

Zwey und zwanzigstes Capitel.

Gleichungen der geraden Linie.

A. Gerade Linie in einer gegebenen Ebene.

§. 176. (Gleichung der geraden Linie.) Es ist bereits oben (§. 150.) gezeigt worden, daß man den Ort eines Punctes M (Fig. 77) in einer gegebenen Ebene kennt, wenn die zwey senkrechten Abstände MP und MQ dieses Punctes von zwey ebenfalls unter sich senkrechten, aber ihrer Lage nach gegebenen geraden XX' und YY' , in dieser Ebene liegenden Linien bekannt ist, und daß von diesen Abständen die eine $MQ = AP = x$ die *Abscisse*, die andere $MP = QA = y$ die *Ordinate*, beyde zusammen aber die *Coordinationen* des Punctes M genannt werden, während man die beyden fixen Geraden XX' und YY' die *Axen der Coordinationen*, und ihren Durchschnittspunct A den *Anfang der Coordinationen* zu nennen pflegt.

Nimmt man in einem der vier Quadranten, in welche die unbegrenzte Ebene durch die Coordinationenaxe getheilt wird, nimmt man z. B. in dem ersten Quadranten XAY beyde Coordinationen x und y positiv an, so ist in dem zweyten YAX' die Abscisse x , in dem dritten $X'AY'$ die Abscisse x und zugleich die Ordinate y , und in dem vierten Quadranten $Y'AX$ endlich wieder bloß die Ordinate y negativ, wie aus der bloßen Stellung dieser Linien in den vier Quadranten von selbst hervorgeht.

Dieses vorausgesetzt, sey $CDMM'$. . . eine gerade Linie, zu deren Puncten $M, M', M'', \dots$

die Abscissen $AP, AP', AP'', \dots$ und überhaupt x , und die Ordinaten $PM, PM', PM'', \dots$ und überhaupt y gehören. Aus dem Begriffe der geraden Linie geht hervor, daß für jeden dieser Puncte das Verhältniß der beyden geraden Linien

$$\frac{PM}{CP}, \frac{PM'}{CP'}, \frac{PM''}{CP''}, \dots$$

immer dasselbe bleibt. — Nennen wir a dieses constante Verhältniss, und heissen wir eben so B die ebenfalls constante Distanz AC , so wird man, da $CP = B + AP$, $CP' = B + AP$, $CP'' = B + AP''$. . ist, die vorhergehenden Verhältnisse alle durch die gemeinsame Gleichung

$$\frac{y}{B + x} = a \quad \text{oder} \quad y = ax + aB$$

ausdrücken können; und da dieser Ausdruck alle Punkte der Linie CM umfaßt, so wird er das analytische Symbol, oder er wird die Gleichung der geraden Linie CM seyn.

Statt der beständigen Gröfsen aB kann man auch eine einfachere Constante b einführen, so dafs man daher für die Gleichung der geraden Linie den Ausdruck hat:

$$y = ax + b \quad \dots (1).$$

I. Aus der Entstehung dieser Gleichung (1) folgt, dafs erstens die Constante $a = \frac{PM}{CP} = \frac{PM'}{CP'}$. . die trigonometrische Tangente (§. 90.) des Winkels XCM ist, unter welcher die Gerade CM gegen die Abscissenaxe XX' geneigt ist; und dafs zweitens die Constante b gleich der Distanz AD des Anfangspuncts A der Coordinaten von dem Durchschnittspunkte D der Geraden CM mit der Ordinatenaxe YY' ist, da für $x=0$ die Ordinate $y=b$ wird.

Setzt man eben so in der Gleichung (1) die Ordinate $y=0$, so erhält man

$$x = -\frac{b}{a}$$

für die Distanz AC des Anfangspunctes A von dem Durchschnittspunkte C der Geraden mit der Abscissenaxe XX' .

II. Da sonach durch die Constante a die Neigung der Geraden gegen die feste Abscissenaxe, und durch die Constante b ein Punct der Ebene aufser dieser Axe, durch welchen die Gerade geht, bestimmt wird, so wird auch durch die Gleichung (1) die Lage der Geraden CM in dieser Ebene vollständig bestimmt.

Bezeichnen a und b an sich positive Gröfsen, so gehört in (Fig. 77, A.) die Gleichung

$$\begin{aligned} y &= ax + b && \text{für die Lage } BD \text{ der Geraden,} \\ y &= ax - b && \text{» » » } CE \text{ » } \end{aligned}$$

$y = -ax + b$ für die Lage CD der Geraden.

$y = -ax - b$ » » » BE » »

III. Ist in der Gleichung (1) die Gröfse $b=0$, so hat man

$$y = ax$$

für die allgemeine Gleichung jeder Geraden, die durch den Anfangspunct A der Coordinaten geht, da für $x=0$ auch $y=0$ wird.

IV. Ist aber in derselben Gleichung die Gröfse $a=0$, so hat man

$$y = b$$

für die Gleichung einer Geraden, die parallel mit der Axe der x ist, und die von dieser Axe um die senkrechte Distanz b absteht.

V. Eben so ist auch

$$x = c$$

die Gleichung einer Geraden, die parallel mit der Axe der y ist, und die von dieser Axe um die Gröfse c absteht.

VI. Aus IV. und V. folgt, dafs die zwey Gleichungen

$$\begin{cases} x = A \\ y = B \end{cases}$$

zusammen genommen die *Gleichungen eines Punctes* sind, dessen Abstand von der Axe der y gleich A , und von der Axe der x gleich B ist. Die erste derselben gehört nämlich für eine mit y , und die zweyte für eine mit x parallele Gerade. Wenn man daher *beyde zusammen*, oder wenn man beyde Gleichungen als *co-existirend* betrachtet, so betrachtet man eigentlich nur das, was beyden Linien gemeinschaftlich ist, d. h. den *Durchschnittspunct* derselben.

§. 177. (Bestimmung des Durchschnittspunctes zweyer Geraden.) Sey die Gleichung der ersten der gegebenen Geraden

$$y = ax + b \dots (1),$$

und die der zweyten

$$y = a'x + b' \dots (2).$$

Wir wollen hier und in der Folge diese Geraden selbst, der Kürze wegen, die Linien (1) und (2) nennen.

Da für den Durchschnittspunct dieser zwey Geraden die Abscissen x sowohl, als auch die Ordinate y , in den beyden vorhergehenden Gleichungen, *dieselben* Werthe haben müssen, so werden wir diese Coordinaten auch einander gleich setzen, und dann, aus diesen zwey Gleichungen (nach §. 67.) die entsprechenden Werthe der Coordinaten x und y des gesuchten Durchschnittspunctes bestimmen können. Man erhält so

$$x = \frac{b - b'}{a' - a} \quad \text{und} \quad y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

I. Ist $a' = a$, so wird x sowohl als auch y unendlich groß, oder die beyden Linien (1) und (2) schneiden sich nie, sind also parallel, übereinstimmend mit §. 176, I., da a und a' die Neigungen der Geraden gegen die Axe der x , und daher beyde Neigungen dieselben sind.

II. Also ist auch überhaupt

$$y = ax + B$$

die Gleichung einer mit (1) parallelen Geraden, und in dieser Gleichung ist die Constante B willkürlich, weil es in der That unzählige Linien gibt, die mit der Geraden (1) parallel sind.

III. Ist n die Neigung der Geraden (1) gegen die Abscissenaxe, also auch $a = \text{Tang } n$, so hat man

$$\text{Tang}(90^\circ + n) = -\text{Cotang } n = -\frac{1}{a};$$

also ist auch überhaupt

$$y = -\frac{1}{a}x + B$$

die Gleichung einer auf (1) senkrecht stehenden Geraden, und in ihr ist ebenfalls die Gröfse B willkürlich.

§. 178. (Gleichung einer Geraden, die durch zwey gegebene Punkte geht.) Seyen $x'y'$ die Coordinaten des einen, und $x''y''$ die des anderen gegebenen Punctes, und sey die Gleichung der gesuchten Geraden

$$y = Ax + B,$$

in welcher also die Werthe von A und B , den aufgestellten Bedingungen gemäß, bestimmt werden sollen.

Da diese Gerade durch den ersten der gegebenen Puncte gehen soll, dessen Coordinaten $x'y'$ sind, so hat man auch die

Bedingungsgleichung

$$y' = Ax' + B \dots (a).$$

Eliminirt man aus den beyden vorhergehenden Gleichungen irgend eine der beyden Constanten A oder B , z. B. die letzte, so erhält man den Ausdruck

$$y - y' = A(x - x');$$

und dieß ist die Gleichung einer Linie, die durch den Punkt geht, dessen Coordinaten x' und y' sind. In ihr ist die Gröfße A noch willkürlich. Setzt man in ihr $A = a$, so erhält man

$$y - y' = a(x - x') \dots (b)$$

für die Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt $(x'y')$ geht, und mit der Linie (1) parallel ist. Setzt man aber in ihr $A = -\frac{1}{a}$, so erhält man

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$$

für die Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt $(x'y')$ geht, und auf der Linie (1) senkrecht steht.

Soll überdieß die zuerst angenommene Gerade auch noch durch den zweyten Punkt gehen, dessen Coordinaten x'', y'' sind, so hat man, wie zuvor, die Bedingungsgleichung

$$y'' = Ax'' + B \dots (c).$$

Die beyden Gleichungen (a) und (c) reichen hin, die Werthe der zwey unbekannten Gröfsen A und B zu bestimmen. Man erhält so

$$A = \frac{y' - y''}{x' - x''} \quad \text{und} \quad B = \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''},$$

und wenn man diese Werthe in der oben aufgestellten Gleichung

$$y = Ax + B$$

substituiert, so erhält man

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$$

für die gesuchte Gleichung der durch beyde Punkte gehenden Geraden. In ihr sind die Gröfsen x und y die veränderlichen oder sogenannten laufenden Coordinaten, während die anderen $x'y'$ und $x''y''$ constante Gröfsen bezeichnen.

I. Sind M' und M'' (Fig. 77) diese zwey gegebenen Punkte, deren Coordinaten

$$\begin{aligned} AP' &= x' & \text{und} & & AP'' &= x'', \\ P'M' &= y' & & & P''M'' &= y'' \end{aligned}$$

sind, so hat man, wenn man durch den Punct M' die Gerade $M'N$ parallel mit der Axe der x zieht, und wenn man in dem rechtwinkligen Dreyecke $M'M''N$ die Distanz $M'M''$ der zwey gegebenen Punkte gleich Δ setzt:

$$\Delta^2 = M'N^2 + M''N^2,$$

oder

$$\Delta = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

§. 179. (Bestimmung des Winkels zweyer gegebenen Geraden.) Seyen die Gleichungen (1) und (2) die der zwey gegebenen Geraden. Führt man beyde Linien, mit sich selbst parallel, fort, bis sie durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen, so werden, in diesem letzten Zustande, ihre Gleichungen seyn:

$$\begin{aligned} y &= ax \\ y &= a'x \end{aligned}$$

und dadurch ist der Winkel (1.2), den diese Geraden unter sich bilden, nicht verändert worden.

Nennt man nun, analog mit der eingeführten Bezeichnung, (1.x) und (1.y) die Winkel, welche die Gerade (1) mit der Axe der x und der y bildet, und eben so (2.x) und (2.y) die Winkel der Geraden (2) mit der Axe der x und y , so hat man, nach §. 177.:

$$a = \text{Tang}(1.x) \quad \text{und} \quad a' = \text{Tang}(2.x).$$

Allein da man zwischen diesen Winkeln auch die Gleichung hat:

$$(1.2) = (2.x) - (1.x),$$

so ist auch

$$\text{Tang}(1.2) = \text{Tang}[(2.x) - (1.x)],$$

oder nach §. 101.:

$$\text{Tang}(1.2) = \frac{\text{Tang}(2.x) - \text{Tang}(1.x)}{1 + \text{Tang}(2.x)\text{Tang}(1.x)},$$

oder endlich, wenn man in diesem Ausdrücke die vorhergehenden Werthe von $\text{Tang}(1.x)$ und $\text{Tang}(2.x)$ substituirt:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{\alpha'} + \frac{y}{\beta'} = 1,$$

durch die Gleichung gegeben werden:

$$\text{Cos}(1.2) = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}} \quad \text{u. s. w.}$$

I. Auch kann man jeden Punct M der Geraden CMM' durch seine Distanz $MB=r$ von irgend einem Puncte B , der z. B. in der Axe der x liegt, und durch den Winkel $MBX=\varphi$ bestimmen, den jene Distanz BM mit der Axe der x bildet. Man pflegt r den *Radius Vector*, und die beyden veränderlichen Grössen r und φ die *Polarcoordinaten* des Punctes M , so wie B den *Pol* derselben zu nennen.

Ist $AB=c$ die gegebene Distanz des Pols B von dem Anfangspuncte A der rechtwinkligen Coordinaten $AP=x$ und $PM=y$, so hat man

$$x = c + r \cos \varphi \quad \text{und} \\ y = r \sin \varphi.$$

Substituirt man diese Werthe von x und y in der Gleichung

$$y = ax + b$$

der Geraden (1), so erhält man für die Polargleichung derselben den Ausdruck

$$r \sin \varphi = ac + b + ar \cos \varphi,$$

oder auch

$$r = \frac{ac + b}{\sin \varphi - a \cos \varphi}.$$

Für $c=0$ liegt der Pol im Anfangspuncte A der rechtwinkligen Coordinaten, und dann hat man für die Gleichung der Geraden

$$r = \frac{b}{\sin \varphi - a \cos \varphi}.$$

Setzt man in diesem Ausdrücke den Winkel $\varphi=0$, so erhält man $r=AC=-\frac{b}{a}$, und eben so gibt $\varphi=90$ den Werth von $r=AD=b$, wie zuvor.

B. Gerade Linie im Raume.

§. 181. (Bestimmung eines Punctes im Raume.)

Wie wir im Vorhergehenden die Lage eines Punctes in einer ge-

gegebenen Ebene durch seine senkrechten Abstände von zwey fixen, in derselben Ebene unter sich senkrechten gegebenen Linien bestimmt haben, so werden wir auch den Ort eines Punctes im Raume überhaupt kennen, wenn uns die senkrechten Abstände desselben von drey gegebenen festen, und unter sich senkrechten Ebenen bekannt sind.

Sey $APQM a$ (Fig. 78) ein rechtwinkliges Parallelepiped. Erweitert man die drey Seiten APp , Aqa und $APQq$ desselben unbegrenzt nach allen ihren Richtungen, so entstehen die drey erwähnten, unter sich senkrechten Ebenen, die sich je zwey in den Linien $X'AX$, $Y'AY$, $Z'AZ$, und die sich alle drey in dem gemeinschaftlichen Puncte A schneiden.

Sey der senkrechte Abstand irgend eines Punctes M von der Ebene Aqa , oder sey $Mm = AP = x$,
 » » » » APp , » » $Mp = PQ = y$,
 » » » » APQ , » » $MQ = m q = z$.

Man nennt diese Gröſſen x, y, z die senkrechten *Coordina-*
ten des Punctes M ; die festen, ihrer Lage nach gegebenen Gera-
 den XAX' , YAY' , ZAZ' die *Coordinatenaxen*; die erwähnten,
 durch diese Axen gehenden drey senkrechten Ebenen die *coordi-*
nirten Ebenen, und ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunct A
 den Anfang der Coordinaten.

I. Läßt man von irgend einem Puncte ein Loth auf eine gerade Linie oder auf eine Ebene herab, so heist der Fußpunct dieses Lothes, in welchem dasselbe die gerade Linie oder die Ebene trifft, die *Projection* jenes Punctes auf diese gerade Linie oder auf diese Ebene. Eben so wird man die Projection einer Geraden auf eine andere Gerade erhalten, wenn man von den Endpuncten der ersten auf die andere Lothe herabfallen läßt. Fällt man von den beyden Endpuncten einer geraden Linie, oder von allen Puncten einer krummen Linie, auf eine gegebene Ebene Lothe herab, so erhält man auf gleiche Weise die Projection jener geraden oder krummen Linie in der gegebenen Ebene, und eben so wird man auch von irgend einer Figur die Projection derselben in einer Ebene haben, wenn man von allen Puncten des Umfangs der Figur auf diese Ebene Lothe herabläßt.

Demnach ist von dem Puncte M , dessen Coordinaten x, y, z sind,

P , q und a die Projection auf die Axe der x , y und z , so wie Q , p » m » » » » Ebene » xy , xz und yz .

Von der Distanz AM aber dieses Punctes M von dem Anfangspuncte der Coordinaten ist

$AP = x$, $Aq = y$, $Aa = z$ die Projection auf die Axe der x , y und z , und eben so sind die Diagonalen der Parallelogramme, die das erwähnte Parallelepiped begrenzen, oder eben so sind

AQ , Ap und Am

in derselben Ordnung die Projectionen derselben Distanz AM auf die coordinirte Ebene der xy , der xz und der yz .

II. Durch die absolute GröÙe der drey Coordinaten x , y , z wird allerdings die *Entfernung* des Punctes M von den drey festen coordinirten Ebenen, aber noch nicht die *Lage* dieses Punctes, oder die *Seite* dieser Ebene bestimmt, auf welcher der Punct steht. Um auch noch diese Lage auszudrücken, wird man diese Coordinaten auf der einen Seite einer jeden der drey Ebenen negativ annehmen, wenn man sie auf der anderen positiv vorausgesetzt hat. Nimmt man z. B. in der Zeichnung der Figur 78 die x , y , z nach der Richtung der Geraden AX , AY , AZ positiv, so werden sie nach den entgegengesetzten Richtungen AX' , AY' , AZ' negativ seyn, so daß demnach von den acht Octanten, in welche der unbegrenzte Raum um den Punct A durch die drey coordinirten Ebenen getheilt wird, der Octant XYZ alle drey Coordinaten positiv, der Octant $X'YZ$, $XY'Z$ und XYZ' aber nur eine dieser Coordinaten, $X'Y'Z$, $X'YZ'$ und $XY'Z'$ aber zwey, und der Octant $X'Y'Z'$ endlich alle drey Coordinaten negativ hat.

§. 182. (Gleichungen der Geraden im Raume.)

Da von einer Geraden AM im Raume die Projection auf irgend eine Ebene (z. B. die Projection Ap in der Ebene der xz) wieder eine Gerade ist, so wird die Gleichung dieser Projection in der Ebene der xz , nach §. 176, III., die Form haben:

$$x = az;$$

und eben so wird von ihrer Projection Am in der Ebene der yz die Gleichung seyn:

$$y = bz;$$

wo a , b constante GröÙen sind, deren Bedeutung aus §. 176.

bekannt ist, wo nämlich a und b die Tangenten des Neigungswinkels dieser Proportionen Ap und Am mit den Axen der x und der y sind.

Dieses setzt voraus, daß die Gerade AM , daß also auch jede der beyden Projectionen, durch den Anfangspunct A der Coordinaten geht. Ist dieses nicht der Fall, so werden (nach §. 176.) die allgemeinen Gleichungen dieser beyden Projectionen seyn:

$$\left. \begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned} \right\} \dots (1).$$

I. Es ist klar, daß durch diese zwey Projectionen, oder, was dasselbe ist, daß durch diese zwey Gleichungen der Projectionen irgend einer Geraden in zweyen der drey coordinirten Ebenen, die Lage dieser Geraden im Raume vollständig bestimmt wird.

Sucht man aber noch die Projection derselben Geraden in der dritten Ebene der xy , so hat man für die Gleichung derselben, wenn man aus den beyden vorhergehenden Gleichungen die Gröfse z eliminirt:

$$ay - bx = a\beta - \alpha b.$$

II. Sind in den Gleichungen (1) die Gröfßen $a=b=0$, so hat man

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \beta \end{aligned} \right\}$$

für eine mit der Axe der z parallele Gerade, die von der Ebene yz um die Gröfse α , und von der Ebene xz um β absteht. Ist auch noch $\alpha=\beta=0$, so hat man

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

für die Gleichungen der Axe der z selbst.

§. 183. (Parallele und solche Gerade, die durch gegebene Punkte gehen.) Nennen wir der Kürze wegen diejenige Gerade, zu welcher die obigen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

gehören, die Linie (1), und eben so sollen auch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= a'z + a' \\ y &= b'z + \beta' \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

für eine andere Linie, die wir (2) nennen, gehören.

Da zwey Gerade im Raume unter sich parallel sind, wenn ihre Projectionen in zwey coordinirten Ebenen unter sich parallel sind, und umgekehrt, so folgt sofort aus §. 177, I., daß die zwey Linien (1) und (2) parallel seyn werden, wenn die zwey Bedingungsgleichungen Statt haben:

$$a' = a \quad \text{und} \quad b' = b;$$

so daß demnach die Gleichungen einer mit (1) parallelen Linie seyn werden:

$$\left. \begin{aligned} x &= az + A \\ y &= bz + B \end{aligned} \right\},$$

wo A und B noch unbestimmt bleiben.

I. Soll diese mit (1) parallele Gerade auch noch durch den gegebenen Punkt, dessen Coordinaten x' , y' und z' sind, gehen, so hat man die Bedingungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} x' &= az' + A \\ y' &= bz' + B \end{aligned} \right\};$$

und diese, mit den beyden vorhergehenden verbunden, geben für die mit (1) parallele, durch den gegebenen Punkt gehende Gerade die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x - x' &= a(z - z'), \\ y - y' &= b(z - z'). \end{aligned} \right\}$$

(Vergl. §. 178, Gleichung (b)).

II. Um den Durchschnittspunct der beyden Geraden (1) und (2) zu finden, wird man (wie in §. 177.) die Werthe xyz in den vier Gleichungen (1) und (2) unter sich gleich annehmen, wo man dann, durch die Elimination dieser drey Größen aus jenen vier Gleichungen erhält:

$$\frac{a - a'}{a - a'} = \frac{\beta - \beta'}{b - b'};$$

und diese Bedingungsgleichung muß Statt haben, damit sich die beyden Linien schneiden können.

Ist $a = a'$ und $b = b'$, so hat die vorhergehende Gleichung keine Bedeutung mehr, weil dann (nach dem Vorhergehenden) die beyden Linien parallel sich, und sich nicht schneiden.

III. Sucht man die Gleichungen einer Geraden, die durch zwey gegebene Punkte geht, von welchen der erste die Coordinaten $x'y'z'$, und der zweyte die $x''y''z''$ hat, so wird man die zwey Gleichungen (1) noch mit den vier folgenden verbinden:

$$\left. \begin{aligned} x' &= az' + \alpha \\ y' &= bz' + \beta \end{aligned} \right\} \text{ und } \left. \begin{aligned} x'' &= az'' + \alpha \\ y'' &= bz'' + \beta \end{aligned} \right\}.$$

Eliminirt man dann aus diesen sechs Gleichungen die vier Gröſſen a , b , α und β , so erhält man für die Gleichungen der gesuchten Geraden

$$\left. \begin{aligned} x - x' &= \frac{x' - x''}{z' - z''} (z - z') \\ y - y' &= \frac{y' - y''}{z' - z''} (z - z') \end{aligned} \right\},$$

wo x , y und z die laufenden Coordinaten der gesuchten Geraden bezeichnen (vergl. §. 178.).

§. 184. (Distanz zweyer Punkte im Raume.) Seyen M und M' (Fig. 79) zwey im Raume gegebene Punkte, und $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$ die Coordinaten des ersten, so wie $AP'=x'$, $P'Q'=y'$, $Q'M'=z'$ die des zweyten Punktes. Man suche die Distanz $MM'=\Delta$ dieser zwey Punkte.

Man ziehe Qp und Mm mit AX , pm mit AZ und mn mit AY parallel, so hat man in dem rechtwinkligen Dreyecke $MM'm$

$$MM' \text{ oder } \Delta = \sqrt{Mn^2 + nM'^2},$$

und eben so in dem rechtwinkligen Dreyecke Mnm

$$Mn^2 = Mm^2 + mn^2,$$

also ist auch

$$\Delta = \sqrt{Mm^2 + mn^2 + nM'^2}.$$

Man hat aber, in Folge der angeführten Verzeichnung,

$$Mm = AP' - AP = x' - x,$$

$$mn = PQ' - PQ = y' - y,$$

$$nM' = Q'M' - QM = z' - z,$$

also ist auch die gesuchte Distanz

$$\Delta = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Läßt man aber von den beyden Endpunkten M und M' der Distanz Δ Lothe auf die Axen der x , y und z herab, so sind die

jenigen Stücke dieser Axen, welche zwischen den Fußpunkten jener Lothe enthalten sind, oder so sind die *Projectionen* (§. 181, I.) der Distanz Δ auf diese Axen

$$\text{der } x \dots PP' = x' - x,$$

$$\text{» } y \dots Q'p = y' - y,$$

$$\text{» } z \dots M'm = z' - z.$$

Demnach ist das Quadrat einer jeden geraden Linie gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf drey willkürlichen, aber unter sich senkrechten Linien: eine wesentliche Erweiterung des oben (§. 92.) angeführten Pythagoräischen Theorems.

I. Eben so erhält man auch für die Distanz $AM = R$ des ersten Punctes M von dem Anfangspuncte A der Coordinaten, da für den letzten Punct die Größen $x'y'z'$ verschwinden:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

und eben so für die Distanz $AM' = R'$ des zweyten Punctes:

$$R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

§. 185. (Winkel zweyer gegebenen Geraden.)

Um den Winkel, welchen die zwey Geraden (1) und (2) unter sich bilden, zu finden, kann man dieselben zuerst unter sich parallel fortrücken, bis sie beyde durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen. In diesem Zustande verschwinden in den Gleichungen derselben die Constanten α , α' und β , β' , ohne daß dadurch die Neigung der Linien gegen einander geändert wird, so daß daher die Gleichungen dieser zwey Geraden die Form haben:

$$\left. \begin{array}{l} x = az \\ y = bz \end{array} \right\} \dots (1) \quad \text{und} \quad \left. \begin{array}{l} x = a'z \\ y = b'z \end{array} \right\} \dots (2).$$

Nimmt man dann auf jeder der beyden letzten Geraden einen Punct, dessen Entfernung von dem Anfange der Coordinaten für die erste Gerade gleich r' und für die zweyte gleich r'' ist, und nennt man $x'y'z'$ die Coordinaten des ersten, und $x''y''z''$ die des zweyten Punctes, so wird man für die Distanz Δ dieser zwey Puncte (nach §. 184.) den Ausdruck haben:

$$\Delta^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2.$$

Allein für dieselbe Distanz hat man auch (nach §. 91, Gleichung (A)), wenn man den gesuchten Winkel, welchen die bey-

den Geraden (1) und (2) unter sich bilden, durch (1.2) bezeichnet:

$$\Delta^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos(1.2).$$

Setzt man diese beyden Ausdrücke von Δ^2 einander gleich, und bemerkt man, daß (nach §. 184, I.)

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad \text{und}$$

$$r''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$$

ist, so erhält man:

$$r'r'' \cdot \cos(1.2) = x'x'' + y'y'' + z'z'' \dots (a).$$

Da man aber aus dem Vorhergehenden hat:

$$x' = az' \quad \text{und} \quad x'' = a'z'',$$

$$y' = bz' \quad \text{»} \quad y'' = b'z'',$$

und daher auch

$$r'^2 = (1 + a^2 + b^2) \cdot z'^2,$$

$$r''^2 = (1 + a'^2 + b'^2) \cdot z''^2,$$

so erhält man, wenn man diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung (a) substituirt, für den gesuchten Winkel (1.2) der Linien (1) und (2) den folgenden Ausdruck:

$$\cos(1.2) = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

I. Sind daher die beyden Linien (1) und (2) unter sich parallel, so ist $\cos(1.2) = 1$, und dann geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2) = (1 + aa' + bb')^2,$$

die man auch so schreiben kann:

$$(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2 = 0.$$

Da aber die Summe von Quadraten, als immer positive Gröfsen, nur dann verschwinden kann, wenn jedes dieser Quadrate für sich gleich Null ist, so hat man

$$a = a' \quad \text{und} \quad b = b',$$

übereinstimmend mit §. 183.

II. Sind endlich die beyden Geraden (1) und (2) auf einander senkrecht, so hat man $\cos(1.2) = 0$, also ist auch

$$1 + aa' + bb' = 0$$

die Bedingung des gegenseitigen senkrechten Standes der beyden

Geraden. Allein bey diesem Stande können die Linien im Raume noch immer neben einander fortgehen, ohne sich zu schneiden. Sollen sie daher nicht bloß auf einander senkrecht seyn, sondern sich auch in der That schneiden, so wird man (nach §. 183, II.) die beyden Bedingungsgleichungen haben:

$$1 + aa' + bb' = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{a - a'}{a - a'} = \frac{\beta - \beta'}{b - b'}.$$

§. 186. (Winkel einer gegebenen Geraden mit den drey coordinirten Axen.) Nach dem Vorhergehenden (§. 182, II.) sind die Gleichungen der Axe der z

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Sucht man daher den Winkel (1. z) der Linie (1) mit der Axe der z , so wird man nur in dem obigen Ausdruck für $\text{Cos}(1.2)$ die beyden Größen a' und b' gleich Null setzen, wodurch man erhält:

$$\text{Cos}(1.z) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Eben so erhält man auch für den Winkel der Linie (1) mit der Axe der y und der x

$$\text{Cos}(1.y) = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad \text{Cos}(1.x) = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Auf dieselbe Weise hat man auch für die Winkel der Linie (2) mit den drey Axen der Coordinaten

$$\text{Cos}(2.z) = \frac{1}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}, \quad \text{Cos}(2.y) = \frac{b'}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}},$$

$$\text{Cos}(2.x) = \frac{a}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

I. Substituirt man diese Ausdrücke in den vorhergehenden Werth von $\text{Cos}(1.2)$, so erhält man die merkwürdige Gleichung

$$\text{Cos}(1.2) = \text{Cos}(1.x) \text{Cos}(2.x) + \text{Cos}(1.y) \text{Cos}(2.y) + \text{Cos}(1.z) \text{Cos}(2.z).$$

II. Nach §. 183, I. sind die Gleichungen einer Geraden, die durch den gegebenen Punct, dessen Coordinaten $x'y'z'$ sind,

geht:

$$\left. \begin{aligned} x - x' &= a(z - z') \\ y - y' &= b(z - z') \end{aligned} \right\}$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$a = \frac{\cos(1.x)}{\cos(1.z)} \quad \text{und} \quad b = \frac{\cos(1.y)}{\cos(1.z)};$$

also lassen sich die Gleichungen einer durch einen gegebenen Punct (x', y', z') gehenden Geraden auch so darstellen:

$$\left. \begin{aligned} (x - x') \cos(1.z) &= (z - z') \cos(1.x) \\ (y - y') \cos(1.z) &= (z - z') \cos(1.y) \end{aligned} \right\} \quad \text{und} \quad (x - x') \cos(1.y) = (y - y') \cos(1.x)$$

III. Man bemerke noch, daß von diesen drey Winkeln jeder schon durch die beyden anderen gegeben ist, da man zwischen ihnen die Bedingungsgleichung hat:

$$\cos^2(1.x) + \cos^2(1.y) + \cos^2(1.z) = 1,$$

und eben so

$$\cos^2(2.x) + \cos^2(2.y) + \cos^2(2.z) = 1.$$

§. 187. (Verschiedene Ausdrücke der Coordinaten eines Punctes.) Nach §. 181. ist der Ort eines Punctes M (Fig. 78) im Raume gegeben, wenn seine drey senkrechten Abstände $AP = x$, $PQ = y$ und $QM = z$ von den drey coordinirten Ebenen der yz , xz und der xy gegeben sind.

Diese Abstände können aber auf verschiedene Weise gegeben seyn. Nennt man z. B. $AM = r$ die Distanz des Punctes M von dem Anfange A der Coordinaten, und sind

$$XAM = \alpha, \quad YAM = \beta, \quad ZAM = \gamma$$

die Winkel dieser Distanz mit den positiven Hälften AX , AY , AZ der Coordinatenachsen, so hat man sofort

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \alpha \\ y &= r \cos \beta \\ z &= r \cos \gamma \end{aligned} \right\} \dots (a).$$

In diesem Ausdrücke wird man die Gröfse r immer positiv, und die Winkel α , β , γ immer zwischen 0° und 180° nehmen, um in der That *alle* Puncte des Raumes, und *keinen mehr als ein Mal* zu umfassen (vergl. §. 173, III.). So wird z. B. der Winkel

$ZAM = \gamma$ kleiner oder größer als 90° , also auch $\text{Cos } \gamma$ positiv oder negativ seyn, wenn der Punct M über oder unter der coordinirten Ebene XAY der xy liegt.

Auch zwischen diesen drey Winkeln α, β, γ hat dieselbe Bedingungsgleichung, wie §. 186, III., Statt. Da nämlich

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist, so hat man auch, wenn man die vorhergehenden Werthe von x, y, z substituirt:

$$\text{Cos}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \beta + \text{Cos}^2 \gamma = 1.$$

I. Von dieser Distanz $AM = r$ ist AQ die Projection in der Ebene der xy . Nennt man δ den Winkel XAQ dieser Projection mit der Axe der x , so hat man

$AP = AQ \text{ Cos } \delta$ und $PQ = AQ \text{ Sin } \delta$,
so wie

$$AQ = r \text{ Sin } \gamma \text{ und } QM = Aa = r \text{ Cos } \gamma,$$

so daß demnach die Coordinaten x, y, z folgende Ausdrücke erhalten:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \text{ Sin } \gamma \text{ Cos } \delta \\ y &= r \text{ Sin } \gamma \text{ Sin } \delta \\ z &= r \text{ Cos } \gamma \end{aligned} \right\} \dots (b);$$

und hier wird der Winkel δ von der Geraden AX immer in derselben Richtung von 0° bis 360° , der Winkel γ aber, wie zuvor, nur von 0° bis 180° gezählt.

II. Eben so ist PM oder Am die Projection der Distanz $AM = r$ auf die Ebene der yz . Nennt man also ϵ den Winkel $MPQ = m Aq$ dieser Projection mit der Axe der y , so hat man wieder

$$PQ = PM \text{ Cos } \epsilon, \quad QM = PM \text{ Sin } \epsilon,$$

und

$$PM = r \text{ Sin } \alpha, \quad AP = r \text{ Cos } \alpha,$$

und daher auch

$$\left. \begin{aligned} x &= r \text{ Cos } \alpha \\ y &= r \text{ Sin } \alpha \text{ Cos } \epsilon \\ z &= r \text{ Sin } \alpha \text{ Sin } \epsilon \end{aligned} \right\} \dots (c),$$

wo wieder der Winkel $XAM = \alpha$ von der fixen Geraden AX immer in derselben Richtung von 0 bis 360 , der Winkel $QPM = \epsilon$ aber nur von 0° bis 180° gezählt wird.