

Neunzehntes Capitel.

Practische Geometrie.

§. 125. (Errichtung eines gleichschenkligen Dreyeckes auf einer gegebenen Geraden.) Indem wir nun zu den Anwendungen der vorhergehenden geometrischen Sätze übergehen, wie sie in der Geodäsie (Feldmessung) Statt haben, wollen wir zuerst die Auflösungen einiger hieher gehörenden Probleme vorausschicken.

Um auf einer gegebenen Geraden AC (Fig. 4) ein gleichschenkliges Dreyeck zu errichten, beschreibe man mittelst des *Zirkels* (dessen Kenntniß und Gebrauch hier voransgesetzt wird) aus den beyden Endpuncten A und C mit einem willkürlichen Halbmesser (Öffnung des Zirkels) zwey Kreise, oder auch nur zwey kleine Kreisbogen, die sich irgendwo, in dem Puncte B , schneiden, und verbinde dann den Punct B mit A und C , so ist ABC das verlangte gleichschenklige Dreyeck.

Nimmt man die Öffnung des Zirkels gleich der gegebenen Linie AC , so erhält man ein gleichseitiges Dreyeck ABC .

Kleiner als $\frac{1}{2} AC$ aber kann man diese Öffnung nicht nehmen, weil sich sonst die Bogen nicht mehr schneiden würden, oder weil (§. 106, III.) in jedem Dreyecke die Summe zweyer Seiten größer seyn muß, als die dritte.

§. 126. (Einen gegebenen Winkel ABC (Fig. 36) halbiren.) Man nehme $AB = AC$, ziehe BC , und errichte über BC (nach §. 125.) ein gleichschenkliges Dreyeck BDC , so halbirt die Gerade DA den Winkel BAC .

Durch neues Halbiren der Winkel BAD und DAC wird man den gegebenen Winkel BAC in 4, und eben so in 8, 16, 32, . . . gleiche Theile theilen.

Die Gründe für die Richtigkeit bey diesem und bey dem nächstfolgenden Verfahren folgen unmittelbar aus dem Vorher-

gehenden auf eine Weise, die zu einfach ist, als dafs sie hier besonders angeführt werden sollte.

§. 127. (Eine gegebene Gerade BC (Fig. 36) halbiren.) Man beschreibe über ihr ein gleichschenkliges Dreyeck BCD (nach §. 125.), und halbire dann den Winkel D (nach §. 126) durch die Linie DE , so ist $BE = EC$. — Oder auch: man beschreibe über und unter der gegebenen Geraden BC ein gleichschenkliges Dreyeck BCD und BAC , und verbinde die Punkte A und D durch die Linie AD , welche letzte die BC in E halbirt.

§. 128. (Durch einen gegebenen Punkt C in, oder C' aufser einer Geraden MN (Fig. 37) auf dieser Geraden ein Loth errichten.) Man beschreibe aus C oder C' mit einem willkürlichen Halbmesser einen Kreisbogen, der die Gerade MN in zwey Punkte A und B schneidet, und errichte über AB ein gleichschenkligen Dreyeck ABD , so ist DC das gesuchte Loth.

§. 129. (An dem Endpunkte B (Fig. 38) einer Geraden AB , ohne sie zu verlängern, ein Loth errichten.) Man beschreibe aus irgend einem Punkte O mit dem Halbmesser OB einen Kreis so, dafs derselbe die Linie AB irgendwo, z. B. in a schneide, ziehe dann den Durchmesser aOD und verbinde D mit B , so ist BD das gesuchte Loth (§. 112, I.).

Einfacher wird man diefs auf blofs mechanische Weise durch das *Winkelmafs*, durch eine in Gestalt eines rechtwinkligen Dreyckes ausgeschnittene Platte von Holz oder Metall, wie ADC (Fig. 37) darstellen. Man prüft dasselbe, indem man die eine Seite AC desselben an eine mit Sorgfalt gezogene Gerade MN anlegt, und die Linie CD (mit einem Stifte) zieht; dann das Winkelmafs so umlegt, dafs die Seite AC desselben nach CB in dieselbe Gerade MN fällt, wo dann die andere Seite CD des Winkelmafses wieder genau auf die früher gezogene Gerade CD fallen mufs, wenn der Winkel ACD des Instruments in der That ein rechter ist.

§. 130. (Aus drey gegebenen Geraden ein Dreyeck construiren.) Ist BC (Fig. 23) eine dieser Geraden, so be-

schreibe man aus B mit der zweyten Geraden (die gleich AB ist) als Halbmesser einen Kreisbogen, und eben so mit der dritten Geraden (die gleich CA seyn soll) als Halbmesser aus C einen Kreisbogen; beyde Bogen schneiden sich in einem Puncte A , wo dann ABC das gesuchte Dreyeck ist.

Wegen §. 106, III. müssen von den drey Geraden zwey zusammen gröfser als die dritte seyn.

§. 131. (An einem gegebenen Punct A (Fig. 39) einer Linie MN einen Winkel von gegebener Gröfse (x) errichten.) Man ziehe in dem gegebenen Winkel $bac = x$ willkürlich die Gerade bc , wodurch man ein Dreyeck mit dem gegebenen Winkel x erhält. Dann nehme man auf der gegebenen Geraden MN die Linie $AC = ac$, und errichte über AC (nach §. 130.) mit den drey Seiten ac , ab und bc das Dreyeck ABC , so ist der Winkel $BAC = x$.

I. Einfacher erreicht man dasselbe, auf blofs mechanische Weise, durch den sogenannten *Transporteur*, oder durch einen von einer Metallplatte ausgeschnittenen Halbkreis, dessen Peripherie in die einzelnen Grade getheilt ist.

II. Genauer aber noch durch den *Mafsstab* (§. 132.) mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln (§. 104.). Soll man z. B. einen Winkel von $50^{\circ}36'$ verzeichnen, so zeigen diese Tafeln, dafs die Tangente dieses Winkels gleich 1.2174 ist. Man nehme daher auf der Geraden AM (Fig. 40), in deren Puncte A dieser Winkel errichtet werden soll, mittelst des Mafsstabes die Linie $AB = 1000$ (oder genauer gleich 10000), errichte in B das Loth BD , und nehme auf diesem Lothe die Länge $BC = 1217$ (oder genauer gleich 12174), und ziehe dann die Gerade AC , so ist BAC der verlangte Winkel von $50^{\circ}36'$.

§. 132. (Verjüngter Mafsstab und Vernier.) Wenn man die Seite AD (Fig. 41) eines Rechteckes in eine Anzahl, z. B. in drey gleiche Theile AB , BC , CD , die einzelne Zolle vorstellen sollen, und einen dieser Theile CD wieder z. B. in vier gleiche Theile theilt, während die andere Seite DD' des Rechteckes etwa in fünf gleiche Theile getheilt wird, und wenn man dann die Parallelen und die Diagonalen HD' , Ir , In , ...,

wie die Zeichnung zeigt, zieht, so kann man durch eine solche Vorrichtung den Zoll nicht nur in seinem vierten, sondern selbst in seinem zwanzigsten Theile noch genau messen. So hat man z. B. wenn man mit einem Zirkel die Weite AC nimmt, die Länge von zwey Zollen, aber die Weite

AI beträgt $2\frac{1}{4}$ Zolle,

AI » $2\frac{2}{4}$ »

AI » $2\frac{3}{4}$ »

und eben so ist auch die Weite

bm gleich $1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = 1\frac{16}{20}$ Zolle,

an » $2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = 2\frac{8}{20}$ »

cr » $0 + \frac{2}{4} + \frac{4}{20} = \frac{14}{20}$ » u. f.,

wie dieß alles für sich klar ist. Würde man die beyden Seiten CD und DD' in zehn gleiche Theile theilen, so würde man dadurch noch den hundertsten Theil eines Zolles angeben können u. f. Eine solche Vorrichtung wird ein verjüngter Maßstab genannt, da die Linien AB , BC , CD , . . . eben so gut Zolle, als Fusse oder selbst Meilen bedeuten können, wenn man z. B. größere Theile der Oberfläche der Erde durch eine Zeichnung von geringem Umfange im Kleinen darstellen will.

Sey eben so der Theil OX einer Geraden oder auch eines Kreisbogens AB (Fig. 42) in 10 gleiche Theile, z. B. in dem letzten Falle in 10 Minuten getheilt, so daß also jedes Intervall OI , II , III , . . . eine Minute betrage.

Neben, oder hier unter ihm, sey der concentrische Kreisbogen $o.10$ angebracht, der sich an dem festen Bogen $O.X$ vor- und rückwärts bewegen läßt. Dieser letzte Kreisbogen $o.10$ betrage aber in seiner Länge nur eben so viel, als 9 Intervalle des oberen Bogens, und sey dem ungeachtet ebenfalls in 10 gleiche Theile getheilt, $o1$, 12 , 23 , . . ., so daß also jeder Theil des unteren Bogens nur $\frac{9}{10}$ eines oberen Theiles, d. h. nur $\frac{9}{10}$ Minute oder 54 Secunden beträgt. Legt man daher die beyden Bogen so neben einander, daß die ersten Theilstriche Oo coincidiren oder eine einzige Gerade bilden, so wird die Distanz der beyden Theilstriche I und 1 der beyden Bogen gleich 6 Secunden; die Distanz der Striche II und 2 gleich 12 Secunden, die der III und 3 gleich 18 Secunden seyn u. s. f., so daß man daher mit einer

solchen Vorrichtung noch Winkel von 6 Secunden messen, oder daß man damit grössere Winkel bis auf 6 Secunden genau bestimmen wird, obschon der obere Kreis selbst nur in einzelne Minuten getheilt ist. — Diese sinnreiche Einrichtung wird *Ver-nier* genannt.

§. 133. (Durch einen gegebenen Punct M (Fig. 43) mit einer gegebenen Geraden ab eine Parallele ziehen.) Man ziehe durch den Punct M die Gerade MC willkürlich, so daß sie die ab in irgend einem Puncte C schneide, und mache dann (nach dem Vorhergehenden) den Winkel x gleich dem Winkel y , so ist AC die gesuchte Parallele.

§. 134. (Eine Gerade AD (Fig. 44) in eine gegebene Anzahl Theile theilen, die ein gegebenes Verhältniß unter sich haben.) Sey das gegebene Verhältniß das der Linien Ab , bc und cd . — Man setze die gegebene Gerade AD unter irgend einen nicht zu kleinen Winkel an einem der Endpunkte A der Geraden $Abcd$, verbinde die beyden anderen Endpunkte d und D , und ziehe durch b und durch c (nach §. 133.) die mit CD parallelen Geraden bB und cC , so sind B und C die gesuchten Theilungspuncte der Linie AD .

Will man die gegebene Gerade AD in eine gegebene Anzahl gleicher Theile theilen, so nehme man auf einer anderen Geraden AN die willkürlichen, aber gleichen Theile $Ab = bc = cd, \dots$, und verfare wie zuvor.

§. 135. (Zu drey gegebenen Linien a , b , c die vierte Proportionale finden.) Man trage auf dem Schenkel AN (Fig. 44) eines willkürlichen Winkels die erste Linie $Ab = a$, auf den zweyten Schenkel AD die zweyte Linie $AB = b$, und wieder auf den ersten Schenkel die dritte Linie $bc = c$, verbinde die Puncte b und B , und ziehe durch c mit bB die Parallelen cC , so ist BC die gesuchte vierte Proportionale (§. 37. und 107, III.).

§. 136. (Zwischen zwey Geraden AP und PB (Fig. 45) von gegebener Gröfse eine mittlere geometrische Proportionale (§. 38, I.) finden.) Man beschreibe

über der Summe AB der zwey gegebenen Geraden als Durchmesser, einen Halbkreis AMB , und errichte in ihm auf BA durch den Punkt P das Loth PM , so ist PM die gesuchte mittlere Proportionale zwischen AP und PB , oder es ist (§. 92, II. und §. 112, I.)

$$AP : PM = PM : PB.$$

§. 137. (Ein Quadrat verzeichnen, das der Summe von zwey gegebenen Quadraten gleich ist.) Sind a und b (Fig. 46) die Seiten der zwey gegebenen Quadrate, so stelle man sie in einem ihrer Endpuncte rechtwinklig zusammen, und verbinde dann ihre anderen Endpuncte durch eine Gerade x , so ist

$$x^2 = a^2 + b^2,$$

also auch x die Seite des gesuchten Quadrats.

Setzt man an den Endpunct der Linie x eine dritte Gerade c rechtwinklig an, so ist die Linie y , welche die Endpuncte der Geraden x und c verbindet, oder so ist

$$y^2 = x^2 + c^2, \text{ also auch}$$

$$y^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

oder y ist die Seite eines Quadrats, das der Summe von drey anderen Quadraten gleich ist.

Zieht man eben so d senkrecht auf y , so ist

$$z^2 = y^2 + d^2, \text{ also auch}$$

$$z^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

oder z ist die Seite eines Quadrats, das vier anderen Quadraten gleich ist u. f. Für $a=b=c=d=1$ hat man

$$x = \sqrt{2}, y = \sqrt{3}, z = \sqrt{4} = 2 \text{ u. s. w.}$$

Da die Flächen aller ähnlichen Figuren sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten verhalten (§. 124, III. V.), so wird man in dem Vorhergehenden statt den Linien $a, b, c, \dots$ auch die homologen Seiten von ähnlichen Figuren, z. B. die Seiten oder die Halbmesser von regelmäßigen Polygonen oder auch die Halbmesser verschiedener Kreise substituiren können, und dadurch Polygone oder Kreise erhalten, deren Fläche gleich ist der Summe der Flächen von 2, 3, 4, $\dots$ anderen ähnlichen Polygonen oder der Summe der Flächen von eben so viel Kreisen.

§. 138. (Theilung eines Parallelogramms in vier andere.) Wenn man in einem Parallelogramme $ABCD$ (Fig. 47) durch irgend einen Punkt der Diagonale AC zu den beyden Seiten des Parallelogrammes Parallelen zieht, so entstehen vier Parallelogramme, von welchen die beyden a und a' , durch welche die Diagonale nicht geht, unter sich gleich sind.

Denn da die Diagonale des Parallelogramms halbt, so ist

$$\text{das Dreyeck } ABC = ADC,$$

und eben so ist

$$m = m'$$

$$\text{und } n = n',$$

also ist auch

$$ABC - m - n = ADC - m' - n';$$

das heist, die Parallelogramme, durch welche die Diagonale AC nicht geht, sind gleich.

§. 139. (Ein gegebenes Dreyeck in ein Parallelogramm verwandeln, das mit jenem dieselbe Fläche hat.) Sey ABC (Fig. 48) das gegebene Dreyeck. Halbiere AB in E , und ziehe durch C die Parallele CF mit AB , und durch E und B zwey willkürliche, aber unter sich parallelen Linien ED und BF , so ist das Dreyeck ABC äquivalent (§. 83.) dem Parallelogramme $BDEF$, da beyde Figuren dieselbe Länge haben, und da die Basis des Parallelogramms die Hälfte der Basis des Dreyeckes ist.

§. 140. (Ein gegebenes Dreyeck in ein Parallelogramm verwandeln, das einen gegebenen Winkel A und eine gegebene Seite a hat.) Sey das gegebene Dreyeck ABC (Fig. 49). Man nehme bey der vorhergehenden Verzeichnung den Winkel $BED = A$, und verlängere die in E halbirte Linie AB , bis $BH = a$ ist, und ziehe durch H die mit DE oder BF parallele Gerade NHK , durch C die mit AB parallele CK , und durch K und B die Gerade KB , die der verlängerten DE in L begegnet, so entsteht ein Parallelogramm $DLKN$, das durch die Diagonale KL und durch die Gerade EH in vier andere Parallelogramme getheilt wird, von welchen (nach §. 138.)

die beyden EF und BN unter sich und mit dem gegebenen Drey-ecke ABC äquivalent sind, und von welchen das letzte BN den gegebenen Winkel $BMN = A$, und die gegebene Seite $BH = MN = a$ hat.

I. Demnach läßt sich auch jede Figur in ein Parallelogramm von einem gegebenen Winkel und einer gegebenen Seite verwandeln, da man jede Figur durch Diagonalen in Dreyecke theilen, und das erwähnte Verfahren für jedes einzelne Dreyeck der Figur ausführen kann. Die so erhaltenen einzelnen Parallelogramme werden dann, mit den gleichen Winkeln an einander gestellt, das gesuchte, der Figur äquivalente Parallelogramm geben.

II. Nimmt man den gegebenen Winkel A gleich einem rechten an, so läßt sich auch jede Figur in ein Rechteck von einer gegebenen Seite verwandeln.

III. Um endlich auch jedes Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 31) in ein Quadrat zu verwandeln, suche man zwischen der Basis $AB = b$ und der Höhe $DM = h$ des Parallelogramms (nach §. 136.) die mittlere geometrische Proportionale x , so ist x die Seite des gesuchten Quadrats, das dem gegebenen Parallelogramme äquivalent ist, da man hat:

$$b : x = x : h,$$

oder

$$bh = x^2.$$

§. 141. (Der Mefstisch.) Ehe wir nun zu den eigentlichen Problemen der Geodäsie übergehen, wird es angemessen seyn, die vorzüglichsten, besonders die für die Winkelmessungen auf dem Felde bestimmten Instrumente, ihrer Einrichtung und ihrem Gebrauche nach, hier kurz anzuführen.

Der *Mefstisch* (Fig. 50) besteht aus einer ebenen, mit Papier bespannten Tafel, die auf einem Fußgestelle in jeder Richtung horizontal befestigt werden kann. A ist die erwähnte Tafel; x, x', x'' sind die drey Füße des Gestells, die unten mit eisernen Spitzen versehen, und an ihrem oberen Ende an dem Cylinder B so befestigt sind, daß sie verschiedene Stellungen gegen einander einnehmen können, um dadurch die Tafel A auf jedem Fußboden in eine horizontale oder überhaupt in eine gegebene Lage zu bringen. Bey n ist eine sogenannte Schraube ohne Ende,

die man dem Getriebe B des Cylinders durch den Druck einer Stahlfeder nähert, damit die Schraube in das Gewinde eingreifen, und dadurch die Tafel A in ihrer Lage um die verticale Axe np oder Bp etwas gedreht werden kann. An dem unteren Theile des Cylinders B sind noch drey Arme o, o', o'' angebracht, durch deren jeden eine Schraube geht, deren oberstes Ende man, durch Drehung des Handgriffs p, p', p'' , der unteren Seite der Tafel A sanft nähern kann, um dadurch dieser Tafel eine dreyfache, sichere Unterlage zu geben.

Eine nähere Beschreibung und weitere Vorschriften über den Gebrauch dieses einfachen Instruments findet man, z. B. in *J. J. Mayer's* Unterricht zur pract. Geometrie, Vol. I. Cap. VII., oder in *Netto's* Lehrbuch des Aufnehmens mit dem Mefstisch. Berlin 1822.

Hier wird es genügen, zu bemerken, daß man auf diesem Tische um einen gegebenen (etwa durch eine in den Tisch eingesteckte Nadel bezeichneten) Punct ein Lineal dreht, um dasselbe nach den verschiedenen Puncten der Umgegend zu richten, wo man dann diese Richtungen des Lineals auf dem Tische mit einer Bleyfeder bezeichnet, und dadurch die Winkel erhält, welche diese Richtungen, in dem gegebenen Punct, unter sich bilden. Dieses Lineal ist an seinen beyden Endpuncten mit zwey kleinen, in ihrer Mitte durchbrochenen, Rechtecken (oder mit sogenannten *Dioptern*) versehen, um durch die Öffnungen derselben die Puncte der Umgegend genauer fixiren zu können. — Anwendungen dieses Instruments werden wir sogleich weiter unten kennen lernen.

§. 142. (Der Theodolit.) Dieses vorzüglichste Instrument der Geodäten besteht in seinen wesentlichsten Theilen aus einer horizontalen Scheibe AB (Fig. 51), und aus einem mit einem Fernrohre CDE verbundenen verticalen Kreise FG . Die horizontale Scheibe läßt sich um ihre fixe verticale Axe K , und der verticale, mit dem Fernrohre fest verbundene Kreis läßt sich um seine horizontale Axe CH drehen, so daß demnach, durch diese doppelte Drehung, das Fernrohr auf jeden Punct in und über dem Horizont gestellt werden kann.

Diese horizontale Axe CH ruht auf vier, in der Zeichnung

sichtbaren Stützen, die an ihrem unteren Ende mit dem horizontalen Kreise AB fest verbunden sind, und sich daher zugleich mit diesem Kreise bewegen. Das Fernrohr CDE aber ist in seiner Mitte D unter einem rechten Winkel so gebrochen, daß ein im Innern des Rohrs, bey D , aufgestellter Planspiegel, die von dem Gegenstande auf das Objectivglas E -fallenden Strahlen in der Richtung CD auf das Ocular C , und von da in das Auge des Beobachters bey C reflectirt. Durch diese Einrichtung sieht also das Auge alle Gegenstände, welche Höhe über dem Horizonte sie auch haben mögen, durch das Fernrohr immer in der horizontalen Richtung CH .

Das ganze Instrument ruht auf einem Dreyfufs, der an seinen Enden von drey starken Schrauben getragen wird, deren Mütter mit ihren conischen Enden in den Boden, auf welchen das Instrument gestellt wird, fest eingreifen. Zur Schonung dieser stählernen Endspitzen stellt man sie auf kleine, tellerförmige Unterlagen c, d, e , die an ihrer oberen Seite kleine Vertiefungen haben, in welche jene Spitzen genau passen.

An der unteren Seite dieses Dreyfusses ist eine dreyarmige Stahlfeder (von welcher man zwey Arme zu beyden Seiten von b sieht) durch drey Schrauben befestiget (von welchen zwey bey f und g sichtbar sind). Auf der Mitte dieser Stahlfeder ruht die eigentliche verticale Axe ba des Horizontalkreises AB , welche Axe von dem hohlen, an den Dreyfufs befestigten Cylinder K umgeben ist.

Beyde Kreise, der horizontale AB und der verticale FG , sind an ihrem Rande in Grade und Theile des Grades getheilt, und über diesen Theilungen ist ein fixer metallener Arm (die *Alhidade*), in der Richtung der Halbmesser dieser Kreise, befestiget, der an seinem äußersten Endpunkte, bey m und n , einen *Vernier* (§. 132.) trägt, um dadurch die Stellung der beyden Kreise genau angeben zu können. Die eine dieser Alhidaden m ist an dem erwähnten hohlen Cylinder K bey a befestiget, und die andere n wird durch ein an dem Horizontalkreise AB angebrachtes Gestelle pq getragen.

Um mit diesem Instrumente einen Gegenstand zu beobachten, dreht man den horizontalen Kreis in seinen Cylinder K , bis der Gegenstand in die Verticalebene des Höhenkreises FG kömmt,

und dreht dann diesen Höhenkreis sammt seinem Fernrohre, bis der Gegenstand in dem Felde des Fernrohrs, und zwar in dem Durchschnitte der beyden Kreuzfäden erscheint, die in dem Brennpuncte dieses Fernrohrs ausgespannt sind. In dieser Lage gibt die Alhidade m des Kreises AB die horizontale, und die Alhidade n des Kreises FG die verticale Richtung des Gegenstandes auf dem getheilten Rande der beyden Kreise an.

§. 143. (Rectification des Theodoliten.) Ehe man aber mit einem solchen Instrumente zu den Beobachtungen übergeht, muß es zuerst in allen seinen Theilen berichtigt oder *rectificirt* werden.

I. Zu diesem Zwecke muß zuerst der untere Kreis AB horizontal, oder was dasselbe ist, seine (auf die Ebene dieses Kreises schon von dem Mechaniker genau senkrecht gestellte) Axe ab muß vertical gestellt werden. Dieß geschieht mittelst einer Wasserwage (Libelle), die man auf die horizontale Drehungsaxe CH aufstellt, nachdem man diese Axe nahe in die Richtung von zwey der drey untersten, großen Fußschrauben des Instruments gebracht hat.

Man bringt nämlich, durch Drehung der einen dieser zwey Fußschrauben, die Luftblase der Libelle an einen bestimmten Theilpunct, z. B. an den Punct 10 der Glasröhre. Dann wendet man den Kreis AB nahe um 180 Grade, so daß die Axe CH wieder nahe mit denselben zwey Fußschrauben parallel wird. Ist die Blase, bey dieser zweyten Stellung des Instruments, nicht mehr bey dem früheren Theilpuncte 10, sondern z. B. bey 18, so bringt man sie, durch eine jener zwey Fußschrauben, auf das Mittel jener zwey Zahlen, also hier auf 14, da $\frac{1}{2}(10 + 18) = 14$ ist.

Dann dreht man den Kreis AB bloß um 90 Grade weiter, so daß die Axe CH jetzt durch die dritte jener Fußschrauben geht, und bringt auch hier, aber *bloß* mittelst der Bewegung dieser dritten Schraube, die Blase wieder auf den letzten Theilstrich 14.

Dadurch hat man das Instrument dahin gebracht, daß die Libelle in allen Lagen des Kreises AB , immer denselben Theilpunct 14 zeigt, zum Zeichen, daß dieser Kreis nun selbst horizontal ist.

Gewöhnlich wird man, wenn der anfängliche Fehler des Kreises AB zu groß ist, dieses Verfahren einige Mal wiederholen müssen, wodurch dann der Fehler bald sehr klein wird und endlich gänzlich verschwindet.

Will man dann auch, nach hergestellter Horizontalität dieses Kreises, die Libelle selbst noch genau rectificiren, so wird man nur, mittelst der eigenen Correctionsschraube dieser Libelle, die Luftblase derselben genau auf die Mitte der Glasröhre, oder auf den Theilstrich Null zurückführen, obschon dies nicht nothwendig ist, da es schon, wie man aus dem Vorhergehenden sieht, genügt, wenn die Luftblase, für den horizontalen Stand der Libelle, nicht zu weit von der Mitte der Glasröhre entfernt ist.

II. Um dann auch die Drehungsaxe CH des Verticalkreises FG horizontal (und sonach diesen Verticalkreis selbst genau senkrecht auf den Horizont) zu stellen, wird man (bey unveränderter Lage des unteren Kreises AB), dieselbe Libelle zuerst in einer, und dann auch in der entgegengesetzten Lage auf dieser Axe CH aufstellen, so daß *dasselbe* Ende der Libelle zuerst nach C , und dann nach H zu stehen kömmt. Steht die Blase, in beyden Lagen der Libelle, bey verschiedenen Theilstrichen, z. B. bey 12 und 18, so wird man sie wieder auf das Mittel $\frac{1}{2}(12 + 18) = 15$ bringen, und zwar (mittelst eigener dazu bestimmten Corrections-schrauben) durch Verlängerung oder Verkürzung der oben erwähnten vier Stützen, auf welchen die Endpunkte C und H dieser Axe ruhen. — Auch diese Operation wird man, wenn es nöthig ist, wiederholen, bis der noch übrige Fehler unmerklich wird.

III. Um endlich auch das Fadenkreuz im Brennpuncte des Fernrohrs gehörig zu stellen, richtet man dieses Kreuz auf einen weit entfernten und scharf begrenzten Gegenstand, und bewegt dabey das Ocular des Fernrohrs (in der für dasselbe bestimmten Röhre) so lange vor- oder rückwärts, bis der Gegenstand vollkommen deutlich erscheint.

Sieht man dann das Fadenkreuz undeutlich, so rückt man auch dieses Kreuz so lange vor oder zurück, bis dasselbe ganz scharf und schwarz erscheint, oder bis es den Punct des Gegenstandes, auf den man es gestellt hat, nicht mehr verläßt, wenn man auch das Auge vor dem Ocular hin und her bewegt.

Dadurch ist das Fadenkreuz in den Brennpunct des Fernrohrs gebracht.

Um dann den verticalen Faden desselben in der That genau vertical zu stellen, wird man diesen Faden, durch ein sanftes Bewegen des Fernrohrs in seiner Verticalebene, an einem scharf begrenzten Gegenstand, der ganzen Länge des Fadens nach, herabgehen lassen, und, wenn der Faden bey dieser Bewegung den Gegenstand verläßt, ihn um seinen Mittelpunct (durch eine eigens dazu bestimmte Schraube an dem Ocularende des Fernrohrs) drehen, bis dieser Fehler nicht mehr bemerkt wird. Dadurch ist nun auch der andere Faden horizontal geworden, da derselbe schon von dem Künstler auf den ersten senkrecht gestellt ist.

Um endlich noch denselben verticalen Faden des Kreuzes so zu stellen, daß die durch ihre und durch die Mitte des Objectivs *E* gehende Ebene, senkrecht auf der Drehungsaxe *CH* (oder, was dasselbe ist, parallel mit dem Verticalkreise *FG*) wird, bringe man diesen Faden auf einen wohlbegrenzten Gegenstand und lese die Alhidade *m* des Horizontalkreises *AB* ab. Nehmen wir an, man habe so den Winkel $36^{\circ}48'20''$ gefunden. Dann dreht man diesen Kreis und mit ihm das Fernrohr genau um 180 Grade, wozu eine zweyte Lesung des Kreises *AB* das Mittel gibt, und bringt, in dieser zweyten Lage des Instruments, das Fernrohr, durch Umdrehung desselben in seiner Ebene, wieder auf den Gegenstand zurück. Wenn in dieser zweyten Lage die Alhidade *m* nicht genau um 180 Grade mehr, als zuvor, also nicht $216^{\circ}48'20''$, sondern z. B. $216^{\circ}47'50''$, also $30''$ zu viel zeigt, so verbessert man die Stellung des Kreises um die Hälfte dieses Fehlers, oder man stellt ihn auf $216^{\circ}48'5''$, und bringt dann (durch eine eigene an dem Fernrohre bey *C* angebrachte kleine Schraube) den Faden genau auf den beobachteten Gegenstand zurück, so daß die eine Hälfte des Fehlers durch Verrückung des Kreises, und die andere durch Verrückung des Fadens verbessert wird.

IV. Noch muß bemerkt werden, daß der Künstler nur selten denjenigen Punct des Verticalkreises, welcher dem Horizonte oder dem Zenith entspricht, durch 0° oder 90° bezeichnet hat, sondern daß er diese Bestimmung des Anfangspuncts der Zählung dem Beobachter zu überlassen pflegt. Um diesen Punct zu finden,

wird man denselben Gegenstand zweymal, mit umgewendetem Instrumente, beobachten, so daß zuerst der Verticalkreis FG z. B. rechts und dann links von dem Beobachter steht, wenn der Gegenstand in beyden Beobachtungen an dem horizontalen Faden des Fernrohrs erscheint. Das Mittel aus den beyden Lesungen der Alhidade n des Verticalkreises wird den höchsten Punct dieses Kreises, oder denjenigen Punct geben, auf welchen der Kreis gestellt werden muß, damit die Axe des Fernrohrs genau vertical oder gegen das Zenith gerichtet ist, so daß daher auch der um 90 Grad vor oder nach ihm stehende Punct der gesuchte Horizontalpunct des Kreises FG seyn wird, von welchem anzufragen man alle beobachteten Höhen der Gegenstände zu zählen hat.

§. 144. (Höhen- und Azimutalkreis.) Ähnlich in Einrichtung und Gebrauch ist das in Fig. 52 abgebildete, mehr zu astronomischen Beobachtungen bestimmte, vorzüglich in England gebräuchliche Instrument. Man sieht auch hier den horizontalen Kreis AB (der auch Azimutalkreis genannt wird), und den verticalen Kreis FG , das Fernrohr CE , die beyde Kreise verbindende verticale Säule K , und das dreyfüßige Gestelle, auf welchem das ganze Instrument ruht. Der Verticalkreis hat zwey einander gegenüberstehende Vereine n und n , und eine Druckschraube D , durch welche er an die Säule K so befestiget werden kann, daß ihm mittelst der Micrometerschraube L noch eine kleine Bewegung in seiner Verticalebene verstattet ist, um den schon nahe auf das Object gestellten horizontalen Faden des Fernrohrs ganz genau auf dasselbe zu bringen. Eben so hat der Azimutalkreis drey Verniere bey m , m und m , und auch bey d und l seine Druck- und Micrometerschraube, mittelst welcher der Säule K sammt dem an ihr befestigten Verticalkreis noch etwas im Horizonte verschoben werden kann, während sich, wenn die Druckschraube d offen oder gelöst ist, Säule und Kreis im Horizonte frey drehen läßt. Eine ähnliche Schraube sieht man in N , durch welche der an das Fußgestelle befestigte Azimutalkreis selbst, und mit ihm demnach auch die Säule K und der Verticalkreis FG , noch einige Grade in horizontaler Richtung verstellt werden kann. Bey M sieht man das eine Ende der

Libelle, die an der Säule K befestiget ist, und die, wie bey dem Theodoliten, zur horizontalen Einstellung des Azimutalkreises AB dient, wodurch zugleich die darauf senkrecht gebaute Axe K und der mit dieser Axe parallel gestellte Kreis FG eine verticale Lage erhält. Bey B , F und G endlich sieht man die Loupen (Miscope), die sich über die ganze Peripherie ihrer Kreise bewegen lassen, und zur Ablesung der feinen Striche der Eintheilung dienen, welche an dem Rande der beyden Kreise angebracht ist. — Die Rectification dieses Instruments ist von der für den Theodoliten angegebenen nicht wesentlich verschieden *).

§. 145. (Höhenmessungen.) Gehen wir nun zu den mit diesen Instrumenten zu machenden Beobachtungen über, und beschäftigen wir uns unter diesen zuerst mit den Höhenmessungen.

Sey AB (Fig. 53) die gegebene Höhe, z. B. die eines Thurms, und ACD eine horizontale, auf AB senkrechte Gerade in dem Grunde, auf welchem der Thurm steht. Wenn man von dem Punkte C dieser Geraden zu dem Fußpunkt A des Thurms kommen kann, so messe man (mit der Meßkette oder der Meßstange) die Linie CA und den Winkel $ACB = C$. Verzeichnet man dann, mittelst des verjüngten Maßstabes (§. 132.) eine kleinere Gerade ac , die eben so viel Fußse vorstellt, als die auf dem Felde gemessene Linie CA in der That Fußse hat, die also z. B. n Theile des Maßstabes enthält, wenn die Länge CA gleich n Fuß gefunden worden ist, und errichtet man an dem Endpunkte a derselben ein Loth (nach §. 129.), und an dem anderen Endpunkte c derselben einen Winkel acb , gleich dem beobachteten Winkel C (nach §. 131.), so wird die Figur abc der Zeichnung der Figur ABC auf dem Felde ähnlich seyn, und man wird daher nur die kleine Linie ab mit demselben Maßstabe messen, wo dann, wenn dieselbe m Theile des Maßstabes hat, auch sofort die gesuchte Höhe AB des Thurms auch m Fuß betragen wird.

*) Der oben angezeigte Theodolit, wie er in dem k. k. polytechnischen Institute von Wien verfertigt wird, hat einen horizontalen Kreis von $7\frac{8}{10}$ Paris. Zoll, und einen verticalen von $5\frac{3}{10}$ Zoll im Durchmesser. Bey dem englischen Instrumente haben beyde Kreise einen Durchmesser von $3\frac{2}{10}$ Zoll, und beyde Instrumente werden in dem k. k. polytechnischen Institute von Wien, jenes für 280 fl. und dieses für 100 fl. österreich. Conv. Mze. verfertigt.

I. Wir wollen künftig, der Kürze wegen, die Linien, wie ab und ac , und die Winkel, wie acb , in der Zeichnung oder auf dem Mefstische, welche auf dem Felde den Linien AB und AC , und dem Winkel ACB entsprechen, die diesen letzten Größen *gemäße* Linien und Winkel nennen. — Demnach wird man nur auf dem Papiere die Linie ac der AC , und den Winkel acb dem ABC gemäß machen, um sofort auch die der gesuchten Höhe AB gemäße Linie ab zu erhalten.

II. Genauer aber, als durch die sorgfältigste Zeichnung dieser Art, wird man diese Höhe AB durch *Rechnung* finden. Da man nämlich bereits die Linie AC und den Winkel ACB durch unmittelbare Beobachtung kennt, so hat man auch die gesuchte Höhe AB durch die Gleichung

$$AB = AC \cdot \text{Tang } C.$$

Ist z. B. $AC = 1000$ Fufs und $C = 24^\circ 56' 50''$, so findet man $AB = 465.06875$ Fufs.

Ganz eben so kann man auch verfahren, wenn man die Länge AC des Schattens, welchen der von der Sonne beschienene Thurm auf den Boden wirft, und überdies den Höhenwinkel $ACB = C$ der Sonne über dem Horizonte kennt. So weiß man z. B. dafs die Höhe der Sonne am Mittag des 10. May zu Wien gleich $C = 59^\circ 24' 30''$ ist. Hat man daher die Länge des mittägigen Schattens eines Thurms $AC = 540$ Fufs gefunden, so ist die Höhe desselben

$$AB = AC \cdot \text{Tang } C = 913.3934 \text{ Fufs.}$$

III. Wenn man aber von keinem Punkte der horizontalen Ebene, auf welcher der Thurm steht, zu demselben kommen kann, weil z. B. ein Fluß den Zutritt hindert, so wird man in dieser Ebene, nach irgend einer durch den Punkt A gehenden Richtung, eine *Standlinie* (Basis) CD messen, und von den beyden Endpunkten C und D dieser Basis die Höhenwinkel $ACB = C$ und $ADB = D$ beobachten.

Dann könnte man wieder mittelst des verjüngten Maßstabes das dem Dreyecke BCD *gemäße* Dreyeck bcd verzeichnen, und von b auf die verlängerte Linie dc das Loth ba (nach §. 128.) herablassen, wo dann wieder dieses Loth, auf dem verjüngten Maßstabe genommen, die der gesuchten Höhe BA des Thurms gemäße Linie seyn wird.

Auch hier aber, wie überall, wird die Rechnung eine viel gröfsere Schärfe gewähren. Man hat nämlich (§. 109, III. Fall)

$$BC = CD \cdot \frac{\sin D}{\sin(C-D)} \text{ und } AB = BC \cdot \sin C,$$

so dafs man daher die gesuchte Höhe AB unmittelbar durch die Gleichung erhält:

$$AB = CD \cdot \frac{\sin C \sin D}{\sin(C-D)}.$$

Ex. Ist $CD = 967$ Fufs, $ACB = C = 16^\circ 43' 5''$ und $ADB = D = 7^\circ 5' 13''$, so findet man

$$AB = 205.131 \text{ Fufs.}$$

IV. Läfst sich endlich die Basis nicht in einer durch den Fufspunct A des Thurms gehenden Richtung nehmen, wie in III. vorausgesetzt worden ist, so messe man auf dem den Thurm umgebenden horizontalen Boden in irgend einer anderen Richtung eine Basis CD (Fig. 54), und nehme von ihren beyden Endpuncten C und D , mit dem Theodoliten, die Winkel $ACD = C$ und $ADC = D$, so wie auch in einem dieser Endpuncte, z. B. in C , den Höhenwinkel $ACB = H$.

Diefs vorausgesetzt, hat man wieder

$$AC = CD \cdot \frac{\sin D}{\sin(C+D)} \text{ und } AB = AC \cdot \text{Tang } H,$$

so dafs man daher für die gesuchte Höhe des Thurms erhält:

$$AB = CD \cdot \frac{\text{Tang } H \cdot \sin D}{\sin(C+D)}.$$

Ex. Ist $CD = 650$ Fufs, $C = 48^\circ 36'$, $D = 52^\circ 40'$ und $H = 36^\circ 20'$, so findet man

$$AB = 387.4688 \text{ Fufs.}$$

§. 146. (Eine Distanz auf dem Felde messen, zu deren zwey Endpuncten man wohl gelangen, die man aber dem ungeachtet nicht unmittelbar nach ihrer ganzen Länge mit der Meßkette ausmessen kann.) Sey AB (Fig. 55) diese Distanz, zwischen deren zwey Endpuncten A und B z. B. ein Sumpf liegt, der die unmittelbare Messung der Linie AB unmöglich macht. Wenn es aber einen Punct C auf dem Felde gibt, von welchem aus man zu den beyden End-

puncten A und B gelangen kann, so messe man, mittelst der Meßkette, diese beyden Distanzen CA und CB .

Mit dem Meßtische. Man stelle den Meßtisch (§. 141.) über dem Puncte C auf. Sey c der Punct des Meßtisches, der genau über dem Puncte C des Bodens steht. Man lege das oben (§. 141.) erwähnte Diopterlineal an den Punct c , und drehe es um diesen Punct in die Richtungen cA und cB , bezeichne auf dem Meßtische diese Richtungen durch die Linien ca und $c\beta$, und nehme dann auf den letzten Linien (mittelst des verjüngten Maßstabes) die Längen ca und cb gemäß den bekannten Distanzen CA und CB , so ist ab , auf den verjüngten Maßstab genommen, die der AB gemäße Linie, oder ab gibt, auf dem Maßstabe, die gesuchte Länge AB .

Die Figur abc ist nämlich, durch das angezeigte Verfahren, der auf dem Felde gegebenen Figur ABC ähnlich geworden, also ist auch (§. 107.)

$$ca : ab = CA : AB,$$

wodurch die unbekannte Distanz AB gefunden wird.

Mit dem Theodoliten. Man messe, wie zuvor, die beyden Distanzen $BC = \alpha$ und $AC = \beta$, und mit dem Theodoliten den Winkel $ACB = C$.

Daraus könnte man wieder sofort, wie zuvor, ein dem Dreyecke ABC gemäßes Dreyeck abc verzeichnen, und aus dem letzten, mit dem verjüngten Maßstabe, den wahren Werth der Seite ab oder AB finden.

Da es aber nicht zweckmäßig wäre, so unvollkommene Methoden zu gebrauchen, während der Theodolit die Winkel mit so großer Schärfe gibt, so wird es angemessener und genauer seyn, die gesuchte Distanz AB aus den drey Größen α , β und C durch Rechnung aus der Gleichung zu bestimmen:

$$AB^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos C.$$

• Um diesen Ausdruck zur Rechnung mit Logarithmen bequemer zu machen, nehme man einen Hülfswinkel φ so an, daß man hat

$$\text{Tang } \varphi = \frac{2 \sin \frac{1}{2} C}{\alpha - \beta} \cdot \sqrt{\alpha\beta},$$

so hat man

$$AB = \frac{\alpha - \beta}{\cos \varphi}.$$

Ex. Ist $BC = \alpha = 189.00$ Fufs, $AC = \beta = 114.75$ Fufs und $C = 107^\circ 48'$, so findet man

$$\varphi = 72^\circ 40' \text{ und}$$

$$AB = 249.29 \text{ Fufs.}$$

§. 147. (Eine Distanz finden, zu deren einem Endpuncte man nur gelangen kann.) Nehmen wir nun an, daß man von dem Puncte C (Fig. 56) wohl nach dem einen Endpuncte A der zu messenden Distanz AB , aber nicht zu dem anderen Endpuncte B gelangen kann.

Mit dem Mefstische. Man messe daher die Distanz CA , stelle dann den Mefstisch über C , so daß der Punct c des Mefstisches genau über dem Punct C des Bodens stehe, und ziehe auf diesem Tische die Linie ca (mittelst des verjüngten Maßstabes), der CA gemäß, und auch die unbestimmte Gerade $c\beta$ nach dem Puncte B . Dann stelle man den Tisch über den Punct A so, daß der bereits auf dem Tische verzeichnete Punct a genau über A , und die Linie ac nach C hin gerichtet sey. Man lege das Diopterlineal an den Punct a , richte es nach B und ziehe die unbegrenzte Gerade ab , welche die (schon früher gezogene) $c\beta$ irgendwo in b schneiden wird. Dadurch ist die Linie ab der gesuchten Distanz AB gemäß gemacht, und die wahre Länge derselben kann daher, mittelst des verjüngten Maßstabes, gefunden werden. — Es ist nämlich auch hier die Figur abc auf dem Tische der Figur ABC auf dem Felde ähnlich gemacht worden.

Mit dem Theodoliten. Nachdem man die Distanz $CA = \beta$ mit der Meßkette bestimmt, und an den Endpuncten C und A dieser Distanz die Winkel $ACB = C$ und $CAB = A$ mit dem Theodoliten gemessen hat, so erhält man sofort die gesuchte Distanz AB durch die Gleichung

$$AB = \beta \cdot \frac{\sin C}{\sin (A + C)}.$$

Ex. Ist $\beta = 738$ Fufs, $A = 31^\circ 5' 0''$ und $C = 24^\circ 16' 13''$, so findet man

$$AB = 368.734 \text{ Fufs.}$$

§. 148. (Eine Distanz finden, zu deren keinem Endpuncte man gelangen kann.) Sey AB (Fig. 57) diese Distanz. Man messe in der Umgegend irgend eine Basis CD ,

stelle den Meßtisch an den einen Endpunct C dieser Basis, bemerke auf ihm den Punct c über C , und ziehe auf dem Tische die Länge cd in der Richtung nach D der gefundenen Basis CD gemäßs. Eben so ziehe man nach den Puncten A und B die in ihrer Länge unbestimmten Linien ca und $c\beta$.

Dann stelle man den Tisch auf den anderen Endpunct D der Basis, so daß der bereits verzeichnete Punct d genau über D , und daß die ebenfalls schon gezogene Linie dc nach C hin gerichtet sey. Endlich ziehe man noch von c nach A und B hin unbestimmte gerade Linien, welche die bereits verzeichneten Linien ca in a und $c\beta$ in b schneiden, so ist ab die der gesuchten Distanz AB gemäße Gerade, weil auch hier die beyden Figuren $abcd$ und $ABCD$ einander ähnlich sind.

Mit dem Theodoliten. Man messe, wie zuvor, mit der Meßkette die Basis $CD = \alpha$, und beobachte, mit dem Theodoliten, an den beyden Endpuncten dieser Basis die Winkel

$$ACD = C, \quad BDC = D,$$

$$BCD = c, \quad ADC = d.$$

Dies vorausgesetzt, kennt man in dem Dreyecke ACD die Seite α , und die zwey ihr anliegenden Winkel C und d , so daß man daher (nach §. 109, Fall III.) auch die Seiten AC und AD finden kann. — Eben so kennt man in dem Dreyecke BCD die Seite α , und ihre anliegenden Winkel D und c , woraus man also, wie zuvor, auch die Seiten BC und BD findet. Endlich kennt man in dem Dreyecke ABC , durch die vorhergehende Rechnung, die Seiten AC und BC , nebst ihrem eingeschlossenen Winkel $ACB = C - c$ [oder auch in dem Dreyecke ABD die Seiten AD und BD nebst ihrem eingeschlossenen Winkel $ADB = D - d$], so daß man daher (nach §. 109, II.) auch die gesuchte Distanz AB durch Rechnung bestimmen kann.

Man hat nämlich, wenn man der Kürze wegen

$$AC = x \quad \text{und} \quad BC = y \quad \text{setzt:}$$

$$x = \frac{\alpha \sin d}{\sin (C + d)}, \quad y = \frac{\alpha \sin D}{\sin (D + c)},$$

$$\text{und } AB = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos (C - c)}.$$

Ex. Ist $\alpha = 750$ Fufs und

$$C = 110^\circ 0', \quad D = 117^\circ 30',$$

$$c = 37^\circ 40', \quad d = 38^\circ 20',$$

so erhält man

$$x = 886.090, \quad y = 1584.023,$$

und daher

$$AB = 1562.807 \text{ Fufs.}$$

§. 149. (Berechnung eines Polygons.) Jedes Polygon läßt sich durch Diagonalen in Dreyecke zerlegen. Sind dann die nöthigen Winkel und wenigstens eine Seite dieser Dreyecke gegeben, so lassen sich dieselben nach den Vorschriften des §. 109. berechnen, wodurch demnach auch das Polygon vollständig bestimmt seyn wird.

Um dieß sogleich durch ein Beyspiel deutlich zu machen, sey in dem Sechsecke $AA'A''A'''A^{iv}A^v$ (Fig. 58) bloß die Seite $AA' = 450$, und überdieß die folgenden Winkel durch Messung gefunden worden:

In dem Dreyecke

$$AA'A'' \dots A = 86^\circ 10' 20'' \dots A' = 54^\circ 5' 30'',$$

$$AA'A'' \dots A' = 70 \quad 6 \quad 10 \dots A'' = 67 \quad 15 \quad 0,$$

$$A''A''A^{iv} \dots A'' = 75 \quad 20 \quad 10 \dots A''' = 63 \quad 24 \quad 40,$$

$$A''A^{iv}A^v \dots A''' = 58 \quad 36 \quad 50 \dots A^{iv} = 72 \quad 45 \quad 10.$$

Dieß vorausgesetzt, soll nun das Sechseck selbst in allen seinen Theilen durch Rechnung bestimmt werden. Man kann sich dazu wieder der Ausdrücke des §. 109, III. Fall bedienen, wodurch man erhalten wird:

Dreyeck $AA'A''$

$$A'' = 39^\circ 44' 10'' \dots AA'' = 570.166$$

$$AA' = 702.377,$$

Dreyeck $A'A''A'''$

$$A''' = 42 \quad 38 \quad 50 \dots A'A''' = 956.088$$

$$A''A''' = 974.856,$$

Dreyeck $A'A'''A^{iv}$

$$A^{iv} = 41 \quad 15 \quad 10 \dots A'A^{iv} = 1322.081$$

$$A'''A^{iv} = 1430.282,$$

Dreyeck $A'''A^{iv}A^v$

$$A^v = 48 \quad 38 \quad 0 \dots A''A^v = 1820.089$$

$$A^{iv}A^v = 1626.924.$$

I. Das hier angezeigte Verfahren gibt zugleich das beste Mittel, eine Gegend, eine Provinz, selbst ein ganzes Land in

einer Zeichnung, oder auf einer sogenannten *Karte* darzustellen; ein Mittel, das dem gewöhnlichen Verfahren mit dem Mefstische weit vorzuziehen ist. Hat man nämlich in der zu vermessenden Gegend irgend eine einzige Gerade AA' (die *Basis* des Dreyecknetzes) gemessen, und dann die Winkel dieser Dreyecke durch den Theodoliten bestimmt, und daraus, wie oben, die Seiten dieser Dreyecke berechnet, so wird man, in der zu entwerfenden Zeichnung, die Gerade AA' , mittelst des Maßstabes, durch eine dieser Geraden *gemäße* Linie AA' darstellen, und aus ihren Endpunkten A und A' , als aus Mittelpunkten, mit den jenen gefundenen Seiten AA'' und $A'A''$ gemäßen Halbmessern zwey Kreisbogen beschreiben, die sich in einem Punkte A'' schneiden, der, mit A und A' verbunden, das gesuchte Dreyeck $AA'A''$ der Zeichnung gibt. Beschreibt man dann eben so aus A' und A'' mit den Halbmessern $A'A'''$ und $A''A'''$ zwey Kreisbogen, so werden diese sich in einem Punkte A''' schneiden, der mit A' und A'' verbunden, das zweyte Dreyeck der Zeichnung gibt. Eben so wird man das dritte Dreyeck $A'A'''A''$ aus den beyden Punkten A'' und A''' und so fort alle übrigen Dreyecke verzeichnen und in die Karte legen können, wodurch man endlich ein vollständiges und getreues Bild der ganzen Gegend erhält.

II. Dadurch ist zugleich der *Umfang* des Sechseckes gegeben, der nämlich gleich

$$AA' + AA'' + A'A'' + A''A''' + A'A''' + AA',$$

oder gleich

$$6745.348 \text{ Toisen}$$

ist, wenn die oben gegebene Seite AA' , wie zuvor, 450 Toisen beträgt.

Um die *Oberfläche* des Sechseckes zu erhalten, wird man die Flächen der einzelnen Dreyecke suchen. Da in dem ersten Dreyecke $AA'A''$ das Loth von A' auf AA' , oder da die *Höhe* dieses Dreyeckes über der Basis AA' gleich

$$AA'' \sin A \text{ oder auch gleich } AA' \sin A$$

ist, so hat man für die Fläche dieses Dreyeckes (§. 118, V.)

$$F = \frac{1}{2} AA' \cdot AA'' \sin A = \frac{1}{2} AA' \cdot AA' \sin A.$$

Eben so erhält man für die Fläche des zweyten Dreyeckes $AA'A'''$

$$F' = \frac{1}{2} A' A'' \cdot A' A''' \sin A' = \frac{1}{2} A' A'' \cdot A' A''' \sin A''$$

u. s. f. für alle übrigen. Die Summe aller dieser Flächen oder die gesuchte Fläche des Sechsecks wird gleich

$$2178536 \text{ Quadrattoisen}$$

gefunden werden.

III. Zieht man noch durch den ersten Punct A des Sechsecks eine Gerade $AB'B'' \dots$, die mit der ersten Seite AA' den Winkel $A'AB' = 50^\circ 48' 20''$ bildet, und läßt man dann von den Scheiteln der Dreyecke auf diese Gerade AB' die Lothe $A'B'$, $A'B''$, $A''B''$, $\dots$ herab, so lassen sich diese Lothe sowohl, als auch die Orte B' , B'' , B''' , $\dots$ ihrer Fußpunkte in der Geraden AB' aus dem Vorhergehenden durch Rechnung bestimmen.

Zuerst sind nämlich die Winkel ω' , ω'' , ω''' , $\dots$, unter welchen die Gerade AB' von den Seiten AA' , $A'A''$, $A''A'''$ und $A'''A''$ geschnitten wird, aus den gegebenen Winkeln dieser Dreyecke, und aus dem Winkel $A'AB' = \alpha = 50^\circ 48' 20''$ leicht zu finden. Man erhält für das aufgestellte Beyspiel

$$\omega' = 75^\circ 6' 10'',$$

$$\omega'' = 37^\circ 38' 50'',$$

$$\omega''' = 78^\circ 56' 30'',$$

$$\omega^{iv} = 28^\circ 18' 20''.$$

Sind so diese Größen bekannt, so findet man die übrigen AB' , AB'' , $B'\omega'$, $\dots$ durch folgende Gleichungen:

$$AB' = AA' \cos \alpha,$$

$$B'\omega' = A'\omega' \cos \omega',$$

$$A'B' = AA' \sin \alpha,$$

$$A'B'' = A'\omega' \sin \omega',$$

$$B'\omega' = AB' \cotang \omega',$$

$$B''\omega'' = A'B'' \cotang \omega'',$$

$$A'\omega' = AB' \operatorname{Cosec} \omega',$$

$$A''\omega'' = A'B'' \operatorname{Cosec} \omega'',$$

$$A'\omega' = AA' - A'\omega',$$

$$A''\omega'' = A'A'' - A''\omega'',$$

$$B''\omega'' = A''\omega'' \cos \omega'',$$

$$A''B'' = A''\omega'' \sin \omega'',$$

$$B''\omega'' = A''B'' \cotang \omega'',$$

$$A''\omega'' = A''B'' \operatorname{Cosec} \omega'',$$

$$A''' \omega''' = A''A''' - A''\omega''' \text{ u. f.},$$

wo das Gesetz des Fortgangs dieser Ausdrücke auch für ein Polygon von mehr als sechs Seiten für sich klar ist.

So findet man in unserem Beispiele

$$AB' = 284.379,$$

$$A'B' = 348.753,$$

$$B'\omega = 92.778 \text{ u. f.}$$

Allein das folgende Verfahren wird auf einem noch einfacheren Wege zu demselben Zwecke führen.

§. 150. (Bestimmung der Lage der Hauptpunkte eines Polygons.) Wenn in einem Polygon $AA'A''A'''\dots$ (Fig. 59) bloß aus einer Seite AA' und aus den Winkeln, welche diese Seiten AA' , $A'A''$, $A''A'''$, $\dots$ unter sich bilden, nach dem, was in dem vorhergehenden §. 119. gesagt worden ist, auch die übrigen Seiten durch Rechnung gefunden worden sind, so ist es oft noch angemessener und selbst zuweilen nothwendig, die Lage der Scheitelpunkte A' , A'' , A''' , $\dots$ dieser Winkel zu kennen, wie dieß z. B. bey der Aufnahme der Gegend eines Landes der Fall ist, wo A' , A'' , A''' , $\dots$ ausgezeichnete Punkte, Berg- oder Thurmspitzen u. f. dieser Gegend bezeichnen, deren Oberfläche hier als eine Ebene angenommen wird.

Zu diesem Zwecke wird man in dem ersten Punkte A nach irgend einem mittleren Punkte C visiren und den Winkel $CAA' = \alpha$ beobachten, welchen diese Distanz CA mit der ersten, unmittelbar gemessenen Seite AA' des Polygons bildet. Gewöhnlich wählt man für diese Linie AC die *Mittagslinie* (oder den Meridian) des ersten Punktes A , wo dann der Winkel $CAA' = \alpha$ das *Azimut* des zweyten Punktes A' genannt wird.

Läßt man dann von den Punkten A' , A'' , A''' , $\dots$ die Lothe $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$, $\dots$ auf die Mittagslinie AC herab, so wird man die Lage der Punkte A' , A'' , A''' , $\dots$ gegen die bekannte Mittagslinie kennen, wenn man für jeden dieser Punkte die erwähnten Lothe $A'B'$, $A''B''$, $\dots$ und die Distanz der Fußpunkte B' , B'' , $\dots$ dieser Lothe in der Mittagslinie AC von dem ersten Punkt A kennt.

Man nennt diese Distanzen AB' , AB'' , AB''' , $\dots$ die *Ab-scissen*, und jene Lothe $B'A'$, $B''A''$, $B'''A'''$, $\dots$ die *Ordinaten* der gesuchten Punkte A' , A'' , A''' , $\dots$, und bezeichnet gewöhnlich jene durch x , und diese durch y . Beyde zusammen werden auch die *Coordinaten* dieser Punkte genannt.

Wir wollen nun sehen, wie man diese Coordinaten der Punkte $A, A', A'', \dots$ eines Polygons finden kann, wenn die Seiten desselben, und die Winkel, welche diese Seiten unter sich bilden (nach §. 149.) bekannt sind.

Nennen wir, wie zuvor, α den Winkel CAA der ersten Seite AA des Polygons mit der Mittagslinie AC des ersten Puncts A . Sey eben so

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle A'AA'' \text{ der Winkel der Seiten } AA' \text{ und } AA'', \\ \alpha' &= \angle A''A'A''' \text{ » » » » } A'A'' \text{ » } A'A''', \\ \alpha'' &= \angle A'''A''A^{iv} \text{ » » » » } A''A''' \text{ » } A''A^{iv} \text{ u. f.,} \end{aligned}$$

so sieht man sofort, daß der Winkel der Mittagslinie

mit der verlängerten zweyten Seite $A'A' = \alpha + \alpha' - 180^\circ$,

» » » dritten » $A''A'' = \alpha + \alpha' + \alpha'' - 2.180$,

» » » vierten » $A^{iv}A''' = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' - 3.180$

ist u. s. f., und daß man daher die folgenden einfachen Gleichungen hat:

$$\begin{aligned} AB' &= AA \cos \alpha, \\ B'B'' &= AA' \cos (\alpha + \alpha' - 180), \\ B''B''' &= A'A'' \cos (\alpha + \alpha' + \alpha'' - 2.180) \text{ etc.} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A'B &= AA \sin \alpha, \\ A'B' &= A'A' \sin (\alpha + \alpha' - 180), \\ A''B'' &= A''A'' \sin (\alpha + \alpha' + \alpha'' - 2.180) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Nennt man daher $x = AB^{(n)}$ die Abscisse, und $y = A^{(n)}B^{(n)}$ die Ordinate irgend eines Punctes $A^{(n)}$ des Polygons, so hat man für die beyden Coordinaten dieses Punctes die Ausdrücke

$$\begin{aligned} x &= AA \cos \alpha, \\ &+ A'A' \cos (\alpha + \alpha' - 180), \\ &+ A''A'' \cos (\alpha + \alpha' + \alpha'' - 2.180), \\ &+ A'''A^{iv} \cos (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' - 3.180) \text{ etc.} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y &= AA \sin \alpha, \\ &+ A'A' \sin (\alpha + \alpha' - 180), \\ &+ A''A'' \sin (\alpha + \alpha' + \alpha'' - 2.180), \\ &+ A'''A^{iv} \sin (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' - 3.180) \text{ etc.;} \end{aligned}$$

und man sieht, daß man durch diese beyden Gleichungen nicht bloß die Coordinaten des genannten Punctes $A^{(n)}$, sondern auch

zugleich die aller vorhergehenden Punkte $A', A'', A''', \dots$ bis $A^{(n-1)}$ erhält.

Bemerken wir noch, daß man in der Zeichnung der Fig. 59 alle Punkte $A', A'', A''', \dots$ auf derselben Seite der Mittagslinie AC , der größeren Einfachheit wegen, angenommen hat, und daß man daher, wenn einer dieser Punkte auf die andere, dem Azimute α entgegengesetzte Seite von AC fällt, auch den von AC abgewendeten Winkel der beyden Seiten, oder daß man in diesem Falle statt dem Winkel $\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots$ die Ergänzung desselben zu 360° nehmen muß.

Um das Vorhergehende auf das in §. 149. gegebene Beispiel anzuwenden, hat man für das Polygon der Fig. 59 die Winkel

$$\begin{aligned}\alpha &= CAA' = 50^\circ 48' 20'', \\ \alpha' &= A'A'' = 54 \quad 530, \\ \alpha'' &= 360 - A'A''A''' = 292 \quad 45 \quad 0, \\ \alpha''' &= A''A'''A^{IV} = 63 \quad 24 \quad 40, \\ \alpha^{IV} &= 360 - A'''A^{IV}A^V = 287 \quad 14 \quad 50;\end{aligned}$$

so daß demnach ist:

$$\begin{aligned}\alpha + \alpha' - 180 &= 284^\circ 53' 50'', \\ \alpha + \alpha' + \alpha'' - 2.180 &= 37 \quad 38 \quad 50, \\ \alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' - 3.180 &= 281 \quad 330, \\ \alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \alpha^{IV} - 4.180 &= 28 \quad 18 \quad 20.\end{aligned}$$

Da man aber die Seite $AA', A'A'', A''A''', \dots$ des Polygons bereits aus §. 149. kennt, so hat man sofort für die gesuchten Coordinaten der Punkte $A', A'', A''', \dots$, die wir in derselben Ordnung durch $\xi, \xi', \xi'', \dots$ und durch $v, v', v'', \dots$ bezeichnen wollen, die folgenden Werthe:

$$\begin{array}{rcll}\xi &= AB' &= 284.379 & v = AB' = 348 \quad 753 \\ &B'B' &= 180.572 & \quad \quad \quad - 678.769 \\ \xi' &= AB'' &= 464.951 & v' = A'B'' = - 330.016 \\ &B''B''' &= 771.878 & \quad \quad \quad 595.440 \\ \xi'' &= AB''' &= 1236.829 & v'' = A''B''' = 265.424 \\ &B'''B^{IV} &= 274.340 & \quad \quad \quad - 1403.726 \\ \xi''' &= AB^{IV} &= 1511.169 & v''' = A^{IV}B^{IV} = - 1138.302 \\ &B^{IV}B^V &= 1432.395 & \quad \quad \quad 771.444 \\ \xi^V &= AB^V &= 2943.564 & v^V = A^VB^V = - 366 \quad 858,\end{array}$$

wo die Zeichen — der Ordinaten, welche Zeichen unmittelbar

aus den vorhergehenden trigonometrischen Ausdrücken für x und y hervorgehen, anzeigen, daß diese Ordinaten auf der dem Azimut α entgegengesetzten Seite der Mittagslinie AC liegen.

I. Wenn auf diese Weise die Coordinaten aller Punkte der Gegend bekannt sind, so wird man sie noch bequemer, als durch die bloßen Dreyecke selbst nach §. 149, I., und zwar bloß mittelst eines verjüngten Maßstabes, auf dem Papiere, ihrer Lage gemäß, verzeichnen, oder man wird die Gegend in eine Karte bringen können.

II. Bemerken wir noch, daß, wenn die Anzahl der Punkte $A, A', A'', \dots$ sehr groß ist, sich mehrere Hülfsmittel darbiethen, um die bey solchen größeren Operationen leicht möglichen Irrthümer zu vermeiden. So wird man z. B. um der in §. 149. gemessenen Winkel sicher zu seyn, nicht bloß in jedem Dreyecke zwey, sondern alle drey Winkel desselben messen, deren Summe dann, wenn die Beobachtungen gut sind, zwey rechten Winkeln gleich seyn müssen. — Zur Prüfung der berechneten Seiten des Polygons wird man nicht bloß die eine Seite AA an dem einen Endpunkte der Vermessung, sondern auch noch eine zweyte, z. B. $A''A''$ an dem anderen Endpunkte derselben, unmittelbar mit dem Maßstabe, messen, die daher mit der nach §. 149. aus der ersten Seite AA durch Rechnung gefundenen Seite $A''A''$ übereinstimmen muß. — Die Coordinatenberechnung des gegenwärtigen §. 150. endlich kann man auch dadurch prüfen, daß man von A nach A'' auf der linken Seite der Mittagslinie, wie vorhin auf der rechten, fortgeht. So hat man z. B. wenn hier die Winkel, welche früher durch $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ bezeichnet wurden, nun durch $\beta, \beta', \beta'', \dots$ ausgedrückt werden, in unserm Beyspiele

$$\beta = BAA'' = 35^\circ 22' 0'',$$

$$\beta' = AA''A''' = 106^\circ 59' 10'',$$

$$\beta'' = 360 - A''A'''A'' = 237^\circ 58' 30'' \text{ u. f.},$$

also auch

$$\beta + \beta' - 180 = 322^\circ 21' 10'',$$

$$\beta + \beta' + \beta'' - 2.180 = 20^\circ 19' 40'' \text{ u. f.}$$

Setzt man daher wieder

$$x = AA' \cos \beta$$

$$+ A'A'' \cos (\beta + \beta' - 100),$$

$$+ A''A'' \cos (\beta + \beta' + \beta'' - 2.100),$$

und

$$\begin{aligned}
 y &= AA'' \sin \beta \\
 &+ A'A'' \sin (\beta + \beta' - 180), \\
 &+ A''A^{iv} \sin (\beta + \beta' + \beta'' - 2.100) \text{ etc.};
 \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
 \xi &= AB'' = 464.951 & v &= A'B'' = 330.016 \\
 &B''B''' = 771.878 & & - 595.440 \\
 \xi &= AB''' = 1236.829 & v' &= A''B''' = -265.424 \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

wie zuvor, wo jetzt die auf der rechten Seite von AC liegenden Punkte negative Ordinaten haben.

III. So wie man aber in dem Vorhergehenden die Lage der Orte $A, A', A'', \dots$ gegen den ersten Beobachtungspunkt A , und gegen die Mittagslinie AC dieses Punktes, durch die rechtwinkligen Coordinaten x und y bestimmt hat, so kann man diese Lage auch durch die Entfernung r jener Orte von dem ersten Punkte A , und durch den Winkel φ bestimmen, welche diese Entfernung r mit der Mittagslinie AC bildet. Man hat nämlich

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

und wenn so die Distanz $r = AA'' = AA^{iv} = AA^v, \dots$ bekannt ist, so findet man den Winkel φ aus

$$\sin \varphi = \frac{y}{r} \quad \text{oder} \quad \cos \varphi = \frac{x}{r},$$

oder endlich auch aus

$$\text{Tang } \varphi = \frac{y}{x}.$$

§. 151. (Aus drey ihrer Lage nach bekannten Orten, und aus den Winkeln, welche die Distanz dieser Orte, aus einem vierten Orte gesehen, an diesem letzten Orte bilden, die Lage dieses vierten Ortes gegen jene drey finden.) Seyen A, B und C (Fig. 60) die drey bekannten Orte, und $AB=a, BC=b$, so wie der Winkel $ABC=\alpha$ gegebene Größen.

Sey D der vierte Ort, an welchem man, mit dem Theodoliten, die Winkel $ADB=\beta$ und $BDC=\gamma$ beobachtet hat. — Man bestimme die Lage dieses vierten Orts D gegen die drey ersten A, B, C ,

Sey der unbekannte Winkel $BAD = x$. Man setze der Kürze wegen die Summe der drey bekannten Winkel $\alpha + \beta + \gamma = \delta$.

Da die vier Winkel eines jeden Vierecks zusammen genommen 360 Grade betragen, so ist

$$x + \delta + BCD = 360 \quad \text{oder} \\ BCD = 360 - (\delta + x).$$

Diefs vorausgesetzt, hat man in dem Dreyecke ABD

$$BD = \frac{a \sin x}{\sin \beta},$$

und eben so in dem Dreyecke BCD

$$BD = \frac{b \sin (360 - (\delta + x))}{\sin \gamma} = - \frac{b \sin (\delta + x)}{\sin \gamma}.$$

Setzt man beyde Werthe von BD einander gleich, so erhält man (§. 94, Gleichung C)

$$\frac{a \sin x}{\sin \beta} = - \frac{b}{\sin \gamma} (\sin \delta \cos x + \cos \delta \sin x);$$

und daher, wenn man durch $\cos x$ dividirt:

$$\text{Tang } x = \frac{-b \sin \beta \sin \delta}{a \sin \gamma + b \sin \beta \cos \delta}.$$

Um diesen Ausdruck zur Rechnung mit Logarithmen bequemer zu machen, sey

$$\text{Tang } y = \frac{b \sin \beta \sin \delta}{a \sin \gamma},$$

so hat man

$$\text{Tang } x = - \frac{\sin \delta \sin \gamma}{\sin (\delta + y)}.$$

Kennt man aber auf diese Weise den Winkel x , so findet man auch die Distanzen des vierten Puncts D von den drey ersten durch die Gleichungen

$$AD = \frac{a \sin (\beta + x)}{\sin \beta},$$

$$BD = \frac{a \sin x}{\sin \beta},$$

$$CD = \frac{-b \sin (\alpha + \beta + x)}{\sin \gamma}.$$

Liegt der Punct B zwischen der Distanz AC und dem unbekannten Puncte D , oder liegt er in B' , so muß man für α nicht den Winkel $ABC = \alpha'$, sondern das Supplement von α' zu 360 Graden,

oder man muß den *äußeren* Winkel der beyden Seiten AB' und $B'C$ nehmen, weil nur dieser, nicht aber der innere, mit den drey übrigen Winkeln des Vierecks $AB'CD$ zusammen 360 Grade macht. Die verschiedenen Lagen des gesuchten Puncts D außer oder auch in dem Dreyecke ABC ergeben sich von selbst durch die Beobachtung der Zeichen der vorhergehenden trigonometrischen Ausdrücke.

Als Beyspiel zu dieser in der Geodäsie wichtigen Aufgabe seyen die gegebenen Größen

$$a = 1153.70, \quad b = 849.430 \text{ Fufs,}$$

$$\alpha = 112^\circ 25', \quad \beta = 27^\circ 31', \quad \gamma = 19^\circ 14'.$$

Dieß vorausgesetzt, findet man aus den vorhergehenden Gleichungen

$$\delta = 159^\circ 10', \quad \gamma = 20^\circ 9' 56''.74,$$

$$\text{und } x = 95^\circ 25' 42''.4;$$

und damit erhält man für die drey gesuchten Distanzen

$$AD = 3095.60,$$

$$BD = 2485.95,$$

$$CD = 2121.56 \text{ Fufs.}$$