

Sechzehntes Capitel.

Numerische Bestimmung der Peripherie des Kreises und der trigonometrischen Functionen für jeden gegebenen Bogen.

§. 103. (Verhältniß der Peripherie des Kreises zu seinem Halbmesser.) Nachdem wir in dem Vorhergehenden die allgemeinen Eigenschaften der trigonometrischen Functionen kennen gelernt haben, erübrigt uns noch, die speciellen oder absoluten Werthe derselben für jeden gegebenen Bogen zu bestimmen, da wir, ohne die Kenntniß dieser Werthe, jene Functionen zur Berechnung in gegebenen besonderen Fällen nicht gebrauchen könnten.

Da wir aber diese Werthe der Functionen für jeden Bogen ohne Zweifel am natürlichsten und einfachsten durch diesen Bogen selbst, das heißt, als Theile der *Peripherie* des Kreises, ausdrücken werden, so wird es nothwendig seyn, zuerst diese *Peripherie*, in Theilen des Halbmessers des Kreises, zu suchen.

Zu diesem Zwecke wollen wir u den Bogen nennen, zu welchem die Tangente x gehört, so daß man die Gleichung hat

$$x = \text{Tang } u.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck nach §. 102, II., so ist

$$dx = \frac{du}{\cos^2 u},$$

oder auch, da $\cos^2 u = \frac{1}{1 + \text{Tang}^2 u} = \frac{1}{1 + x^2}$ ist:

$$\frac{du}{dx} = (1 + x^2)^{-1}.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck wieder, und nimmt man dabey das erste Differential von x oder die GröÙe dx constant an (§. 55, I.), so ist

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = - 2x(1 + x^2)^{-2},$$

und eben so erhält man auch

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = -2(1+x^2)^{-2} + 8x^2(1+x^2)^{-3},$$

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = 24x(1+x^2)^{-3} - 48x^3(1+x^2)^{-4} \text{ u. f.}$$

Setzt man, um darauf *Maclaurin's* Theorem (§. 57.) anzuwenden, in diesen Ausdrücken die Gröfse $x=0$, so erhält man

$$U = U'' = U^{iv} \dots \text{gleich Null, und}$$

$$U' = 1, \quad U''' = -2, \quad U^v = 2 \cdot 3 \cdot 4, \quad U^{vii} = -2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \text{ u. f.,}$$

so dafs man daher, nach dem erwähnten Theorem, den Ausdruck erhält:

$$u = \text{Tang } u - \frac{1}{3} \text{Tang}^3 u + \frac{1}{5} \text{Tang}^5 u - \frac{1}{7} \text{Tang}^7 u + \dots \text{ (I),}$$

eine sehr einfache Reihe, von welcher das Gesetz des Fortgangs für sich deutlich ist.

Durch diese Reihe erhält man demnach den Werth jedes Bogens eines Kreises, dessen Halbmesser die Einheit ist, wenn die Tangente dieses Bogens, in Theilen desselben Halbmessers, bekannt ist.

I. Um einen solchen Bogen zu finden, dessen Tangente bekannt ist, sey FB (Fig. 22) die Hälfte des Quadranten, also ein Bogen von 45 Graden. Die Tangente Ff dieses Bogens, die (nach §. 90, I.) auf dem Halbmesser CF des Kreises senkrecht steht, bildet mit diesem Halbmesser und mit der Secante Cf ein in F rechtwinkliges Dreyeck, in welchem die beyden schiefen Winkel bey C und f unter sich gleich sind, da nach §. 85, II. die Summe dieser zwey Winkel immer gleich einem rechten Winkel ist, und der eine C derselben, unserer Voraussetzung gemäß, gleich der Hälfte eines rechten Winkels oder gleich 45 Graden ist. In einem solchen Dreyecke sind aber (nach §. 87, VII.) die beyden Katheten von gleicher Gröfse, also ist auch

$$Ff = FC = 1.$$

Nennt man daher π die Hälfte der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser die Einheit ist, und ist u ein Bogen von 45 Graden oder ist $u = \frac{1}{4}\pi$, so hat man $\text{Tang } u = 1$, und wenn man diese Werthe von u und $\text{Tang } u$ in der vorhergehenden Gleichung substituirt, so erhält man

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

II. Nach dieser schönen Reihe könnte man den gesuchten Werth π der halben, also auch den der ganzen Peripherie des Kreises berechnen. Da aber die Reihe nur langsam convergirt, so wird man besser auf folgende Art verfahren.

Man zerlege den Octanten des Kreises oder die Gröfse $\frac{1}{4}\pi$ in zwey Theile a und b , so daß

$$\frac{1}{4}\pi = a + b, \text{ also auch } \text{Tang}(a+b) = 1$$

ist. Da man, nach §. 101, die Gleichung hat

$$\text{Tang}(a+b) = \frac{\text{Tang } a + \text{Tang } b}{1 - \text{Tang } a \text{ Tang } b} = 1,$$

so ist auch

$$\text{Tang } b = \frac{1 - \text{Tang } a}{1 + \text{Tang } a}.$$

Setzt man daher $\text{Tang } a = \frac{1}{3}$, so muß $\text{Tang } b = \frac{1}{3}$ seyn, also wird man auch, selbst ohne die Werthe dieser Bogen a und b zu kennen, wenn man in der obigen Reihe für u statt $\text{Tang } u$ zuerst $\frac{1}{3}$ und dann $\frac{1}{3}$ substituirt, die folgende Doppelreihe erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\pi &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \dots \\ &+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \dots, \end{aligned}$$

und da beyde Reihen schnell genug convergiren, so wird man aus ihnen den Werth von π auf eine bequeme Weise ableiten können.

Noch vortheilhafter wird man die Gröfse $\frac{1}{4}\pi$ in drey Theile theilen, von denen man, um nicht drey verschiedene Reihen zu erhalten, zwey unter sich gleich nehmen kann, so daß z. B.

$$\frac{1}{4}\pi = 2a + b$$

ist, wo man dann, für $\text{Tang } a = \frac{1}{3}$, erhält $\text{Tang } b = \frac{1}{7}$, also auch

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\pi &= 2 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right] \\ &+ \frac{1}{7} - \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} - \frac{1}{7 \cdot 7^7} + \dots \end{aligned}$$

Auf diese Weise hat man für die halbe Peripherie π des Kreises, dessen Halbmesser die Einheit ist, den folgenden Werth gefunden:

$$\pi = 3.141592 \ 653589 \ 793238 \ 462643 \ 383279 \ \dots$$

Da diese Zahl im Folgenden noch oft wieder kommen wird, so kann man von ihr auch folgende Ausdrücke anmerken:

$$\text{Log } \pi = 0.49714 \ 98727,$$

$$\frac{1}{\pi} = 0.31830 \ 98862,$$

$$\pi^2 = 9.86960 \ 43785,$$

$$\sqrt{\pi} = 1.77245 \ 38509.$$

Durch wiederholte Divisionen nach der Methode des §. 15. erhält man endlich für π die folgenden genäherten Werthe:

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{35}{113}, \frac{103638}{32989} \text{ u. f.}$$

§. 104. (Ausdruck des Sinus und Cosinus durch seinen Bogen.) Wenn die Gleichung gegeben ist

$$u = \text{Sin } x,$$

so erhält man durch wiederholte Differentiation, wo dx constant angenommen wird, nach §. 102:

$$\frac{du}{dx} = \text{Cos } x, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = - \text{Sin } x, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = - \text{Cos } x, \\ \frac{d^4 u}{dx^4} = \text{Sin } x \text{ u. f.},$$

also auch, wenn man in diesen Ausdrücken $x=0$ setzt, nach *Maclaurin's* Theorem (§. 57.):

$$U = 0, \quad U' = 1, \quad U'' = 0, \quad U''' = -1 \text{ u. f.},$$

und daher

$$\text{Sin } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots \text{ (II)},$$

und ganz eben so erhält man auch für $u = \text{Cos } x$ die ähnliche Reihe

$$\text{Cos } x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots \text{ (III)}.$$

I. Diese zwey merkwürdigen Reihen geben daher den Sinus und Cosinus jedes Bogens x eines Kreises, dessen Halbmesser 1 ist, wo $\text{Sin } x$ und $\text{Cos } x$ sowohl, als auch der Bogen x selbst, in Theilen dieses Halbmessers ausgedrückt ist. Gewöhnlich gibt man aber den Bogen eines Kreises oder den ihm entsprechenden Winkel am Mittelpuncte des Kreises in *Secunden* an, deren (nach §. 84, I.) 180. (60)² auf die halbe Peripherie π

gehen. Um daher einen in Secunden ausgedrückten Bogen in Theilen des Halbmessers auszudrücken, wird man, da nach §. 84, *G.* diese Winkel sich wie ihre Bogen verhalten, für den Winkel von einer Secunde oder für den Winkel = 1" die Proportion haben

$$180.60^2 : \pi = 1'' : x,$$

oder der zu diesem Winkel gehörende Bogen wird

$$x = \frac{\pi}{180.60^2}$$

Theile des Halbmessers enthalten. Substituirt man in diesem Ausdrücke den Werth von π aus §. 103, so erhält man

$$x = 0.00000\ 48481\ 36811\ 09536 \dots$$

Da aber ein so kleiner Bogen schon sehr nahe mit seinem Sinus zusammenfällt, so hat man für die letzte, öfter wiederkommende Zahl das Symbol $\text{Sin } 1''$ gewählt, so daß man daher hat

$$\text{Sin } 1'' = \frac{\pi}{180.60^2} = 0.00000\ 48481 \dots,$$

also auch

$$\frac{1}{\text{Sin } 1''} = 206264.80624\ 70963,$$

$$\text{Log Sin } 1'' = 4.6855749,$$

$$\text{Log } \frac{1}{\text{Sin } 1''} = 5.3144251.$$

Da man also jeden in Secunden ausgedrückten Bogen oder Winkel durch $\text{Sin } 1''$ multipliciren muß, um ihn in Theilen des Halbmessers zu erhalten, so sind auch die zwey vorhergehenden Reihen (II, III), wenn in denselben der Bogen x in Secunden ausgedrückt wird, so zu schreiben:

$$\text{Sin } x = (x \text{ Sin } 1'') - \frac{(x \text{ Sin } 1'')^3}{1.2.3} + \dots,$$

$$\text{Cos } x = 1 - \frac{(x \text{ Sin } 1'')^2}{1.2} + \frac{(x \text{ Sin } 1'')^4}{1.2.3.4} - \dots$$

Will man, zur bequemern Berechnung, den Winkel x in Graden und Theilen des Grades ausgedrückt voraussetzen, so wird man in dem zweyten Theile der Reihen (II) und (III) statt x nicht $\frac{\pi x}{180.60^2}$ oder $\text{Sin } 1''$, wie zuvor, sondern $\frac{\pi x}{180}$ setzen, so daß man daher hat

$$\sin x = \left(\frac{\pi x}{180}\right) - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\pi x}{180}\right)^3 + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{\pi x}{180}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\pi x}{180}\right)^4 - \dots,$$

oder endlich, wenn man $x = 90 \cdot n$ setzt:

$$\sin(90 \cdot n) = \left(\frac{\pi}{2}\right) n - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot n^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \cdot n^5 - \dots,$$

$$\cos(90 \cdot n) = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot n^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \cdot n^4 - \dots$$

Substituirt man in diesen Ausdrücken den Werth von der Gröſſe π und ihren Potenzen aus §. 103, so erhält man endlich die beyden folgenden Reihen:

$$\begin{aligned} \sin(90 \cdot n) &= 1.570796 n \\ &\quad - 0.645964 n^3 \\ &\quad + 0.079693 n^5 \\ &\quad - 0.004682 n^7 \\ &\quad + 0.000160 n^9 \\ &\quad - 0.000004 n^{11}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(90 \cdot n) &= 1 - 1.233700 n^2 \\ &\quad + 0.253669 n^4 \\ &\quad - 0.020863 n^6 \\ &\quad + 0.000919 n^8 \\ &\quad - 0.000025 n^{10}, \end{aligned}$$

und durch diese Ausdrücke wird man die Sinus und Cosinus für jeden gegebenen Winkel berechnen, und dieselben, oder bequemer noch ihre Logarithmen, in Tafeln bringen können, wie diejenigen sind, deren wir bereits oben (§. 64, II.) Erwähnung gethan haben. Man bemerkt übrigens von selbst, daß es genügt, z. B. nur die Sinus für alle Theile des ersten Quadranten von 0° bis 90° zu berechnen, weil dadurch auch schon die Cosinus derselben Theile gegeben sind, indem

$$\cos(90 - x) = \sin x$$

ist. Um endlich noch den Gebrauch der vorigen Reihen durch ein Beyspiel zu zeigen, so hat man für den Sinus von 9 Graden, wenn man

$$90 \cdot n = 9 \quad \text{oder} \quad n = \frac{1}{10}$$

setzt,

aus der ersten Reihe: und aus der zweyten:

$$\begin{array}{rcl}
 & 0.15707960 & 1 \\
 - & 0.00064596 & - 0.012337 \\
 + & 0.00000080 & + 0.000025 \\
 \hline
 \text{Sin } 9^\circ = & 0.156434 & \text{Cos } 9^\circ = 0.987688.
 \end{array}$$

§. 105. (Ausdruck des Sinus und Cosinus durch imaginäre Gröfsen.) Wenn man in der oben (§. 63.) für e^x erhaltenen Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

statt x zuerst die Gröfse $x\sqrt{-1}$ und dann $-x\sqrt{-1}$ setzt, so erhält man

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

und

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

Die Summe und die Differenz dieser beyden Reihen gibt sofort

$$e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2 \left[1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots \right]$$

und

$$e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \left[x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots \right].$$

Allein die in den Klammern eingeschlossenen Glieder der zwey letzten Ausdrücke sind, nach §. 104,

die erste gleich $\text{Cos } x$,

und die andere gleich $\text{Sin } x$,

so dafs man daher die zwey merkwürdigen Gleichungen erhält:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Sin } x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \\
 \text{Cos } x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}
 \end{aligned} \right\} \dots \text{(IV)},$$

in welchen e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

I. Addirt und subtrahirt man die Gleichungen (IV), so erhält man

$$\left. \begin{aligned} e^{x\sqrt{-1}} &= \cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x \\ e^{-x\sqrt{-1}} &= \cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x \end{aligned} \right\} \dots (V).$$

II. Nimmt man überdies von den beyden letzten Ausdrücken die natürlichen Logarithmen, so hat man

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \log (\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x) \\ x &= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \log \frac{1}{\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x} \end{aligned} \right\} \dots (VI),$$

und statt der letzten dieser Gleichungen kann man auch, da $\log 1 = 0$ ist, die folgende setzen:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \log (\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x), \text{ oder auch} \\ x &= \sqrt{-1} \cdot \log (\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x). \end{aligned}$$

III. Setzt man endlich in der ersten der Gleichungen (V) statt x die Gröfse nx , wo n irgend eine willkürliche Zahl bezeichnet, so hat man

$$e^{nx\sqrt{-1}} = \cos nx + \sqrt{-1} \cdot \sin nx.$$

Es ist aber

$$e^{nx\sqrt{-1}} = (e^{x\sqrt{-1}})^n = (\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x)^n,$$

also ist auch

$$\left. \begin{aligned} (\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x)^n &= \cos nx + \sqrt{-1} \cdot \sin nx \\ (\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x)^n &= \cos nx - \sqrt{-1} \cdot \sin nx \end{aligned} \right\} \dots (VII),$$

Gleichungen, die sämmtlich für die Theorie der trigonometrischen Functionen von grofser Wichtigkeit sind.

IV. Beschliessen wir diesen Gegenstand mit einer die Logarithmen betreffenden Bemerkung. — Wenn man in der ersten der Gleichungen (V) statt x die Gröfse $(2m\pi + x)$ setzt, wo m irgend eine ganze positive Zahl $0, 1, 2, 3, \dots$ bezeichnet, so hat man

$$e^{(2m\pi + x)\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x,$$

also auch, wenn man davon die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$(2m\pi + x) \cdot \sqrt{-1} = \log (\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x).$$

Der letzte Ausdruck gibt

$$\begin{aligned} \text{für } x=0 & \dots \log (+1) = 2m\pi \cdot \sqrt{-1}, \\ \text{und für } x=\pi & \dots \log (-1) = (2m+1)\pi \cdot \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Da aber jede Zahl $\pm a$ als das Product von $\pm a$ in ± 1 angesehen werden kann, so ist auch

$$\log a = \log a + \log(+1) \text{ oder}$$

$$\log a = \log a + 2m\pi\sqrt{-1},$$

und eben so

$$\log(-a) = \log a + \log(-1) \text{ oder}$$

$$\log(-a) = \log a + (2m+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Diese beyden Gleichungen zeigen, daß jede positive, so wie auch jede negative Zahl unendlich viele Logarithmen hat, von welchen aber, wenn die Zahl positiv ist, *nur einer* (für den besondern Werth $m=0$), und wenn sie negativ ist, *keiner* einen reellen Werth hat.

Setzt man endlich, in der letzten dieser zwey Gleichungen, die Gröfse $a=1$, so hat man, da für alle logarithmischen Systeme $\log 1=0$ ist:

$$\log(-1) = (2m+1) \cdot \pi\sqrt{-1}$$

oder auch

$$\pi = \frac{1}{(2m+1)\sqrt{-1}} \cdot \log(-1),$$

also auch, wenn man für den einfachsten Fall $m=0$ setzt:

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \log(-1),$$

ein merkwürdiger, obschon zur Berechnung unbrauchbarer Ausdruck für die Gröfse π .