

Vier und zwanzigstes Capitel.

Krumme Linien des zweyten Grades.

§. 194. (Verwandlung der Coordinaten.) Sey die Lage des Punctes M (Fig. 81) in einer gegebenen Ebene gegen die zwey festen, in derselben Ebene unter sich senkrecht stehenden Geraden AX und AY , durch die mit diesen Axen parallelen Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ gegeben. Seyen eben so die Coordinaten $AB = a$ und $BC = b$ eines andern Punctes C gegeben, und $CD = x'$, $DM = y'$ die Coordinaten des ersten Punctes M in Beziehung auf die zwey neuen Coordinatenachsen CX' und CY' , die man durch den zweyten Punct C mit den beyden vorhergehenden Axen parallel gelegt hat.

Um die neuen Coordinaten $x'y'$ aus den alten xy oder umgekehrt zu finden, hat man die einfachen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned} \right\} \quad \text{oder} \quad \left. \begin{aligned} x &= a + x' \\ y &= b + y' \end{aligned} \right\}.$$

Ist z. B. die Gleichung zwischen den ersten Coordinaten gegeben:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - 2 a^2 b y - 2 a b^2 x + a^2 b^2 = 0,$$

so erhält man, wenn man statt x die Gröfse $a + x'$, und statt y die Gröfse $b + y'$ substituirt, für die gesuchte und viel einfachere Gleichung zwischen den neuen Coordinaten:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

I. Legen wir jetzt, ohne den Anfangspunct A der Coordinaten zu ändern, durch denselben zwey andere ebenfalls unter sich senkrechte Coordinatenachsen AX' und AY' (Fig. 82), die mit den ersten Axen den Winkel $XAX' = YAY' = \alpha$ bilden, und sey, wie zuvor, $AP = x$, $PM = y$, und eben so $AQ = x'$ und $QM = y'$, wo wieder PM mit AY und QM mit AY' parallel, also PM auf AX , und QM auf AX' senkrecht ist.

$$y^2 a^2 + b^2 x^2 - 2 a^2 b y - 2 a b^2 x + a^2 b^2 = 0$$

$$b^2 (b + y')^2 + a^2 (a + x')^2 - 2 a^2 b (b + y') - 2 a b^2 (a + x') + a^2 b^2 = 0$$

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = 0$$

$$\frac{a^2 y'^2}{a^2 b^2} + \frac{b^2 x'^2}{a^2 b^2} = 1 \quad \frac{y'^2}{b^2} + \frac{x'^2}{a^2} = 1$$

Um auch hier die Abhängigkeit der beyden Coordinatenpaare zu erhalten, ziehe man die Gerade $AM = r$, so hat man, wenn man den Winkel $MAP = m$ setzt:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos m \\ y &= r \sin m \end{aligned} \right\}, \text{ und eben so } \left. \begin{aligned} x' &= r \cos (m - \alpha) \\ y' &= r \sin (m - \alpha) \end{aligned} \right\}.$$

Löst man die beyden letzten Gleichungen (nach §. 94, Gleichung C) auf, und substituirt dann in ihnen statt $r \cos m$ und $r \sin m$ ihre Werthe aus den ersten Gleichungen, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' &= y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{aligned} \right\},$$

und durch Invention dieser Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned} \right\}.$$

Auch durch diese Gleichungen wird man viele gegebene Ausdrücke zwischen x und y auf einfachere Formen zurückbringen, wie wir bald näher sehen werden.

II. Verbindet man die beyden vorhergehenden Veränderungen der Coordinaten, die des Anfangspunctes und die der Lage der Axen, mit einander, so erhält man für den Übergang der einen Coordinaten in die anderen die folgenden Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} x' &= (x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha \\ y' &= (y - b) \cos \alpha - (x - a) \sin \alpha \end{aligned} \right\},$$

und umgekehrt:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned} \right\}.$$

§. 195. (Linien des zweyten Grades.) Jede Gleichung zwischen zwey veränderlichen Gröſsen x und y kann als der analytische Ausdruck einer in einer Ebene nach einem bestimmten Gesetze verzeichneten Linie betrachtet werden, da man für jeden Werth, den man der Abscisse x beylegt, durch diese Gleichung den entsprechenden Werth der Ordinate y , und somit denjenigen Punct der Linie findet, der zu diesen Coordinaten gehört.

Wenn man in einer algebraischen Gleichung des m^{ten} Grades statt x und y die in §. 194, II. aufgestellten Werthe substi-

tührt, d. h. wenn man für die durch diese Gleichung repräsentierte Linie den Anfangspunct der Coordinaten sowohl, als auch die Lage der Coordinatenachsen willkürlich ändert, so wird dadurch, wie die erwähnten Ausdrücke zeigen, der Grad der algebraischen Gleichung *nicht* geändert, so daß man daher mit Recht die verschiedenen Linien nach den Graden eintheilt, zu welchen ihre Gleichungen gehören.

Demnach wird die *gerade Linie*, deren Gleichung (§. 176.)

$$y = ax + b$$

des ersten Grades ist, selbst eine Linie des ersten Grades seyn. Alle anderen Linien, deren Gleichungen den ersten Grad übersteigen, sind keine geraden, sondern krumme Linien oder Curven.

Die allgemeine Gleichung des zweyten Grades, also auch die Gleichung der Linien des zweyten Grades, hat die Form

$$y^2 + Ax y + Bx^2 + Cy + Dx + E = 0.$$

Löst man diese quadratische Gleichung in Beziehung auf y auf, so erhält man

$$y = -\frac{1}{2}(Ax + C) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - 4B)x^2 + 2(AC - 2D)x + (C^2 - 4E)}.$$

Wenn in diesem Ausdrücke der Werth von x so groß genommen wird, daß von der Größe unter dem Wurzelzeichen das erste Glied

$$(A^2 - 4B)x^2$$

größter wird, als die Summe der beyden übrigen Glieder, was offenbar immer möglich ist, so wird dann die ganze Größe unter dem Wurzelzeichen positiv oder negativ, das heißt, der Werth von y wird reell oder imaginär seyn, je nachdem die Größe

$$A^2 - 4B$$

positiv oder negativ ist. Betrachten wir diese Fälle genauer.

I. Wenn $A^2 - 4B$ positiv ist, so wird es immer so große, positive und zugleich negative Werthe von x , ins Unendliche fort, geben, für welche die Ordinate y stets reell bleibt, oder die Curve wird sich, zu beyden Seiten der Axe der x sowohl als auch der y , in den unbegrenzten, endlosen Raum erstrecken. Die so entstehende Curve heißt *Hyperbel* (Fig. 83), wo MAN und mBn ihre endlosen Äste sind.

II. Wenn $A^2 - 4B$ negativ ist, so wird es immer positive

und negative Werthe von x geben, für welche und über welche hinaus die Ordinaten y alle imaginär werden, oder die Curve wird auf allen Seiten um den Anfang der Coordinaten begrenzt, sie wird in einen endlichen Raum eingeschlossen seyn. Die so entstehende Curve heist *Ellipse* (Fig. 84) $AMDBE$.

III. Ist endlich die Gröfse $A^2 - 4B = 0$ oder ist $A^2 = 4B$, so wird es immer entweder positive oder aber negative Werthe von x geben, zu welchen noch reelle Werthe von y gehören. Dann wird nämlich das Zeichen für die Gröfse unter dem Wurzelzeichen von dem zweyten Gliede ($AC - 2D$) abhängen, und wenn dieses Glied positiv oder negativ ist, so wird auch für jenen Fall das positive, und für diesen das negative x ohne Ende wachsen können, ohne dafs y imaginär wird. Die so entstehende Curve wird sich demnach entweder blofs in der Richtung der positiven, oder blofs in der Richtung der negativen x in den unbegrenzten Raum ausdehnen, und diese Curve $M'AN'$ (Fig. 85) wird *Parabel* genannt.

§. 196. (Reduction der Gleichung dieser Curven auf eine einfachere Gestalt.) Wenn man in der vorhergehenden allgemeinen Gleichung der Curven des zweyten Grades die Coordinatenachsen um einen willkürlichen Winkel α verändert, d. h. wenn man in dieser Gleichung (nach §. 194, I.)

$$\begin{array}{ll} \text{statt } x \text{ die Gröfse} & \dots x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ \text{und statt } y & \dots x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{array}$$

substituirt, so findet man für den Factor des Gliedes xy den Ausdruck

$$(1 - B) \sin 2\alpha - A \cos 2\alpha.$$

Nimmt man daher den Winkel α so an, dafs man hat

$$\text{Tang } 2\alpha = \frac{A}{1-B},$$

was immer angeht, da die Tangente alle möglichen positiven und negativen Werthe annehmen kann, so verschwindet dadurch dieses Glied völlig, und die vorhergehende allgemeine Gleichung dieser Curven kann daher, ohne ihrer Allgemeinheit Eintrag zu thun, auf die einfachere Form

$$y^2 + Ax^2 + By + Cx + D = 0$$

gebracht werden, wo A , B , C und D wieder andere constante Gröfsen bezeichnen.

Verändert man in diesem Ausdrücke auch noch den Anfangspunct der Coordinaten, indem man (nach §. 194.)

$$x \text{ in } x + P, \\ \text{und } y \text{ in } y + Q$$

verwandelt, so erhält man

$$y^2 + Ax^2 + (B + 2Q)y + (C + 2AP)x \\ + Q^2 + AP^2 + BQ + CP + D = 0.$$

Um zu sehen, ob man auch noch aus dieser Gleichung das in y multiplicirte, und das letzte oder constante Glied wegschaffen kann, indem man über die zwey neu eingeführten Werthe von P und Q diesem Zweck gemäß disponirt, so wird man, wenn dieß in der That angeht, die zwey Bedingungsgleichungen haben:

$$B + 2Q = 0 \quad \text{und} \\ Q^2 + AP^2 + BQ + CP + D = 0.$$

Die erste gibt

$$Q = -\frac{1}{2}B,$$

und wenn man diesen Werth von Q in der zweyten substituirt, so erhält man

$$P = -\frac{C}{2A} + \frac{1}{2A} \sqrt{C^2 + AB^2 - 4AD}.$$

Diese Ausdrücke von P und Q zeigen aber, daß man ihre Werthe immer, den beyden letzten Gleichungen gemäß, ohne Anstand annehmen kann. Denn wenn auch z. B. die Gröfse $A=0$ wäre, so wird dadurch P nicht unendlich groß, sondern

$$P = -\frac{C}{2A} + \frac{C}{2A},$$

oder P wird in diesem Falle ebenfalls Null.

Daraus folgt demnach, daß man die Gleichung der Curven des zweyten Grades, ohne ihre Allgemeinheit zu beeinträchtigen, auf folgende einfache Gestalt zurückführen kann:

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

wo p und q constante Gröfsen bezeichnen.

§. 197. (Nähere Betrachtung der letzten Gleichung.) Setzt man in der letzten Gleichung statt q die Gröfse

$-\frac{p}{a}$, wo a ebenfalls eine constante Gröſſe bezeichnet, so erhält man für die allgemeine Gleichung der Curven des zweyten Grades

$$y^2 = 2px - \frac{p x^2}{a} \quad (A).$$

In dieser Gleichung wollen wir die Gröſſe p immer positiv annehmen, während die Gröſſe a alle möglichen positiven und negativen Werthe erhalten kann.

Bemerken wir zuerst, daſs schon die Form dieser Gleichung zeigt, daſs die durch sie ausgedrückten Curven in Beziehung auf die Axe der x symmetrisch liegen, so daſs für jeden Werth von x die Ordinate y , wenn sie anders reell ist, immer zwey gleich groſſe, aber in ihrer Lage entgegengesetzte Werthe hat.

I. Vergleicht man ferner diesen Ausdruck mit der zuerst (§. 195) aufgestellten Gleichung dieser Curven, so sieht man, daſs $A=0$ und $B=\frac{p}{a}$ ist, so daſs daher die Gleichung (A) gehören wird

für eine Hyperbel, wenn $A^2 - 4B$ positiv, d. h. wenn a negativ,
 » » Ellipse, » $A^2 - 4B$ negativ, » » a positiv,
 » » Parabel, » $A^2 - 4B$ gleich Null, » a unendlich groſs ist.

II. Führen wir noch zwey andere Constanten b und e ein, die von den bisher angenommenen a und p so abhängen, daſs man hat

$$b^2 = ap \quad \text{und} \quad a^2 e^2 = a^2 - b^2,$$

also auch

$$p = a(1 - e^2) = b \cdot \sqrt{1 - e^2}.$$

Dieſs vorausgesetzt, suchen wir zuerst denjenigen Punet der Axe der x , für welchen die Ordinate y gleich der Constante p wird. Setzt man nämlich in der Gleichung (A) die Gröſſe $y=p$, so erhält man

$$x^2 - 2ax + ap = 0,$$

und dieſs gibt

$$x = a \pm ae$$

für den gesuchten doppelten Werth der Abscisse x .

Sucht man eben so den Werth von x , für welchen die Ordinate $y=b=\sqrt{ap}$ wird, so gibt die Gleichung (A)

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0,$$

so daß man also für die gesuchte Abscisse x nur den einzigen Werth $x = a$ erhält.

III. Verlegt man dann den Anfangspunct der Coordinaten in den erstgefundenen Punct (Nr. II.) der Axe der x , für welchen $y = p$ wird, so wird man in der Gleichung (A) nach §. 194. statt x bloß die Gröfse $a(1 - e) - x'$ substituiren, wodurch man erhält

$$y^2 = 2p(a - ae - x') - \frac{p}{a}(a - ae - x')^2$$

$$\text{oder } y^2 = pa(1 - e^2) - 2pex' - \frac{p x'^2}{a},$$

$$\text{oder da } pa(1 - e^2) = p^2 \text{ und } \frac{p}{a} = 1 - e^2 \text{ ist:}$$

$$y^2 = p^2 - 2pex' - (1 - e^2) \cdot x'^2,$$

das heißt

$$y^2 + x'^2 = (p - ex')^2.$$

Nennt man also r die Entfernung jedes Punctes der Curve von diesem neuen Anfangspuncte, oder ist $r^2 = x'^2 + y^2$, so hat man für die allgemeine Gleichung derselben den einfachen Ausdruck

$$r + ex' = p \quad . \quad . \quad (B),$$

oder auch, wenn man ν den Winkel nennt, welchen der Radius r der Curve mit der Axe der x bildet, da $x' = r \cos \nu$ ist:

$$r + er \cos \nu = p,$$

oder endlich

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad . \quad . \quad (C),$$

welches die Gleichung der Curve der zweyten Ordnung zwischen den Polarcordinaten (§. 180, I.) r und ν ist.

IV. Verlegt man endlich den Anfang der Coordinaten in den zweyten der oben (Nr. II.) erwähnten Puncte, für welchen $y = b$ ist, so hat man, wenn man in der Gleichung (A)

statt x die Gröfse $a - x''$,

und statt y » » y''

setzt, den einfachen Ausdruck

$$b^2 x''^2 + a^2 y''^2 = a^2 b^2,$$

oder auch

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \dots (D),$$

welches die vierte Form der Gleichung dieser Curven ist. Nennt man auch hier ρ die Entfernung des Punctes der Curve von dem neuen Anfangspuncte der Coordinaten, und φ den Winkel, welchen ρ mit der Axe der x bildet, so hat man

$$x'' = \rho \cos \varphi \quad \text{und} \quad y'' = \rho \sin \varphi,$$

also auch, wenn man diese Ausdrücke in der Gleichung (D) substituirt:

$$\rho^2 = \frac{a^2 (1 - e^2)}{1 - e^2 \cos^2 \varphi}$$

oder

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \quad \dots (E).$$

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wollen wir nun die erwähnten drey Classen dieser Curven für sich näher untersuchen.

§. 198. (Die Ellipse.) Da für die Ellipse, nach §. 197, I., die Gröfse a positiv, und da überhaupt

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{und} \\ a^2 - b^2 = a^2 e^2$$

ist, so folgt, da p immer positiv angenommen wird, daß $e < 1$ und $b < a$ seyn muß. Demnach zeigt z. B. die Gleichung (A), daß die Abscisse x nie negativ werden kann, und daß die Curve ganz in dem Raume eingeschlossen ist, der den Abscissen $x=0$ und $x=+2a$ angehört.

Ist aber (Fig. 84) $AP = x$ und $PM = y$, so hat man, wie sofort aus der Gleichung (A) folgt,

für die Abscisse x : und für die analoge Ordinate y :

$$\begin{array}{rcll} 0 & \dots & 0, & \\ AF = a(1 - e) & \dots & \pm Fm = \pm p, & \\ AC = a & \dots & \pm CD = \pm b, & \\ AF' = a(1 + e) & \dots & \pm Fm' = \pm p, & \\ AB = 2a & \dots & 0. & \end{array}$$

Es ist demnach $AC = BC$ und $CD = CE$, so wie $CF = CF'$, und man nennt

$AC = BC = a$ die halbe grofse Axe der Ellipse,

$CD = CE = b$ die halbe kleine Axe,

$Fm = F'm' = p$ den halben Parameter, und
 $CF = CF' = ae$ die Excentricität dieser Curve, so wie
 C der Mittelpunkt, F und F' die beyden Brennpuncte, und A
 und B die beyden Scheitel derselben genannt werden — Für die
 Ellipse gelten die Gleichungen (A) . . . (E) unverändert.

Für die Gleichung (B) aber ist $FM = r$ und $CP = x'$.

(C) » » $FM = r$ » $AFM = v$.

(D) » » $CP = x''$ » $PM = y''$.

(E) » » $CM = \rho$ » $ACM = \varphi$.

I. Ist $FM = r$ und $F'M = r'$, so hat man in dem Dreyecke
 FMF' , da der Winkel $F'FM = 180 - v$ ist:

$$r'^2 = r^2 + FF'^2 + 2r \cdot FF' \cdot \cos v,$$

oder da $FF' = 2ae$ und

$$\cos v = \frac{p-r}{er} = \frac{a(1-e^2)-r}{er}$$

ist:

$$r'^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4a(a - ae^2 - r),$$

das heißt, man hat

$$r + r' = 2a,$$

oder die Summe der Entfernungen jedes Punctes M der Ellipse
 von den beyden Brennpuncten F und F' ist immer gleich der
 großen Axe $2a$ dieser Curve, wodurch man ein einfaches Mit-
 tel zur Verzeichnung derselben mittelst eines Fadens erhält, des-
 sen Länge gleich $2a$, und dessen Endpuncte in F und F' befe-
 stigt werden.

II. Bisher fiel der Anfangspunct der Coordinaten in irgend
 einen Punct der Axe der x . Verlegt man ihn in irgend einen
 willkürlichen anderen Punct, und behält auch hier noch die frü-
 here Richtung der Coordinatenachsen bey, die den Axen a und b
 der Ellipse parallel sind, so wird man, wenn A und B die auf
 diese neuen Axen bezogenen Coordinaten des Mittelpunctes C der
 Ellipse sind, in der Gleichung (D)

die Gröfse x'' in $x'' - A$,

und » » y'' » $y'' - B$

verwandeln, wodurch man für die allgemeine Gleichung der
 Curve erhält

$$\left(\frac{x''-A}{a}\right)^2 + \left(\frac{y''-B}{b}\right)^2 = 1.$$

§. 199. (Der Kreis, als besonderer Fall der Ellipse.) Setzt man in den Gleichungen (A)... (D) die Gröfse $a=b$ oder $e=0$, so erhält man z. B. aus der Gleichung (D)

$$x''^2 + y''^2 = a^2 \quad \dots \quad (1).$$

Diese Gleichung zeigt, dafs in der durch sie bezeichneten Curve die Distanz $\sqrt{x''^2 + y''^2}$ jedes Punctes derselben von dem Anfange der Coordinaten immer gleich der constanten Gröfse a ist. Diese Curve ist daher der *Kreis*, dessen Halbmesser a ist, und dessen Mittelpunkt im Anfange der Coordinaten liegt.

Eben so gibt die Gleichung (A), da für unsern besondern Fall $p=a$ ist:

$$y^2 = 2ax - x^2 \quad \dots \quad (2),$$

eine andere bekannte Gleichung des Kreises, wo der Anfang der Coordinaten in irgend einem Puncte des Umfangs, und wo die Axe der x in einem Durchmesser des Kreises liegt. Ist R die Distanz jedes Punctes des Umfangs von diesem Anfangspuncte, und ist θ der Winkel der R mit der Axe der x , so hat man

$$x = R \cos \theta \quad \text{und} \quad y = R \sin \theta,$$

also auch, wenn man diese Werthe von x und y in der letzten Gleichung (2) substituirt:

$$R = 2a \cos \theta \quad \dots \quad (3)$$

für die dritte Gleichung des Kreises.

Sind endlich A und B die mit x'' und y'' parallelen Coordinaten des Mittelpunctes des Kreises, dessen Halbmesser a ist, so hat man für die allgemeine Gleichung desselben, wenn man in dem letzten Ausdrucke des §. 198. die Gröfse $a=b$ setzt:

$$(x'' - A)^2 + (y'' - B)^2 = a^2 \quad \dots \quad (4).$$

Diese vier Gleichungen sind als eben so viele allgemeine analytische Ausdrücke des Kreises zu betrachten, aus deren jeder man daher auch die oben (§. 111, 112 u. f.) aufgestellten Eigenschaften dieser Curve wird ableiten können.

§. 200. (Die Hyperbel.) Da nach dem Vorhergehenden die Gleichungen (A)... (D) für einen negativen Werth der Gröfse a die Hyperbel geben, und da allgemein für die Curven des zweyten Grades

$$b^2 = ap \quad \text{und} \quad a^2 e^2 = a^2 - b^2$$

ist, wo p eine immer positive Gröfse bezeichnet, so wird man auch in jenen Gleichungen

statt b^2 die Gröfse $-b^2$,

und daher auch

$$a^2 e^2 = a^2 + b^2 \quad \text{und} \quad p = a(e^2 - 1)$$

setzen, um die Ausdrücke für die Hyperbel zu erhalten, in welchen dann wieder a , b , p positive Gröfsen und $e > 1$ ist. Diese Gleichungen der Hyperbel sind daher (Fig. 83)

$$\text{für } AP = x, PM = y \dots \dots y^2 = 2px + \frac{p x^2}{a} \dots (A'),$$

$$» \quad FP = x, FM = r \dots \dots r + ex' = p \dots \dots (B'),$$

$$» \quad FM = r, PFM = v \dots \dots r = \frac{p}{1 + e \cos v} \dots \dots (C'),$$

$$» \quad CP = x'', PM = y'' \dots \dots \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \dots \dots (D').$$

Man sieht z. B. aus der letzten Gleichung (D'), dafs von $x'' = 0$ bis $x'' = \pm a$ die Ordinaten y'' imaginär sind, und dafs für gröfsere, positive und negative Abscissen die immer reellen Ordinaten ins Unendliche wachsen und stets zwey, nur durch ihre Zeichen verschiedene Werthe haben.

$$\text{Für } x'' = \pm a = \begin{cases} CA \\ CB \end{cases} \text{ ist } y'' = 0, \text{ und}$$

$$\text{für } x'' = \pm ae = \begin{cases} CF \\ CF' \end{cases} \text{ ist } y'' = p = \frac{b^2}{a},$$

und man nennt auch hier $CA = CB = a$ die halbe grofse Axe; $Fm = F'm' = p$ den halben Parameter; $b = \sqrt{ap}$ die halbe kleine Axe, die aber auch gröfser als a seyn kann; $CF = CF' = ae$ die Excentricität, so wie C den Mittelpunkt, F und F' die Brennpuncte, und A und B die Scheitel der Hyperbel.

I. Um die halbe Axe b in der Zeichnung darzustellen, so ist sie die Ordinate y'' der Hyperbel für die Abscisse $x'' = CP = a\sqrt{2}$. Beschreibt man daher aus dem Scheitel A , als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser $CF = ae$ einen Kreis, so wird dieser Kreis ein durch C auf AB errichtetes Loth in zwey Puncten E und E' schneiden, so dafs $CE = CE' = b$ ist, weil man in dem rechtwinkligen Dreyecke CAE hat

$$CE = \sqrt{AE^2 - CA^2} = \sqrt{a^2 e^2 - a^2} = a\sqrt{e^2 - 1} = b.$$

II. Setzt man die Distanz irgend eines Punctes M der Hyperbel von den beyden Brennpuncten

$$FM = r \quad \text{und} \quad F'M = r',$$

so hat man

$$r^2 = (x'' - CF)^2 + y''^2 \quad \text{und} \quad r'^2 = (x'' + CF)^2 + y''^2.$$

Da aber $CF = ae$, und nach der Gleichung (D')

$$y''^2 = (e^2 - 1)(x''^2 - a^2)$$

ist, so gehen die zwey vorhergehenden Gleichungen in folgende über

$$r = ex'' - a \quad \text{und} \quad r' = ex'' + a,$$

wovon die Differenz ist

$$r' - r = 2a,$$

so daß demnach der Unterschied der beyden Distanzen r und r' für jeden Punct der Hyperbel gleich der grofsen Axe $2a$ derselben ist. (Vergl. §. 198, I.)

III. Daraus entspringt folgende Verzeichnung dieser Curve.

— Man nehme auf der verlängerten grofsen Axe irgend einen Punct H , und beschreibe zwey Kreise, einen aus F' mit dem Halbmesser BH , und den anderen aus F mit dem Halbmesser AH , so wird der Durchschnitt der beyden Kreise in der Hyperbel liegen, da man hat

$$F'M = BH \quad \text{und} \quad FM = AH,$$

also auch

$$F'M - FM = BH - AH = AB = 2a.$$

IV. Die obige Gleichung (D') kann auch so geschrieben werden:

$$y'' = \pm \frac{bx}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x''^2}},$$

und in dieser Gestalt zeigt sie, daß, je gröfser die Abscisse x'' ist, desto näher die Ordinate an den Werth

$$y = \pm \frac{bx}{a}$$

kömmt. Die letzte Gleichung gehört aber für ein System von zwey geraden Linien, die durch den Anfang C der Coordinaten gehen, und die mit der Axe CP der x einen Winkel α bilden,

dessen Tangente für die eine Gerade gleich $\frac{b}{a}$, und für die andere gleich $-\frac{b}{a}$ ist.

Errichtet man also in dem Scheitel A und B der Hyperbel ein Loth $Aa = Bb = b$ auf die große Axe, und zieht man die Geraden aCb' und $bC'a'$, so werden sich die vier Äste der Hyperbel diesen Geraden desto mehr nähern, je größer $\pm x$ ist, ohne sie aber je in der That zu erreichen. Diese beyden Geraden werden die *Asymptoten* der Hyperbel genannt.

Da $\text{Tang } \alpha = \frac{b}{a}$ ist, so ist auch $\text{Cos } \alpha = \frac{1}{e}$. Zieht man daher die Linie AD parallel mit der Asymptote Cb , so sind in dem Dreyecke ADa die Winkel an A und a , so wie in dem Dreyecke ADC die Winkel an A und C einander gleich, also ist auch $AD = aD = CD$.

Man hat aber

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\sin ACD}{\sin ADC} = \frac{\sin \alpha}{\sin (180 - 2\alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2 \cos \alpha},$$

also ist auch

$$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} e,$$

oder endlich, da $AC = a$ ist:

$$AD^2 = \frac{1}{4} a^2 e^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2),$$

und man nennt dieses Quadrat von AD die *Potenz der Hyperbel*.

V. Für $a=b$ ist der Winkel $\alpha=45^\circ$, und die Asymptoten stehen auf einander senkrecht, in welchem Falle die Hyperbel *gleichseitig* genannt wird. Für sie geht die Gleichung (D') in folgende über:

$$x''^2 - y''^2 = a^2.$$

Ist Mq parallel mit der Asymptote Ca' und $Cq = \xi$, $qM = v$, so hat man nach §. 194, I., da $\alpha = 45^\circ$, also auch $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist:

$$x'' = \frac{v + \xi}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad y'' = \frac{v - \xi}{\sqrt{2}},$$

und daher, wenn man diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdrucke substituirt:

$$\xi v = \frac{1}{2} a^2$$

für die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel.

§. 201. (Die Parabel.) Da die vorhergehenden Gleichungen (A) . . . (D), für ein unendlich großes a , der Parabel angehören, so hat man für sie (Fig. 85)

$$\begin{aligned} \text{für } AP &= x, PM = y \text{ die Gleichung } y^2 = 2px \dots (A''), \\ \text{» } FP &= x', MF = r \text{ » } r + x' = p \dots (B''), \\ \text{» } MF &= r, AFM = \nu \text{ » } r = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \nu} \dots (C''), \end{aligned}$$

und für diese Curve ist die oben eingeführte Gröfse:

$$e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2} = 1.$$

Auch für sie wird der Punct A der Scheitel, F der Brennpunct, und $FM = p$ der halbe Parameter genannt.

I. Da $AP + PF = AF$ oder da $x + x' = \frac{1}{2}p$ ist, so gibt die Gleichung (B'')

$$r = \frac{1}{2}p + x,$$

woraus sofort folgende Verzeichnung der Parabel abgeleitet werden kann. — Man nehme auf der Axe der x die Gröfse $AB = AF = \frac{1}{2}p$, und errichte auf dieser Axe in willkürlichen Puncten $P, P', \dots$ derselben senkrechte Linien. Dann beschreibe man aus F als Mittelpunct mit den Halbmessern $BP, BP', \dots$ Kreise. Schneidet der erste dieser Kreise das Loth durch P in M und N , und schneidet der zweyte das Loth durch P' in M' und N' , . . . so sind $M, N, M', N', \dots$ Punkte der Parabel.