

Drey und zwanzigstes Capitel.

Gleichung der Ebene.

§. 183. (Bildung der Gleichung einer Ebene.)

Nach der oben (§. 79, I.) gegebenen Erklärung einer *Ebene*, kann sie auch als eine nach allen Richtungen ausgedehnte Reihe von Puncten betrachtet werden, deren jeder von zwey anderen, aufser der Ebene liegenden, festen Puncten gleich weit absteht.

Sey FmG (Fig. 80) ein Theil dieser Ebene, A und B die zwey festen aufser ihr liegenden Puncte, und endlich O derjenige Punct der Ebene, in welcher sie von der durch A und B gehenden Geraden AOB getroffen wird. Dann soll also, für jeden anderen Punct M der Ebene, die Distanz $MA=MB$, und daher auch, da O ebenfalls ein Punct dieser Ebene ist, auch $OA=OB$ seyn, so daß also die erwähnte Gerade AOB von der Ebene halbtirt wird, und zugleich auf dieser Ebene senkrecht steht.

Nimmt man den unserer freyen Wahl überlassenen Anfangspunct der Coordinaten, durch welche wir die Lage der Ebene im Raume bestimmen wollen, in dem ersten jener zwey festen Puncte, oder in A an, und nennt man

$$AC = \alpha, \quad CD = \beta \quad \text{und} \quad DB = \gamma$$

die den drey durch A gehenden fixen Coordinatenaxen AX , AY , AZ parallelen Coordinaten des zweyten Punctes B , so wie

$$AP = x, \quad PQ = y \quad \text{und} \quad QM = z$$

die veränderlichen Coordinaten irgend eines Punctes M der erwähnten Ebene, so hat man für die Distanz MA des Punctes M von dem ersten festen Puncte (§. 184, I.)

$$MA = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

und eben so für die Distanz MB des Punctes M von dem zweyten festen Puncte (§. 184.)

$$MB = \sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}.$$

Da aber, nach dem Vorhergehenden, beyde Distanzen für alle Punkte der Ebene unter sich gleich seyn sollen, so hat man

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2,$$

oder wenn man die drey letzten Quadrate auflöst:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

und da dieser Ausdruck für alle Punkte der Ebene gilt, so ist er auch der allgemeine Ausdruck für die Lage aller dieser Punkte, oder er ist die *Gleichung der Ebene*.

I. Da α , β , γ beständige Größen sind, so kann man der letzten Gleichung immer die Form geben:

$$Lx + My + Nz = 1,$$

wo L , M , N wieder constante Größen bezeichnen.

§. 189. (Ebenen, die auf den coordinirten Ebenen senkrecht stehen.) Ist in der vorletzten Gleichung des §. 188. die Größe $\gamma = 0$, so liegt die Linie AB , welche die zwey festen Punkte verbindet, in der Ebene der xy ; also steht dann auch die Ebene FMG auf der Ebene der xy senkrecht. Daraus folgt, daß die Gleichung einer auf xy senkrechten Ebene die Form hat:

$$Lx + My = 1;$$

und eben so ist

$$Lx + Nz = 1 \quad \text{oder} \quad My + Nz = 1$$

die Gleichung einer auf xz oder auf yz senkrechten Ebene.

1. Vergleicht man dieß mit dem, was oben (§. 182.) von den beyden Gleichungen einer Geraden im Raume gesagt worden ist, so sieht man, daß von diesen Gleichungen

$$x = az + \alpha \dots (a),$$

$$y = bz + \beta \dots (b),$$

die erste (a), allein genommen, für eine auf xz senkrechte, und die zweyte (b) für eine auf yz senkrechte Ebene gehört, und daß daher beyde, zusammen genommen oder als coexistirend betrachtet, für den Durchschnitt der beyden Ebenen (a) und (b), das heißt, für die gerade Linie gehören, die wir oben durch (1) bezeichnet haben. Der Durchschnitt der Ebene (a) mit xz aber ist das, was oben die Projection der Linie (1) in xz genannt wor-

den ist, und eben so ist auch der Durchschnitt der Ebene (b) mit yz die Projection von (1) in der coordinirten Ebene der yz .

II. Sind aber *zwey* der Coordinaten α, β, γ gleich Null, oder ist z. B. $\beta = 0$ und $\gamma = 0$, so fällt die Gerade AB ganz in die Axe der x , woraus folgt, daß

$$x = A$$

für eine auf der Axe der x senkrecht stehende Ebene gehört, und daß eben so

$$y = B \text{ oder } z = C$$

eine auf y oder auf z senkrechte Ebene bezeichnen, wo A, B, C constante Gröſſen sind, die den Abstand dieser Ebenen von den drey coordinirten Ebenen der yz, xz und xy ausdrücken.

Also ist auch, wenn diese Abstände verschwindend angenommen werden,

$x = 0$ die Gleichung der coordinirten Ebene der yz ,

$y = 0$ » » » » » » xz ,

$z = 0$ » » » » » » xy .

III. Jede einzelne Gleichung, wie

$$Lx + My + Nz = 1$$

gehört daher für irgend eine *Ebene*. Verbindet man sie aber mit einer anderen Gleichung:

$$L'x + M'y + N'z = 1,$$

so gehören beyde, zusammen betrachtet, für den Durchschnitt zweyer Ebenen, d. h. für eine *gerade Linie*. Verbindet man sie noch mit einer dritten Gleichung:

$$L''x + M''y + N''z = 1,$$

so gehören alle drey, zusammen betrachtet, für den gemeinschaftlichen Durchschnitt dreyer Ebenen, d. h. für einen *Punct*.

Die Ebene wird daher durch eine einzige, die Gerade im Raume durch zwey, und der Punct endlich durch drey Gleichungen gegeben.

Wenn aber irgend ein Gegenstand durch mehr als eine Gleichung ausgedrückt wird, so ist keine dieser Gleichungen absolut nothwendig, und derselbe Gegenstand kann auch durch eine eben so groſſe Anzahl von willkürlichen Combinationen jener Gleichungen ausgedrückt werden. So lassen sich z. B. für zwey sich schnei-

denden Ebenen diese Ebenen, also auch ihre Gleichungen, willkürlich ändern, ohne dafs dadurch ihre Durchschnittslinie, die hier allein gesucht wird, geändert werden darf.

Von allen den verschiedenen Stellungen aber, die man den zwey, sich um ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie drehenden Ebenen, oder die man jenen beyden Gleichungen geben kann, sind offenbar diejenigen die einfachsten jene, die man erhält, wenn man aus diesen Gleichungen nach und nach eine der drey Coordinaten x , y , z eliminirt, wodurch man drey andere Gleichungen der Form

$$\begin{aligned}x &= az + \alpha, \\y &= bz + \beta, \\x &= cy + \gamma\end{aligned}$$

erhält, die, nach dem Vorhergehenden, jede für sich eine Ebene ausdrückt, die auf einer der drey coordinirten Ebenen der xz , yz und xy senkrecht steht, und von welcher daher je zwey, zusammen genommen, den Durchschnitt dieser Ebenen oder die *gerade Linie* geben werden. Eliminirt man eben so aus drey Gleichungen zwischen x , y und z nach und nach je zwey der drey Coordinaten x , y , z , so erhält man drey Gleichungen der Form $x = A$, $y = B$ und $z = C$, die daher, jede für sich, eine auf yz , xz und xy senkrechte Ebene geben, während alle drey zusammen genommen, für den gemeinschaftlichen Durchschnitt dieser drey Ebenen, d. h. für einen Punkt gehören.

IV. Bemerken wir noch, dafs in den zwey Gleichungen einer Linie

$$\left. \begin{aligned}x &= az + \alpha \\y &= bz + \beta\end{aligned} \right\}$$

je zwey der drey Coordinaten immer eine Function der dritten sind, so dafs, wenn z. B. die Gröfse z gegeben ist, dadurch auch schon die beyden anderen Coordinaten x und y bestimmt werden. Bey der einzigen Gleichung

$$Lx + My + Nz = 1$$

einer Ebene aber ist jede einzelne Coordinate eine Function der beyden anderen, da hier immer zwey derselben gegeben oder willkürlich angenommen werden müssen, um dadurch auch die dritte zu bestimmen.

§. 190. (Anderer Ausdruck der Gleichung einer Ebene.) Da die Ebene, deren Gleichung

$$ax + \beta y + \gamma z = \frac{1}{2}(a^2 + \beta^2 + \gamma^2) \quad \text{oder} \\ Lx + My + Nz = 1$$

ist, nach dem Vorhergehenden, auf der Mitte O derjenigen Geraden AOB (Fig. 80) senkrecht steht, die den Anfangspunct A der Coordinaten mit dem Puncte B verbindet, dessen Coordinaten a, β, γ sind, so hat man, wenn R die halbe Distanz $OA = OB$ dieser beyden Puncte A und B genannt wird (nach §. 184, I.)

$$(2R)^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Nennt man aber A, B, C die Winkel, welche diese Distanz $AB = 2R$ in derselben Ordnung mit den Axen der x, y, z bildet, so hat man in dem bey C rechtwinkligen Dreyecke ACB

$$a = 2R \cdot \cos A,$$

und eben so

$$\beta = 2R \cdot \cos B,$$

$$\gamma = 2R \cdot \cos C.$$

Substituirt man diese Werthe von a, β, γ in der ersten der vorhergehenden Gleichungen, und bemerkt, dafs nach §. 186, III.

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$$

ist, so erhält man

$$x \cdot \cos A + y \cdot \cos B + z \cdot \cos C = R$$

eine andere allgemeine Form der Gleichung einer Ebene, in welcher also $R = AO$ die senkrechte Distanz der Ebene von dem Anfangspuncte A der Coordinaten bezeichnet.

I. Nimmt man überdies p, q, r die Entfernungen derjenigen drey Puncte von dem Anfangspuncte A , in welcher die Ebene von den Axen der x, y, z geschnitten wird, so hat man

$$p = \frac{R}{\cos A}, \quad q = \frac{R}{\cos B}, \quad r = \frac{R}{\cos C};$$

also auch, wenn man diese Werthe in der letzten Gleichung der Ebene substituirt:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

oder auch

$$qr \cdot x + pr \cdot y + pq \cdot z = pqr$$

eine dritte merkwürdige Form der Gleichung einer Ebene.

§. 191. (Zusammenhang der Gröſſen A, B, C und L, M, N .) Wenn man die beyden erhaltenen Ausdrücke für die Gleichung einer Ebene

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C = R,$$

und

$$Lx + My + Nz = 1$$

unter sich vergleicht, so erhält man sofort

$$L = \frac{1}{R} \cos A, \quad M = \frac{1}{R} \cos B, \quad N = \frac{1}{R} \cos C.$$

Quadrirt und addirt man diese Werthe von L, M, N , und nimmt dabey auf die oben gegebene Bedingungsgleichung

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$$

Rücksicht, so erhält man

$$R = \frac{1}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

und durch diese Gleichung wird das Loth R von dem Anfange der Coordinaten auf die Ebene durch die Gröſſen L, M, N ausgedrückt.

Substituirt man diesen Werth von R in den vorhergehenden Ausdrücken von L, M und N , so erhält man

$$\cos A = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos B = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos C = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}};$$

und diese Gleichungen geben die Werthe von A, B, C durch die Gröſſen L, M, N .

§. 192. (Winkel zweyer Ebenen.) Seyen die Gleichungen zweyer gegebenen Ebenen, wie zuvor,

$$Lx + My + Nz = 1 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (I),$$

$$\text{und } L'x + M'y + N'z = 1 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (II).$$

Wir wollen sie, der Kürze wegen, die Ebene (I) und (II) nennen, und den Winkel, unter welchen sie gegen einander geneigt sind, durch (I. II) bezeichnen.

Behält man für die Ebene (I) die Bezeichnung der oben aufgestellten Gröſſen A, B, C und R bey, und nennt man, für die

Ebene (II), dieselben Größen A' , B' , C' und R' , so hat man für den Cosinus des Winkels, welchen die beyden Lothe R und R' aus dem Anfangspuncte der Coordinaten auf die Ebene (I) und (II) unter sich bilden, nach §. 186, I. den Ausdruck:

$$\cos A \cos A' + \cos B \cos B' + \cos C \cos C'.$$

Allein dieser Winkel der beyden Lothe ist auch zugleich (§. 157, II.) der Winkel (I. II), unter welchem die beyden Ebenen (I) und (II) gegen einander geneigt sind, so daß man daher für diesen Neigungswinkel der zwey Ebenen den Ausdruck hat:

$$\cos (I. II) = \cos A \cos A' + \cos B \cos B' + \cos C \cos C';$$

oder auch, wenn man die Werthe von $\cos A$, $\cos A'$, . . . aus §. 191. substituirt:

$$\cos (I. II) = \frac{LL' + MM' + NN'}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2} \cdot \sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2}}.$$

I. Stehen demnach die beyden Ebenen (I) und (II) auf einander senkrecht, so ist

$$LL' + MM' + NN' = 0,$$

und sind sie unter sich parallel, so hat man $\cos (I. II) = 1$, oder

$$(LM' - L'M)^2 + (LN' - L'N)^2 + (MN' - M'N)^2 = 0,$$

welche Gleichung, wie in §. 185, I., den drey folgenden gleichgeltend ist:

$$\frac{L}{M} = \frac{L'}{M'}, \quad \frac{L}{N} = \frac{L'}{N'}, \quad \frac{M}{N} = \frac{M'}{N'}.$$

§. 193. (Winkel einer gegebenen Ebene mit den drey coordinirten Ebenen.) Bezeichnen wir wieder, analog mit dem Vorhergehenden, durch $(I. xy)$, $(I. xz)$ und $(I. yz)$ die Winkel der Ebene (I) mit der coordinirten Ebene der xy , xz und yz , so hat man, wenn man in der Gleichung der Ebene (II) die Größe $L' = M' = 0$ setzt:

$$Nz = 1 \quad \text{oder} \quad z = \frac{1}{N};$$

und diese Gleichung gehört, nach §. 189, II., für eine auf die Axe der z senkrechte, oder für eine mit xy parallele Ebene, mit welcher daher die Ebene (I) den genannten Winkel $(I. xy)$ bildet. Es wird daher der vorhergehende Ausdruck von $\cos (I. II)$ in den von $\cos (I. xy)$ übergehen, wenn man in jenem L und M

gleich Null setzt. Diefs gibt

$$\cos(I.x\gamma) = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

und ganz eben so erhält man auch

$$\cos(I.xz) = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos(I.\gamma z) = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

I. Vergleicht man diese Ausdrücke mit den oben (§. 191.) gefundenen Werthen von $\cos A$, $\cos B$ und $\cos C$, so erhält man

$$\cos(I.x\gamma) = \cos C,$$

$$\cos(I.xz) = \cos B,$$

$$\cos(I.\gamma z) = \cos A;$$

und da, nach dem Vorhergehenden, die Bedingungsgleichung

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$$

Statt hat, so hat man auch

$$\cos^2(I.x\gamma) + \cos^2(I.xz) + \cos^2(I.\gamma z) = 1.$$

II. Um noch den Winkel (I. 1) der Ebene (I) mit der geraden Linie (1) zu finden, so hat man für die Gleichungen der Linie (1), wenn sie mit sich selbst parallel durch den Anfangspunkt der Coordinaten geführt wird:

$$x = az \text{ und } \gamma = bz.$$

Die Gleichungen einer durch denselben Anfangspunkt, aber senkrecht auf die Ebene (I) geführten Geraden, das heist, die Gleichungen des oben (§. 190.) erwähnten Lothes R sind (nach §. 186, II.)

$$x = z \frac{\cos A}{\cos C}, \quad \gamma = z \frac{\cos B}{\cos C}.$$

Da nun der Winkel dieser beyden Geraden den gesuchten Winkel (I. 1) zu einem rechten Winkel ergänzt, so wird man den Winkel (I. 1) erhalten, wenn man in dem oben (§. 185.) gegebenen Ausdrücke für $\cos(1.2)$ die Gröfse

$$(1.2) \text{ in } 90 - (I.1),$$

$$a' \text{ in } \frac{\cos A}{\cos C},$$

$$\text{und } b' \text{ in } \frac{\cos B}{\cos C}$$

verwandelt, wodurch man demnach für den gesuchten Winkel erhält:

$$\sin(I.1) = \frac{a \cos A + b \cos B + \cos C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

oder auch, wenn man die vorhergehenden Werthe von $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ substituirt:

$$\sin(I.1) = \frac{aL + bM + N}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

III. Soll daher die Ebene (I) auf der Geraden (1) senkrecht stehen, so wird man in dem letzten Ausdrucke $\sin(I.1)$ gleich der Einheit setzen, wodurch man, wie zuvor, die drey Gleichungen erhält:

$$\frac{L}{N} = a, \quad \frac{M}{N} = b \quad \text{und} \quad \frac{M}{L} = \frac{b}{a}.$$

Man hat daher für eine Ebene, die auf der Geraden $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ senkrecht steht, die Gleichung

$$ax + by + z = P,$$

wo P irgend eine willkürliche constante Gröfse bezeichnet. — Und eben so hat man für eine Gerade, die auf der Ebene

$$Lx + My + Nz = 1$$

senkrecht steht, die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{L}{N}z + \alpha \\ y &= \frac{M}{N}z + \beta \end{aligned} \right\},$$

wo α und β willkürliche constante Gröfßen bezeichnen.

IV. Soll endlich die Ebene, deren Gleichung

$$Lx + My + Nz = 1$$

ist, mit der Geraden (1) parallel seyn, so ist $\sin(I.1) = 0$, und daher die Bedingungsgleichung dieses Parallelismus

$$aL + bM + N = 0.$$