

Ein und zwanzigstes Capitel.

Das Dreyeck auf der Oberfläche der Kugel, oder sphärische Trigonometrie.

§. 165. (Erklärungen.) So wie wir in dem Vorhergehenden das Dreyeck, in welches sich alle anderen Polygone auflösen lassen, mit besonderer Sorgfalt betrachtet haben, so werden wir auch hier, wo wir uns mit der Bestimmung der Polyëder und der übrigen Körper beschäftigen, vor allen die *dreyseitige Pyramide* näher untersuchen, da in diese, als in den einfachsten aller Körper, jeder andere Körper aufgelöst werden kann, so daß uns daher die nähere Kenntniß dieser Pyramide zur Untersuchung der Polyëder und überhaupt aller Körper eben so nützlich seyn wird, als es die des Dreyecks zur Bestimmung der ebenen Figuren gewesen ist.

Jede solche dreyseitige Pyramide, wie $ABCO$ (Fig. 72), deren drey Kanten OA , OB , OC wir hier, gleich den Schenkeln eines Winkels, unbegrenzt annehmen, enthält *sechs* Bestimmungsstücke, nämlich erstens die drey Winkel, welche die Kanten unter sich bilden, und dann die drey Winkel, unter welchen die drey, durch je zwey jener Kanten gelegten Ebenen, oder unter welchen die drey Seitenflächen der Pyramide gegen einander geneigt sind.

Wir wollen die drey ersten dieser Bestimmungsstücke die *Seiten*, und die drey anderen die *Winkel* der Pyramide nennen, und jene (wie oben §. 87, II. für das Dreyeck) durch α , β , γ , diese aber durch A , B , C bezeichnen, so daß man hat für die Seiten der Pyramide

$$BOC = \alpha,$$

$$AOC = \beta,$$

$$AOB = \gamma,$$

und für die Neigungswinkel der drey Ebenen

an AO den Winkel A ,
 » BO » » B ,
 » CO » » C .

I. Dieß vorausgesetzt, wollen wir uns in dem Scheitel O dieser Pyramide zugleich den Mittelpunkt einer Kugel vorstellen, deren unbestimmten Halbmesser wir für die Einheit annehmen, so daß die drey Kanten OA , OB , OC der Pyramide die Oberfläche jener Kugel in den drey Puncten A , B , C treffen, welche Puncte demnach von dem Mittelpuncte O alle um dieselbe Gröfse, um den Halbmesser der Kugel, entfernt sind. Die Oberfläche dieser Kugel wird daher von den drey Seitenflächen der Pyramide

oder von der Ebene AOB in dem Kreisbogen AB ,
 von AOC » » » AC ,
 und von BOC » » » BC

geschnitten werden, und diese Kreisbogen werden sämmtlich solchen Kreisen, deren Mittelpunkt O mit dem der Kugel zusammenfällt, oder sie werden sogenannten *größten Kreisen* der Kugel angehören, so daß auch ihre Halbmesser, wie jener der Kugel selbst, der Einheit gleich sind.

Dadurch entsteht demnach auf der Oberfläche der Kugel ein von drey Bogen größter Kreise dieser Kugel eingeschlossener Raum ABC , den man ein *sphärisches Dreyeck* zu nennen pflegt. Die *Seiten* dieses Dreyecks oder die erwähnten Kreisbogen sind (nach §. 84, *H.*) die Mafse der Winkel, welche die Kanten der Pyramide unter sich bilden, oder sie sind die Mafse der Seiten der Pyramide, so daß man daher für diese Seiten des sphärischen Dreyeckes die mit den vorigen Gröfsen α , β , γ gleichbedeutenden Bezeichnungen hat:

$$BC = \alpha, \quad AC = \beta \quad \text{und} \quad AB = \gamma.$$

Wenn man ferner in dem Puncte A der Kugelfläche, zu dem Kreisbogen AB sowohl, als auch zu dem Bogen AC eine Tangente zieht, so steht (nach §. 115.) jede dieser Berührungslinien in dem Puncte A senkrecht auf dem Halbmesser OA , d. h. senkrecht auf der Durchschnittslinie OA der beyden Ebenen AOB und AOC , also ist auch der Winkel dieser zwey Berührungslinien, und daher auch der Winkel, welchen die beyden Kreisbogen AB und AC unter sich in dem Puncte A bilden (nach

§. 154, III.), gleich dem Winkel der beyden Ebenen AOB und AOC , d. h. gleich demjenigen *Winkel* der Pyramide, den wir oben durch A bezeichnet haben.

Dasselbe wird auch von den beyden andern Winkeln B und C der Kreisbogen ABC und ACB gelten, von welchen der erste gleich dem Winkel B , und der zweyte gleich dem Winkel C der Pyramide ist, so daß man daher für die drey Winkel des sphärischen Dreyecks wieder die vorhergehenden Bezeichnungen

$$BAC = A, \quad ABC = B \quad \text{und} \quad ACB = C$$

haben wird, die wir, wie oben für das ebene Dreyeck, auch hier und in der Folge für das sphärische beybehalten wollen.

§. 166. (Grundgleichung des sphärischen Dreyecks.) Lassen wir von dem Puncte C (Fig. 72) in der Ebene COA auf die Gerade OA ein Loth Ca herab, und errichten wir durch diesen Punct a in der Ebene AOB auf dieselbe Gerade OA wieder ein Loth ab , so daß demnach die beyden Linien aC und ab in dem Puncte a auf den Durchschnitt OA der beyden Ebenen BOA und COA senkrecht stehen. Dieß vorausgesetzt, wird der Winkel Cab , welchen diese beyden Lothe unter sich bilden (nach §. 154, III.), gleich dem Neigungswinkel der beyden erwähnten Ebenen seyn, oder es wird der Winkel

$$Cab = CAB = A$$

seyn, und man wird daher in den zwey ebenen Dreyecken Cab und OCb (nach §. 91.) die beyden Gleichungen haben

$$Cb^2 = ab^2 + aC^2 - 2ab \cdot aC \cdot \cos A \quad \text{und}$$

$$Cb^2 = 1 + bO^2 - 2bO \cdot \cos a.$$

Allein es ist auch, der vorhergehenden Erklärung unserer Verzeichnung gemäß:

$$ab = aO \cdot \tan \gamma,$$

$$aC = aO \cdot \tan \beta,$$

$$bO = \frac{aO}{\cos \gamma} \quad \text{und}$$

$$aO = CO \cos \beta = \cos \beta.$$

Substituirt man diese Werthe in den beyden obigen Gleichungen, und setzt dann die beyden Ausdrücke von Cb einander gleich, so erhält man

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A,$$

und diese Gleichung gibt den Winkel A des sphärischen Dreyecks, wenn die drey Seiten α, β, γ desselben bekannt sind.

Durch dasselbe Verfahren, auf die beyden andern Punkte A und B angewendet, oder auch, durch die bloße bereits oben (§. 91, II.) erwähnte Verwechslung der Zeichen, wird man auch die beyden analogen Ausdrücke für $\cos B$ und $\cos C$ erhalten, so daß man demnach die drey Gleichungen hat:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A \\ \cos \beta &= \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos B \\ \cos \gamma &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C \end{aligned} \right\} \dots (A),$$

und dies ist die gesuchte Fundamentalgleichung des sphärischen Dreyecks, aus welcher sich alle übrigen ableiten lassen, wie wir sogleich näher sehen werden.

§. 167. (Weitere Gleichungen des sphärischen Dreyecks.) Da man für jeden Winkel A die Gleichung hat:

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A,$$

so gibt die erste der Gleichungen (A)

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \right)^2.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck, und setzt der Kürze wegen

$$M^2 = \frac{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma},$$

so findet man sofort

$$\sin A = M \cdot \sin \alpha;$$

und eben so, durch die bloße Verwechslung der Zeichen, wodurch der für $\alpha \beta \gamma$ symmetrische Ausdruck von M offenbar nicht geändert wird:

$$\sin B = M \cdot \sin \beta \quad \text{und}$$

$$\sin C = M \cdot \sin \gamma.$$

Eliminirt man aus den drey letzten Gleichungen die GröÙe M , so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \sin A \sin \beta &= \sin B \sin \alpha \\ \sin A \sin \gamma &= \sin C \sin \alpha \\ \sin B \sin \gamma &= \sin C \sin \beta \end{aligned} \right\} \dots (B),$$

oder in jedem sphärischen Dreyecke verhalten sich die Sinus der Winkel wie die Sinus der ihnen gegenüberstehenden Seiten.

I. Von denselben drey Gleichungen (A) geben die beyden ersten, wenn man dabey die Gleichungen (B) berücksichtigt:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \sin B \cotang A,$$

$$\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos B.$$

Eliminirt man aus diesen zwey Gleichungen die GröÙe $\cos \beta$, so erhält man

$$\cotang A \sin B = \cotang \alpha \sin \gamma - \cos \gamma \cos B \dots (C)$$

mit den beyden analogen für $\cotang B \sin C$ und $\cotang C \sin A$.

II. Eben so gibt die erste und dritte der Gleichungen (A)

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \alpha \sin C \cotang A,$$

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C,$$

woraus man wieder, durch Elimination von $\cos \gamma$, erhält

$$\cotang A \sin C = \cotang \alpha \sin \beta - \cos \beta \cos C \dots (D)$$

mit den beyden analogen Gleichungen für $\cotang B \sin A$ und $\cotang C \sin B$.

III. Endlich gibt die zweyte der Gleichungen (C) verbunden mit (D):

$$\cotang B \sin C = \frac{\cos \beta \sin A}{\sin B} - \cos \alpha \cos C,$$

$$\cotang A \sin C = \frac{\cos \alpha \sin B}{\sin A} - \cos \beta \cos C,$$

woraus man, durch Elimination von $\cos \beta$, erhält

$$\cos A = \sin B \sin C \cos \alpha - \cos B \cos C \dots (E)$$

mit den zwey analogen Gleichungen für $\cos B$ und $\cos C$.

§. 168. (Umbildung der vorhergehenden Ausdrücke.) Die Gleichungen (A) bis (E) enthalten die vorzüglichsten Ausdrücke, deren man sich bey der Auflösung (§. 109.) der sphärischen Dreyecke, oder in der *sphärischen Trigonometrie*, bedient. Zur bequemern Berechnung mit Logarithmen kann man ihnen, wie oben (§. 106.) mit denen für die ebene Trigonometrie geschehen ist, andere Gestalten geben.

I. So gibt die erste der Gleichungen (A)

$$1 + \cos A = \frac{\cos \alpha - \cos(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma} \quad \text{und}$$

$$1 - \cos A = \frac{\cos(\beta - \gamma) - \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Nach §. 96. ist aber

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2},$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \quad \text{und}$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x}{2} (\gamma + x) \sin \frac{x}{2} (\gamma - x),$$

also ist auch

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}} \\ \cos \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma) \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}} \end{aligned} \right\} \dots (F),$$

und durch dasselbe Verfahren erhält man auch aus der ersten der Gleichungen (E) die beyden folgenden:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \alpha &= \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} (A + B + C) \cos \frac{1}{2} (B + C - A)}{\sin B \sin C}} \\ \cos \frac{1}{2} \alpha &= \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (A + B - C) \cos \frac{1}{2} (A + C - B)}{\sin B \sin C}} \end{aligned} \right\} \dots (G).$$

II. Wichtiger noch ist folgende Verwandlung, zu welcher wir den Weg nur kurz anzeigen.

Die Gleichung (C) gibt

$$\cos \alpha \sin C = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos \gamma,$$

und analog

$$\cos \beta \sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B \cos \gamma,$$

woraus man durch Addition und Subtraction findet

$$(\cos \alpha \pm \cos \beta) \sin C = (1 \pm \cos \gamma) \sin(B \pm A) \dots (1).$$

Sucht man eben so aus der Gleichung (D) den Werth von $\cos A \sin \gamma$ und $\cos B \sin \gamma$, durch α , β und C ausgedrückt, so erhält man

$$(\cos A \pm \cos B) \sin \gamma = (1 \mp \cos C) \sin(\beta \pm \alpha) \dots (2).$$

Endlich ist noch, wie unmittelbar aus den Gleichungen (B) folgt:

$$(\sin A \pm \sin B) \sin \gamma = (\sin \alpha \pm \sin \beta) \sin C \dots (3).$$

Verwandelt man in den Gleichungen (1), (2) und (3) die Summen und Differenzen der Sinus und Cosinus (nach §. 96.) in

die Producte derselben, so erhält man sechs Gleichungen, deren Combinationen unter einander zu vielen anderen interessanten Gleichungen führen, von welchen wir hier nur die vier folgenden auszeichnen:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}\gamma &= \cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \cos \frac{1}{2}C \\ \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}\gamma &= \cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin \frac{1}{2}C \\ \sin \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2}\gamma &= \sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \cos \frac{1}{2}C \\ \cos \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2}\gamma &= \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin \frac{1}{2}C \end{aligned} \right\} \dots (H).$$

III. Dividirt man von diesen Gleichungen (H) die zwey ersten oder letzten durch einander, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \text{Tang} \frac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \text{Cotang} \frac{1}{2}C \\ \text{Tang} \frac{1}{2}(A-B) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \text{Cotang} \frac{1}{2}C \end{aligned} \right\} \dots (I),$$

und eben so erhält man auch

$$\left. \begin{aligned} \text{Tang} \frac{1}{2}(\alpha+\beta) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \text{Tang} \frac{1}{2}\gamma \\ \text{Tang} \frac{1}{2}(\alpha-\beta) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \text{Tang} \frac{1}{2}\gamma \end{aligned} \right\} \dots (K).$$

IV. Endlich kann man auch noch mehrere der Gleichungen des §. 167. durch Einführung von Hülfsgrößen zur Rechnung bequemer machen. Nimmt man z. B. in der Gleichung (D) den Hülfswinkel φ so an, daß man hat

$$\text{Tang} \varphi = \text{Tang} \alpha \cos C,$$

so findet man daraus die Cotangente von A , durch die Größen α , β und C ausgedrückt, auf folgende Art:

$$\text{Cotang} A = \frac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin \varphi \text{Tang} C}.$$

§. 169. (Differentialausdrücke der vorhergehenden Gleichungen.) Wenn man von den sechs Bestimmungsstücken eines sphärischen Dreyecks zwey derselben constant annimmt, und irgend eine der vier anderen um eine gegebene, sehr kleine Gröfse ändert, so wird man die Änderungen, welche dadurch die übrigen Bestimmungsstücke erleiden, auf folgende Weise finden.

Es sey z. B. in dem Dreyecke ABC (Fig. 73), in welchem die beyden Seiten β und γ dieselben bleiben sollen, der Winkel $CAB = A$ um die Gröfse $BAB' = dA$ geändert worden, so dafs das gegebene Dreyeck ABC in das folgende $AB'C$ übergeht, wo $AB = AB' = \gamma$ ist, so wird man die Änderung $d\alpha$, welche dadurch die Seite $BC = \alpha$ erfahren hat, durch die Differentiation der ersten der Gleichungen (A) erhalten, oder man wird haben

$$d\alpha \sin \alpha = dA \sin A \sin \beta \sin \gamma,$$

oder einfacher, mit Berücksichtigung der Gleichungen (B):

$$\frac{d\alpha}{dA} = \sin B \sin \gamma.$$

Sucht man eben so die Änderung dB des Winkels B , die einer gegebenen Änderung dC des Winkels C entspricht, unter derselben Voraussetzung, dafs die beyden Seiten β und γ unverändert bleiben, so gibt die dritte der Gleichungen (B)

$$dB \cos B \sin \gamma = dC \cos C \sin \beta,$$

also auch

$$dB = dC \cdot \text{Tang } B \text{ Cotang } C.$$

Führt man dies für alle vorkommenden Fälle aus, so erhält man folgende, in vielen Fällen nützliche Tabelle.

I. Ist β und γ constant, so hat man

$$\frac{d\alpha}{dA} = \sin B \sin \gamma, \quad \frac{dB}{dC} = \text{Tang } B \text{ Cotang } C,$$

$$\frac{d\alpha}{dC} = - \sin \alpha \text{ Tang } B,$$

$$\frac{d\alpha}{dB} = - \sin \alpha \text{ Tang } C, \quad \frac{dA}{dB} = - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \cos C},$$

$$\frac{dA}{dC} = - \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma \cos B}.$$

II. Ist der Winkel A und eine der ihm anliegenden Seiten γ constant, so ist eben so

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \cos C, \quad \frac{d\alpha}{dB} = \sin \alpha \text{ Cotg } C, \quad \frac{d\alpha}{dC} = - \text{Tang } \alpha \text{ Cotg } C,$$

$$\frac{d\beta}{dB} = \frac{\sin \alpha}{\sin C}, \quad \frac{d\beta}{dC} = - \frac{\text{Tang } \alpha}{\sin C}, \quad \frac{dC}{dB} = - \cos \alpha.$$

III. Sind zwey Winkel B und C constant, so ist

$$\frac{d\beta}{d\gamma} = \frac{\text{Tang } \beta}{\text{Tang } \gamma}, \quad \frac{d\beta}{dA} = \frac{\text{Cotang } \gamma}{\sin A}, \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\sin \beta \cos \gamma}{\sin \alpha},$$

$$\frac{dA}{d\alpha} = \sin B \sin \gamma, \quad \frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{\cos \beta \sin \gamma}{\sin \alpha}, \quad \frac{dA}{d\gamma} = \sin A \text{ Tang } \beta,$$

IV. Ist endlich ein Winkel A und die ihm gegenüberstehende Seite α constant, so hat man

$$\frac{d\beta}{dB} = \frac{\text{Tang } \beta}{\text{Tang } B}, \quad \frac{d\beta}{d\gamma} = -\frac{\text{Cos } B}{\text{Cos } C}, \quad \frac{d\beta}{dC} = -\frac{\text{Sin } \beta}{\text{Tang } B \text{ Cos } \gamma},$$

$$\frac{d\gamma}{dC} = \frac{\text{Tang } \gamma}{\text{Tang } C}, \quad \frac{d\gamma}{dB} = -\frac{\text{Tang } \beta \text{ Cos } C}{\text{Sin } B}, \quad \frac{dB}{dC} = -\frac{\text{Cos } \beta}{\text{Cos } \gamma}.$$

§. 170. (Vergleichung der Ausdrücke des sphärischen und des ebenen Dreyecks.) Nimmt man die Seiten eines sphärischen Dreyecks gegen den Halbmesser der Kugel, auf welcher es verzeichnet ist, sehr klein an, so kann man die dasselbe begrenzenden Bogen als gerade Linien, also auch das sphärische Dreyeck als ein ebenes betrachten. Die Gleichungen (A)...(K) des sphärischen Dreyecks werden demnach die Gleichungen (A...F des §. 106.) des ebenen Dreyecks als bloße specielle Fälle in sich enthalten. In der That, setzt man z. B. die Seiten α, β, γ des sphärischen Dreyecks unendlich klein, also auch (nach §. 102, 104.)

$$\text{Sin } \alpha = \text{Tang } \alpha = \alpha \quad \text{und} \quad \text{Cos } \alpha = 1,$$

so gibt die erste der Gleichungen (B)

$$\beta \text{ Sin } A = \alpha \text{ Sin } B,$$

übereinstimmend mit der Gleichung (B) des §. 106.

Eben so gibt die Gleichung (C) und (D) des §. 106.

$$\text{Cotang } A \text{ Sin } B = \frac{\gamma}{\alpha} - \text{Cos } B \quad \text{und}$$

$$\text{Cotang } A \text{ Sin } C = \frac{\beta}{\alpha} - \text{Cos } C,$$

also auch

$$\text{Tang } A = \frac{\alpha \text{ Sin } B}{\gamma - \alpha \text{ Cos } B} = \frac{\alpha \text{ Sin } C}{\beta - \alpha \text{ Cos } C},$$

übereinstimmend mit der Gleichung (F) des §. 106, u. s. f.

I. Dasselbe wird auch von den Differentialausdrücken des §. 169. gelten. So hat man in einem ebenen Dreyecke, wenn die Seiten β und γ constant bleiben:

$$\frac{d\alpha}{dA} = \gamma \text{ Sin } B, \quad \frac{dA}{dB} = -\frac{\alpha}{\beta \text{ Cos } C} \quad \text{u. f.}$$

§. 171. (Auflösung der sphärischen Dreyecke.) Aus den Gleichungen (A)...(K) des §. 168. sieht man, daß

wenn von den sechs Bestimmungsstücken eines sphärischen Dreyecks drey gegeben sind, die drey anderen durch Rechnung bestimmt werden können. Wir wollen daher, wie oben (§. 109.) für das ebene Dreyeck, auch die hier vorkommenden Fälle für das sphärische nach der Ordnung aufzählen.

I. Fall. Wenn die drey Seiten α, β, γ eines sphärischen Dreyecks gegeben sind.

Dann findet man irgend einen der drey Winkel, z. B. A , durch die Gleichung (A)

$$\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma},$$

oder auch, bequemer zur Rechnung, $\sin \frac{1}{2} A$ oder $\cos \frac{1}{2} A$ durch die Gleichungen (F).

II. Fall. Wenn die drey Winkel A, B, C gegeben sind.

Dann findet man irgend eine Seite, z. B. α , durch die Gleichung (E)

$$\cos \alpha = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

oder bequemer $\sin \frac{1}{2} \alpha$ oder $\cos \frac{1}{2} \alpha$ durch die Gleichungen (G).

III. Fall. Wenn zwey Seiten α, β mit dem eingeschlossenen Winkel C gegeben sind.

Dann findet man A, B und γ durch die Gleichungen

$$\cotang A = \frac{\cotang \alpha \sin \beta - \cos \beta \cos C}{\sin C},$$

$$\cotang B = \frac{\cotang \beta \sin \alpha - \cos \alpha \cos C}{\sin C},$$

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C.$$

I. Bequemer zur Rechnung sind für diesen Fall die Gleichungen (H), wenn man alle drey Größen A, B und γ zugleich bestimmen will.

II. Sucht man bloß die beyden Winkel A und B , so wird man die Gleichungen (F) wählen.

III. Sucht man endlich bloß einen dieser Winkel, z. B. B und die Seite γ , so hat man die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sin \gamma \sin B &= \sin \beta \sin C \\ \sin \gamma \cos B &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \cos C \\ \cos \gamma &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C \end{aligned} \right\},$$

wo die Division der beyden ersten Gleichungen den Werth von

Tang B gibt, und wo man dann, wenn B bekannt ist, den Werth von γ aus jeder dieser drey Gleichungen bestimmen kann.

IV. Dieselben drey Gleichungen lassen sich auch, zur Rechnung mit Logarithmen, in bloßen Factoren auf folgende Weise darstellen:

$$\text{Tang } \varphi = \text{Cos } C \text{ Tang } \beta,$$

$$\text{Cotang } B = \frac{\text{Sin } (\alpha - \varphi)}{\text{Sin } \varphi \text{ Tang } C},$$

$$\text{Cos } \gamma = \frac{\text{Cos } \beta \text{ Cos } (\alpha - \varphi)}{\text{Cos } \varphi},$$

oder auch

$$\text{Tang } \psi = \text{Cos } C \text{ Tang } \alpha,$$

$$\text{Cotang } A = \frac{\text{Sin } (\beta - \psi)}{\text{Sin } \psi \text{ Tang } C},$$

$$\text{Cos } \gamma = \frac{\text{Cos } \alpha \text{ Cos } (\beta - \psi)}{\text{Cos } \psi}.$$

IV. Fall. Wenn zwey Winkel A , B und die eingeschlossene Seite γ gegeben ist.

Dann findet man α , β und C durch die Gleichungen

$$\text{Cotang } \alpha = \frac{\text{Cotang } A \text{ Sin } B + \text{Cos } B \text{ Cos } \gamma}{\text{Sin } \gamma},$$

$$\text{Cotang } \beta = \frac{\text{Cotang } B \text{ Sin } A + \text{Cos } A \text{ Cos } \gamma}{\text{Sin } \gamma},$$

$$\text{Cos } C = \text{Sin } A \text{ Sin } B \text{ Cos } \gamma - \text{Cos } A \text{ Cos } B.$$

I. Bequemer zur Rechnung sind die Gleichungen (H), wenn man alle drey Größen α , β und C sucht, oder die Gleichungen (K), wenn man bloß die beyden Seiten α und β sucht.

II. Sucht man endlich bloß eine dieser Seiten β und den Winkel C , so hat man, wie zuvor, die Gleichungen:

$$\text{Sin } C \text{ Sin } \beta = \text{Sin } B \text{ Sin } \gamma$$

$$\text{Sin } C \text{ Cos } \beta = \text{Cos } A \text{ Sin } B \text{ Cos } \gamma + \text{Sin } A \text{ Cos } B \left. \vphantom{\begin{matrix} \text{Sin } C \text{ Sin } \beta \\ \text{Sin } C \text{ Cos } \beta \end{matrix}} \right\}.$$

$$\text{Cos } C = \text{Sin } A \text{ Sin } B \text{ Cos } \gamma - \text{Cos } A \text{ Cos } B \left. \vphantom{\begin{matrix} \text{Sin } C \text{ Sin } \beta \\ \text{Sin } C \text{ Cos } \beta \end{matrix}} \right\}.$$

III. Oder endlich zur Rechnung mit Logarithmen:

$$\text{Tang } \varphi = \frac{\text{Cotang } B}{\text{Cos } \gamma},$$

$$\text{Cotang } \beta = \frac{\text{Cos } (A - \varphi)}{\text{Tang } \gamma \text{ Cos } \varphi},$$

$$\text{Cos } C = \frac{\text{Cos } B \text{ Sin } (A - \varphi)}{\text{Sin } \varphi},$$

oder auch

$$\begin{aligned}\text{Tang } \psi &= \frac{\text{Cotang } A}{\text{Cos } \gamma}, \\ \text{Cotang } \alpha &= \frac{\text{Cos } (B - \psi)}{\text{Tang } \gamma \text{ Cos } \psi}, \\ \text{Cos } C &= \frac{\text{Cos } A \text{ Sin } (B - \psi)}{\text{Sin } \psi}.\end{aligned}$$

V. Fall. Wenn zwey Seiten α , β und einer der gegenüberstehenden Winkel, z. B. A , gegeben ist.

Dann findet man B durch die Gleichung

$$\text{Sin } B = \frac{\text{Sin } A \text{ Sin } \beta}{\text{Sin } \alpha},$$

und wenn so B bekannt ist, auch C und γ durch die Gleichungen (I) und (K), oder durch

$$\begin{aligned}\text{Tang } \frac{1}{2} C &= \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\text{Cos } \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} \text{Cotang } \frac{1}{2} (A + B), \\ \text{Tang } \frac{1}{2} \gamma &= \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (A + B)}{\text{Cos } \frac{1}{2} (A - B)} \text{Tang } \frac{1}{2} (\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Sucht man blofs den Winkel C , so hat man

$$\begin{aligned}\text{Tang } \varphi &= \frac{\text{Cotang } A}{\text{Cos } \beta}, \\ \text{Cos } (C - \varphi) &= \frac{\text{Tang } \beta \text{ Cos } \varphi}{\text{Tang } \alpha},\end{aligned}$$

und eben so, wenn man blofs die Seite γ sucht:

$$\begin{aligned}\text{Tang } \psi &= \text{Cos } A \text{ Tang } \beta, \\ \text{Cos } (\gamma - \psi) &= \frac{\text{Cos } \alpha \text{ Cos } \psi}{\text{Cos } \beta}.\end{aligned}$$

VI. Fall. Wenn zwey Winkel A und B und eine der ihnen gegenüberstehenden Seiten, z. B. α , gegeben ist.

Dann findet man β , C und γ durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\text{Sin } \beta &= \frac{\text{Sin } \alpha \text{ Sin } B}{\text{Sin } A}, \\ \text{Tang } \frac{1}{2} C &= \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\text{Cos } \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} \text{Cotang } \frac{1}{2} (A + B), \\ \text{Tang } \frac{1}{2} \gamma &= \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (A + B)}{\text{Cos } \frac{1}{2} (A - B)} \text{Tang } \frac{1}{2} (\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Sucht man blofs den Winkel C , so ist

$$\text{Cotang } \varphi = \text{Cos } a \text{ Tang } B,$$

$$\text{Sin } (C - \varphi) = \frac{\text{Cos } A \text{ Sin } \varphi}{\text{Cos } B},$$

und wenn man bloß die Seite γ sucht:

$$\text{Tang } \psi = \text{Cos } B \text{ Tang } \alpha,$$

$$\text{Sin } (\gamma - \psi) = \frac{\text{Tang } B \text{ Sin } \psi}{\text{Tang } A}.$$

§. 172. (Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreyecke.) Aus dem Vorhergehenden lassen sich sofort auch die Ausdrücke für solche sphärische Dreyecke ableiten, in welchen einer der drey Winkel gleich einem rechten ist. Solche Dreyecke werden *rechtwinklige* genannt. Wir nehmen im Folgenden den Winkel $A = 90^\circ$ an.

I. Fall. Ist A , β und γ gegeben, so hat man sofort, wenn man in §. 171. den Winkel $A = 90^\circ$ setzt:

$$\text{Tang } B = \frac{\text{Tang } \beta}{\text{Sin } \gamma},$$

$$\text{Tang } C = \frac{\text{Tang } \gamma}{\text{Sin } \beta},$$

$$\text{Cos } \alpha = \text{Cos } \beta \text{ Cos } \gamma.$$

II. Fall. Wenn A , α und β gegeben ist:

$$\text{Sin } B = \frac{\text{Sin } \beta}{\text{Sin } \alpha},$$

$$\text{Cos } C = \frac{\text{Tang } \beta}{\text{Tang } \alpha},$$

$$\text{Cos } \gamma = \frac{\text{Cos } \alpha}{\text{Cos } \beta}.$$

III. Fall. Wenn A , B und β gegeben ist:

$$\text{Sin } \alpha = \frac{\text{Sin } \beta}{\text{Sin } B},$$

$$\text{Sin } \gamma = \frac{\text{Tang } \beta}{\text{Tang } B},$$

$$\text{Sin } C = \frac{\text{Cos } B}{\text{Cos } \beta}.$$

IV. Fall. Wenn A , C und β gegeben ist:

$$\text{Tang } \alpha = \frac{\text{Tang } \beta}{\text{Cos } C},$$

$$\text{Tang } \gamma = \text{Sin } \beta \text{ Tang } C,$$

$$\text{Cos } B = \text{Cos } \beta \text{ Sin } C.$$

V. Fall. Wenn A , B und a gegeben ist:

$$\sin \beta = \sin a \sin B,$$

$$\tan \gamma = \tan a \cos B,$$

$$\tan C = \frac{\cotang B}{\cos a}.$$

VI. Fall. Wenn A , B , C gegeben ist:

$$\cos a = \cotang B \cotang C,$$

$$\cos \beta = \frac{\cos B}{\sin C},$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

§. 173. (Berechnung der sphärischen Dreyecke.)

Wir wollen nun den Gebrauch der vorhergehenden Ausdrücke durch Beyspiele zu erläutern suchen.

Ehe wir aber diese Berechnungen vornehmen, wollen wir einige, diesen Gegenstand überhaupt betreffende Bemerkungen voraussenden.

I. Erstens bedarf es wohl keiner Erinnerung, daßs man auf die Zeichen der trigonometrischen Functionen in den verschiedenen Quadranten ihrer Winkel gehörig Rücksicht nehmen muß, wozu man sich am bequemsten der Gleichungen des §. 94, Nr. B. und C. bedienen wird.

II. Zweytens ist es bey der Berechnung der Hülfswinkel und überhaupt aller derjenigen Gröfsen, die nicht die gesuchten Endresultate unmittelbar enthalten [wie z. B. die Gröfsen $\frac{1}{2}(A+B)$ und $\frac{1}{2}(A-B)$ aus den Gleichungen (I) des §. 168, durch welche man erst die unmittelbaren Werthe von A und von B durch Addition und Subtraction jener zwey Gröfsen erhalten will], am einfachsten und auch für alle Fälle genügend, diese Winkel *stets in dem ersten Quadranten*, aber mit dem der trigonometrischen Function entsprechenden Zeichen, zu nehmen, und dann mit dem so angenommenen Hülfswinkel die Rechnung bis zu ihrer Beendigung fortzuführen, wobey man, wie schon in §. 64, B. erinnert wurde, die Logarithmen der negativen Zahlen, um Irrungen zu vermeiden, mit einem N bezeichnen kann.

III. Drittens kann man annehmen, daßs in jedem sphärischen Dreyecke keine Seite gröfser als 180 Grade ist; denn wenn auch

solche Dreyecke möglich sind, deren Seiten die halbe Peripherie der Kugel übersteigen, so werden die Ergänzungen dieser Seiten zu 360 Graden immer ein Nebendreyeck auf der Kugel geben, dessen Seiten kleiner als 180° sind, und das man daher statt des gegebenen Dreyecks berechnen und daraus dieses gegebene leicht ableiten wird. In der That gebraucht man die sphärischen Dreyecke gewöhnlich, um durch sie die Lage eines bestimmten Punctes auf der Oberfläche der Kugel anzugeben. Will man aber z. B. die Lage irgend eines Punctes B (Fig. 74) gegen den festen Kreis $ACA'C'$ angeben, oder will man den dritten Punct B des Dreyecks ACB durch die Entfernung CB desselben von dem fixen Punct C , und durch den Winkel ACB dieser Entfernung mit dem fixen Kreise CAC' bestimmen, so wird es offenbar genügen, diese Entfernung CB oder die Seite des Dreyecks ACB nicht größer als 180 Grade anzunehmen, aber dafür den Winkel C des Dreyecks von 0 bis 360° wachsen zu lassen, um auf diese Weise alle Puncte der Kugel, und zwar *keinen derselben mehr als einmal* zu umfassen.

IV. Endlich wollen wir noch bemerken, daß es zwischen je drey Puncten A, B, C (Fig. 74) auf der Oberfläche der Kugel immer *zwey* Dreyecke, der anderen hier nicht zu erwähnen, gibt, nämlich erstens das gewöhnlich betrachtete Dreyeck ABC , und zweytens jenes, dessen Fläche die Fläche des ersten zur ganzen Kugelfläche ergänzt, oder dasjenige, welches übrig bleibt, wenn man von der Oberfläche der ganzen Kugel das erste Dreyeck wegnimmt. Beyde Dreyecke haben ganz dieselben Seiten, aber die Winkel des einen sind die Ergänzungen der Winkel des anderen zu vier rechten Winkeln. Die sämtlichen vorhergehenden analytischen Ausdrücke des sphärischen Dreyecks bleiben aber selbst in Beziehung auf ihre Zeichen unverändert dieselben, wenn man in ihnen statt den Winkeln A, B und C ihre Ergänzungen zur ganzen Peripherie oder $360 - A, 360 - B$ und $360 - C$ setzt, und dabey die Seiten α, β, γ des Dreyecks ungeändert läßt, so daß also alle jene Formeln eben so gut für das gewöhnliche, als für das *Supplementardreyeck* desselben gehören.

Nach diesen Bemerkungen wollen wir nun zu der ausführlichen Berechnung eines Dreyecks selbst übergehen.

Wenn in einem Dreyecke folgende zwey Seiten mit dem

eingeschlossenen Winkel gegeben sind:

$$\alpha = 105^{\circ} 23' 50'',$$

$$\beta = 13^{\circ} 25' 54'',$$

$$C = 5^{\circ} 42' 20'',$$

und wenn man vorerst nur einen der beyden anderen Winkel, z. B. den Winkel A dieses Dreyecks kennen lernen will, so hat man nach §. 171, Fall III:

$$\text{Tang } \psi = \text{Tang } \alpha \cos C \quad \text{und}$$

$$\text{Tang } A = \frac{\sin \psi \text{ Tang } C}{\sin (\beta - \psi)}.$$

Dies gibt sofort

$$\log \text{Tang } \alpha = 0.5600459 N$$

$$\log \cos C = 9.9978431$$

$$\log \text{Tang } \psi = 0.5578890,$$

und daher, da der erste dieser Logarithmen, also auch der letzte, zu einer negativen Zahl gehört:

$$\psi = -74^{\circ} 31' 47''.2$$

Aber es war $\beta = 13^{\circ} 25' 54''.0$

also ist auch $\beta - \psi = 87^{\circ} 57' 41''.2.$

Mit diesen Werthen von ψ und $\beta - \psi$ erhält man, da der Sinus eines negativen Winkels ψ ebenfalls negativ ist:

$$\log \sin \psi = 9.9839730 N$$

$$\log \text{Tang } C = 8.9996142$$

$$8.9835872$$

$$\log \sin (\beta - \psi) = 9.9997251$$

$$\log \text{Tang } A = 8.9838621,$$

$$\text{und daher } A = -5^{\circ} 30' 12''.9.$$

Um nun in dem Endresultate der Rechnung, in welchem man die negativen Winkel zu vermeiden und sie durch ihre gleichbedeutenden positiven zu ersetzen pflegt, den Quadranten, in welchen der Winkel A fallen muß, zu bestimmen, so hat man (nach §. 94, C)

$$\text{Tang } (180 + x) = \text{Tang } (360 + x) = \text{Tang } x,$$

also ist auch der Winkel

$$\text{entweder } 180 \quad \text{oder } 360$$

$$-5 \ 30 \ 12.9$$

$$174 \ 29 \ 47.1$$

$$-5 \ 30 \ 12.9$$

$$354 \ 29 \ 47.1,$$

so dafs daher der gesuchte Winkel A entweder in den II^{ten} oder IV^{ten} Quadranten fällt. Welcher von diesen beyden Fällen in der That Statt hat, wird man leicht aus einer der anderen Gleichungen des §. 166. und 167., z. B. aus der Gleichung (B) des §. 167:

$$\sin A = \frac{\sin \alpha \sin C}{\sin \gamma},$$

selbst ohne eigentliche Berechnung derselben entscheiden können. Da nämlich $C = 5^\circ 42' 20''$ im ersten Quadranten liegt, also $\sin C$ positiv ist, und da alle Seiten eines Dreyeckes kleiner als 180° , also auch $\sin \alpha$ sowohl, als $\sin \gamma$ eine positive Gröfse ist, so mufs auch $\sin A$ positiv seyn, oder der Winkel A mufs in den I^{sten} oder II^{ten} Quadranten fallen. Nach dem Vorhergehenden kann er aber nur in den II^{ten} oder IV^{ten} Quadranten fallen, also fällt er in den II^{ten}, und man hat daher

$$A = 174^\circ 29' 47''.1.$$

Nach dieser vorläufigen Bestimmung des Winkels A wollen wir nun das gegebene Dreyeck vollständig auflösen, und uns dazu der Gleichungen (H) des §. 168. bedienen.

Mit den oben gegebenen Werthen von α , β und C findet man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) &= 59^\circ 24' 52'', \quad \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 45^\circ 58' 58'', \\ \text{und } \frac{1}{2}C &= 5^\circ 42' 20''; \end{aligned}$$

und damit geben die erwähnten Gleichungen (H)

$$\left. \begin{aligned} \log \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}\gamma &= 9.8413679 \\ \log \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}\gamma &= 8.4035339 \\ \log \sin \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2}\gamma &= 9.8562695 \\ \log \cos \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2}\gamma &= 8.6319037 \end{aligned} \right\}.$$

Die Division der beyden ersten und der zwey letzten dieser Ausdrücke gibt

$$\begin{aligned} \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A+B) &= 1.4378340, \\ \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A-B) &= 1.2243658. \end{aligned}$$

Dieß gibt sofort

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A+B) &= 87^\circ 54' 36''.87 \\ \text{und } \frac{1}{2}(A-B) &= 86^\circ 35' 10.19 \end{aligned}$$

Da aber die beyden letzten Logarithmen zu positiven Zahlen gehören, so werden die zwey Winkel $\frac{1}{2}(A+B)$ und $\frac{1}{2}(A-B)$

entweder dem I^{sten} oder auch dem III^{ten} Quadranten angehören, so daß man demnach auch haben könnte:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(A+B) &= 267^{\circ} 54' 36''.87 \\ \frac{1}{2}(A-B) &= 266^{\circ} 35' 10.19 \end{aligned} \right\}.$$

Welcher von diesen beyden Fällen in der That Statt hat, wird sich sogleich aus irgend einer der vorhergehenden vier Gleichungen entscheiden, bey welcher wir (nach der obigen Bemerkung I.) die Werthe von $\frac{1}{2}(A+B)$ und $\frac{1}{2}(A-B)$, wie wir sie zuerst gefunden haben, nämlich im ersten Quadranten mit ihren Zeichen, beybehalten. — Von diesen vier Gleichungen gibt z.B.

die erste und die letzte

$$\begin{aligned} \log \sin \frac{1}{2}(A+B) &= \frac{9.8413679}{9.9997110} & \log \cos \frac{1}{2}(A-B) &= \frac{8.6319037}{8.7748631} \\ \log \cos \frac{1}{2}\gamma &= 9.8416569 & \log \sin \frac{1}{2}\gamma &= 9.8570406. \end{aligned}$$

Da nun $\frac{1}{2}\gamma$ (nach der Bemerkung III.) nie größer als 90° , also auch $\sin \frac{1}{2}\gamma$ und $\cos \frac{1}{2}\gamma$ nie negativ seyn kann, so muß $\frac{1}{2}(A+B)$ sowohl, als auch $\frac{1}{2}(A-B)$ im I^{sten}, nicht aber im III^{ten} Quadranten genommen werden, so daß man demnach in der That haben wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A+B) &= 87^{\circ} 54' 36''.87, \\ \frac{1}{2}(A-B) &= 86^{\circ} 35' 10.19. \end{aligned}$$

Nimmt man von diesen beyden Ausdrücken die Summe und die Differenz, so erhält man für die wahren Werthe der beyden Winkel A und B

$$\begin{aligned} A &= 174^{\circ} 29' 47''.06, \\ B &= 173^{\circ} 19' 26.68; \end{aligned}$$

wo dann zugleich der so eben gefundene Werth

$$\log \cos \frac{1}{2}\gamma = 9.8416569$$

für die gesuchte Seite γ gibt:

$$\frac{1}{2}\gamma = 46^{\circ} 0' 52''.5 \quad \text{oder} \quad \gamma = 92^{\circ} 1' 45''.0.$$

Zur Prüfung der ganzen Rechnung kann man auch noch diesen Werth von γ aus der zweyten der obigen Gleichungen, oder aus

$$\log \sin \frac{1}{2}\gamma = 9.8570406$$

suchen, der mit dem vorhergehenden übereinstimmen muß.

Übrigens hätte man sich auch schon, wie oben, aus den beyden einfachen Gleichungen

$$\sin A = \frac{\sin \alpha \sin C}{\sin \gamma} \quad \text{und} \quad \sin B = \frac{\sin \beta \sin C}{\sin \gamma},$$

ohne eigentliche Berechnung derselben, überzeugen können, daß die Werthe von A und B nur in den 1^{ten} oder 2^{ten} Quadranten fallen, da $\sin C$, nach dem gegebenen Werthe von C , und da die Sinus der Seiten α , β , γ , für alle Werthe dieser Seiten, immer positiv sind, also auch $\sin A$ und $\sin B$ selbst positiv seyn muß.

Wir erhalten demnach als Endresultat der Berechnung dieses Dreyeckes

$$A = 174^{\circ} 29' 47''.06,$$

$$B = 119^{\circ} 26.68,$$

$$\gamma = 92^{\circ} 145.0.$$

Sey für ein zweytes Beyspiel der Winkel C und die beyden ihn einschließenden Seiten α , β , wie folgt, gegeben:

$$C = 218^{\circ} 7' 57''.9,$$

$$\alpha = 23^{\circ} 27' 42.6,$$

$$\beta = 86^{\circ} 36' 26.7.$$

Damit erhält man durch die Gleichungen des §. 171. Fall III.

Nr. IV.

$$\log \cos C = 9.8957441 N$$

$$\log \tan \beta = 1.2270841$$

$$\log \tan \varphi = 1.1228282;$$

und daher

$$\varphi = -85^{\circ} 41' 24''.11$$

$$\alpha = 23^{\circ} 27' 42.6$$

$$\alpha - \varphi = 109^{\circ} 9' 6.71.$$

Ist so φ bekannt, so erhält man B und γ durch

$$\log \sin (\alpha - \varphi) = 9.9752720 \quad \log \cos (\alpha - \varphi) = 9.5159707 N$$

$$\log \cotang C = 0.1051173 \quad \log \cos \beta = 8.7721541$$

$$0.0803893 \quad 8.2881248$$

$$\log \sin \varphi = 9.9987701 N \quad \log \cos \varphi = 8.8759419$$

$$\log \cotang B = 0.0816192 \quad \log \cos \gamma = 9.4121829$$

$$B = -39^{\circ} 38' 50''.9 \quad \gamma = -75^{\circ} 1' 43''.4.$$

Da $\cos \gamma$ negativ ist, so liegt γ im zweyten Quadranten, oder es ist

$$\gamma = 104^{\circ} 58' 16''.6.$$

Der Winkel B aber liegt entweder im II^{ten} oder IV^{ten} Quadranten. Um zwischen diesen zwey Quadranten zu entscheiden, ist

$$\sin B = \frac{\sin C}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta;$$

und da $\sin \beta$ und $\sin \gamma$ positiv, $\sin C$ aber negativ ist, so ist auch $\sin B$ negativ, oder B liegt im IV^{ten} Quadranten, oder es ist

$$B = 320^\circ 21' 9''.$$

Um endlich noch den Winkel A zu finden, hat man

$$\sin A = \frac{\sin \alpha \sin C}{\sin \gamma}.$$

Es ist aber

$$\log \sin \alpha = 9.6000337$$

$$\log \sin C = 9.7906268 N$$

$$9.3906605$$

$$\log \sin \gamma = 9.9850020$$

$$\log \sin A = 9.4056585,$$

und daher

$$A = 14^\circ 44' 34''.$$

so daß daher A in den III^{ten} oder IV^{ten} Quadranten fällt. Berechnet man aber, bloß in zwey Decimalstellen, die Gleichung (D) des §. 167., oder

$$\cotang A = \frac{\cotang \alpha \sin \beta - \cos \beta \cos C}{\sin C},$$

so findet man $\cotang A$ negativ, so daß daher A im IV^{ten} Quadranten liegt, oder daß man hat:

$$A = 345^\circ 15' 25''.4.$$

Wir erhalten daher für die drey gesuchten Bestimmungsstücke unseres Dreyeckes

$$A = 345^\circ 15' 25''.4,$$

$$B = 320^\circ 21' 9''.1,$$

$$\gamma = 104^\circ 58' 16''.6.$$

Will man dieses Dreyeck durch Zeichnung darstellen, so sieht man sofort, daß es nicht das gewöhnlich so betrachtete Dreyeck ABC , sondern das *Supplementardreyeck* desselben, oder daß es derjenige Raum ist, der übrig bleibt, wenn man die Fläche des gewöhnlichen Dreyeckes von der ganzen Kugelfläche subtrahirt, wie in der obigen Bemerkung IV. gesagt worden ist.

Als weitere Beyspiele zur Übung kann man die folgenden anwenden:

$$\alpha = 23^{\circ} 27' 59''.26, \quad A = 23^{\circ} 33' 4''.67,$$

$$\beta = 98 \ 47 \ 25.0, \quad B = 97 \ 25 \ 15.45,$$

$$\gamma = 96 \ 21 \ 56.28, \quad C = 85 \ 43 \ 45.3.$$

Eben so hat man für ein anderes Dreyeck

$$\alpha = 23^{\circ} 27' 34''.58, \quad A = 17^{\circ} 3' 55''.90,$$

$$\beta = 73 \ 28 \ 30.83, \quad B = 44 \ 58 \ 3.55,$$

$$\gamma = 89 \ 49 \ 37.71, \quad C = 132 \ 30 \ 38.86.$$

§. 174. (Eigenschaften des sphärischen Dreyecks.)

Zum Schlusse dieses Gegenstandes wollen wir die vorzüglichsten Eigenschaften der sphärischen Dreyecke, wie sie aus den vorhergehenden Gleichungen (A) . . . (E) des §. 167. leicht abgeleitet werden können, hier kurz zusammen stellen.

I. Der Durchschnitt der Kugel mit einer Ebene ist, wie bereits oben (§. 165, I.) gesagt wurde, ein *Kreis*, und zwar ein *größter Kreis* der Kugel, wenn die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

Die beyden Endpunkte *P* und *Q* (Fig. 74) des auf einem größten Kreise *ABA'* senkrechten Durchmessers *PQ* der Kugel, sind die *Pole* dieses größten Kreises sowohl, als auch aller kleineren mit *ABA'* parallelen Kreise, wie *CcC'*, welche letzte deshalb *Parallelkreise* von *ABA'* genannt werden. Jeder Pol steht von allen Punkten der Peripherie eines jeden dieser Kreise gleich weit ab, und bey dem größten Kreise beträgt dieser Abstand, für beyde Pole, einen rechten Winkel oder den vierten Theil der Peripherie eines größten Kreises.

II. Legt man durch den Pol *P* eines größten Kreises *ABA'* zwey andere größte Kreise *PCA* und *Pca*, so verhalten sich die zwischen ihnen enthaltenen Bogen *A'a* des größten Kreises und *Cc* des Parallelkreises, wie die Halbmesser *aO* und *co* dieser beyden Kreise. Ist aber *a* der Halbmesser der Kugel, oder ist *OA = a* der Halbmesser eines größten Kreises, und *Oo = b* der Abstand der Mittelpunkte beyder Kreise, welcher Abstand auf den Ebenen dieser Kreise senkrecht steht, so ist der Halbmesser *C'o = c* des Parallelkreises

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$, oder es ist
 $c = a \sin PC = a \cos AC$;

so dafs man daher auch für die beyden erwähnten Bogen das Verhältnifs hat:

$$\frac{Cc}{Aa} = \sin PC = \cos AC.$$

Legt man aber durch zwey Punkte C und c der Oberfläche der Kugel einen grössten Kreis, dessen Ebene demnach durch den Mittelpunkt O der Kugel geht, so wird der zwischen C und c enthaltene Bogen des grössten Kreises immer kleiner seyn, als der durch dieselben Punkte gehende Bogen Cc des Parallelkreises, wie man sofort sieht, wenn man beyde Bogen sich um ihre gemeinschaftliche geradlinige Chorde Cc drehen läfst, wo dann der Weg des Bogens des grössten Kreises zwischen dem des kleineren Kreises und zwischen der Chorde liegen, also, als der von diesem Bogen eingeschlossene, auch der kleinere Bogen, seyn wird. Demnach ist zwischen zwey Punkten der Kugel der kürzeste Weg gleich dem Bogen des durch diese Punkte gelegten grössten Kreises.

III. Zwey grösste Kreise einer Kugel halbiren sich: ein grösster und ein kleinerer Kreis aber, oder zwey kleinere Kreise halbiren sich nicht.

Der Winkel zweyer grösster Kreise ist gleich dem Neigungswinkel ihrer Ebenen.

IV. Wenn sich zwey grösste Kreise PA' und Pa in dem Punkte P schneiden, und wenn man auf ihnen, von dem Punkte P aus, die Bogen

$$PA' = Pa = 90^\circ$$

nimmt, so steht der durch die Punkte A und a geführte grösste Kreis $AaBA$ senkrecht auf jenen beyden, und P ist der Pol dieses dritten Kreises, so wie zugleich der Bogen $A'a$ das Mafs des Winkels $A'Pa$ ist.

Jeder grösste Kreis, der durch den Pol eines anderen grössten Kreises geht, steht auf diesem anderen senkrecht und umgekehrt.

V. In einem gleichschenkligen sphärischen Dreyecke sind die Winkel an der Basis gleich und umgekehrt. — Die Summe zweyer Seiten eines sphärischen Dreyecks ist gröfser, als die

dritte Seite. Die Summe der drey Seiten desselben aber ist kleiner, als die Peripherie des größten Kreises der Kugel. — In jedem sphärischen Dreyecke steht die größere Seite dem größeren Winkel gegenüber und umgekehrt. — Der äußere Winkel (§. 85, IV.) eines solchen Dreyecks ist kleiner, als die Summe der beyden entgegengesetzten inneren Winkel.

VI. Wenn man in einem Dreyecke ABC (Fig. 74) eine Seite, z. B. AC zu 360° ergänzt, so entsteht dadurch ein anderes Dreyeck, dessen Seiten AB , AC und $AQAC$ sind. Die Flächen beyder Dreyecke zusammen geben die Oberfläche der Halbkugel, und für beyde Dreyecke sind die oben (§. 167.) gegebenen Gleichungen (A) . . . (E) selbst in ihren Zeichen ganz dieselben, wie man sieht, wenn man in ihren zwey Seiten α und γ ungeändert läßt, die dritte Seite β in $360 - \beta$, und die drey Winkel A , B , C in $180 - A$, $360 - B$ und $180 - C$ verwandelt. Dieselbe Bemerkung hat auch, wie wir (aus §. 173, Anmerk. IV.) gesehen haben, für dasjenige Dreyeck Statt, welches die Fläche des gewöhnlich betrachteten Dreyeckes zur Oberfläche der ganzen Kugel ergänzt.

VII. Statt dem Dreyecke ABC (Fig. 74) könnte man auch das Dreyeck BCA' berechnen, in welchem die Lage der drey Ebenen dieselbe ist, wo aber zwey Seiten die Ergänzungen zu 180° von den Seiten des ersten Dreyeckes ABC sind. Dasselbe gilt von dem Dreyecke ABC und von dem Dreyecke $A'BC$, so daß demnach auf der Halbkugel vier, und auf der ganzen Kugel fläche acht Dreyecke durch dieselben drey in dem Mittelpuncte der Kugel sich schneidenden Ebenen entstehen, daher auch für alle diese Dreyecke die Gleichungen (A) . . . (E) des §. 167. unverändert dieselben bleiben.

VIII. In dem sphärischen Dreyecke ABC (Fig. 75) sey

A	der Pol von dem größten Kreise	BC ,
B'	» » » » » »	AC ,
C	» » » » » »	AB ,

so wird auch zugleich

A	der Pol von	BC ,
B	» » » » » »	AC ,
C	» » » » » »	AB

sey. Weiter ist, nach dem Vorhergehenden,

$$Bb' = bC = 90,$$

$$\text{also auch } Bb' + bC = 180;$$

oder was dasselbe ist:

$$BC + bb' = 180.$$

Allein bb' ist gleich dem Winkel A' , also ist auch

$$\left. \begin{aligned} BC &= 180 - A' \\ \text{und eben so } AC &= 180 - B' \\ AB &= 180 - C' \end{aligned} \right\};$$

und ganz eben so erhält man auch

$$\left. \begin{aligned} A &= 180 - B'C \\ B &= 180 - A'C \\ C &= 180 - A'B \end{aligned} \right\},$$

so daß es also für jedes gegebene Dreyeck ABC ein Polardreyeck $A'B'C'$ Statt hat, in welchem die Winkel die Complementary der Seiten von jenem, und die Seiten die Complementary der Winkel von jenen zu 180° sind. Es ist aber leicht zu sehen, daß alle vorhergehenden Gleichungen (A) . . . (E) des sphärischen Dreyeckes keine Änderungen, selbst nicht in ihren Zeichen erleiden, wenn man in ihnen statt A, B, C die Größen $180 - \alpha, 180 - \beta, 180 - \gamma$, und statt α, β, γ die Größen $180 - A, 180 - B, 180 - C$ substituirt.

Das Vorhergehende zeigt die große Mannigfaltigkeit der Combinationen, die man zwischen den Bogen der größten Kreise aufstellen kann, die durch drey gegebene Puncte der Oberfläche einer Kugel gehen.

§. 175. (Verbindungen mehrerer Ebenen oder Kreise unter einander.) Betrachten wir nun noch die Verbindungen, welche mehr als drey Ebenen, die alle durch den Mittelpunkt einer Kugel gehen, unter einander eingehen.

Seyen AAA', BBB' und CCC' (Fig. 76) drey Bogen eines größten Kreises, die sich in den Punkten A, B, C schneiden, und durch diese Durchschnittspunkte ein Dreyeck ABC bilden, dessen Winkel, nach der bisher angenommenen Bezeichnung, A, B, C , und dessen Seiten $BC = \alpha, AC = \beta$ und $AB = \gamma$ sind.

Sey ferner a der Pol des ersten Kreises AA' , b des zweyten BB' und c des dritten Kreises CC' , so wird, nach dem Vorhergehenden, in dem Polardreyecke abc der Bogen ab verlängert auf den ersten und zweyten, und eben so der Bogen ac auf den ersten und dritten, und endlich der Bogen bc auf dem zweyten und dritten Kreise senkrecht stehen, und die Winkel und Seiten dieses Polardreyeckes werden folgende Bezeichnung erhalten:

$$\begin{array}{ll} \text{Winkel } bac = \beta & \text{und Seite } ab = A, \\ \text{» } bca = \alpha & \text{» } bc = B, \\ \text{» } abc = 180 - \gamma & \text{» } ac = 180 - C. \end{array}$$

Ganz eben so wird auch

$$\begin{array}{ll} A \text{ der Pol des erweiterten Kreises } ab, \\ B \text{ » » » } bc, \\ C \text{ » » » } ac \end{array}$$

seyn, und die Kreise Aa , Ab werden auf ab ; Bb , Bc auf bc , und Cc , Ca auf ac senkrecht stehen.

Wir wollen diesen Kreis $abB'Aa$ den vierten, und endlich den durch die Punkte a und A gezogenen grössten Kreis aAD den fünften nennen.

Demnach stehen die drey grössten Kreise I, IV und V unter einander senkrecht, wie dieß z. B. in der mathematischen Geographie oder auf dem Erdglobus der Fall ist, wenn der Kreis I den Äquator, und wenn die beyden Kreise IV und V diejenigen Meridiane vorstellen, die durch die geographischen Längenspunkte von 90° und 180° gehen. Nehmen wir daher diese drey Kreise I, IV und V als fest, oder als die ihrer Lage nach gegebenen Kreise an, und suchen wir die Lage der beyden anderen Ebenen II und III gegen jene drey fixen Ebenen zu bestimmen.

I. Sey zuerst die Lage des Kreises III gegen II, d. h. sey die Neigung B dieser Kreise gegen einander und die Entfernung $AB = \gamma$ ihres gemeinschaftlichen Durchschnittspunctes B von dem fixen Punkte A gegeben. Kennt man überdiß noch den Winkel A der beyden ersten Ebenen I und II gegen einander, so findet man die drey Größen α , β und C , durch welche die Lage des Kreises III gegen I bestimmt wird, durch folgende Ausdrücke (§. 168, Gleich. H), die unmittelbar aus der Auflösung des Dreyeckes ABC oder des Polardreyeckes abc desselben folgen:

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A - B}{2} \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A - B}{2} \sin \frac{\gamma}{2};$$

und durch dieselben Gleichungen kann man auch A , B und γ finden, wenn α , β und C bekannt ist; d. h. man kann durch sie umgekehrt die Lage des Kreises III gegen II bestimmen, wenn die Lage des III gegen I die gegebene ist.

II. Ehe wir nun weiter gehen, müssen wir zuerst die Werthe der verschiedenen Bogen, die durch den Durchschnitt der Kreise auf der Kugel entstehen, näher bestimmen.

Der Kürze wegen wollen wir die Neigung des Kreises III

gegen den festen Kreis I durch A' ,

» » » » IV » B' ,

» » » » V » C' ,

und eben so die Entfernung des Durchschnittspunctes B der Kreise II und III

von dem Durchschnitte C der III und I durch α' ,

» » » » III » IV » β' ,

» » » » III » V » γ'

bezeichnen, so daß man demnach hat:

Winkel $A' = A'CC'$,

» $B' = A'CC'' = A'C'C'$,

» $C' = CED = aEC'$;

Bogen $\alpha' = BC$,

» $\beta' = BC'$,

» $\gamma' = BE$.

Man sieht, daß, der angenommenen Bezeichnung gemäß, $\alpha' = \alpha$ und $A' = 180 - C$ ist, und daß überdies, wie man sich leicht überzeugt, auch die Bogen

$$CE = \gamma' - \alpha', \quad A'c = C,$$

$$CC' = 180 + \alpha' - \beta', \quad Ac = B,$$

$$C'E = \beta' - \gamma',$$

und die Winkel

$$Ac b = \beta',$$

$$A'cb = 180 - \gamma'$$

sind; und daß endlich, da der Punct A der Pol des Kreises IV ist, alle aus A auf diesen Kreis gezogenen Bogen AA' , AB' , Aa , ... den vierten Theil der Peripherie betragen, und auf diesem Kreise IV senkrecht stehen.

III. Dieß vorausgesetzt, nehmen wir nun an, daß, wie in dem letzten Fall der Nr. I., die Gröfse α , β und C , das heist, daß die Lage des Kreises III gegen I gegeben sey, und daß man daraus die Lage von III gegen die drey festen Ebenen I, IV und V bestimmen soll, oder mit anderen Worten, daß man die sechs Gröfsen $A'B'C$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ durch die drey gegebenen Gröfsen α , β und C ausdrücken soll.

Zu diesem Zwecke hat man in dem rechtwinkligen Dreyecke CAC' , nach §. 172.:

$$\text{Tang}(\beta' - \alpha) = \frac{\text{Cotang} \beta}{\text{Cos } C},$$

$$\text{Cos } B' = \text{Sin } \beta \text{ Sin } C.$$

Eben so ist in dem Dreyecke ACE

$$\text{Tang}(\gamma' - \alpha) = - \frac{\text{Tang} \beta}{\text{Cos } C},$$

$$\text{Cos } C' = - \text{Cos } \beta \text{ Sin } C;$$

und endlich in dem Dreyecke ABC , wie zuvor,

$$\alpha' = \alpha \text{ und}$$

$$A' = 180 - C;$$

und dadurch sind die sechs gesuchten Gröfsen auf die angegebene Weise bestimmt.

IV. Wenn aber die Lage des Kreises III gegen II, oder wenn die Gröfsen A , B und γ als gegebene vorausgesetzt werden, so erhält man dieselben sechs Gröfsen, welche die Lage von III gegen die drey festen Kreise I, IV und V bestimmen, durch folgende Ausdrücke.

In dem Dreyecke $BB'C$ ist $BC = 180 - \beta'$, $BB' = 90 - \gamma$ und $BB'' = 90^\circ$; also auch

$$\text{Tang} \beta' = - \frac{\text{Cotang } \gamma}{\text{Cos } B},$$

$$\sin B' = \frac{\cos \gamma}{\sin \beta} \quad \text{und}$$

$$\cos B' = \sin \gamma \sin B.$$

Eben so hat man in dem Dreyecke ABE die Winkel $BAE = 90 + A$, $AEB = 180 - C$, und die Seiten $AB = \gamma$ und $BE = \gamma'$; also auch

$$\text{Tang } \gamma' = \frac{\sin \gamma}{\cos B \cos \gamma - \text{Tang } A \sin B},$$

$$\sin C' = \frac{\cos A \sin \gamma}{\sin \gamma'} \quad \text{und}$$

$$\cos C' = -\sin A \cos B - \cos A \sin B \cos \gamma.$$

Endlich ist in dem Dreyecke ABC der Winkel $ACB = 180 - A'$, und die Seite $BC = \alpha'$; also auch

$$\text{Tang } \alpha' = \frac{\sin \gamma}{\cotang A \sin B + \cos B \cos \gamma},$$

$$\sin A' = \frac{\sin A \sin \gamma}{\sin \alpha'} \quad \text{und}$$

$$\cos A' = \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos \gamma,$$

oder kürzer, es ist $\alpha' = \alpha$ und $A' = 180 - C$, wie zuvor.

Um auf diese Ausdrücke ein Beyspiel anzuwenden, nehmen wir an, daß die Ebene III gegen II durch folgende Werthe von A , B und γ gegeben sey:

$$A = 23^\circ 27' 57''.0,$$

$$B = 7 \quad 0 \quad 8.9,$$

$$\gamma = 45 \quad 56 \quad 48.0.$$

Sucht man daraus zuerst die Lage derselben Ebene III gegen I, oder sucht man die Gröfsen α , β und C , so findet man, nach den oben (in I.) angeführten Gleichungen:

$$\alpha = 36^\circ 30' 28''.5,$$

$$\beta = 10 \quad 29 \quad 40.6,$$

$$C = 151 \quad 14 \quad 48.6.$$

Bestimmt man dann die gesuchte Lage der Ebene III gegen die drey festen Ebenen I, IV und V, so erhält man, wenn man die Gleichungen in Nr. III. oder IV. zu Grunde legt:

$$\alpha' = 36^\circ 30' 28''.5 \quad \text{und} \quad A' = 28^\circ 45' 11''.3,$$

$$\beta' = 135 \quad 43 \quad 56.2 \quad \text{»} \quad B' = 84 \quad 58 \quad 24.7,$$

$$\gamma' = 48 \quad 26 \quad 19.3 \quad \text{»} \quad C' = 61 \quad 46 \quad 17.0.$$

Bemerken wir noch, daß zwischen diesen sechs Größen $\alpha' A' \dots$ mehrere schöne Relationen bestehen, die man leicht aus den Dreyecken DEC' , ACE , CAC' , $\dots$ ableiten wird, und von welchen ich der Kürze wegen nur einige, zur Übung in solchen Untersuchungen, hier anführe:

$$\left. \begin{aligned} \cos A' &= \sin(\beta' - \gamma') \sin B' \sin C' \\ \cos B' &= \sin(\gamma' - \alpha') \sin C' \sin A' \\ \cos C' &= \sin(\alpha' - \beta') \sin A' \sin B' \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} \cotang(\alpha' - \beta') &= -\cotang A' \cotang B' \\ \cotang(\beta' - \gamma') &= -\cotang B' \cotang C' \\ \cotang(\gamma' - \alpha') &= -\cotang C' \cotang A' \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} \cotang(\alpha' - \beta') \cotang(\gamma' - \alpha') &= \cos^2 A' \\ \cotang(\beta' - \gamma') \cotang(\alpha' - \beta') &= \cos^2 B' \\ \cotang(\gamma' - \alpha') \cotang(\beta' - \gamma') &= \cos^2 C' \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\alpha' - \beta') &= \sin(\gamma' - \alpha') \sin(\gamma' - \beta') \sin^2 C' \\ \cos(\beta' - \gamma') &= \sin(\alpha' - \beta') \sin(\alpha' - \gamma') \sin^2 A' \\ \cos(\gamma' - \alpha') &= \sin(\beta' - \gamma') \sin(\beta' - \alpha') \sin^2 B' \end{aligned} \right\}.$$