

Sechs und zwanzigstes Capitel.

Berührungen der Curven.

§. 209. (Differentialien der Coordinaten der Curven.) So wie wir oben (§. 124, V.) den Kreis als ein regelmässiges Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet haben, so werden wir auch jede in einer Ebene verzeichnete Curve, wie auch schon im Eingange des zehnten Capitels §. 47, III. gesagt worden ist, als irgend ein Polygon von unendlich vielen Seiten betrachten, und diese unendlich kleinen Seiten gleichsam als die Elemente ansehen können, aus welchen diese Curve besteht.

Sey NMQ (Fig. 97) eine solche Curve, und MM' , $M'M''$ zwey nächstliegende Elemente derselben. Sey AX die Abscissenaxe, A der Anfang der Coordinaten, und AN , PM , $P'M'$, ... senkrecht auf AX . Man ziehe durch die beyden nächsten Punkte M und M' die Gerade $TMM'c$, und nehme Ma und $M'b$ mit AX parallel.

Nennen wir wieder $AP = x$ und $PM = y$ die Coordinaten des Punktes M , und setzen wir $PP' = PP' \dots = dx$ für die unendlich kleine Änderung, oder für das constante (§. 55, I.) Differential, der Abscisse x . Bezeichnet man nun die Ordinaten der dem M nächstfolgenden Punkte

$P'M'$ durch y' ,

$P'M''$ » y'' u. f.,

so ist der im Allgemeinen ebenfalls unendlich kleine Unterschied der beyden ersten Ordinaten gleich $M'a$, so wie der Unterschied der beyden letzten gleich $M''b$. Wir wollen jenen durch dy , und diesen durch dy' bezeichnen, so daß man hat

$$M'a = dy = y' - y \quad \text{und}$$

$$M''b = dy' = y'' - y'.$$

Dies vorausgesetzt, hat man für die Differenz dieser beyden Größen dy und dy' , das heisst, für das zweyte Differential

d^2y der Ordinate $PM = y$ den Ausdruck

$$d^2y = dy' - dy = y'' - 2y' + y,$$

oder auch

$$d^2y = M''b - M'a.$$

Da aber die durch die beyden ersten Punkte M und M' gezogene Gerade $TM M'$ die Ordinate $P''M''$ in dem Punkte c schneidet, so sind die beyden rechtwinkligen Dreyecke $MM'a$ und $M'b c$ gleich und ähnlich, also ist auch $bc = M'a$, und daher

$$d^2y = M''b - bc \text{ oder } d^2y = M''c,$$

d. h. die kleine Linie $M''c$ ist das Bild des zweyten Differentials der Ordinate y .

Demnach erhalten wir für die dritte Ordinate $P''M''$ den Ausdruck

$$y'' = PM + aM' + bM'',$$

oder da $PM = y$, $aM' = bc = dy$ und $cM'' = d^2y$ ist:

$$y'' = y + 2dy + d^2y.$$

I. Da die Curve in der Zeichnung der Fig. 97 gegen die Abscissenaxe AX convex erscheint, so ist auch das zweyte Differential $M''c = d^2y$ positiv. Ist aber die Curve gegen AX concav, so fällt der Punct M'' derselben zwischen die Punkte b und c , und d^2y wird negativ, wie man in Fig. 97, A sieht.

§. 210. (Tangenten und Normalen der Curven.)

Wenn die Gerade TM (Fig. 97) blofs durch zwey nächste Punkte M und M' der Curve geht, ohne diese Curve in der ersten Nähe dieser Punkte zu schneiden, wie diefs in §. 209. vorausgesetzt worden ist, so hat die Gerade TM mit der Curve blofs ein Element MM' gemeinschaftlich, und heifst in diesem Zustande die *Tangente* (oder die *Berührungslinie*) der Curve für den Punct M . Diese Tangente drückt demnach gleichsam die *Richtung* aus, welche der diese Curve beschreibende Punct, während seiner Bewegung, in dem Puncte M hat, und man sieht, dafs es nicht ohne Interesse für die Kenntnifs einer krummen Linie seyn wird, diese Richtung ihrer Krümmung für jeden Punct derselben zu erhalten.

Eben so wird eine auf diese Tangente in dem Berührungspuncte M derselben errichtete senkrechte Gerade MR die *Nor-*

male der Curve für den Punct M genannt. Auch pflegt man die Entfernung der Durchschnittspuncte dieser zwey Geraden mit der Axe der x von dem Puncte P , oder

die Linie PT die *Subtangente*,

und die Linie PR die *Subnormale*

der Curve für denselben Punct M zu nennen.

I. Dieß vorausgesetzt, wollen wir nun die Gleichung der Tangente einer gegebenen Curve suchen.

Diese Gleichung wird, da sie einer geraden Linie angehört, die Form haben (§. 176.)

$$y' = ax' + b,$$

wo x' und y' die veränderlichen oder die laufenden Coordinaten für jeden Punct dieser Geraden, und wo a und b constante Grössen seyn werden, die wir zu bestimmen haben.

Sey die Gleichung der gegebenen Curve zwischen den Coordinaten x und y ausgedrückt, die sich mit den vorhergehenden Coordinaten x' und y' auf dieselben Axen und auf denselben Anfangspunct beziehen.

Da die Tangente durch einen bestimmten Punct M der Curve gehen soll, dessen Coordinaten wir überhaupt x und y genannt haben, so wird man die Bedingungsgleichung haben:

$$y = ax + b \dots (1).$$

Da aber diese Gerade, wenn sie in der That Tangente zur Curve in dem Puncte M seyn soll, auch noch durch den nächstfolgenden Punct M' , oder da sie durch das Element MM' der Curve gehen soll, von welchem die Coordinaten des letzten Punctes M' sind

$$x + dx \text{ und } y + dy,$$

so muß auch noch diese zweyte Bedingungsgleichung

$$y + dy = a(x + dx) + b \dots (2)$$

Statt haben. Zieht man von dieser Gleichung (2) die erste (1) ab, so erhält man

$$dy = a dx,$$

und diese ist offenbar das Differential der Gleichung (1). Wir haben daher die zwey einfachen Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} y = ax + b \\ \text{und } dy = a dx \end{array} \right\}$$

und diese reichen hin, die gesuchten Werthe der beyden Constanten a und b , unserer Aufgabe gemäß, zu bestimmen.

Wir erhalten nämlich

$$a = \frac{dy}{dx} \quad \text{und}$$

$$b = y - \frac{x dy}{dx}.$$

Substituirt man daher diese Werthe von a und b in der oben angenommenen Gleichung

$$y' = ax' + b,$$

so erhält man für die gesuchte Gleichung der Tangente den Ausdruck

$$y' - y = (x' - x) \frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

II. Daraus folgt auch sofort (nach §. 177, III.) für die auf die Tangente in dem Berührungspuncte M derselben senkrechte Normale MR die Gleichung

$$y' - y = - (x' - x) \frac{dx}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad (B).$$

III. Setzt man in den beyden Gleichungen (A) und (B) die Größe $y' = 0$, um denjenigen Punct T oder R zu erhalten, in welchem die Tangente oder die Normale die Abscissenaxe schneidet, so erhält man

$$\text{für die Subnormale } PR = x' - x = \frac{y dy}{dx},$$

$$\text{und für die Subtangente } PT = x' - x = - \frac{y dx}{dy}$$

das negative Zeichen, da T und R auf verschiedene Seiten des Punctes P fallen.

IV. Dieselben Ausdrücke wird man auch aus der Bemerkung ableiten, daß die Dréyecke TPM , PMR und MaM' unter sich ähnlich sind. Setzt man nämlich, wie zuvor, $Ma = dx$, $M'a = dy$, und noch der Kürze wegen

$$MM' = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds,$$

so hat man

$$TP : PM = Ma : M'a$$

oder

$$\text{Subtangente } TM = \frac{y dx}{dy},$$

wie zuvor, und eben so findet man auch

$$\text{Subnormale } MR = \frac{y dy}{dx},$$

so wie

$$MT = \frac{y ds}{dy} \quad \text{und} \quad MR = \frac{y ds}{dx}.$$

V. Nennt man endlich noch ω den Winkel MTA , welchen die Tangente mit der Abscissenaxe bildet, so hat man

$$\text{Tang } \omega = \frac{dy}{dx},$$

also auch

$$\text{Sin } \omega = \frac{dy}{ds} \quad \text{und} \quad \text{Cos } \omega = \frac{dx}{ds}.$$

Ex. Für die Ellipse hat man die Gleichung (§. 198.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also ist auch

$$\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} = 0,$$

und daher

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{oder} \quad \text{Tang } \omega = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = -\frac{b x}{a \sqrt{a^2 - x^2}},$$

so wie

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx}{a} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}.$$

Man erhält demnach für die Gleichung der Tangente der Ellipse zwischen den veränderlichen Coordinaten x' und y' den Ausdruck

$$\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} = 1,$$

und eben so für die Gleichung der Normale

$$\frac{x(y' - y)}{a^2} = \frac{y(x' - x)}{b^2}.$$

Ferner ist die

$$\text{Subtangente} = \frac{a^2 - x^2}{x},$$

$$\text{Subnormale} = -\frac{b^2 x}{a^2},$$

$$\text{Tangente } MT = \frac{1}{a x} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2},$$

$$\text{Normale } MR = \frac{b}{a^2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}.$$

Man sieht daraus z. B. daß die Tangente der Ellipse in den beyden Endpunkten A und B (Fig. 84) der großen Axe senkrecht auf AB , und in den beyden Endpunkten D und E der kleinen Axe parallel mit AB ist, und daß diese Tangente unter dem Winkel von 45 Graden gegen AB geneigt ist für diejenigen Punkte der Ellipse, zu welchen die Coordinaten gehören:

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Setzt man in den vorhergehenden Ausdrücken die GröÙe $a=b$, so erhält man die analogen Werthe für den *Kreis*, für welchen daher die Normale immer gleich dem Halbmesser des Kreises ist, während die Tangente auf diesem Halbmesser senkrecht steht. (Vergl. §. 115.) Setzt man aber statt a und b die GröÙe $-a$ und $b\sqrt{-1}$, so erhält man die analogen Ausdrücke für die *Hyperbel*.

Ist TMt (Fig. 84) die Tangente der Ellipse in M , so ist

$$FT = \text{Subtang} + FP = \frac{a^2}{x} - x + (x - ae) = \frac{a}{x}(a - ex),$$

und eben so auch

$$F'T = \frac{a}{x}(a + ex),$$

wo $ae = CF = CF'$ die Excentricität der Ellipse bezeichnet.

Aber die Gleichung (B) des §. 197, III. gibt

$$r = p - ex',$$

oder da $p = a(1 - e^2)$ und $x' = x - ae$ ist:

$$r = FM = a - ex,$$

und eben so, da (nach §. 198, I.) $FM' = r' = 2a - r$ ist:

$$r' = F'M = a + ex,$$

so daß man demnach hat

$$FT = \frac{ar}{x} \quad \text{und} \quad F'T = \frac{ar'}{x},$$

woraus folgt

$$\frac{FT}{r} = \frac{F'T}{r'}.$$

Da aber $\frac{FT}{r} = \frac{\sin FMT}{\sin T}$ und $\frac{F'T}{r'} = \frac{\sin F'Mt}{\sin T}$ ist, so ist auch

$$FMT = F'Mt,$$

oder die Winkel der Tangente mit den beyden Radien FM und $F'M$ sind für jeden Punct der Ellipse unter sich gleich. Dasselbe hat auch für die Hyperbel Statt. Für die Parabel aber findet man (Fig. 85), daß der Winkel FMT gleich dem Winkel tMQ ist, wenn durch den Punct M die Gerade MQ mit der Abscissenaxe AP parallel gezogen wird. Auf diese Eigenschaften dieser drey Curven gründet sich bekanntlich die Anwendung derselben zu Brennspiegeln und Reverberen.

§. 211. (Krümmungskreise der Curven.) Wie wir in dem Vorhergehenden diejenige Gerade gesucht haben, die durch zwey nächste Puncte einer gegebenen Curve geht, so werden wir nun auch eine solche Linie bestimmen können, die drey nächste Puncte mit der gegebenen Curve gemein hat. Zu dieser Linie wird sich vorzüglich der Kreis eignen, da derselbe, nach §. 111, I. durch drey Puncte seiner Gröfse und Lage nach vollkommen bestimmt wird.

Sind α und β die den laufenden Coordinaten x' und y' parallelen Coordinaten des Mittelpunctes dieses Kreises, und ist ρ der Halbmesser desselben, so hat man für die allgemeine Gleichung des Kreises (§. 199, Gleichung (4))

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = \rho^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

in welcher man daher die drey Gröfßen α , β und ρ , den Bedingungen des Problems gemäß, bestimmen soll.

Wenn nun wieder die Gleichung der gegebenen Curven zwischen den, den vorigen analogen Coordinaten x und y ausgedrückt ist, so soll der Kreis, jenen Bedingungen gemäß, durch drey nächste Puncte der Curve gehen, deren Coordinaten sind:

des ersten x und y ,
des zweyten $x + dx$ » $y + dy$,
des dritten (nach §. 209.) . $x + 2dx + d^2x$ » $y + 2dy + d^2y$.

Substituirt man diese Werthe statt x' und y' in der Gleichung (1), so erhält man drey Bedingungsgleichungen, aus welchen man daher die drey unbekannten Gröfßen α , β , ρ bestimmen wird. Man wird aber, wie in §. 210, I. bemerken, daß diese drey Bedingungsgleichungen den gewöhnlichen Differentialgleichungen des Ausdrucks (1), das heißt, den drey Gleichungen

chungen

$$\left. \begin{aligned} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \rho^2 &= 0 \\ (x-\alpha) dx + (y-\beta) dy &= 0 \\ (x-\alpha) d^2 x + (y-\beta) d^2 y + dx^2 + dy^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

gleichgeltend sind. Denn bezeichnet man die erwähnten drey Bedingungsgleichungen der Kürze wegen durch A , B und C , so ist $B-A$ die zweyte, und $A-2B+C$ die dritte der Gleichungen (I), wenn man, nach dem oben (§. 47.) aufgestellten Princip dieser Rechnungsart, die höheren Differentialien gegen die niederen wegläfst.

Sucht man nun aus diesen drey Gleichungen (I) die Werthe von α , β und ρ auf dem gewöhnlichen Wege der Elimination (§. 67, I.), so erhält man, wenn man wieder der Kürze wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2$ setzt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha - x &= - \frac{ds^2 \cdot dy}{dx d^2 y - dy d^2 x} \\ \beta - y &= + \frac{ds^2 \cdot dx}{dx d^2 y - dy d^2 x} \\ \rho &= \frac{ds^3}{dx d^2 y - dy d^2 x} \end{aligned} \right\} \dots (C).$$

Durch diese drey Gröfsen α , β und ρ ist daher derjenige Kreis vollkommen bestimmt, der mit der gegebenen Curve zwey nächste Elemente gemeinschaftlich, oder der, wie man sich auch auszudrücken pflegt, mit dieser Curve eine *Berührung der zweyten Ordnung* hat, während die in §. 210. betrachtete Tangente mit dieser Curve nur eine Berührung der ersten Ordnung eingeht. Aus dieser Ursache schließt sich auch dieser Kreis viel inniger an die Curve an, als die Tangente, und sein Halbmesser gibt gleichsam das *Mafs der Krümmung* der Curve in jedem ihrer Punkte an, während die Tangente nur die *Richtung* ihrer Krümmung anzeigt, daher auch dieser Kreis der *Krümmungskreis* der Curve genannt wird.

Man sieht, wie sich dasselbe Verfahren auch auf Berührungen der dritten und höheren Ordnungen fortsetzen läfst.

I. In dem Vorhergehenden ist, der gröfsern Allgemeinheit wegen, kein erstes Differential als constant vorausgesetzt worden. Da aber, nach §. 55, I. eines derselben constant angenom-

men werden muß, so kann man dafür z. B. das Differential dx wählen, wodurch $d^2x = 0$ wird, wodurch die Gleichungen (C) in folgende übergehen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha - x &= -\frac{ds^2 dy}{dx d^2y} \\ \beta - \gamma &= \frac{ds^2}{d^2y} \\ \rho &= \frac{ds^3}{dx d^2y} \end{aligned} \right\} \dots (C).$$

Will man aber, was ebenfalls angeht, die GröÙe dy constant setzen, so hat man

$$\left. \begin{aligned} \alpha - x &= \frac{ds^2}{d^2x} \\ \beta - \gamma &= -\frac{ds^2 dx}{dy d^2x} \\ \rho &= -\frac{ds^3}{dy d^2x} \end{aligned} \right\} \dots (C').$$

Wollte man endlich das zusammengesetzte Differential $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ als constant annehmen, so hätte man

$$\begin{aligned} d \cdot (dx^2 + dy^2) &= 0 \quad \text{oder} \\ dx d^2x + dy d^2y &= 0, \quad \text{also auch} \\ dx^2 \cdot d^2x &= dy^2 \cdot d^2y, \end{aligned}$$

so daß daher die Gleichungen (C) unter dieser Voraussetzung in folgende übergehen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha - x &= \frac{ds^2 d^2x}{d^2x^2 + d^2y^2} \\ \beta - \gamma &= \frac{ds^2 d^2y}{d^2x^2 + d^2y^2} \\ \rho &= \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2}} \end{aligned} \right\} \dots (C'').$$

Ex. I. Für die Parabel (§. 201.) hat man die Gleichung

$$y^2 = 2ax,$$

also ist auch

$$\begin{aligned} dy &= \frac{a dx}{y}, \quad ds = \frac{dx}{y} \sqrt{a^2 + y^2} \quad \text{und} \\ d^2y &= -\frac{a^2 dx^2}{y^3}, \end{aligned}$$

wenn dx constant angenommen wird. Damit geben die Gleichungen

chungen (C)

$$\alpha - x = \frac{1}{a}(a^2 + y^2),$$

$$\beta - y = -\frac{y}{a^2}(a^2 + y^2),$$

$$\rho = -\frac{1}{a^2}(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Für den Scheitel z. B. der Parabel, wo $x = y = 0$ ist, erhält man aus den letzten Gleichungen

$$\alpha = a,$$

$$\beta = 0 \quad \text{und}$$

$$\rho = -a,$$

wo das negative Zeichen von a anzeigt, daß die Curve in diesem Punkte gegen die Abscissenaxe concav ist (§. 209, I.).

Ex. II. Für die Cyclois werden wir, wenn man ihr die erste der in §. 207. angeführten Gleichungen zu Grunde legt, und der Kürze wegen

$$1 - \frac{y}{a} = \cos \varphi, \quad \text{also auch}$$

$$d\varphi = \frac{dy}{a \sin \varphi} = \frac{dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$$

setzt, den Ausdruck erhalten:

$$x = a\varphi - \sqrt{2ay - y^2},$$

und davon ist das Differential

$$dx = a d\varphi - \frac{(a-y) dy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

oder, wenn man den vorhergehenden Werth von $d\varphi$ substituirt:

$$dx = \frac{a dy - (a-y) dy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

das heißt

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

welches daher die Differentialgleichung der Cyclois ist.

Nimmt man von ihr wieder das Differential, und setzt dx constant, so erhält man

$$d^2 y = -\frac{a dy^2}{2ay - y^2},$$

so wie auch

$$ds^2 = \frac{2a dy^2}{2a - y}.$$

Mit diesen Werthen findet man aus den Gleichungen (A), (B) und (C) für die Cyclois

$$\text{Subtang} = \frac{y^2}{\sqrt{2ay - y^2}}, \quad \text{Tang} = y \sqrt{\frac{2a}{2a - y}},$$

$$\text{Subnorm} = \sqrt{2ay - y^2}, \quad \text{Norm} = \sqrt{2ay},$$

$$\alpha = x + 2\sqrt{2ay - y^2},$$

$$\beta = -y,$$

$$\rho = 2\sqrt{2ay}.$$

Man sieht daraus, daß der Halbmesser ρ des Krümmungskreises der Cyclois gleich ist der doppelten Normale für denselben Punct.

Zieht man ferner die beyden Sehnen MH und ML (Fig. 93) des erzeugenden Kreises, so hat man, nach der bekannten Gleichung des Kreises (§. 199, Gleichung 2), da $PM = HK = y$ ist:

$$MK^2 = 2ay - y^2.$$

Da aber $MH^2 = MK^2 + y^2$ ist, so hat man auch

$$MH = \sqrt{2ay},$$

oder diese Sehne MH des erzeugenden Kreises ist zugleich die Normale der Cyclois für den Punct M , und da die Tangente jeder Curve auf der Normale senkrecht steht, der Winkel HML aber, als ein Winkel im Halbkreise (§. 112, I.), gleich 90° ist, so ist auch die andere Sehne ML die Tangente der Cyclois in dem Puncte M .

§. 212. (Evoluten der Curven.) Da die Coordinaten α und β des Mittelpunctes des Krümmungskreises Functionen der beyden Coordinaten x und y der gegebenen Curve sind, so werden auch umgekehrt x und y Functionen von α und β seyn. In der That werden sich diese Größen α und β ändern, wenn die Abscisse x der gegebenen Curve geändert wird, oder wenn man von einem Puncte dieser Curve zu dem nächstfolgenden übergeht, und die Aufeinanderfolge aller dieser Mittelpuncte der verschiedenen Krümmungskreise einer gegebenen Curve werden

wieder eine andere Curve bilden, die man die *Evolute* (oder die Abgewickelte) der gegebenen Curve nennt, während umgekehrt die gegebene Curve selbst die *Evolvente* der anderen genannt wird.

Sind $MN, mn, m'n', \dots$ (Fig. 98) die Krümmungshalbmesser der gegebenen Curve $Mmm' \dots$, so ist der Ort aller Mittelpunkte ihrer Krümmungskreise, oder so ist die Curve $Nnn' \dots$ die Evolute der gegebenen Curve, wo $AP = x, PM = y$ die Coordinaten der Evolvente Mmm' , und $AQ = \alpha, QN = \beta$ die analogen Coordinaten der Evolute Nnn' sind.

Zwischen diesen vier Größen x, y, α und β haben aber die drey vorhergehenden Gleichungen (I) des §. 211. Statt, von welchen die zwey letzten, für $dx = \text{Const.}$, sind:

$$(x - \alpha)dx + (y - \beta)dy = 0,$$

$$(y - \beta)d^2y + dx^2 + dy^2 = 0.$$

Verbindet man damit die ebenfalls in x und y ausgedrückte Gleichung der gegebenen Curve oder der Evolvente, so wird man, wenn man aus diesen drey Gleichungen die zwey Größen x und y eliminirt, eine Gleichung zwischen den hier als veränderlich angenommenen Größen α und β erhalten, welche Gleichung daher für die gesuchte Evolute gehören wird.

Ex. I. Für die Parabel haben wir in §. 211, Ex. I. erhalten

$$\alpha - x = \frac{1}{a}(a^2 + y^2),$$

$$\beta - y = -\frac{y}{a^2}(a^2 + y^2),$$

und aus ihnen folgt sofort

$$\alpha - x = a + 2x,$$

$$\beta = -\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2a}}.$$

Eliminirt man aber aus diesen zwey Gleichungen die Gröfse x , so erhält man

$$\beta^2 = \frac{8}{27a}(\alpha - a)^3,$$

oder wenn man der Kürze wegen setzt

$$\frac{2}{3}(\alpha - a) = \nu \quad \text{und} \quad \beta = \xi,$$

für die gesuchte Gleichung der Evolute

$$\rho^3 = a \cdot \xi^2,$$

die daher die *Neilsche* Parabel ist (§. 202.).

Ex. II. Für die Cyclois haben wir oben (§. 211.) erhalten

$$\alpha = x + 2\sqrt{2a\gamma - \gamma^2} \quad \text{und} \\ \beta = -\gamma,$$

also auch

$$x = a - 2\sqrt{-2a\beta - \beta^2} \quad \text{und} \\ \gamma = -\beta,$$

wo (Fig. 93) $AP = x$, $PM = \gamma$ die Coordinaten der Evolvente AMD , und wo $AQ = \alpha$, $Qm = \beta$ die analogen Coordinaten der Evolute $Am d$ sind,

Substituirt man diese Werthe von x und γ in der Gleichung

$$x = a \cdot \text{Arc Cos} \left(1 - \frac{\gamma}{a} \right) - \sqrt{2a\gamma - \gamma^2}$$

der Cyclois (§. 207.), so erhält man für die Evolute dieser Curve

$$\alpha = a \cdot \text{Arc Cos} \left(1 + \frac{\beta}{a} \right) + \sqrt{-2a\beta - \beta^2},$$

die also wieder dieselbe Cyclois, nur in verkehrter Lage gegen die Abscissenaxe AB ist, indem bey der Evolvente AMD die Spitze in A und der Scheitel in D , bey der Evolute $Am d$ aber der Scheitel in A und die Spitze in d ist.

Dasselbe hätte man auch schon aus der obigen Bemerkung schliessen können, daß der Krümmungshalbmesser $\rho = Mm$ gleich der doppelten Normale oder gleich der doppelten Sehne MH des erzeugenden Kreises ist, wie sich denn auch aus den vorhergehenden Ausdrücken (§. 211, Gleichung I) leicht zeigen läßt, daß überhaupt für jede Curve der Krümmungsmittelpunct mit dem Durchschnitte der Normalen zweyer nächsten Punkte der Curve identisch ist.

Ex. III. Für die Ellipse hat man die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sucht man daraus die Werthe von $d\gamma$, $d^2\gamma$ und ds , so erhält man, wenn man diese Werthe in den Gleichungen (C') des §. 211. unter der Voraussetzung von $dx = \text{Const}$ substituirt, für α und β die Ausdrücke:

$$\alpha = \frac{(a^2 - b^2)}{a^4} \cdot x^3,$$

$$\beta = -\frac{(a^2 - b^2)}{b^4} \cdot y^3,$$

also auch

$$\frac{x}{a} = \sqrt[3]{\frac{a\alpha}{a^2 - b^2}} \quad \text{und} \quad \frac{y}{b} = -\sqrt[3]{\frac{b\beta}{a^2 - b^2}}.$$

Substituirt man diese Werthe von $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$ in der ursprünglichen Gleichung der Ellipse, so erhält man

$$\left(\frac{a\alpha}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\beta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

oder wenn man alle Glieder dieses Ausdrucks durch

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{\frac{2}{3}}$$

multiplicirt:

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

für die gesuchte Gleichung der Evolute $BDCE$ (Fig. 90) der Ellipse bdc . (Vergl. §. 204, I.)

§. 213. (Die vorhergehenden Ausdrücke durch Polarcoordinaten.) Bisher haben wir die Berührungen der Curven durch rechtwinklige Coordinaten x, y ausgedrückt. Um dieselben auch durch Polarcoordinaten (§. 180, I.) auszudrücken, seyen (Fig. 99) diese senkrechten Coordinaten

$$AP = x, \quad PM = y,$$

und sey eben so

$$\text{der Radius } AM = r,$$

$$\text{und der Winkel } XAM = v,$$

also r und v die Polarcoordinaten desselben Punctes M der Curve MN , so daſs man daher hat

$$x = r \cos v \quad \text{und} \quad y = r \sin v.$$

Sey ferner TM die Tangente und MR die Normale der Curve für den Punct M . Zieht man durch den Anfangspunct A der Coordinaten eine auf den Radius AM senkrechte Gerade, welche die Tangente TM in T und die verlängerte Normale MR in R'

schneidet, so nennt man, für Polarcoordinaten, von den beyden Theilen der erwähnten Geraden $T'R'$

den ersten AT' die Subtangente,
und den zweyten AR' die Subnormale

der Curve für den Punct M .

Um diese beyden Functionen auf eine einfache Weise zu bestimmen, beschreibe man aus dem Anfangspuncte A mit dem Halbmesser $AM = r$ einen kleinen Kreisbogen, der den nächstfolgenden Radius Am der Curve in dem Puncte a schneidet, so ist $Aa = AM = r$ und daher $am = dr$, so wie der Winkel MAm , wenn man auf sein Zeichen nicht achtet, gleich $d\psi$, also auch der Kreisbogen Ma selbst gleich $r d\psi$. Dieß vorausgesetzt, kann man das unendlich kleine Dreyeck $Maam$ als ein rechtwinkliges, geradliniges Dreyeck betrachten, das den beyden endlichen Dreyecken MAT' und AMR' ähnlich ist, und in welchem die Hypotenuse

$$Mm = \sqrt{dr^2 + r^2 d\psi^2}$$

ist, für welchen Ausdruck wir wieder, der Kürze wegen, ds setzen wollen, so daß man demnach folgende Proportionen hat:

$$TA : MA = Ma : ma \quad \text{oder} \quad TA = \frac{r^2 d\psi}{dr},$$

$$R'A : MA = ma : Ma \quad \text{»} \quad R'A = \frac{dr}{d\psi},$$

$$TM : MA = Mm : ma \quad \text{»} \quad TM = \frac{r ds}{dr},$$

$$RM : MA = Mm : Ma \quad \text{»} \quad RM = \frac{ds}{d\psi}.$$

Es ist daher

$$\text{die Subtangente } TA = \frac{r^2 d\psi}{dr},$$

$$\text{und die Subnormale } R'A = \frac{dr}{d\psi}.$$

I. Um eben so den Krümmungshalbmesser ρ durch Polarcoordinaten auszudrücken, so hat man, wenn man die vorhergehenden Gleichungen

$$x = r \cos \psi \quad \text{und} \quad y = r \sin \psi$$

differentiirt:

$$dx = dr \cos \psi - r d\psi \sin \psi,$$

$$dy = dr \sin \psi + r d\psi \cos \psi,$$

und wenn man auch von diesen Ausdrücken wieder das Differential in Beziehung auf $dv = \text{Const}$ oder $d^2v = 0$ nimmt:

$$\begin{aligned} d^2x &= d^2r \cos v - 2dr dv \sin v - r dv^2 \cos v, \\ d^2y &= d^2r \sin v + 2dr dv \cos v - r dv^2 \sin v. \end{aligned}$$

Substituirt man aber diese Werthe in dem vorhergehenden (§. 211, Gleichung C) Ausdrücke von

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y - dy d^2x},$$

so erhält man sofort

$$\rho = - \frac{(dr^2 + r^2 dv^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 dv^3 + 2dr^2 dv - r dv d^2r}.$$

§. 214. (Curven von doppelter Krümmung.) Bisher haben wir nur solche krumme Linien betrachtet, die durchaus in einer und derselben Ebene liegen, und die man daher auch *ebene Curven* zu nennen pflegt. Es kann aber auch solche krumme Linien geben, deren je zwey nächste Elemente immer in verschiedenen Ebenen liegen. Wenn z. B. auf einem Cylinder von kreisförmiger Basis ein vollkommen biegsamer Faden in der Richtung der gewöhnlichen Schraubengänge aufgewunden wird, so wird sich dieser Faden nicht bloß in einer auf die Axe des Cylinders senkrechten Ebene um denselben winden, sondern auch zugleich immer mehr von der Basis dieses Cylinders sich entfernen, und demnach in jedem seiner Punkte eine doppelte Bewegung in einer horizontalen und zugleich in einer vertikalen Richtung annehmen.

Sey ANM' (Fig. 100) ein solcher Cylinder, dessen Seitenlinien auf der Ebene der xy senkrecht stehen. Die Basis desselben sey ein Kreis NAN' in derselben Ebene, dessen Mittelpunkt C , und dessen Halbmesser $CA = a$ auf dem Durchmesser NN' senkrecht steht. Wird auf der Oberfläche dieses Cylinders ein Faden AMM' . . . so aufgewunden, daß die senkrechte Entfernung MQ jedes Punktes M des Fadens von der Basis dem Kreisbogen AQ proportional ist, so fälle man von dem Punkte Q das Loth QP auf den Durchmesser NN' , und man hat, wenn der Winkel $ACQ = v$ ist:

$$CP = x = a \sin v \quad \text{und} \quad PQ = y = a \cos v,$$

so wie endlich

$$QM = z = b \cdot av,$$

wo b irgend eine Constante bezeichnet.

Eliminirt man die Gröfse v aus diesen drey Gleichungen, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ z &= ab \cdot \text{Arc Sin } \frac{x}{a} \\ \text{und } z &= ab \cdot \text{Arc Cos } \frac{y}{a} \end{aligned} \right\}$$

für die Projectionen der *Schraubenlinie* $AMM \dots$ in den drey coordinirten Ebenen. Von diesen drey Gleichungen ist jede eine Folge der beyden andern.

Man sieht daraus, daß jede Curve von doppelter Krümmung durch zwey Gleichungen ausgedrückt wird, deren jede, wie bey der geraden Linie im Raume (§. 181.), eigentlich die Gleichung ihrer Projection in einer der drey coordinirten Ebenen darstellt. Da aber jede Gleichung, isolirt betrachtet (nach §. 189, III.), für irgend eine Fläche gehört, so wird man auch jene zwey Gleichungen, wenn sie zusammen betrachtet werden, als den analytischen Ausdruck für den Durchschnitt von zwey krummen Flächen ansehen können.

Um noch ein anderes Beyspiel einer Curve von zweyfacher Krümmung anzuführen, so haben wir oben (§. 189, I.) gesehen, daß die Gleichung

$$x = az + \alpha$$

für eine auf der coordinirten Ebene der xz senkrechte, so wie

$$y = bz + \beta$$

für eine auf yz senkrechte Ebene gehört.

Wenn man nämlich in der Ebene der xz die Gerade, deren Gleichung $x = az + \alpha$ ist, verzeichnet, und wenn man dann, durch alle Punkte dieser Geraden, auf dieselbe Ebene der xz senkrechte Linien errichtet, so wird die Aufeinanderfolge aller dieser Lothe diejenige Ebene bilden, welche durch die Gleichung $x = az + \alpha$ vorgestellt wird, und dasselbe gilt auch von den Lothen auf der Ebene der yz , die man durch die in dieser Ebene gezogene Gerade, deren Gleichung $y = bz + \beta$ ist, errichtet.

Ganz auf dieselbe Weise wird also auch die Gleichung

$$y^2 = ax$$

einen auf der Ebene der xy senkrechten Cylinder vorstellen, dessen Basis eine in dieser Ebene liegende Parabel des Parameters a ist, so wie

$$z^2 = by$$

wieder einen auf der Ebene yz senkrechten Cylinder bezeichnet, dessen Basis eine in derselben Ebene liegende Parabel des Parameters b ist. Beyde Gleichungen zusammen genommen aber

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= ax \\ z^2 &= by \end{aligned} \right\}$$

gehören für die Curve von doppelter Krümmung, in welcher sich diese zwey parabolischen Cylinder durchschneiden.

§. 215. (Tangente einer Curve von doppelter Krümmung.) Auch diese Curven lassen sich, wie die ebenen, als Polygone von unendlich kleinen Seiten betrachten, nur mit dem Unterschiede, daß bey jenen diese Seiten nicht mehr in einer und derselben Ebene liegen, so daß also auch hier die Tangente der Curve nichts anderes, als die Verlängerung irgend einer Seite des erwähnten Polygons seyn wird.

Nennt man daher x, y, z die Coordinaten des Anfangspunctes M einer dieser unendlich kleinen Seiten, und $x + dx, y + dy, z + dz$ die Coordinaten des Endpunctes m derselben, so wie auch $Mm = ds$ den Abstand dieser beyden Puncte M und m von einander, wo demnach (§. 184.) diese Seite

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

ist, so werden die Größen dx, dy, dz nichts anderes, als die Projectionen (§. 184.) der Seite ds auf die drey coordinirten Axen der x, y, z seyn. Sind also α, β, γ die Winkel, welche die Tangente der Curve in dem Puncte M mit den drey coordinirten Axen der x, y, z bildet, so hat man (§. 181, I.)

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Allein die Gleichungen einer geraden Linie im Raume, die durch einen gegebenen Punct (dessen Coordinaten x, y, z sind) geht, und die mit den Axen der x, y, z in derselben Ordnung die Winkel α, β, γ bildet, sind (§. 186, II.):

$$(\gamma - \gamma') \cos \alpha = (x - x') \cos \beta,$$

$$(z - z') \cos \alpha = (x - x') \cos \gamma,$$

$$(z - z') \cos \beta = (\gamma - \gamma') \cos \gamma,$$

wo $x'y'z'$ die laufenden Coordinaten der Linie, und wo $x\gamma z$, so wie $\alpha\beta\gamma$ als constante Gröſſen zu betrachten sind, die für jeden bestimmten Punct der Curve von doppelter Krümmung (durch die Gleichung dieser Curve zwischen $x\gamma z$) gegeben sind.

Substituirt man daher in diesen Gleichungen die vorhergehenden Werthe von $\cos \alpha$, $\cos \beta$ und $\cos \gamma$, so erhält man für die gesuchten Gleichungen der Tangente einer Curve von doppelter Krümmung die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \gamma - \gamma' &= (x - x') \frac{d\gamma}{dx} \\ z - z' &= (x - x') \frac{dz}{dx} \\ z - z' &= (\gamma - \gamma') \frac{dz}{d\gamma} \end{aligned} \right\} \dots (D),$$

von deren jede eine unmittelbare Folge der beyden andern ist.

I. Nach §. 193, III. steht die Ebene, deren Gleichung ist

$$ax + by + z = P,$$

auf der Geraden senkrecht, deren Gleichungen sind

$$x = az + \alpha \quad \text{und} \quad y = bz + \beta.$$

Setzt man daher

$$a = \frac{dx}{dz} \quad \text{und} \quad b = \frac{d\gamma}{dz},$$

so erhält man

$$(x - x') dx + (\gamma - \gamma') d\gamma + (z - z') dz = 0 \dots (E)$$

für die Gleichung einer Ebene (zwischen den veränderlichen Coordinaten $x'y'z'$), die durch den Punct $x\gamma z$ geht und senkrecht auf der Tangente der Curve von doppelter Krümmung steht.

Ex. Für die oben angeführte Schraubenlinie hat man

$$x dx + \gamma d\gamma = 0$$

oder

$$\frac{d\gamma}{dx} = - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{dz}{d\gamma} = - \frac{ab}{x},$$

so daß daher die Gleichungen der Tangente der Schraubenlinie sind:

$$\left. \begin{aligned} y - y' &= - (x - x') \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ z - z' &= (x - x') \frac{ab}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ z - z' &= - (y - y') \frac{ab}{x} \end{aligned} \right\};$$

und eben so hat man für die Gleichung einer Ebene, die durch den Punkt $x y z$ dieser Curve geht und senkrecht auf derselben steht:

$$(x - x')y - (y - y')x + (z - z')ab = 0 \text{ oder} \\ ab(z - z') = x'y - x'y'.$$

§. 216. (Tangirende Ebenen.) Zum Beschlufs dieses Gegenstandes wollen wir noch die Gleichungen derjenigen Ebene suchen, welche eine gegebene Fläche in einem bestimmten Punkte berührt.

Es ist bereits oben (§. 189, IV.) gesagt worden, dafs in der Gleichung einer Ebene, und eben so überhaupt in der Gleichung einer Fläche zwischen x , y und z , immer zwey dieser drey Coordinaten, z. B. x und y , gegeben oder willkürlich angenommen werden müssen, um dadurch die dritte z zu bestimmen. Da diese beyden ersten Gröfsen x und y durch keine weitere Relation unter sich verbunden sind, so wird man auch die eine derselben verändern können, während die andere ungeändert bleibt. Auf diese Weise kann demnach die Gröfse z auf zwey verschiedene Arten variiren, nämlich in Beziehung auf x sowohl, als auch in Beziehung auf y . Nimmt man daher von der gegebenen Gleichung einer Fläche das Differential von z blofs in Beziehung auf x , so erhält man das *partielle Differential* $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, so wie man das *partielle Differential* $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ erhält, wenn man dieselbe Gleichung blofs in Beziehung auf z und y differentiirt, und dabey die Gröfse x als constant betrachtet.

Diese partiellen Differentialien sind für die geometrische Analysis von der grössten Wichtigkeit, daher sie hier durch Einschließung in Klammern von den bisher betrachteten gewöhnlichen Differentialien unterschieden werden.

Der Kürze wegen wollen wir diese partiellen Differentialien

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q$$

setzen, so dafs daher die Differentialgleichung einer jeden Fläche immer die Form haben wird:

$$dz = p dx + q dy.$$

Da aber die Gröfsen x und y , also auch ihre Änderungen dx und dy von einander ganz unabhängig sind, so wird jede solche Gleichung eigentlich zwey andern Gleichungen äquivalent seyn, nämlich

$$\frac{dz}{dx} = p \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

oder, was dasselbe ist:

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx \quad \text{und} \quad dz = \left(\frac{dz}{dy}\right) dy.$$

Ist M (Fig. 101) ein Punct der gegebenen Fläche, und legt man durch denselben zwey mit xz und yz parallele Ebenen $MQ'Q'$ und MPR , und legt man eben so durch einen nächsten Punct N derselben Fläche zwey den vorigen parallele Ebenen $NR'R''$ und $N'P'R'$, so wird die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = p$$

derjenigen Curve MM' angehören, in welcher die Ebene $MQ'Q'$ die Fläche schneidet, so wie die Gleichung

$$\frac{dz}{dy} = q$$

für die Curve MN gehört, in welcher die Ebene MPR die Fläche schneidet.

In der ersten dieser Gleichungen ist $dz' = Q'M' - QM$, und in der zweyten ist $dz'' = RN - QM$, oder dort ist das *partielle* Differential von dz

$$dz' = p dx, \quad \text{und hier ist es} \quad dz'' = q dy;$$

beyder Summe $dz' + dz''$ aber, oder das *vollständige* Differential von z ist

$$dz = R'N' - QM = p dx + q dy.$$

I. Jede Gleichung zwischen drey veränderlichen Gröfsen x, y, z , von welchen je zwey, z. B. x und y , unabhängig sind, hat demnach zu ihrem Differential *zwey* Gleichungen, aber zwischen partiellen Differentialen.

Ist z. B. die Gleichung einer Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gegeben, so ist ihre partielle Differentialgleichung in Beziehung auf z und x :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{c^2 x}{a^2 z},$$

und in Beziehung auf z und y :

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{c^2 y}{b^2 z}.$$

II. Sey nun

$$z' = Ax' + By' + C$$

die Gleichung einer Ebene, welche eine Fläche, deren Gleichung zwischen x , y und z gegeben ist, in einem Punkte derselben berühren soll.

Da diese Ebene durch den bestimmten Punkt M der Fläche, dessen Coordinaten xyz sind, gehen soll, so wird ihre Gleichung die Form haben:

$$z' - z = A(x' - x) + B(y' - y) \quad \dots \quad (a),$$

und in ihr sind demnach die beyden Größen A und B , der Bedingung unserer Aufgabe gemäß, noch zu bestimmen. Die letzte Ebene soll nämlich auch noch durch alle anderen Punkte N , M' , N' , ... der Fläche gehen, die dem ersten Punkte M zunächst liegen, also muß auch die letzte Gleichung noch bestehen, wenn man in ihr statt xyz die Größen $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ setzt, wodurch man, wie oben (§. 210, I. und §. 211.), die Gleichung erhält

$$dz = A dx + B dy.$$

Die allgemeine Gleichung jeder Oberfläche ist aber

$$dz = p dx + q dy,$$

wo $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ die aus der gegebenen Gleichung der Fläche bekannten Functionen von x , y und z sind.

Setzt man die beyden letzten Ausdrücke von dz einander gleich, so erhält man

$$(A - p) dx + (B - q) dy = 0,$$

und da dieser letzte Ausdruck für *alle* Richtungen, die man von dem Punkte M zu irgend einem ihm nächsten Punkte nehmen kann, oder da er für *alle* Verhältnisse gelten soll, die man zwi-

schen den beyden unabhängigen Gröſſen dx und dy aufstellen will, so wird dieser Ausdruck den beyden folgenden gleichgeltend seyn:

$$A - p = 0 \quad \text{und} \quad B - q = 0,$$

$$\text{oder} \quad A = \left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{und} \quad B = \left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Substituirt man daher die gefundenen Werthe von A und B in der vorhergehenden Gleichung (a), so erhält man für die gesuchte Gleichung der tangirenden Ebene:

$$z' - z = (x' - x) \left(\frac{dz}{dx}\right) + (y' - y) \left(\frac{dz}{dy}\right) \quad \dots \quad (F),$$

oder auch

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y).$$

Ex. Für die oben (Nr. I.) betrachtete Fläche, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, hat man, wenn man die dort angeführten Werthe von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ in der Gleichung (F) substituirt, für die tangirende Ebene derselben die Gleichung

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1,$$

wo $x'y'z'$ die laufenden Coordinaten der Ebene bezeichnen.

III. Wenn man die Gleichung (F) mit der folgenden

$$Lx + My + Nz = 1,$$

die wir oben (§. 192, I.) durch (I) bezeichnet haben, vergleicht, und wenn man f, g, h die Neigungen der tangirenden Ebene gegen die drey coordinirten Ebenen der xy, xz und yz nennt, so erhält man (nach §. 193.), wenn man

$$\frac{L}{N} \text{ in } -p \quad \text{und} \quad \frac{M}{N} \text{ in } -q$$

verwandelt, für f, g, h folgende Werthe:

$$\text{Cos } f = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\text{Cos } g = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\text{Cos } h = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

IV. Man nennt diejenige Gerade, die in einem gegebenen Punkte der Fläche auf dieser Fläche senkrecht steht, die *Normale* der Fläche. Da diese Normale auch auf der durch diesen Punkt gehenden tangirenden Ebene senkrecht stehen muß, so hat man (nach §. 193, III.) für die Gleichungen dieser Normale

$$\left. \begin{aligned} x' - x + p(z' - z) &= 0 \\ y' - y + q(z' - z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (G).$$

Nennt man endlich f' , g' , h' die Winkel, welche diese Normale mit den coordinirten Axen der x , y , z bildet, so hat man (nach §. 186.)

$$\cos f' = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos g' = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos h' = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

also auch

$$\cos f' = \cos h,$$

$$\cos g' = \cos g,$$

$$\cos h' = \cos f.$$

So hat man für die in dem letzten Beispiele aufgestellte Fläche, da für sie

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z} \quad \text{und} \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$$

ist, für f , g , h folgende Ausdrücke:

$$\cos f = \frac{a^2 b^2 z}{m},$$

$$\cos g = -\frac{a^2 c^2 y}{m},$$

$$\cos h = -\frac{b^2 c^2 x}{m},$$

wo der Kürze wegen

$$m = \sqrt{b^4 c^4 x^2 + a^4 c^4 y^2 + a^4 b^4 z^2}$$

oder

$$m = a^2 b^2 c^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

gesetzt worden ist.