

Acht und zwanzigstes Capitel.

Principien der Integralrechnung.

§. 226. (Erklärung.) Wir haben in dem Vorhergehenden die Gleichungen mehrerer krummen Linien und Flächen kennen gelernt, und da diese Gleichungen als der vollständige Ausdruck derjenigen Gegenstände im Raume, die sie repräsentiren, zu betrachten sind, so werden wir auch durch diese Gleichungen selbst in den Stand gesetzt, alle Eigenschaften, durch welche sich jene krummen Linien und Flächen unter einander unterscheiden und auszeichnen, aufzufinden, wie dieß z. B. bey der krummen Linie des zweyten Grades geschehen ist, die wir oben (§. 195. u. f. und §. 210.) umständlicher betrachtet haben.

Allein es gibt noch Fragen anderer Art, welche dieselben Gegenstände betreffen — Fragen, die wir bisher noch kaum berührt haben, und die sich aus jenen Gleichungen nicht, wenigstens nicht so unmittelbar, ableiten lassen, wie dieß allerdings mit den übrigen Eigenschaften dieser Curven und Flächen der Fall ist.

I. Wenn man z. B. die *Länge* einer krummen Linie, etwa der Ellipse, oder wenn man die *Fläche* sucht, welche sie einschließt, oder wenn man um die *Oberfläche* und um das *Volum* desjenigen Körpers fragt, der durch die Rotation dieser Ellipse um irgend eine Axe entstanden ist, so sieht man nicht sogleich, wie man, bloß mit Hülfe jener gegebenen Gleichung dieser Curve, zu Kenntnissen solcher Art gelangen kann.

Wir haben in dem Vorhergehenden, bey Gelegenheit der Tangenten und Krümmungshalbmesser, das Verhalten der kleinsten Theile oder der Elemente der Curven und Flächen gegen einander untersucht, und dasselbe, wie es die Natur der Sache fordert, aus den Differentialgleichungen dieser Curven abgeleitet. Auch haben wir bereits früher noch (Cap. X.) gesehen, daß man von jedem gegebenen Ausdruck zwischen endlichen Größen,

welcher Art derselbe auch seyn mag, das Differential desselben ohne Mühe und durch ein im Grunde sehr einfaches Verfahren ableiten kann.

II. Hier aber, bey der Beantwortung dieser neuen Fragen, handelt es sich offenbar um ein jenem vorhergehenden ganz entgegengesetztes Verfahren. Hier ist nämlich das Element des Bogens oder der Fläche einer Curve gegeben, und es soll daraus dieser Bogen oder diese Fläche selbst abgeleitet werden; oder mit anderen Worten, hier soll man aus einem gegebenen Differential rückwärts auf denjenigen *endlichen Ausdruck* schliessen, durch dessen Differentiirung jenes unendlich kleine Element entstanden ist. Man nennt aber diesen endlichen Ausdruck das *Integral* von seinem Differentialausdrucke, so wie auch das Verfahren, durch welches man von einem gegebenen Differentiale zu seinem Integrale gelangt, die *Integralrechnung* genannt wird. — Endlich pflegt man auch, so wie man oben das Differential eines endlichen Ausdruckes durch d angezeigt hat, das Integral eines gegebenen Differentials durch ein dem letzten vorgesetztes $\int$ auszudrücken. So haben wir z. B. in §. 51. für das Differential der Gröfse x^m erhalten:

$$d \cdot x^m = m x^{m-1} dx;$$

also wird auch umgekehrt das Integral von $m x^{m-1} dx$ durch $\int m x^{m-1} dx$ ausgedrückt werden, oder man wird haben:

$$\int m x^{m-1} dx = x^m;$$

und da die constante Gröfse m auf das Integrale selbst keinen weiteren Einfluß haben kann, so wird man dieselbe auch aufser dem Integralzeichen setzen können, wodurch man erhält:

$$m \int x^{m-1} dx = x^m;$$

oder auch, wenn man statt m die Gröfse $m+1$ setzt:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

In der That erhält man auch die Gröfse unter dem Integralzeichen wieder, wenn man das Integral selbst, nach den oben gegebenen Vorschriften, differentiirt. So gibt

$$d \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

oder, was dasselbe ist, so gibt

$$\frac{1}{m+1} \cdot d \cdot x^{m+1},$$

wenn man die GröÙe $d \cdot x^{m+1}$ nach §. 51. differentiirt, den vorhergehenden Ausdruck $x^m dx$ wieder, wie es seyn soll, da die beyden Symbole d und $\int$ eine einander direct entgegengesetzte Bedeutung haben.

III. Allein ganz eben so wird man auch den Ausdruck haben:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$$

wo C irgend eine constante GröÙe bezeichnet. Denn nimmt man wieder von den beyden Theilen dieser Gleichung das Differential, so erhält man für den ersten Theil

$$d \cdot \int x^m dx = x^m dx,$$

und für den zweyten, da die beständige GröÙe C , als solche, kein Differential hat:

$$d \cdot \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} + C \right) = x^m dx,$$

wie zuvor.

Da nämlich durch die Differentiation eines endlichen Ausdrucks, wie wir oben (§. 220.) gesehen haben, eine constante GröÙe verloren gehen kann, so wird man, so oft man von einem gegebenen Differential zu seinem Integrale übergegangen ist, dem letzten eine solche constante GröÙe wieder hinzufügen. Der eigentliche Werth dieser Constante kann übrigens in den meisten Fällen sehr leicht bestimmt werden. Denn hat man z. B. das Integral

$$y = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

gefunden, und weiß man, oder nimmt man an, daß dieses Integral $y = A$ für $x = a$ ist, so hat man

$$A = \frac{a^{m+1}}{m+1} + C,$$

also auch

$$C = A - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

Soll aber y mit x zugleich verschwinden, so hat man, wenn

$m+1$ positiv ist, auch $C=0$, u. s. f. in allen ähnlichen Fällen. Wir werden in der Folge diese *Constanten der Integration* bey jedem Integrale als schon betrachtet voraussetzen, ohne ihrer immer ausdrücklich zu erwähnen.

§. 227. (Einfachste Integralformeln.) Alle analytischen Ausdrücke, mit welchen wir uns bisher beschäftigt haben, sind entweder aus Potenzen, oder Logarithmen, Exponentialgrößen, oder endlich aus den sogenannten trigonometrischen Functionen $\sin x$, $\text{Arc Sin } x$ u. f. zusammengesetzt; und da wir bereits oben (Cap. X. und §. 102.) die Differentialien dieser einzelnen Classen von Größen gefunden haben, so ist dadurch auch das Differential eines jeden aus ihnen zusammengesetzten Ausdrucks gegeben. Aus diesem Grunde ist die Differentialrechnung als ein vollendeter, für sich abgeschlossener Theil der mathematischen Analysis zu betrachten, und nicht mehr sie selbst, sondern nur die Anwendung ihrer Grundsätze auf verschiedene Probleme kann Veranlassung zu weiteren Entdeckungen seyn.

Nicht so verhält es sich mit der Integralrechnung. Die Formen, unter welchen die Differentialausdrücke von einer oder auch von mehreren veränderlichen Größen auftreten können, sind so mannigfaltig, und die Veränderungen (vergl. §. 220.), die sie erlitten haben, können so verschieden seyn, daß sie sich nicht leicht auf einzelne Vorschriften, wie bey der Differentialrechnung, noch auf bestimmte, das Ganze umfassende Classen zurückführen lassen, und daß es oft sehr schwer, ja nicht selten sogar unmöglich ist, denjenigen geschlossenen endlichen Ausdruck, aus welchem das vorgelegte Differential entstanden ist, d. h. das Integral desselben anzugeben.

Aus dieser Ursache ist die Integralrechnung, obschon auf sie vielleicht mehr Mühe und Scharfsinn, als auf irgend einen andern Zweig der Mathematik verwendet worden ist, noch immer, einige allerdings sehr wichtige Partien derselben ausgenommen, mehr als ein Aggregat von oft nur wenig unter einander zusammenhängenden Theilen, denn als ein wissenschaftlich geordnetes, in sich abgeschlossenes Ganze zu betrachten. Und dieß ist zugleich der Grund, warum sie noch so wenig in diejenigen Schriften aufgenommen worden ist, die sich mit dem ersten Unterrichte

in den mathematischen Wissenschaften beschäftigt haben, da die diesem Gegenstande ausschliesslich gewidmeten Werke (z. B. *Euler's Instit. calculi integralis*, 4 Vol. IV., oder *Lacroix traité du calc. intégral*, 3 Vol. IV.) für jenen Zweck zu voluminös und auch ohne Weitläufigkeit keines angemessenen Auszugs fähig sind. So ist es gekommen, daß die wichtigsten und interessantesten Resultate der neueren Analysis immer nur als der Antheil einiger Wenigen, die sich ausschliessend der Wissenschaft widmen, betrachtet wurden, und daß sie von jenen Lehrbüchern, und somit auch von der Kenntniß des bey weitem grössten Theiles der Leser, immer fern geblieben sind, indem man auf alle diese schönen und bewunderungswürdigen Entdeckungen der Neueren verzichtend, sich mit den wenigen und kargen Lehrsätzen begnügte, welche die alten Griechen, mühsam genug, da ihnen unsere Analysis fremd war, über die Kugel und den Cylinder gefunden hatten.

Versuchen wir es daher, einen anderen Weg einzuschlagen, und sehen wir zu, ob wir, auch ohne Hülfe jenes gelehrten Apparats von so vielen Bänden, auf eine einfachere Weise zu der Beantwortung der oben (§. 226.) aufgestellten Fragen gelangen können.

Da, nach dem Vorhergehenden, das Verfahren der Integralrechnung das Umgekehrte von dem der Differentialrechnung ist, so werden wir zuerst, durch eine bloße einfache Inversion der oben (§. 54. und 102.) aufgestellten Formeln der Differentialrechnung, sofort auch eben so viele Fundamentalausdrücke für die Integralrechnung erhalten, so daß man daher folgende einfache Ausdrücke haben wird.

I. Durch Umkehrung der Formeln des §. 54:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log \text{nat } x,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log \text{nat } a},$$

$$\int e^x dx = e^x, \text{ wo } \log \text{nat } e = 1.$$

II. Und eben so durch Umkehrung der Formeln des §. 102:

$$\int d\varphi \sin \varphi = -\cos \varphi,$$

$$\int d\varphi \cos \varphi = \sin \varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = \sec \varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = -\operatorname{Cosec} \varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \operatorname{Tang} \varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -\operatorname{Cotang} \varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} \varphi = \log \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \log \operatorname{Tang} \frac{90^\circ + \varphi}{2} = \log \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

III. Aus den Gleichungen des Nr. II. könnte man sofort mehrere andere öfter vorkommende Integralformeln, z. B. die von

$$\int \frac{dx}{1 \pm x^2} \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 \pm x^2}}$$

ableiten.

Setzt man nämlich die Größe $x = \sin \varphi$, so hat man $dx = d\varphi \cos \varphi$, und daher

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \varphi;$$

oder, was dasselbe ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{Arc} \sin x \quad . \quad . \quad (1).$$

Geht dann in diesem Ausdrucke x in $x\sqrt{-1}$ über, so ist

$$\sqrt{-1} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \varphi, \quad \text{oder auch} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = -\varphi \cdot \sqrt{-1}.$$

Allein nach §. 105, II. ist

$$-\varphi \cdot \sqrt{-1} = \log (\cos \varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi) = \log (\sqrt{1 + x^2} + x);$$

also ist auch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \log (x + \sqrt{1 + x^2}) \quad . \quad . \quad (2).$$

Ganz eben so erhält man, wenn man $x = \operatorname{Tang} \varphi$ setzt:

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \int d\varphi = \varphi,$$

also auch

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc Tang } x \quad . \quad . \quad (3);$$

und wenn man in diesem Ausdrucke $x\sqrt{-1}$ statt x setzt:

$$\sqrt{-1} \int \frac{dx}{1-x^2} = \varphi \quad \text{oder} \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = -\varphi \cdot \sqrt{-1},$$

also auch, wenn man statt $-\varphi \cdot \sqrt{-1}$ wieder den vorigen Werth substituirt, da

$$\text{Sin } \varphi = \frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und} \quad \text{Cos } \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ist,}$$

$$-\varphi \cdot \sqrt{-1} = \log \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right),$$

und daher

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \log \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \quad . \quad . \quad (4).$$

§. 228. (Integration des Ausdrucks $d\varphi \text{Sin}^m \varphi \text{Cos}^n \varphi$).
Durch ein dem vorhergehenden (§. 227, III.) ähnliches Verfahren, oder auch durch andere Mittel, könnte man eben so die Integrale

$$\int x^m dx (1 \pm ax)^n \quad \text{und} \quad \int x^m dx (1 \pm ax^2)^n \quad \text{u. f.}$$

ableiten, wo m und n ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen bezeichnen; und dieß ist es auch, was in den oben angeführten Werken geschehen, und bisher in allen anderen Schriften über diesen Gegenstand beybehalten worden ist.

Allein zu unserer Absicht wird es angemessener seyn, aus den einfachen, in §. 227, Nr. II. gegebenen trigonometrischen Ausdrücken, die sich im Grunde, wie wir oben (§. 102, I.) gesehen haben, auf die einzige Grundformel

$$d \cdot \text{Sin } \varphi = d\varphi \text{Cos } \varphi \quad \text{oder} \quad \int d\varphi \text{Cos } \varphi = \text{Sin } \varphi$$

zurückführen lassen, das Integral

$$\int d\varphi \text{Sin}^m \varphi \text{Cos}^n \varphi$$

zu entwickeln, wo m und n bloß ganze, übrigens entweder positive oder negative Zahlen bezeichnen, indem dieses Integral, wie wir bald sehen werden, zur Auflösung der hier in Rede stehenden Probleme vollkommen hinreicht.

I. So lange nun die Größen m und n bloß positive ganze Zahlen andeuten, könnte man das gesuchte Integral

$$\int d\varphi \sin^m \varphi \cos^n \varphi$$

unmittelbar aus den Gleichungen des §. 99. ableiten, welche die Potenzen der Sinus und Cosinus der einfachen Bogen durch die Sinus und Cosinus derselben vielfachen Bogen geben. Auf diese Weise würden uns diese Gleichungen für die Integralrechnung von nicht geringerem Nutzen seyn, als es die ihnen entgegengesetzten des unmittelbar vorhergehenden §. 98. für die Bestimmung der regelmässigen Polygone (§. 121.) gewesen sind.

Wollte man z. B. das Integral

$$\int d\varphi \sin^3 \varphi$$

finden, so hätte man, nach §. 99:

$$4 \sin^3 \varphi = 3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi;$$

also ist auch sofort, nach den Fundamentalformeln des §. 227, Nr. II.:

$$\int d\varphi \sin^3 \varphi = \frac{3}{4} \int d\varphi \sin \varphi - \frac{1}{4} \int d\varphi \sin 3 \varphi,$$

das heisst:

$$\int d\varphi \sin^3 \varphi = \frac{1}{12} \cos 3 \varphi - \frac{3}{4} \cos \varphi.$$

Suchte man eben so das Integral

$$\int d\varphi \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi,$$

so hätte man, nach §. 99:

$$\sin^2 \varphi \cos^3 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \varphi) \cdot \frac{1}{4} (3 \cos \varphi + \cos 3 \varphi),$$

oder wenn man dieses Product entwickelt:

$$\begin{aligned} & \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi \\ &= \frac{1}{8} (3 \cos \varphi - 3 \cos \varphi \cos 2 \varphi + \cos 3 \varphi - \cos 2 \varphi \cos 3 \varphi). \end{aligned}$$

Da man aber nach den ersten Gleichungen des §. 96. hat:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta),$$

so hat man auch

$$\cos \varphi \cos 2 \varphi = \frac{1}{2} (\cos \varphi + \cos 3 \varphi) \quad \text{und}$$

$$\cos 2 \varphi \cos 3 \varphi = \frac{1}{2} (\cos \varphi + \cos 5 \varphi),$$

so dafs daher ist:

$$d\varphi \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi = \frac{d\varphi}{16} (2 \cos \varphi - \cos 3 \varphi - \cos 5 \varphi),$$

und diefs wieder nach §. 227, Nr. II. integrirt, gibt sofort

$$\int d\varphi \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi = \frac{1}{16} (2 \sin \varphi - \frac{1}{3} \sin 3 \varphi - \frac{1}{5} \sin 5 \varphi).$$

Man sieht, wie sich dieses Verfahren auf alle Werthe von

$$\int d\varphi \sin^m \varphi \cos^n \varphi$$

ohne Mühe fortsetzen läßt, wenn m und n ganze und positive Zahlen bedeuten.

II. Allein für negative Werthe dieser Zahlen läßt sich jene Methode nicht unmittelbar anwenden. Statt aber für die letzteren wieder ein zweytes, jenes gleichsam ergänzende Verfahren aufzusuchen, wollen wir eine andere, beyden Bedingungen zugleich entsprechende Methode aufstellen.

Nach einem der ersten Grundsätze der Differentialrechnung (§. 49.) ist das Differential des Products von zwey veränderlichen Größen x und y

$$d \cdot xy = x dy + y dx,$$

also ist auch, wenn man von allen Gliedern dieser Gleichung das Integral nimmt:

$$\int y dx = xy - \int x dy.$$

Dieser einfache, aber durch das ganze Gebiet der Integralrechnung höchst fruchtbare Satz zeigt, daß, wenn y irgend eine Function von x , und wenn das Integral $\int x dy$ bereits bekannt ist, daraus auch sofort das Integral $\int y dx$, oder umgekehrt, abgeleitet werden kann *). Man sieht, daß bey diesem Verfahren alles

*) Um dieß durch ein einfaches Beyspiel zu zeigen, sey das Integral

$$\int u^2 \cdot (\log \text{nat } u) \cdot du$$

zu suchen. Setzt man den gegebenen Ausdruck $u^2 (\log u) du = y dx$, so kann man, dem beabsichtigten Zwecke gemäß,

$$y = \log u \quad \text{und} \quad dx = u^2 du$$

nehmen, wodurch man erhält:

$$dy = \frac{du}{u} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{3} u^3.$$

Substituirt man dieß in dem vorhergehenden allgemeinen Ausdrucke, so hat man, da

$$\int x dy = \frac{1}{3} \int u^2 du = \frac{1}{9} u^3$$

$$\text{und} \quad \int y dx = \int u^2 (\log u) du$$

ist, für das gesuchte Integral

$$\int u^2 (\log u) du = \frac{1}{9} u^3 \log u - \frac{1}{9} u^3.$$

Diese Art zu integriren wird die theilweise Integration (*Intégration par parties*) genannt.

auf eine schickliche Trennung des vorgelegten Integralausdrucks in zwey Factoren y und dx , oder x und dy ankömmt, wo von den beyden Producten $y dx$ oder $x dy$ die Integration des einen bereits bekannt ist.

Um diesen allgemeinen Ausdruck auf unser gegenwärtiges Problem, d. h. auf die Bestimmung des Integrals $\int d\varphi \sin^m \varphi \cos^n \varphi$ anzuwenden, wollen wir

$$y = (\cos \varphi)^{m+n+2} \quad \text{und} \quad dx = \frac{(\text{Tang } \varphi)^m}{(\cos \varphi)^2} d\varphi$$

setzen, wodurch daher auch wird:

$$dy = -(m+n+2) (\cos \varphi)^{m+n+1} \sin \varphi d\varphi$$

und

$$x = \frac{1}{m+1} (\text{Tang } \varphi)^{m+1}.$$

Substituirt man diese Werthe von x , y , dx und dy in der vorhergehenden allgemeinen Gleichung, so erhält man

$$\int d\varphi \sin^m \varphi \cos^n \varphi = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} \varphi \cos^{n+1} \varphi + \frac{m+n+2}{m+1} \int d\varphi \sin^{m+2} \varphi \cos^n \varphi \dots (A),$$

oder auch umgekehrt, wenn man das letzte Glied dieses Ausdrucks zuerst setzt:

$$\int d\varphi \sin^{m+2} \varphi \cos^n \varphi = -\frac{1}{m+n+2} \sin^{m+1} \varphi \cos^{n+1} \varphi + \frac{m+1}{m+n+2} \int d\varphi \sin^m \varphi \cos^n \varphi \dots (A');$$

und diese Gleichung (A) oder (A') ist es, die uns das gesuchte Integral

$$\int d\varphi \sin^m \varphi \cos^n \varphi$$

für alle ganzen, sowohl positiven als negativen Werthe der Grössen m und n geben wird.

Setzt man z. B. in der Gleichung (A') die Gröfse $n=0$, so erhält man

$$\int d\varphi \sin^{m+2} \varphi = -\frac{1}{m+2} \sin^{m+1} \varphi \cos \varphi + \frac{m+1}{m+2} \int d\varphi \sin^m \varphi.$$

Da man aber das Integral des letzten Theils für $m=0$ und $m=1$, nämlich

$$\int d\varphi \sin^0 \varphi = \varphi \quad \text{und} \quad \int d\varphi \sin \varphi = -\cos \varphi,$$

schon aus dem Vorhergehenden (§. 227, II.) kennt, so erhält man, wenn man m nach der Ordnung gleich 0, 1, 2, 3, ... setzt:

$$\begin{aligned} \int d\phi \sin^2 \phi &= -\frac{1}{2} \sin \phi \cos \phi + \frac{1}{2} \phi, \\ \int d\phi \sin^3 \phi &= -\frac{1}{3} \sin^2 \phi \cos \phi - \frac{2}{3} \cos \phi, \\ \int d\phi \sin^4 \phi &= -\frac{1}{4} \sin^3 \phi \cos \phi + \frac{3}{4} \int d\phi \sin^2 \phi, \\ \int d\phi \sin^5 \phi &= -\frac{1}{5} \sin^4 \phi \cos \phi + \frac{4}{5} \int d\phi \sin^3 \phi \text{ u. f.,} \end{aligned}$$

in welchen Ausdrücken man noch, wenn man will, die Potenzen von $\sin \phi$ nach den erwähnten Ausdrücken des §. 99. in die Sinus und Cosinus dieser vielfachen Winkel verwandeln kann.

Setzt man dann in diesen Ausdrücken $90 - \phi$ statt ϕ , so erhält man auch die analogen Integrale von

$$d\phi \cos^2 \phi, d\phi \cos^3 \phi, d\phi \cos^4 \phi \text{ u. f.}$$

Wenn man also in der allgemeinen Gleichung (A') die GröÙe $n = 0$ setzt, so erhält man das Integral von

$$d\phi \sin^{m+2} \phi, \text{ wo } m = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ ist.}$$

Setzt man eben so in der Gleichung (A') statt n die GröÙe $1, 2, 3, \dots$, so erhält man die Integrale von

$$\begin{aligned} d\phi \sin^{m+2} \phi \cos \phi, \\ d\phi \sin^{m+2} \phi \cos^2 \phi, \\ d\phi \sin^{m+3} \phi \cos^3 \phi \text{ u. f.,} \end{aligned}$$

wo wieder m nach der Ordnung die Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$ bezeichnet.

Setzt man aber in der Gleichung (A) die GröÙe m gleich $-m$, so hat man

$$\int \frac{d\phi \cos^n \phi}{\sin^m \phi} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{\cos^{n+1} \phi}{\sin^{m-1} \phi} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{d\phi \cos^n \phi}{\sin^{m-2} \phi}$$

und in diesem Ausdrucke gibt

$$n = 0 \text{ das Integral von } \frac{d\phi}{\sin^m \phi} \text{ für } m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1 \text{ » » » } \frac{d\phi \cos \phi}{\sin^m \phi},$$

$$n = 2 \text{ » » » } \frac{d\phi \cos^2 \phi}{\sin^m \phi} \text{ u. f.;}$$

und eben so erhält man auch für $n = -1, -2, -3, \dots$ das Integral von

$$\frac{d\phi}{\sin^m \phi \cos \phi}, \frac{d\phi}{\sin^m \phi \cos^2 \phi}, \frac{d\phi}{\sin^m \phi \cos^3 \phi} \text{ u. f. für } m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

und so fort für alle besonderen Werthe, die man den beyden Gröſſen m und n geben kann. Man findet am Schluſſe dieſes Capitels die vorzüglichſten zur bequemen Übersicht zuſammengestellt, ſo daſs man demnach die ganze Integralrechnung, ſo fern ſie ſich auf die Auflöſung der oben (§. 226, I.) aufgestellten Probleme bezieht, aus der einzigen Gleichung (A), wie aus einer ihnen allen gemeinſchaftlichen Quelle, eben ſo ableiten kann, wie wir oben die Trigonometrie, und durch ſie die ganze Geometrie, deren eigentliche Basis die Trigonometrie iſt, aus der einzigen Gleichung (A) des §. 91. abgeleitet haben.

§. 229. (Integration des Ausdrucks $\phi^m d\phi \sin \phi$.)
Wenn man in der vorhergehenden allgemeinen Gleichung

die Gröſſe

$$\int y dx = xy - \int x dy,$$

also auch

$$dy = m\phi^{m-1} d\phi \quad \text{und} \quad x = -\cos \phi$$

ſetzt, ſo erhält man ſofort

$$\int \phi^m d\phi \sin \phi = -\phi^m \cos \phi + m \int \phi^{m-1} d\phi \cos \phi.$$

Iſt dann wieder

$$y = \phi^{m-1} \quad \text{und} \quad dx = d\phi \cos \phi,$$

ſo findet man auf dieſelbe Weiſe

$$\int \phi^{m-1} d\phi \cos \phi = \phi^{m-1} \sin \phi - (m-1) \int \phi^{m-2} d\phi \sin \phi,$$

und ganz eben ſo gibt

$$y = \phi^{m-2} \quad \text{und} \quad dx = d\phi \sin \phi$$

den Ausdruck

$$\int \phi^{m-2} d\phi \sin \phi = -\phi^{m-2} \cos \phi - (m-2) \int \phi^{m-3} d\phi \cos \phi.$$

Setzt man dieſes Verfahren fort, und ſubſtituirt dann die einzelnen Integrale in einander, ſo erhält man

$$\begin{aligned} \int \phi^m d\phi \sin \phi = & -\phi^m \cos \phi \\ & + m\phi^{m-1} \sin \phi \\ & + m(m-1)\phi^{m-2} \cos \phi \\ & - m(m-1)(m-2)\phi^{m-3} \sin \phi - + \dots, \end{aligned}$$

wovon das Geſetz des Fortgangs deutlich iſt.

Ganz auf dieselbe Art erhält man auch den dem vorhergehenden analogen Ausdruck:

$$\begin{aligned} \int \varphi^m d\varphi \cos \varphi &= \varphi^m \sin \varphi \\ &+ m \varphi^{m-1} \cos \varphi \\ &- m(m-1) \varphi^{m-2} \sin \varphi \\ &- m(m-1)(m-2) \varphi^{m-3} \cos \varphi + + \dots, \end{aligned}$$

und diese beyden Ausdrücke gelten für alle Werthe von m . Wenn aber m eine ganze positive Zahl ist, ein Fall, der am häufigsten vorkommt, so brechen beyde Reihen ab, und dann wird das Integral von

$$\varphi^m d\varphi \sin \varphi \quad \text{und} \quad \varphi^m d\varphi \cos \varphi$$

durch einen endlichen oder geschlossenen Ausdruck gegeben.

§. 230. (Zusammenstellung der vorhergehenden Ausdrücke.) Ehe wir die einzelnen Formeln, welche nach dem Vorhergehenden aus der allgemeinen Gleichung (A) entspringen, zum bequemen Gebrauche sammeln, wollen wir ihnen noch einige Bemerkungen vorausschicken.

Erstens gelten alle diese Ausdrücke auch dann, wenn man in ihnen die GröÙe φ in $90 - \varphi$ verwandelt, das heißt (nach §. 94, B), wenn man

statt	setzt
φ	$90 - \varphi$,
$d\varphi$	$- d\varphi$,
$\sin \varphi$	$+$ $\cos \varphi$,
$\cos \varphi$	$+$ $\sin \varphi$,
$\sin 2\varphi$	$+$ $\sin 2\varphi$,
$\cos 2\varphi$	$+$ $\cos 2\varphi$,
$\sin 3\varphi$	$-$ $\cos 3\varphi$,
$\cos 3\varphi$	$-$ $\sin 3\varphi$,
$\sin 4\varphi$	$-$ $\sin 4\varphi$,
$\cos 4\varphi$	$+$ $\cos 4\varphi$,
$\sin 5\varphi$	$+$ $\cos 5\varphi$,
$\cos 5\varphi$	$+$ $\sin 5\varphi$ u. f.

Demnach erhält man z.B. durch den Ausdruck $\int d\varphi \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi$ der folgenden Tafel auch sogleich den von $\int d\varphi \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi$,

daher auch der letzte, als überflüssig, nicht durchaus in der Tafel erscheint. Die Tafel gibt nämlich

$$\int d\varphi \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{5} \cos 5\varphi - \frac{1}{3} \cos 3\varphi - 2 \cos \varphi \right),$$

also ist auch sofort

$$\int d\varphi \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi = -\frac{1}{16} \left(\frac{1}{5} \sin 5\varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi - 2 \sin \varphi \right).$$

Zweitens kommen, aus demselben Grunde, auch Ausdrücke der Art

$$\int d\varphi \operatorname{Tang}^3 \varphi \quad \text{oder} \quad \int d\varphi \operatorname{Sec} \varphi \operatorname{Tang}^2 \varphi \quad \text{u. f.}$$

nicht unmittelbar in der Tafel vor, da sie schon in den ihnen gleichgeltenden

$$\int \frac{d\varphi \sin^3 \varphi}{\cos^3 \varphi} \quad \text{oder} \quad \int \frac{d\varphi \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} \quad \text{u. f.}$$

enthalten sind.

Drittens endlich läßt sich das allen Formeln dieser Tafel zu Grunde liegende Integral

$$\int d\varphi \sin^m \varphi \cos^n \varphi$$

auch auf die zusammengesetzte Formel anwenden:

$$\int d\varphi \sin^m (a\varphi + b) \cos^n (a\varphi + b),$$

wo a und b constante Größen bezeichnen, wenn man nur in den Ausdrücken der Tafel $a\varphi + b$ statt φ setzt, und dann das Ganze durch die Größe a dividirt,

Nämlich

$$\int d\varphi \cos \varphi = \sin \varphi \quad \text{gibt}$$

$$\int d\varphi \cos (a\varphi + b) = \frac{1}{a} \sin (a\varphi + b);$$

$$\int d\varphi \sin^2 \varphi \cos \varphi = \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \quad \text{gibt sofort}$$

$$\int d\varphi \sin^2 (a\varphi + b) \cos (a\varphi + b) = \frac{1}{3a} \sin^3 (a\varphi + b);$$

$$\int \frac{d\varphi \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} = -\sin \varphi + \log \operatorname{Tang} \frac{90^\circ + \varphi}{2} \quad \text{gibt eben so}$$

$$\int \frac{d\varphi \sin^2 (a\varphi + b)}{\cos (a\varphi + b)} = -\frac{1}{a} \sin (a\varphi + b) + \frac{1}{a} \log \operatorname{Tang} \frac{90^\circ + a\varphi + b}{2}.$$

I n t e g r a l t a f e l.

1. $\int d\varphi \sin^m \varphi$, wo $m=1, 2, 3, \dots$

$$\int d\varphi \sin \varphi = -\cos \varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^2 \varphi = -\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi,$$

$$\begin{aligned}\int d\varphi \sin^2 \varphi &= \frac{1}{3} \cos 3\varphi - \frac{1}{3} \cos \varphi, \\ \int d\varphi \sin^4 \varphi &= \frac{1}{5} \sin 4\varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{3}{8} \varphi, \\ \int d\varphi \sin^5 \varphi &= -\frac{1}{80} \cos 5\varphi + \frac{5}{48} \cos 3\varphi - \frac{5}{8} \cos \varphi, \\ \int d\varphi \sin^6 \varphi &= -\frac{1}{192} \sin 6\varphi + \frac{3}{64} \sin 4\varphi - \frac{15}{64} \sin 2\varphi + \frac{5}{16} \varphi.\end{aligned}$$

II. $\int d\varphi \cos^m \varphi$.

$$\begin{aligned}\int d\varphi \cos \varphi &= \sin \varphi, \\ \int d\varphi \cos^2 \varphi &= \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi, \\ \int d\varphi \cos^3 \varphi &= \frac{1}{12} \sin 3\varphi + \frac{3}{4} \sin \varphi, \\ \int d\varphi \cos^4 \varphi &= \frac{1}{32} \sin 4\varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{3}{8} \varphi, \\ \int d\varphi \cos^5 \varphi &= \frac{1}{80} \sin 5\varphi + \frac{5}{48} \sin 3\varphi + \frac{5}{8} \sin \varphi, \\ \int d\varphi \cos^6 \varphi &= \frac{1}{192} \sin 6\varphi + \frac{3}{64} \sin 4\varphi + \frac{15}{64} \sin 2\varphi + \frac{5}{16} \varphi.\end{aligned}$$

III. $\int \frac{d\varphi}{\sin^m \varphi}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} &= \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} \varphi, \\ \int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} &= -\operatorname{Cotang} \varphi, \\ \int \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi} &= -\frac{\cos \varphi}{2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi}, \\ \int \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi} &= \operatorname{Cotang} \varphi - \frac{1}{3} \operatorname{Cotang}^3 \varphi, \\ \int \frac{d\varphi}{\sin^5 \varphi} &= -\left(\frac{1}{4 \sin^4 \varphi} + \frac{3}{8 \sin^2 \varphi} \right) \cos \varphi + \frac{3}{8} \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi}, \\ \int \frac{d\varphi}{\sin^6 \varphi} &= -\left(\frac{1}{5 \sin^5 \varphi} + \frac{4}{15 \sin^3 \varphi} + \frac{8}{15 \sin \varphi} \right) \cos \varphi.\end{aligned}$$

IV. $\int \frac{d\varphi}{\cos^m \varphi}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} &= \log \operatorname{Tang} \frac{90^\circ + \varphi}{2}, \\ \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} &= \operatorname{Tang} \varphi, \\ \int \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} &= \frac{\sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi} + \frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}, \\ \int \frac{d\varphi}{\cos^4 \varphi} &= \operatorname{Tang} \varphi + \frac{1}{3} \operatorname{Tang}^3 \varphi, \\ \int \frac{d\varphi}{\cos^5 \varphi} &= \left(\frac{1}{4 \cos^4 \varphi} + \frac{3}{8 \cos^2 \varphi} \right) \sin \varphi + \frac{3}{8} \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}, \\ \int \frac{d\varphi}{\cos^6 \varphi} &= \left(\frac{1}{5 \cos^5 \varphi} + \frac{4}{15 \cos^3 \varphi} + \frac{8}{15 \cos \varphi} \right) \sin \varphi.\end{aligned}$$

V. $\int d\varphi \sin^m \varphi \cos \varphi$.

$$\int d\varphi \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{1}{4} \cos 2\varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^2 \varphi \cos \varphi = -\frac{1}{12} \sin 3\varphi + \frac{1}{4} \sin \varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^3 \varphi \cos \varphi = \frac{1}{32} \cos 4\varphi - \frac{1}{8} \cos 2\varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^4 \varphi \cos \varphi = \frac{1}{80} \sin 5\varphi - \frac{1}{16} \sin 3\varphi + \frac{1}{8} \sin \varphi.$$

VI. $\int d\varphi \sin^m \varphi \cos^2 \varphi$.

$$\int d\varphi \sin \varphi \cos^2 \varphi = -\frac{1}{12} \cos 3\varphi - \frac{1}{4} \cos \varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = -\frac{1}{32} \sin 4\varphi + \frac{1}{8} \varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi = \frac{1}{80} \cos 5\varphi - \frac{1}{48} \cos 3\varphi - \frac{1}{8} \cos \varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi = \frac{1}{192} \sin 6\varphi - \frac{1}{64} \sin 4\varphi - \frac{1}{64} \sin 2\varphi + \frac{1}{16} \varphi.$$

VII. $\int d\varphi \sin^m \varphi \cos^3 \varphi$.

$$\int d\varphi \sin \varphi \cos^3 \varphi = \frac{1}{4} \sin 4\varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi = \frac{1}{80} \sin 5\varphi - \frac{1}{48} \sin 3\varphi + \frac{1}{8} \sin \varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi = \frac{1}{192} \cos 6\varphi - \frac{3}{64} \cos 2\varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^4 \varphi \cos^3 \varphi = \frac{1}{448} \sin 7\varphi - \frac{1}{320} \sin 5\varphi - \frac{1}{64} \sin 3\varphi + \frac{3}{64} \sin \varphi.$$

VIII. $\int d\varphi \sin^m \varphi \cos^4 \varphi$.

$$\int d\varphi \sin \varphi \cos^4 \varphi = -\frac{1}{80} \cos 5\varphi - \frac{1}{16} \cos 3\varphi - \frac{1}{8} \cos \varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi = -\frac{1}{192} \sin 6\varphi - \frac{1}{64} \sin 4\varphi - \frac{1}{64} \sin 2\varphi - \frac{1}{16} \varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^3 \varphi \cos^4 \varphi = \frac{1}{448} \cos 7\varphi + \frac{1}{320} \cos 5\varphi - \frac{1}{64} \cos 3\varphi$$

$$- \frac{1}{64} \cos \varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi = \frac{1}{1024} \sin 8\varphi - \frac{1}{128} \sin 4\varphi + \frac{9}{128} \varphi.$$

IX. $\int \frac{d\varphi \sin^m \varphi}{\cos \varphi}$.

$$\int d\varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\log \cos \varphi,$$

$$\int d\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} = -\sin \varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

$$\int d\varphi \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \int \frac{d\varphi \sin \varphi}{\cos \varphi},$$

$$\int d\varphi \frac{\sin^4 \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{1}{3} \sin^3 \varphi - \sin \varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

X. $\int \frac{d\varphi \sin^m \varphi}{\cos^2 \varphi}$.

$$\int d\varphi \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi},$$

$$\int d\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \text{Tang} \varphi - \varphi,$$

$$\int d\varphi \frac{\sin^5 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \cos \varphi + \frac{1}{\cos \varphi},$$

$$\int d\varphi \frac{\sin^4 \varphi}{\cos^2 \varphi} = -\frac{1}{2} \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi} + \frac{1}{2} \text{Tang} \varphi - \frac{1}{2} \varphi.$$

$$\text{XI. } \int \frac{d\varphi \sin^m \varphi}{\cos^3 \varphi}.$$

$$\int d\varphi \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{1}{2 \cos^2 \varphi},$$

$$\int d\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{\sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi} - \frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

$$\int d\varphi \frac{\sin^3 \varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} + \log \cos \varphi,$$

$$\int d\varphi \frac{\sin^4 \varphi}{\cos^3 \varphi} = -\frac{\sin^3 \varphi}{\cos^2 \varphi} + \frac{3}{2} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{5}{2} \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

$$\text{XII. } \int \frac{d\varphi \sin^m \varphi}{\cos^4 \varphi}.$$

$$\int d\varphi \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} = \frac{1}{3 \cos^3 \varphi},$$

$$\int d\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} = \frac{1}{3} \text{Tang}^3 \varphi,$$

$$\int d\varphi \frac{\sin^3 \varphi}{\cos^4 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} - \frac{2}{3 \cos^3 \varphi},$$

$$\int d\varphi \frac{\sin^4 \varphi}{\cos^4 \varphi} = \frac{1}{3} \text{Tang}^3 \varphi - \text{Tang} \varphi + \varphi.$$

$$\text{XIII. } \int \frac{d\varphi}{\sin^m \varphi \cos \varphi}.$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} = \log \text{Tang} \varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} = -\frac{1}{\sin \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi \cos \varphi} = -\frac{1}{2 \sin^2 \varphi} + \log \text{Tang} \varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi \cos \varphi} = -\frac{1}{3 \sin^3 \varphi} - \frac{1}{\sin \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

$$\text{XIV. } \int \frac{d\varphi}{\sin^m \varphi \cos^2 \varphi}.$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = -2 \text{Cotang} 2\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi \cos^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} + 3 \int \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi \cos^2 \varphi} = -\frac{1}{3 \cos \varphi \sin^3 \varphi} - \frac{8}{3} \cotang 2\varphi.$$

$$\text{XV. } \int \frac{d\varphi}{\sin^m \varphi \cos^3 \varphi}.$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos^3 \varphi} = \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} + \log \Tang \varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \cos^3 \varphi} = \frac{1}{2 \sin \varphi \cos^2 \varphi} - \frac{3}{2 \sin \varphi} + \frac{3}{2} \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi \cos^3 \varphi} = -\frac{2 \cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi} + 2 \log \Tang \varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi \cos^3 \varphi} = \frac{1}{2 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi} + \frac{5}{2} \int \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi \cos \varphi}.$$

$$\text{XVI. } \int \frac{d\varphi}{\sin^m \varphi \cos^4 \varphi}.$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos^4 \varphi} = \frac{1}{3 \cos^3 \varphi} + \frac{1}{\cos \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \cos^4 \varphi} = \frac{1}{3 \sin \varphi \cos^3 \varphi} - \frac{8}{3} \cotang 2\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi \cos^4 \varphi} = \frac{1}{3 \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi} + \frac{5}{3 \sin^2 \varphi \cos \varphi} + 5 \int \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi \cos^4 \varphi} = -\frac{8 \cos 2\varphi}{3 \sin^3 2\varphi} - \frac{16 \cos 2\varphi}{13 \sin 2\varphi}.$$

$$\text{XVII. } \int \varphi^m d\varphi \sin \varphi.$$

$$\int \varphi d\varphi \sin \varphi = -\varphi \cos \varphi + \sin \varphi,$$

$$\int \varphi^2 d\varphi \sin \varphi = -\varphi^2 \cos \varphi + 2\varphi \sin \varphi + 2 \cos \varphi,$$

$$\int \varphi^3 d\varphi \sin \varphi = -\varphi^3 \cos \varphi + 3\varphi^2 \sin \varphi + 6\varphi \cos \varphi - 6 \sin \varphi,$$

$$\int \varphi^4 d\varphi \sin \varphi = -\varphi^4 \cos \varphi + 4\varphi^3 \sin \varphi + 12\varphi^2 \cos \varphi - 24\varphi \sin \varphi - 24 \cos \varphi.$$

$$\text{XVIII. } \int \varphi^m d\varphi \cos \varphi.$$

$$\int \varphi d\varphi \cos \varphi = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi,$$

$$\int \varphi^2 d\varphi \cos \varphi = \varphi^2 \sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi,$$

$$\int \varphi^3 d\varphi \cos \varphi = \varphi^3 \sin \varphi + 3\varphi^2 \cos \varphi - 6\varphi \sin \varphi - 6 \cos \varphi,$$

$$\int \varphi^4 d\varphi \cos \varphi = \varphi^4 \sin \varphi + 4\varphi^3 \cos \varphi - 12\varphi^2 \sin \varphi - 24\varphi \cos \varphi + 24 \sin \varphi.$$