

Fünf und zwanzigstes Capitel.

Andere krumme Linien.

§. 202. (Die Neil'sche Parabel.) Indem wir von den unzähligen übrigen krummen Linien nur einige der vorzüglichsten hier kurz anführen, betrachten wir unter diesen zuerst die *cubische* (oder wie sie auch nach *Neil*, der sie einer der ersten untersucht hat, genannt wird), die *Neil'sche Parabel*. Ihre Gleichung des dritten Grades ist

$$y^3 = ax^2$$

und ihre Gestalt MAM' (Fig. 86), wo hier und in der Folge immer AX und AY die coordinirte Axe von x und y , und wo $AP = x$, $PM = y$ ist. Sie erstreckt sich von dem Anfangspuncte A der Coordinaten, zu beyden Seiten der Axe der y , aber nur auf einer Seite der Axe der x , in zwey endlose Äste.

§. 203. (Die Ellipsoide.) Diese der Ellipse ähnliche Curve (daher sie diesen Namen trägt) $BMNC$ (Fig. 87) hat die Eigenschaft, daß für jeden Punct M derselben das Product $MF \cdot MF'$ der Distanzen desselben von zwey festen Puncten F und F' immer einer constanten Gröfse gleich ist.

Ist $FF' = 2a$ die Entfernung der zwey festen Puncte F und F' , und ist $MF \cdot MF' = b^2$, wo a und b constante Gröfßen bezeichnen, so hat man, wenn der Anfangspunct A der Coordinaten in der Mitte zwischen F und F' liegt, und wenn wieder $AP = x$, $PM = y$ ist:

$$FM^2 = (a - x)^2 + y^2 \quad \text{und}$$

$$F'M^2 = (a + x)^2 + y^2,$$

also ist auch die Gleichung der Ellipsoide:

$$b^4 = [(a + x)^2 + y^2] \cdot [(a - x)^2 + y^2],$$

oder auch, nach einer einfachen Reduction:

$$x^2 + y^2 + a^2 = \sqrt{4a^2x^2 + b^4},$$

also die Curve des vierten Grades.

Die Ellipsoide ändert mit den Werthen ihrer Constanten a und b ihre Form.

Für $b > a$ hat sie die Gestalt der Fig. 87, so lange zugleich $b > a\sqrt{2}$ ist.

Ist aber $b > a$ und zugleich $b < a\sqrt{2}$, so nimmt sie die Gestalt der Fig. 88 an.

Ist $b = a$, so geht sie in die Gestalt der Fig. 89 über, wo $AB = AC = a\sqrt{2}$ ist.

Ist endlich $b < a$, so besteht die Curve aus zwey abgesonderten Ovalen, oder die zwey Schleifen der Fig. 89 trennen sich bey A so, daß der Zwischenraum bey A gleich $2\sqrt{a^2 - b^2}$ wird, und daß die Entfernung ihrer zwey äußersten Punkte $BC = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ ist.

Für den erwähnten besonderen Fall der Fig. 89, wo $a = b$ ist, heist diese Curve die *Lemniscate* oder die *Schleifenlinie*, deren Gleichung daher ist

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

§. 204. (Die Astrois.) Wenn eine Gerade von gegebener Länge a sich so bewegt, daß ihre beyden Endpunkte immer auf den Schenkeln eines rechten Winkels bleiben, so wird die Curve, welche durch die auf einander folgenden nächsten Durchschnittpunkte dieser beweglichen Geraden geht, die *Astrois* (sternförmige Curve) genannt. Ihre Gestalt $BDCE$ ist Fig. 90 verzeichnet, und für ihre Gleichung findet man

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

wo $AP = x$, $PM = y$, und wo die beyden senkrechten Durchmesser $BC = DE = 2a$ sind. Diese Curve gehört demnach zum sechsten Grade.

I. Mit ihr nahe verwandt und auch von derselben Gestalt ist die Curve, deren Gleichung

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

ist, und die man die *Evolute der Ellipse* nennt. Wir werden später (§. 212.) auf sie zurück kommen.

§. 205. (Die Logistik.) Gehen wir nun zu denjenigen Curven über, deren Gleichungen transcendente Größen enthalten, und die deshalb selbst transcendente Curven genannt werden. Eine der einfachsten derselben ist die *Logistik* oder die logarithmische Linie, deren Gleichung

$$x = a^y \text{ oder } \log x = y \cdot \log a,$$

und deren Gestalt Fig. 91 verzeichnet erscheint, wo $AP = x$ und $PM = y$ ist.

Für $x = AB = 1$ ist $y = 0$. Sey $AC = a$ und die mit der Axe der x parallele Gerade $CD = b$, also a die zu der Abscisse b gehörende Ordinate, so ist auch

$$b = a^a \text{ oder } \log b = a \log a.$$

Substituirt man diesen Werth von

$$\log a = \frac{1}{a} \log b$$

in der zweyten der vorhergehenden Gleichungen, so erhält man

$$\log x = \frac{y}{a} \log b,$$

oder einfacher

$$x^a = b^y,$$

eine andere Gleichung der Logistik.

Ist endlich $AC = a = 1$ und $CD = b = e$ die Basis der natürlichen Logarithmen, so hat man für den einfachsten Ausdruck der Gleichung dieser Curven

$$y = \log x \text{ oder } x = e^y.$$

§. 206. (Die Kettenlinie.) Wenn ein vollkommen biegsamer Faden in zwey seiner Punkte A und B (Fig. 92) befestiget und dann der Einwirkung der Schwere überlassen wird, so nimmt der zwischen diesen Punkten liegende Faden die Gestalt der Kettenlinie (Chainette) $AMDB$ an, deren Gleichung ist

$$y = a \log \frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a},$$

wo D der unterste oder von der horizontalen Geraden AB am weitesten entfernte Punct der Curve, und wo $DP = x$, $PM = y$ und a eine constante Gröfse ist.

Da sich diese Gleichung auch auf folgende zwey Arten aus-

drücken läßt:

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a} \quad \text{und} \\ e^{-\frac{y}{a}} = \frac{a}{a + x + \sqrt{2ax + x^2}} = \frac{a + x - \sqrt{2ax + x^2}}{a},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, so hat man auch, wenn man die beyden letzten Ausdrücke addirt:

$$e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} = \frac{2}{a}(a + x)$$

für eine andere Gleichung dieser Curve.

§. 207. (Die Cyclois.) Wenn ein Kreis HML (Fig. 93) auf einer Geraden AB rollt, so beschreibt ein gegebener Punkt M der Peripherie desselben die Cyclois $AMD B$.

Ist $AP = x$, $PM = y$ und O der Mittelpunkt des Kreises, dessen Halbmesser a ist, und nennt man t den Bogen HM , also auch $\frac{t}{a}$ den Winkel HOM , so hat man, da der Bogen HM der Geraden AH , die er früher bedeckte, gleich ist, die beyden Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} x &= t - a \sin \frac{t}{a} \\ y &= a \left(1 - \cos \frac{t}{a} \right) \end{aligned} \right\},$$

oder auch, wenn man der Kürze wegen $t = av$, also v gleich dem Winkel HOM setzt:

$$\left. \begin{aligned} x &= a(v - \sin v) \\ y &= a(1 - \cos v) \end{aligned} \right\}.$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Gröfse v , so erhält man

$$x = a \operatorname{Arc} \cos \left(1 - \frac{y}{a} \right) - \sqrt{2ay - y^2},$$

für die Gleichung der Cyclois.

I. Ist D der höchste Punkt der Curve, also auch CD gleich dem Durchmesser des erzeugenden Kreises, und setzt man $DP' = x'$ und $PM = y'$, so hat man

$$x' = 2a - y' \quad \text{und} \quad y' = a\pi - x,$$

wo $\pi = 3.14159\dots$ und $a\pi = AC$ die halbe Peripherie des erzeugenden Kreises bezeichnet. Dadurch gehen die vorigen Gleichungen in folgende über:

$$x' = a \left(1 + \cos \frac{t}{a} \right),$$

$$y' = a\pi - t + a \sin \frac{t}{a},$$

oder wenn man $\pi - v = \omega$ setzt:

$$x' = a(1 - \cos \omega)$$

$$y' = a(\omega + \sin \omega)$$

und wenn man endlich auch aus diesen zwey Gleichungen die Gröfse ω eliminirt:

$$y' = a \operatorname{Arc} \cos \left(1 - \frac{x'}{a} \right) + \sqrt{2ax' - x'^2},$$

eine zweyte Gleichung der Cyclois.

§. 208. (Die Spiralen.) Wenn man eine Curve, deren Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y gegeben ist, in eine Spirale verwandeln will, so kann man sich die Abscissenaxe derselben nach der Peripherie eines Kreises gekrümmt und auf demselben gleichsam aufgewunden vorstellen, wobey die Ordinaten y ihre frühere senkrechte Stellung gegen die neue Abscissenaxe, d. h. gegen die Peripherie des Kreises beybehalten. Ist der Halbmesser dieses Kreises die Einheit, so wird man nur, in der gegebenen Gleichung der Curve zwischen x und y , die Abscisse x in den Winkel v , und alle um diese Einheit verminderten Ordinaten y in den Radius r verwandeln, um sofort die Polargleichung der entsprechenden Spirale zu erhalten.

I. So hat man für eine gerade Linie, die durch den Anfang der Coordinaten geht, und die mit der Axe der x einen Winkel bildet, dessen Tangente $\frac{1}{2\pi}$ ist, die Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten

$$x = 2\pi \cdot y.$$

Nimmt man damit die angezeigte Verwandlung vor, so erhält man sofort

$$v = 2\pi \cdot r$$

für die Polargleichung der *Archimedischen Spirale*, die Fig. 94 abgebildet ist.

Wenn sich um den Mittelpunkt C des Kreises ABD der Halbmesser, den wir gleich der Einheit annehmen, gleichförmig dreht, und wenn sich zugleich in diesem Halbmesser ein Punkt M ebenfalls gleichförmig und so bewegt, daß immer der Radius $CM = r$ zu dem Halbmesser $CA = 1$ des Kreises sich verhalte, wie der Kreisbogen $AB = v$ zu der ganzen Peripherie 2π dieses Kreises, so hat man

$$r : 1 = v : 2\pi,$$

oder es ist

$$v = 2\pi \cdot r,$$

wie zuvor, und daher der so bestimmte Punkt M ein Punkt dieser Spirale. Diese Gleichung zeigt, daß die Spirale, nach dem ersten ganzen Umlauf des Halbmessers, den Kreis in A schneidet, und daß sie dann in unzähligen, immer größeren Windungen um den Kreis geht. Da man den Bogen v auch negativ, von A nach D nehmen kann, so besteht diese Curve noch aus einer zweyten Spirale, die der vorigen gleich und ähnlich ist, aber eine entgegengesetzte Lage hat.

II. Eben so hatten wir oben (§. 205.) für die Logistik, wenn man die Coordinaten x und y unter sich verwechselt, die Gleichung

$$x = \log y,$$

also ist auch

$$v = \log r$$

die Gleichung der logarithmischen Spirale (Fig. 95), wo $r = CM$ und wo v der Winkel der r mit einer durch den Pol C gehenden festen Geraden CA ist. Für $r = CA = 1$ ist $v = 0$, so daß also diese Spirale in unzähligen Windungen für wachsende positive Winkel v sich von dem Mittelpunkte C entfernt, und eben so für abnehmende oder negative Winkel ACM sich dem Mittelpunkte C immer mehr nähert.

III. Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel ist (§. 200, V.)

$$xy = \frac{1}{2} a^2,$$

und daher wird auch die Spirale, deren Polargleichung

$$r \cdot v = a$$

ist, die *hyperbolische Spirale* genannt. Sie ist Fig. 96 verzeichnet, wo $CM = r$ und $XCM = v$ ist. Nimmt man MP senk-

recht auf CX , so hat man

$$MP = CM \sin \nu = \frac{a}{\nu} \cdot \sin \nu.$$

Für $\nu = 0$ ist (§. 102.) aber $\frac{\sin \nu}{\nu} = 1$, also auch $MP = a$.

Ist daher auch $CA = a$ senkrecht auf CX , und zieht man durch A eine mit CX parallele Gerade AB , so ist AB die Asymptote der Spirale. Für negative Werthe von ν gibt es noch einen zweyten ähnlichen endlosen Ast dieser Curve, der gegen die andere Seite AB der Asymptote eben so liegt, wie jene gegen AB , und beyde gehen in unzähligen, immer kleinern Windungen um den Mittelpunkt C .

