser Curve durch die

zu seinem Endpunkte gehörende Abscisse x , und zwar ganz allgemein ausgedrückt, da man in der so erhaltenen Gleichung zwischen s und x für die Gröfse x jeden willkürlichen Werth annehmen kann, um daraus sofort auch den ihm entsprechenden Werth des Bogens s zu finden.

I. Um dieß zuerst auf ein sehr einfaches Beyspiel anzuwenden, sey die Gleichung

$$x = ay - a$$

der geraden Linie CDM (Fig. 77) gegeben. Das Differential derselben ist $dx = a dy$, also ist auch das Element MM' der gegebenen Geraden selbst

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2}}.$$

Von diesem Ausdrucke hat aber die Integration keine weitere Schwierigkeit, so daß man für das gesuchte Integral sofort erhält

$$s = x \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2}} + C,$$

wo C die oben (§. 226, III.) erwähnte Constante der Integration bezeichnet.

Ist h der Winkel, welchen die Gerade CM mit der Axe der y bildet, ist also $ACD = 90 - h$, so hat man $a = \text{Tang } h$, und das vorhergehende Integral geht in den folgenden einfacheren Ausdruck über:

$$s = \frac{x}{\sin h} + C.$$

Um diese Constante C zu bestimmen, kann man z. B. die Länge unserer Geraden von demjenigen Punkte C an zählen, wo sie die Axe der x schneidet. Da für diesen Punkt $y = 0$, also auch $x = -a$ ist, so gibt die vorhergehende Gleichung

$$0 = -\frac{a}{\sin h} + C \quad \text{oder} \quad C = \frac{a}{\sin h},$$

und daher unser vollständig bestimmtes Integral

$$s = \frac{x + a}{\sin h},$$

oder auch, wenn man statt x seinen Werth $ay - a = y \text{Tang } h - a$ substituirt:

$$s = \frac{y}{\cos h},$$

und durch die beyden letzten Gleichungen ist die Länge $CM = s$ unserer Geraden für jeden gegebenen Werth von $AP = x$ oder von $PM = y$ gegeben.

Zählt man aber die Länge dieser Geraden von dem Punkte D , wo sie die Axe der y schneidet, so hat man für diesen Punkt $x = 0$, also auch $y = \frac{a}{a}$, so daß daher auch $C = 0$ wird, wodurch das vorhergehende Integral in den einfachen Ausdruck übergeht:

$$s = \frac{x}{\sin h} \quad \text{oder} \quad s = \frac{y}{\cos h} - \frac{a}{\sin h},$$

aus welchem man wieder die Länge $DM = s$ für jeden gegebenen Werth von $AP = x$ oder $PM = y$ finden wird.

Alle diese Ausdrücke stimmen auch mit denjenigen überein:

$$CM = \frac{CP}{\sin h} \quad \text{und} \quad DM = \frac{AP}{\sin h},$$

die man unmittelbar aus der Auflösung des rechtwinkligen Dreyeckes BPM erhält.

II. Um dasselbe Verfahren auch auf eine im Raume verzeichnete Gerade anzuwenden, deren Gleichungen sind

$$\left. \begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned} \right\},$$

so hat man für das Element dieser Geraden (nach §. 215.) den Ausdruck

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Differentiirt man aber die beyden vorhergehenden Gleichungen, so hat man

$$dx = a dz \quad \text{und} \quad dy = b dz,$$

und daher auch

$$ds = dz \sqrt{1 + a^2 + b^2},$$

wovon wieder das Integral ist

$$s = z \sqrt{1 + a^2 + b^2} + \text{Const.}$$

Nennt man f, g, h die Winkel, welche diese Gerade mit den coordinirten Axen der x, y, z macht, so hat man (nach §. 186, II.)

$$a = \frac{\cos f}{\cos h} \quad \text{und} \quad b = \frac{\cos g}{\cos h},$$

also auch, da $\text{Cos}^2 f + \text{Cos}^2 g + \text{Cos}^2 h = 1$ ist:

$$1 + a^2 + b^2 = \frac{1}{\text{Cos}^2 h},$$

so daß daher das vorhergehende Integral in folgendes übergeht:

$$s = \frac{z}{\text{Cos } h} + \text{Const.}$$

Will man nun die Größen s und z zugleich verschwinden lassen, d. h. zählt man die Länge der Geraden von dem Punkte, wo sie die Ebene der xy schneidet, so ist auch $\text{Const} = 0$, und daher

$$s = \frac{z}{\text{Cos } h} \cdot \cdot \cdot (1).$$

Zählt man aber diese Gerade von der Ebene der xz , so ist für den Anfangspunkt $y = 0$ und $z = -\frac{\beta}{b}$, also auch

$$\text{Const} = \frac{\beta}{b \text{Cos } h} = \frac{\beta}{\text{Cos } g}, \text{ und daher jenes Integral}$$

$$s = \frac{z}{\text{Cos } h} + \frac{\beta}{\text{Cos } g} \text{ oder } s = \frac{y}{\text{Cos } g} \cdot \cdot \cdot (2).$$

Nimmt man endlich den Anfang der Zählung in der Ebene yz , so ist $x = 0$ und $z = -\frac{\alpha}{a}$, also auch $\text{Const} = \frac{\alpha}{a \text{Cos } h} = \frac{\alpha}{\text{Cos } f}$, und daher das gesuchte Integral

$$s = \frac{z}{\text{Cos } h} + \frac{\alpha}{\text{Cos } f} \text{ oder } s = \frac{x}{\text{Cos } f} \cdot \cdot \cdot (3),$$

und diese Gleichungen (1), (2) und (3) geben den gesuchten Werth der Länge s der gegebenen Geraden für jeden Werth von x , y oder z .

§. 232. (Rectification des Kreises.) Indem wir nun zu den eigentlichen krummen Linien übergehen, wählen wir zuerst die einfachste derselben, den Kreis, dessen Gleichung nach §. 199.

$$r = 2a \text{Cos } v$$

ist, wo a der Halbmesser, r eine Sehne, und v der Winkel der Sehne mit einem durch ihren Endpunkt gehenden Durchmesser des Kreises ist.

Da aber diese Gleichung nicht mehr zwischen rechtwinkli-

gen Coordinaten x, y , sondern zwischen den *Polarcoordinaten* (§. 180, I.) r und ν besteht, so werden wir zuerst den oben gegebenen allgemeinen Ausdruck von

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

für diese neuen Coordinaten umgestalten. Man hat aber (a. a. O.)

$$x = r \cos \nu,$$

$$y = r \sin \nu,$$

also auch, wenn man diese beyden Gleichungen differentiirt:

$$dx = dr \cos \nu - r d\nu \sin \nu,$$

$$dy = dr \sin \nu + r d\nu \cos \nu,$$

und wenn man diese Werthe von dx und dy in den vorhergehenden Ausdruck von ds substituirt:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\nu^2} \quad (A),$$

welches demnach der allgemeine Ausdruck für das Element jeder ebenen Curve zwischen den Polarcoordinaten r und ν ist, wie wir auch schon früher (§. 213.) gefunden haben.

Substituirt man daher in diesem Ausdrücke von ds den Werth von

$$dr = -2a d\nu \sin \nu,$$

der unmittelbar aus der obigen Gleichung des Kreises folgt, so erhält man

$$ds = d\nu \cdot \sqrt{4a^2 \sin^2 \nu + 4a^2 \cos^2 \nu} \quad \text{oder}$$

$$ds = 2a d\nu,$$

wovon das Integral ist

$$s = 2a \nu,$$

wenn nämlich s zugleich mit ν verschwinden soll.

Für $\nu = \pi$, wo $\pi = 3.14159\dots$, erhält man die ganze Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser a ist, gleich

$$2a\pi,$$

übereinstimmend mit §. 124, V.

I. Dasselbe findet man auch aus der Gleichung des Kreises (§. 199.)

$$x^2 + y^2 = a^2$$

zwischen rechtwinkligen Coordinaten. Diese Gleichung gibt nämlich

$$x dx + y dy = 0 \quad \text{oder} \quad dy = -\frac{x}{y} dx,$$

also ist auch für den Kreis

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, könnte man die Gleichung (1) des §. 227, III. benützen. Setzt man nämlich in dieser Gleichung $\frac{x}{a}$ statt x , so erhält man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{Arc Sin } \frac{x}{a},$$

so daß demnach das gesuchte Integral ist

$$s = \int \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \text{Arc Sin } \frac{x}{a},$$

wenn s mit x zugleich verschwindet. Für $x=a$ wird aber

$$\text{Arc Sin } \frac{x}{a} = \text{Arc Sin } 1 = \frac{1}{2} \pi,$$

also ist auch der vierte Theil der Kreisperipherie gleich $\frac{1}{2} a \pi$, und daher diese Peripherie selbst gleich $2 a \pi$, wie zuvor.

II. Allein da es unsere Absicht ist, alle hier und in der Folge noch zu entwickelnden Integrale ganz aus der Tafel des §. 230. zu nehmen, und somit aus einer einzigen Quelle [der Gleichung (A) des §. 228.] abzuleiten, so wollen wir schon jetzt einer merkwürdigen Umgestaltung der Gleichungen einer jeden Curve erwähnen, die uns in der Folge sehr nützlich seyn wird, da sie es eigentlich ist, die uns in den Stand setzt, die erwähnte Quelle gehörig zu benützen.

Obschon nämlich jede ebene Curve, ihrer Natur nach, nur durch eine einzige Gleichung zwischen x und y ausgedrückt wird, so ist es doch oft sehr vortheilhaft, dieselbe, mittelst Einführung einer Hülfsgröße, durch *zwey Gleichungen* zu geben. Wir haben davon bereits oben (§. 207.) ein Beyspiel bey der Cyclois kennen gelernt, wo $v = \frac{t}{a}$ diese Hülfsgröße oder das Verbindungsmittel zwischen den beyden dort aufgestellten Gleichungen dieser Curve ist. — Es ist in den meisten Fällen sehr leicht, eine solche Hülfsgröße aufzufinden, und man sieht, daß man sie, zur Benützung der Tafel von §. 230, aus den trigonometrischen Functionen wählen wird. Für den Kreis, dessen Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ist, biethet sich, da man nach §. 95. eben so für jeden Winkel φ hat

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

diese Wahl gleichsam von selbst dar. Man wird nämlich den Kreis auch durch die beyden folgenden Gleichungen ausdrücken können:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \varphi \\ y &= a \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

Diese Gleichungen geben aber sofort

$$dx = -a d\varphi \sin \varphi,$$

$$dy = a d\varphi \cos \varphi,$$

und daher auch, wenn man diese Werthe von dx und dy in der Gleichung (A) substituirt:

$$ds = a d\varphi,$$

wovon das Integral ist

$$s = a\varphi,$$

wenn s mit φ verschwindet. Nennt man also wieder 2π die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser die Einheit ist, so hat man, wenn man in der letzten Gleichung $\varphi = 2\pi$ setzt, für die Peripherie desjenigen Kreises, dessen Halbmesser a ist, den Ausdruck $2a\pi$, wie zuvor.

III. Man sieht übrigens, daß alle vorhergehenden Ausdrücke den Werth von π als bereits bekannt voraussetzen, und daß z. B. die obige Gleichung

$$s = a \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{a}$$

uns über den eigentlichen Werth dieser Gröfse π nichts kennen lehrt. Wir haben zwar diese Gröfse schon oben (§. 103.) mit einer für alle wissenschaftlichen Bedürfnisse mehr als hinlänglichen Genauigkeit kennen gelernt, aber nur durch die Summirung von zwar convergenten, aber doch immer unendlichen Reihen, und da man kein anderes Mittel kennt, diesen Zweck zu erreichen, oder da es, wie es scheint, unmöglich ist, den Werth eines Kreisbogens, zu welchem z. B. die Abscisse x gehört, durch eine endliche und geschlossene Function dieser Abscisse auszudrücken, so sagt man, daß der Kreis eine nicht *rectifiable* Curve sey, deren es noch viele andere gibt, was uns aber nicht hindern soll, den bereits gefundenen, wenn auch nur genäher-

ten Werth von π auch in der Folge noch oft mit großem Vortheil anzuwenden, wie dieß bereits in dem Vorhergehenden häufig genug geschehen ist.

§. 233. (Rectification der Parabel.) Die Gleichung der Parabel ist

$$y^2 = ax.$$

Setzt man, um diese Gleichung durch zwey andere auszudrücken,

$$x = \frac{1}{4}a \operatorname{Tang}^2 \varphi, \text{ so ist } y = \frac{1}{2}a \operatorname{Tang} \varphi,$$

so daß man daher hat

$$dx = \frac{1}{2}a d\varphi \cdot \frac{\operatorname{Tang} \varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi},$$

$$dy = \frac{1}{2} \frac{a d\varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi}.$$

Substituirt man aber diese Ausdrücke von dx und dy in der allgemeinen Gleichung (A), so erhält man

$$ds = \frac{\frac{1}{2}a d\varphi}{\operatorname{Cos}^3 \varphi},$$

und davon ist das Integral (nach §. 230, IV.)

$$s = \frac{1}{4}a \left[\frac{\operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi} - \log \operatorname{Tang} \frac{90 - \varphi}{2} \right],$$

wenn s mit φ (oder was dasselbe ist, mit x) zugleich verschwindet, oder wenn der Bogen s von dem Scheitel der Parabel genommen wird.

I. Wollte man diesen Bogen s durch die Abscisse x ausdrücken, so hat man

$$\operatorname{Tang} \varphi = 2 \sqrt{\frac{x}{a}},$$

also auch

$$\operatorname{Sin} \varphi = 2 \sqrt{\frac{x}{a+4x}} \quad \text{und} \quad \operatorname{Cos} \varphi = \sqrt{\frac{a}{a+4x}},$$

und überdieß

$$\operatorname{Tang} \frac{90 - \varphi}{2} = \frac{1 - \operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Cos} \varphi} = \frac{\sqrt{a+4x} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{a}}.$$

Substituirt man diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdrucke von s , so erhält man

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{ax+4x^2} - \frac{1}{4}a \log \frac{\sqrt{a+4x} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{a}}.$$

Die Parabel ist demnach eine rectifiable Curve, da man für jeden Werth von x oder von φ den ihm entsprechenden Bogen s durch einen geschlossenen Ausdruck findet.

§. 234. (Rectification der Neil'schen Parabel.)

Die Gleichung dieser Curve ist (§. 202.)

$$y^3 = ax^2.$$

Setzt man daher $x = \frac{8}{27} a \operatorname{Tang}^3 \varphi$, so ist $y = \frac{4}{9} a \operatorname{Tang}^2 \varphi$, und daher auch

$$dx = \frac{8a}{9} \frac{\operatorname{Tang}^2 \varphi \cdot d\varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi}, \quad dy = \frac{8a}{9} \frac{\operatorname{Tang} \varphi \cdot d\varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi},$$

und dadurch wird die Gleichung (A)

$$ds = \frac{8a}{9} \frac{d\varphi \operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Cos}^4 \varphi},$$

wovon nach §. 230, XII. das Integral ist

$$s = \frac{8a}{27 \operatorname{Cos}^3 \varphi} + \operatorname{Const.}$$

Zählt man den Bogen s vom Scheitel dieser Curve, oder ist $s=0$ für $x=\varphi=0$, so hat man

$$\operatorname{Const} = -\frac{8a}{27},$$

und daher auch

$$s = \frac{8a}{27} \left(\frac{1}{\operatorname{Cos}^3 \varphi} - 1 \right).$$

Will man den Bogen s durch die Ordinate y ausdrücken, so ist

$$\operatorname{Tang}^2 \varphi = \frac{9y}{4a}, \quad \text{also auch} \quad \operatorname{Cos} \varphi = \sqrt{\frac{4a}{4a + 9y}},$$

und daher der gesuchte Bogen der Curve

$$s = \frac{8a}{27} \left[\left(1 + \frac{9y}{4a} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right],$$

so daß daher für die Neil'sche Parabel der Bogen s durch eine algebraische (oder nicht transcendente) Function von y gegeben wird.

I. Übrigens wird man bemerken, daß man auch hier noch die vorhergehende Tafel entbehren könnte, da die gegebene Gleichung $y^3 = ax^2$ zu ihrem Differential gibt

$$dx = \frac{2}{3} dy \cdot \sqrt{\frac{y}{a}},$$

wodurch die Gleichung (A) wird

$$ds = dy \sqrt{1 + \frac{9y}{4a}}.$$

Ausdrücke dieser Art aber, in welchen der eine Factor dy das vollständige Differential der in dem anderen Factor enthaltenen Gröfse ist, geben immer ein algebraisches Differential.

So ist z. B.

$$\int (1+x^n)^m \cdot x^{n-1} dx = \frac{(1+x^n)^{m+1}}{n(m+1)},$$

und eben so ist auch

$$s = \int dy \sqrt{1 + \frac{9y}{4a}} = \frac{8}{27} a \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + \text{Const},$$

wie zuvor.

§. 235. (Rectification der Astrois.) Nimmt man in der oben (§. 204.) gegebenen Gleichung dieser Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

die Coordinaten

$$x = a \cos^3 \varphi \quad \text{und} \quad y = a \sin^3 \varphi,$$

so erhält man durch die Gleichung (A) für das Element des Bogens der Astrois

$$ds = -3a \cdot d\varphi \sin \varphi \cos \varphi,$$

wovon das Integral (nach §. 230, V.) ist

$$s = \frac{3a}{4} (2 \cos^2 \varphi - 1) + \text{Const}.$$

Ist $s=0$ für $\varphi=90^\circ$, das heisst für $x=0$, oder zählt man den Bogen EM (Fig. 90) von dem höchsten Punkte E der Curve, so ist

$$\text{Const} = -\frac{3}{4}a,$$

und daher

$$s = \frac{3}{2}a \cos^2 \varphi \quad \text{oder} \quad s = \frac{3}{2}a \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Die Astrois läßt sich daher ebenfalls algebraisch rectificiren. Nimmt man in dem letzten Ausdrücke $x=AC=a$, so erhält man den Bogen $EMC=\frac{3}{2}a$, so daß daher der ganze Umfang der Astrois gleich $6a$ oder gleich der dreyfachen geraden Linie BC oder DE ist.

§. 236. (Rectification der Evolute der Ellipse.)

Setzt man der Kürze wegen

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{b} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{a^2 - b^2}{a},$$

so hat man für die Gleichung dieser Curve (§. 212.):

$$\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Ist daher wieder

$$x = \beta \cos^3 \varphi \quad \text{und} \quad y = \alpha \sin^3 \varphi,$$

so erhält man für das Element des Bogens:

$$ds = 3 d\varphi \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{\alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi}, \quad \text{oder auch}$$

$$ds = 3 d\varphi \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2) \cos^2 \varphi},$$

wovon wieder das Integral sofort nach der Bemerkung des §. 234, I., die hier auch Statt hat, bekannt ist, so daß man hat

$$s = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2) \cos^2 \varphi]^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Ist $s=0$ für $x=0$, das heißt für $\varphi=90$, so erhält man

$$\text{Const} = - \frac{\alpha^3}{\alpha^2 - \beta^2},$$

also ist auch der Bogen $s = EM$ (Fig. 90) der Curve

$$s = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2) \cos^2 \varphi]^{\frac{3}{2}} - \frac{\alpha^3}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Setzt man in diesem Ausdrücke $\varphi=0$ oder $y=0$, oder

endlich $x = \frac{a^2 - b^2}{a}$, so erhält man, ohne Berücksichtigung der Zeichen, für den vierten Theil EMC des Anfangs dieser Curve

$$EMC = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta},$$

und daher auch für den ganzen Umfang derselben

$$4 \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta} = \frac{4(a-b)}{ab} (a^2 + ab + b^2).$$

§. 237. (Rectification der Logistick.) Die Gleichung dieser Curve ist (§. 205, Fig. 91)

$$x = e^y,$$

wo $AP = x$, $PM = y$, $AC = 1$ und $CD = e$ die Basis der

natürlichen Logarithmen bezeichnet. Setzt man daher

$$x = \text{Tang } \varphi,$$

so hat man

$$dx = \frac{d\varphi}{\text{Cos}^2 \varphi} \quad \text{und} \quad dy = \frac{d\varphi}{\text{Sin } \varphi \text{ Cos } \varphi},$$

wodurch die Gleichung (A) wird

$$ds = \frac{d\varphi}{\text{Sin } \varphi \text{ Cos}^2 \varphi},$$

und davon ist das Integral (nach §. 230, XIV.)

$$s = \frac{1}{\text{Cos } \varphi} + \log \text{Tang } \frac{1}{2} \varphi + \text{Const.}$$

Zählt man den Bogen DM von dem Puncte D an, wo $x = \text{Tang } \varphi = e$ ist, so hat man für die Constante der Integration:

$$\text{Const} = \log(1 + \sqrt{1 + e^2}) - \sqrt{1 + e^2}.$$

§. 238. (Rectification der Cyclois.) Für diese Curve hatten wir oben (§. 207.) die beyden Gleichungen

$$x = a(\varphi - \text{Sin } \varphi) \quad \text{und} \quad y = a(1 - \text{Cos } \varphi),$$

wo (Fig. 93) $AP = x$, $PM = y$ und der Winkel $MOH = \varphi$ ist. Davon sind die Differentialien

$$dx = a d\varphi (1 - \text{Cos } \varphi) \quad \text{und} \quad dy = a d\varphi \text{Sin } \varphi,$$

also ist auch die Gleichung (A) oder das Element des Bogens der Cyclois

$$ds = a d\varphi \sqrt{2 - 2 \text{Cos } \varphi} = 2 a d\varphi \text{Sin } \frac{1}{2} \varphi,$$

und davon ist das Integral

$$s = -4 a \text{Cos } \frac{1}{2} \varphi + \text{Const.}$$

Ist $s = 0$ für $\varphi = 0$, so hat man

$$\text{Const} = 4a,$$

und daher ist der gesuchte Bogen $AM = s$ der Cyclois

$$s = 4a(1 - \text{Cos } \frac{1}{2} \varphi) = 8a \text{Sin}^2 \frac{1}{4} \varphi.$$

Nimmt man diesen Ausdruck von s für den Werth $\varphi = 180^\circ$, so hat man, da $\text{Sin } 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, den halben Bogen der Cyclois $AMD = 4a$, und daher den ganzen $AMDB = 8a$ oder gleich dem achtfachen Halbmesser des erzeugenden Kreises.

§. 239. (Rectification der Kettenlinie.) Für diese Curve haben wir oben (§. 206.) die Gleichung erhalten:

$$e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} = \frac{2(a+x)}{a},$$

wo (Fig. 92) $DP = x$ und $PM = y$ ist.

Setzen wir demnach

$$\frac{a+x}{a} = \frac{1}{\cos \varphi},$$

so hat man

$$e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} = \frac{2}{\cos \varphi},$$

oder, wenn man alle Glieder dieser Gleichung durch $e^{\frac{y}{a}}$ multiplicirt:

$$e^{\frac{2y}{a}} - \frac{2 \cdot e^{\frac{y}{a}}}{\cos \varphi} + 1 = 0.$$

Löst man diese für $e^{\frac{y}{a}}$ quadratische Gleichung auf, so erhält man

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{1}{\cos \varphi} + \operatorname{Tang} \varphi = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{Tang} \frac{90^\circ + \varphi}{2}.$$

so daß man daher die Kettenlinie auch durch folgende zwey Gleichungen ausdrücken kann:

$$x = \frac{a}{\cos \varphi} - a \quad \text{und}$$

$$y = a \log \operatorname{Tang} \frac{90^\circ + \varphi}{2}.$$

Davon sind die Differentiale

$$dx = \frac{a d\varphi \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \quad \text{und} \quad dy = \frac{a d\varphi}{\cos \varphi},$$

und damit wird die Gleichung (A)

$$ds = \frac{a d\varphi}{\cos^2 \varphi},$$

wovon das Integral (nach §. 230, IV.) ist

$$s = a \operatorname{Tang} \varphi.$$

§. 240. (Rectification der Spiralen.) Für die Spirale Archimed's ist (§. 208.)

also auch

$$v = 2\pi r,$$

$$dv = 2\pi dr.$$

Substituirt man diesen Werth von dr in der Gleichung (A') des §. 232, oder in

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 dv^2},$$

so erhält man

$$ds = \frac{dv}{2\pi} \sqrt{1 + v^2}.$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, sey $v = \text{Tang } \varphi$, also auch

$$dv = \frac{d\varphi}{\text{Cos}^2 \varphi},$$

so daß man daher hat

$$ds = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{\text{Cos}^3 \varphi},$$

und davon ist das Integral (nach §. 230, IV.)

$$s = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\text{Sin } \varphi}{\text{Cos}^2 \varphi} + \log \frac{1 + \text{Sin } \varphi}{\text{Cos } \varphi} \right].$$

Um dieß wieder durch v auszudrücken, hat man

$$\text{Tang } \varphi = v \quad \text{oder} \quad \frac{\text{Sin } \varphi}{\text{Cos}^2 \varphi} = v \cdot \sqrt{1 + v^2},$$

und überdieß

$$\frac{1 + \text{Sin } \varphi}{\text{Cos } \varphi} = v + \sqrt{1 + v^2},$$

so daß man daher für den Bogen s dieser Spirale erhält

$$s = \frac{1}{4\pi} [v \cdot \sqrt{1 + v^2} + \log(v + \sqrt{1 + v^2})].$$

Eben so hat man für die logarithmische Spirale

$$r = a^v,$$

also auch

$$dr = a^v \cdot dv \cdot \log a.$$

Setzt man daher $b = \log a$, so findet man

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 dv^2} = a^v \cdot dv \sqrt{1 + b^2},$$

woraus sofort (nach §. 227, I.) folgt

$$s = a^v \cdot \sqrt{\frac{1 + b^2}{b^2}} \quad \text{oder} \quad s = r \sqrt{\frac{1 + b^2}{b^2}}.$$

§. 241. (Rectification der Ellipse.) Die Gleichung der Ellipse ist (§. 198.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo $2a$ und $2b$ ihre große und kleine Axe bezeichnen. Zerlegt man diese Gleichung (nach §. 232, II.) mittelst einer Hilfsgröße φ in zwey andere, so daß man hat

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \varphi \\ y &= b \cos \varphi \end{aligned} \right\},$$

so ist auch

$$dx = a d\varphi \cos \varphi \quad \text{und} \quad dy = -b d\varphi \sin \varphi,$$

und daher geht die Gleichung (A) in folgende über:

$$ds = a d\varphi \cdot \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi},$$

wo der Kürze wegen $ae = \sqrt{a^2 - b^2}$ gesetzt worden ist.

Allein dieser Ausdruck läßt sich, wie man ihn auch, etwa durch Einführung anderer Hilfsgrößen, verändern mag, weder durch unsere Tafel (§. 230.), noch auch sonst durch irgend ein bekanntes Mittel integrieren.

In solchen Fällen bleibt nichts übrig, als den gegebenen Differentialausdruck in eine Reihe zu entwickeln, und die Glieder derselben einzeln zu integrieren. Diefes ist offenbar immer ausführbar, aber das Totalintegral wird auf diese Weise durch eine endlose Reihe gegeben, aus welcher man den Werth des gesuchten Integrals nur dann annähernd finden kann, wenn diese Reihe convergent ist.

Ist e eine gegen die Einheit nur geringe Größe, oder ist die Excentricität der Ellipse nur klein, ist also diese Ellipse selbst nur wenig von einem Kreise verschieden, so hat man, wenn man die Wurzelgröße $\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ nach dem Binom entwickelt:

$$ds = a d\varphi \left[1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} e^4 \sin^4 \varphi - \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} e^6 \sin^6 \varphi - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} e^8 \sin^8 \varphi - \dots \right].$$

Substituirt man dann die Werthe der Integrale

$$\int d\varphi \sin^3 \varphi, \quad \int d\varphi \sin^4 \varphi, \quad \int d\varphi \sin^6 \varphi$$

aus der Tafel des §. 230, Nr. I., so erhält man für den elliptischen Bogen s folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \frac{s}{a} = \varphi - \frac{1}{2}e^2 \left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2^2}\sin 2\varphi \right) \\ - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}e^4 \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\varphi - \frac{4}{2^4}\sin 2\varphi + \frac{1}{2^4 \cdot 2}\sin 4\varphi \right) \\ - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}e^6 \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\varphi - \frac{15}{2^6}\sin 2\varphi + \frac{6}{2^6 \cdot 2}\sin 4\varphi \right. \\ \left. - \frac{1}{2^6 \cdot 3}\sin 6\varphi \right) - \dots \end{aligned}$$

Um den Quadranten oder um den vierten Theil des Umfangs der Ellipse zu erhalten, wird man in dem vorhergehenden Ausdrücke den Winkel $\varphi = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ setzen. Nimmt man dann die so erhaltene Gröfse vier Mal, so hat man für den Umfang der ganzen Ellipse den Ausdruck

$$2a\pi \left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}e^3\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}e^4\right)^2 - \dots \right].$$

Für $a=b$ oder für $e=0$ erhält man den Umfang des Kreises gleich $2a\pi$, wie zuvor (§. 232.).

I. Für die Hyperbel hat man die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Setzt man also auch hier

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \sin \varphi, \\ y &= b \sqrt{-1} \cdot \cos \varphi, \end{aligned}$$

so erhält man für den hyperbolischen Bogen

$$s = \int a d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi},$$

wie zuvor, wo aber $ae = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist.

Man sieht, daß die elliptischen und hyperbolischen Bogen eine eigene Classe von transcendenten Gröfßen bilden. Die Parabel ist, wie wir oben gesehen haben (§. 233.), durch einen einfachen logarithmischen Ausdruck rectificabel, aber nicht die beyden andern Curven der zweyten Ordnung, die weder unmittelbar von dem Kreise, noch auch von den Logarithmen abhängen. Man pflegt Ausdrücke der Art

$$\int d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad \text{oder auch} \quad \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{u. dgl.}$$

elliptische Functionen zu nennen, die in der neueren Analysis eine sehr wichtige Rolle spielen, da man eine große Anzahl anderer Integralien auf sie eben so zurückführen kann, wie man z. B. die Ausdrücke

$$\int \frac{dx}{1+x} \quad \text{oder} \quad \int d\varphi \sin^2 \varphi, \quad \int \varphi d\varphi \cos \varphi \quad \text{u. dgl.}$$

in dem Vorhergehenden auf Kreisbogen zurückgeführt hat, so daß jene die Rectification der Ellipse, und diese die Rectification des Kreises als bekannt voraussetzen.

Die vorhergehenden Beyspiele werden hinreichend das Verfahren zeigen, welches man bey der Bestimmung der Länge der Curven zu beobachten hat. Wir wollen nun sehen, wie man auch den ebenen Raum bestimmen kann, der von den Bogen dieser Curven eingeschlossen wird.