

Fünfzehntes Capitel.

Eigenschaften der Dreyecke und weitere Entwicklung der trigonometrischen Functionen.

§. 91. (Fundamentalgleichung des Dreyeckes.)
Sey ABC (Fig. 23) ein Dreyeck, dessen Winkel, nach der oben (§. 87, II.) eingeführten Bezeichnung A, B, C , und die ihnen in derselben Ordnung entgegenstehenden Seiten $BC=a, AC=\beta$ und $AB=\gamma$ sind. Wenn man von dem Scheitel eines Winkels A des Dreyeckes auf die gegenüberstehende Seite $BC=a$ ein Loth AD fällt, so wird dadurch diese Seite in zwey Theile BD und DC getheilt, die, nach der oben (§. 87, IV.) gegebenen Erklärung des Cosinus, so ausgedrückt werden können:

$$BD = \gamma \cos B \quad \text{und} \quad DC = \beta \cos C;$$

so daß man daher, da $BC=BD+DC$ ist, den Ausdruck hat:

$$a = \gamma \cos B + \beta \cos C.$$

Ganz eben so wird auch das Loth aus dem Puncte B und C auf die ihnen gegenüberstehenden Seiten geben:

$$\beta = \gamma \cos A + a \cos C$$

$$\text{und} \quad \gamma = a \cos B + \beta \cos A.$$

Multiplirt man die erste dieser drey Gleichungen durch a , die zweyte durch β und die dritte endlich durch γ , so erhält man

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= a\gamma \cos B + a\beta \cos C \\ \beta^2 &= \beta\gamma \cos A + a\beta \cos C \\ \gamma^2 &= a\gamma \cos B + \beta\gamma \cos A \end{aligned} \right\}.$$

Subtrahirt man endlich von der Summe je zweyer der drey letzten Ausdrücke den dritten, so erhält man die folgenden drey Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A \\ \beta^2 &= a^2 + \gamma^2 - 2a\gamma \cos B \\ \gamma^2 &= a^2 + \beta^2 - 2a\beta \cos C \end{aligned} \right\} \dots (A);$$

das heißt: »In jedem Dreyecke ist das Quadrat einer Seite gleich »der Summe der Quadrate der beyden anderen, weniger dem doppelten Producte dieser zwey anderen Seiten in den Cosinus des »von ihnen eingeschlossenen Winkels,« und dieß ist die gesuchte Grundgleichung des Dreyeckes, aus welcher sich alle anderen leicht ableiten lassen.

1. Es wird nicht nothwendig seyn, zu erinnern, daß diese Gleichungen (A) für alle Dreyecke gehören, selbst wenn z. B. das Loth von einem Punkte C nicht auf die gegenüberstehende Seite BA , sondern, wie in Fig. 26, wegen dem stumpfen Winkel ABC , nur auf die Verlängerung BD dieser Seite fällt, da für diesen Fall der Cosinus des erwähnten Winkels (nach §. 89, II.) negativ ist, und daher der obige Ausdruck

$$\gamma = a \cos B + \beta \cos A$$

durch die bloße Berücksichtigung des Zeichens von $\cos B$ in

$$\gamma = \beta \cos A - a \cos B,$$

also auch die zweyte der Gleichungen (A) in

$$\beta^2 = a^2 + \gamma^2 - 2a\gamma \cos B$$

übergeht. — Fällt aber, wie bey einem in A rechtwinkligen Dreyecke ABC (Fig. 6) das Loth von B auf den Endpunkt der gegenüberstehenden Seite CA , so geht für diesen Fall, da wieder nach §. 89, I. der Cosinus eines rechten Winkels Null ist, die Gleichung

$$\beta = \gamma \cos A + a \cos C$$

in die folgende über:

$$\beta = a \cos C,$$

welche mit der oben (§. 87, IV.) gegebenen Gleichung identisch ist.

II. Bemerken wir noch, daß von den drey Gleichungen (A) je zwey nur eine Folge oder vielmehr ein anderer Ausdruck der dritten sind. In der That findet man z. B. aus der zweyten jener Gleichungen

$$\beta^2 = a^2 + \gamma^2 - 2a\gamma \cos B,$$

die für das Dreyeck (I) (Fig. 24) gehören mag, wo AC die unterste Seite oder die Basis des Dreyecks ist, sofort die beyden anderen Gleichungen, wenn man dasselbe Dreyeck zweymal so dreht,

dafs in der zweyten Lage (II) die Seite BA , und in der dritten Lage (III) die Seite CB die Basis des Dreyecks wird.

Aber auch ohne diese Drehung des Dreyecks kann man denselben Zweck noch einfacher dadurch erreichen, dafs man blofs die Buchstaben ABC und $\alpha\beta\gamma$ so verwechselt, dafs sie für den zweyten Fall um eine, und für den dritten um zwey Stellen verrückt werden, wie folgendes Schema zeigt:

erster Fall	$A B C . . . \alpha \beta \gamma$;
zweyter »	$B C A . . . \beta \gamma \alpha$;
dritter »	$C A B . . . \gamma \alpha \beta$.

Diese Bemerkung wird in der Folge noch öfter Anwendung finden, da jede allgemeine, das Dreyeck betreffende Gleichung, ihrer Natur nach, zwey ähnliche analoge Gleichungen mit sich führt, die demnach, ohne sie erst eigens zu entwickeln, durch diese Transformation sogleich erhalten werden können.

§. 92. (Verhalten der Quadrate der Seiten des rechtwinkligen Dreyeckes.) Die vorhergehenden Gleichungen (A) beziehen sich auf jedes willkürliche Dreyeck. Ist dasselbe aber rechtwinklig, und ist z. B. A der rechte Winkel desselben, so ist (nach §. 89, II) $\cos A = 0$, also auch die erste der Gleichungen (A)

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2;$$

oder: *In dem rechtwinkligen Dreyecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate beyder Katheten*; ein wichtiger Satz, den schon *Pythagoras* erfunden und dafür den Göttern eine Hekatombe geopfert haben soll, der aber hier nur als ein einzelner Fall des durch die Gleichungen (A) ausgedrückten Theorems erscheint.

I. Ist $\beta = \gamma$, so ist $\alpha^2 = 2\beta^2$, oder es ist $\alpha = \beta\sqrt{2}$, oder die Diagonale des Quadrats (§. 81.) ist mit der Seite desselben incommensurabel (§. 30.).

II. Ist das Dreyeck ABC (Fig. 25) in A rechtwinklig, und ist AD ein Loth von dem Punct A auf die ihm gegenüberstehende Hypotenuse $BC = \alpha$, so seyen $BAD = M$, $DAC = N$ die Winkel, und $BD = m$, $DC = n$ die Segmente, in welche der rechte Winkel und die Hypotenuse durch dieses Loth getheilt wird.

Dieß vorausgesetzt hat man, da in jedem rechtwinkligen Dreyecke die Summe der zwey schiefen Winkel (nach §. 85, II.) gleich einem rechten Winkel oder gleich R ist,

$$\begin{aligned} B + C &= R, \\ \text{und eben so} \quad B + M &= R, \\ C + N &= R. \end{aligned}$$

Diese drey Gleichungen geben

$$\begin{aligned} B &= R - M = R - C \quad \text{und} \\ C &= R - N = R - B; \end{aligned}$$

woraus sofort folgt, daß der Winkel $C=M$, und daß der Winkel $B=N$, daß also auch (§. 83.) die drey rechtwinkligen Dreyecke ABC , ABD und ADC unter sich ähnlich sind.

Weiter hat man in denselben Dreyecken, nach der bloßen Erklärung des Cosinus (§. 87, IV.), die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{m}{\gamma} = \cos B \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{n}{\beta} = \cos C;$$

also auch

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 &= \alpha \cdot n \\ \text{und} \quad \gamma^2 &= \alpha \cdot m \end{aligned} \right\};$$

das heißt: »Im rechtwinkligen Dreyecke ist jede Kathete die »mittlere Proportionale (§. 38, I.) zwischen der Hypotenuse und »dem dieser Kathete anliegenden Segment der Hypotenuse.«

III. Ist überdieß das erwähnte Loth $AD=p$, so hat man eben so (§. 87, IV.)

$$\frac{p}{\gamma} = \cos M \quad \text{und} \quad \frac{p}{\beta} = \cos N;$$

also auch, da $M=C$ und $N=B$ ist, wenn man das Product der zwey letzten Gleichungen nimmt,

$$p^2 = \beta \gamma \cos B \cos C;$$

oder endlich, wenn man in diesem Ausdrucke die vorhergehenden Werthe von

$$\cos B = \frac{m}{\gamma} \quad \text{und} \quad \cos C = \frac{n}{\beta}$$

substituirt:

$$p^2 = mn;$$

das heißt: »Im rechtwinkligen Dreyecke ist das Loth aus dem »rechten Winkel auf die Hypotenuse die mittlere Proportionale »zwischen den beyden Segmenten der Hypotenuse.«

§. 93. (Verhältniß der Seiten jedes Dreyeckes.)

Ist ABC (Fig. 23) ein Dreyeck, und AD ein aus dem Scheitel des Winkels A auf die gegenüberstehende Seite $BC = a$ gefällttes Loth, so ist, nach der oben (§. 87, IV.) gegebenen Erklärung des Sinus eines Winkels

$$\frac{AD}{AB} = \sin B \quad \text{und} \quad \frac{AD}{AC} = \sin C;$$

also auch, da $AB = \gamma$ und $AC = \beta$ ist,

$$AD = \gamma \sin B \quad \text{und} \quad AD = \beta \sin C.$$

Setzt man beyde Werthe von AD einander gleich, so erhält man

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\sin B}{\sin C};$$

und auch diese Gleichung ist, nach der Bemerkung des §. 91, II, noch zwey anderen analogen gleichgeltend, so daß man daher hat:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta}{\gamma} &= \frac{\sin B}{\sin C} \\ \frac{\alpha}{\gamma} &= \frac{\sin A}{\sin C} \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\sin A}{\sin B} \end{aligned} \right\} \dots (B).$$

Drückt man den Inhalt dieser Gleichungen in Worten aus, so geben sie den Satz: »Die Seiten des Dreyeckes verhalten sich, wie die Sinus der ihnen gegenüberstehenden Winkel.«

§. 94. (Sinus und Cosinus der Summe und der Differenz zweyer Winkel.) Da in jedem Dreyecke (nach §. 85.) die Summe aller drey Winkel gleich $2R$ oder gleich 180 Graden ist, oder da man, wenn A , B und C diese Winkel des Dreyeckes bezeichnen, die Gleichung hat:

$$C = 180 - (A + B);$$

und da überdieß (nach §. 89, II.)

$$\sin(180 - (A + B)) = \sin(A + B)$$

ist, da also auch, für jedes Dreyeck, die Gleichung Statt hat:

$$\sin C = \sin(A + B),$$

so erhält man, wenn man diesen Werth von $\sin C$ in der ersten

der Gleichungen (B) des §. 93. substituirt:

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\sin(A+B)}{\sin B}.$$

Allein nach dem, was oben (§. 91.) gesagt worden ist, hat man auch

$$\gamma = \beta \cos A + \alpha \cos B,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\gamma}{\beta} = \cos A + \frac{\alpha}{\beta} \cos B;$$

oder endlich, da nach denselben Gleichungen (B) auch

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

ist, so hat man

$$\frac{\gamma}{\beta} = \cos A + \frac{\sin A}{\sin B} \cos B.$$

Setzt man diese zwey Werthe von $\frac{\gamma}{\beta}$ einander gleich, so erhält man

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

und dieser Ausdruck gibt den Sinus der Summe zweyer Winkel, wenn der Sinus und Cosinus jedes einzelnen dieser Winkel bekannt ist.

I. Nimmt man in dem letzten Ausdrucke den Winkel B negativ, oder setzt man in ihm $-B$ statt B , so erhält man, da nach §. 89, I. für jeden Winkel x die Gleichungen bestehen:

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{und} \quad \cos(-x) = \cos x,$$

für den Sinus der Differenz zweyer Winkel den Ausdruck

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B.$$

II. Setzt man überdieß in diesen beyden Ausdrücken von $\sin(A+B)$ und $\cos(A+B)$ statt A die Gröfse $90^\circ - A$, so hat man, da (nach §. 87, VI. oder §. 89, III.) für jeden Winkel x die Gleichungen

$$\sin(90-x) = \cos x \quad \text{und} \quad \cos(90-x) = \sin x$$

bestehen:

$$\sin(90 - A + B) \quad \text{oder} \quad \sin(90 - (A - B)),$$

oder endlich

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B,$$

und eben so

$\sin(90 - A - B)$ oder $\sin(90 - (A + B))$,
oder endlich

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B;$$

und diese zwey Ausdrücke geben den Cosinus der Summe und der Differenz zweyer Winkel, wenn die Sinus und Cosinus der einfachen Winkel gegeben sind.

Stellt man diese vier Gleichungen zur bequemern Übersicht zusammen, so hat man, wenn man die beyden einfachen Winkel durch x und y bezeichnet:

$$\left. \begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned} \right\} \dots (C).$$

Diese vier Gleichungen werden uns künftig sehr nützlich seyn, da sie eine allgemeine Relation zwischen den beyden Functionen der Sinus und Cosinus enthalten, und uns dadurch behülflich seyn werden, die merkwürdigen Eigenschaften dieser Functionen noch näher kennen zu lernen. Hier werden vorerst folgende kurze Bemerkungen darüber genügen.

A. Verwechselt man in der zweyten und vierten der Gleichungen (C) alle Zeichen, so erhält man

$$\begin{aligned} \sin(y - x) &= \sin y \cos x - \cos y \sin x \quad \text{und} \\ \cos(y - x) &= \cos y \cos x + \sin y \sin x. \end{aligned}$$

Vergleicht man diese zwey Ausdrücke mit den Gleichungen (C), so erhält man

$$\begin{aligned} \sin(y - x) &= -\sin(x - y) \quad \text{und} \\ \cos(y - x) &= \cos(x - y), \end{aligned}$$

übereinstimmend mit dem, was oben (§. 89, I.) von dem Sinus und Cosinus der negativen Bogen gesagt worden ist.

B. Setzt man in den Gleichungen (C) statt x die GröÙe $R = 90^\circ$, so hat man, da (nach §. 89, II.) $\sin R = 1$ und $\cos R = 0$ ist:

$$\begin{aligned} \sin(R + y) &= \cos y, \\ \sin(R - y) &= \cos y, \\ \cos(R + y) &= -\sin y, \\ \cos(R - y) &= \sin y; \end{aligned}$$

und auch diese Ausdrücke sind übereinstimmend mit den Gleichungen des §. 89, II.

Überhaupt wird man, um die ganze Peripherie des Kreises zu umfassen, da nach den Gleichungen des §. 89, III.

$$\sin 0 = \sin 2R = \sin 4R = \cos R = \cos 3R = 0 \text{ und}$$

$$\sin R = -\sin 3R = \cos 0 = -\cos 2R = \cos 4R = 1 \text{ ist,}$$

aus den Gleichungen (C) unmittelbar die folgenden ableiten:

$$\left. \begin{aligned} \sin(R \pm \gamma) &= \cos \gamma \\ \sin(2R \pm \gamma) &= \mp \sin \gamma \\ \sin(3R \pm \gamma) &= -\cos \gamma \\ \sin(4R \pm \gamma) &= \pm \sin \gamma \end{aligned} \right\} \text{ und}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(R \pm \gamma) &= \mp \sin \gamma \\ \cos(2R \pm \gamma) &= -\cos \gamma \\ \cos(3R \pm \gamma) &= \pm \sin \gamma \\ \cos(4R \pm \gamma) &= \cos \gamma \end{aligned} \right\};$$

wo dann für die folgenden, die ganze Peripherie übersteigenden Bogen dieselben Werthe und Zeichen periodisch wieder kommen, so dafs man z. B. hat:

$$\sin(5R \pm \gamma) = \cos \gamma,$$

$$\sin(6R \pm \gamma) = \mp \sin \gamma \text{ u. f.}$$

C. Aus diesen Ausdrücken in (B) folgen sofort auch die Tangenten, Cotangenten u. f. für alle den rechten Winkel übersteigenden Bogen. So hat man nach §. 90.

$$\text{Tang } x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ und } \text{Cotang } x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

also auch, wenn man statt x die Winkel $R \pm \gamma$, $2R \pm \gamma$, $3R \pm \gamma$ u. f. setzt, und die Sinus und Cosinus dieser letzten Winkel für die verschiedenen Quadrate aus (B) substituirt:

$$\left. \begin{aligned} \text{Tang}(R \pm \gamma) &= \mp \text{Cotg } \gamma \\ \text{Tang}(2R \pm \gamma) &= \pm \text{Tang } \gamma \\ \text{Tang}(3R \pm \gamma) &= \mp \text{Cotg } \gamma \\ \text{Tang}(4R \pm \gamma) &= \pm \text{Tang } \gamma \end{aligned} \right\} \text{ und eben so}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Cotg}(R \pm \gamma) &= \mp \text{Tang } \gamma \\ \text{Cotg}(2R \pm \gamma) &= \pm \text{Cotg } \gamma \\ \text{Cotg}(3R \pm \gamma) &= \mp \text{Tang } \gamma \\ \text{Cotg}(4R \pm \gamma) &= \pm \text{Cotg } \gamma \end{aligned} \right\}.$$

D. Endlich wollen wir noch bemerken, daß man nach den zweyten Gleichungen in (B), übereinstimmend mit §. 89, II., hat:

$$\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma \quad \text{und} \\ \cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma.$$

So lange man also bloß die Winkel von Dreyecken betrachtet, deren jeder, nach §. 85, III., kleiner als 180° seyn muß, so wird man, wenn man für irgend ein Dreyeck ABC die Gleichung

$$\cos A = \cos B$$

erhält, daraus unmittelbar schliessen, daß auch der Winkel $A=B$ ist. Dasselbe gilt aber nicht für die andere Gleichung

$$\sin A = \sin B,$$

aus welcher zwey Werthe für A folgen, nämlich

$$\text{entweder } A = B \text{ oder } A = 180 - B.$$

Wohl fällt aber diese Zweydeutigkeit der Winkel wieder weg, wenn man die Gleichung

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B} \quad \text{oder} \quad \tan A = \tan B$$

hat, da diese, nach den Ausdrücken von (C), unmittelbar wieder auf den einzigen Werth $A=B$ führt; eine Bemerkung, auf die wir in der Folge wieder zurückkommen werden.

§. 95. (Relationen zwischen dem Sinus, Cosinus, Tangente u. f. desselben Winkels.) Da in jedem rechtwinkligen Dreyecke, wenn A den rechten Winkel, also auch α die Hypotenuse desselben bezeichnet, nach §. 92. die Gleichung besteht:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2,$$

und da, nach der oben gegebenen Erklärung des Sinus und Cosinus (§. 87, V.), wenn der Winkel $ABC = x$ gesetzt wird,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sin x \quad \text{und} \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \cos x$$

ist, so hat man auch, wenn man diese Werthe von β und γ in der vorhergehenden Gleichung substituirt:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

und diese merkwürdige einfache Gleichung setzt uns in den

Stand, jede der oben erwähnten trigonometrischen Functionen bloß durch irgend eine der übrigen auszudrücken.

So hat man zuerst, wenn z. B. der Sinus eines Winkels bekannt ist, auch den Cosinus desselben sofort durch die Gleichung

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x},$$

oder umgekehrt, wenn der Cosinus bekannt ist,

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

I. Eben so wird man auch die Tangente oder Cotangente eines Winkels bloß durch den Sinus, oder bloß durch den Cosinus desselben Winkels mit Hülfe der Gleichung bestimmen:

$$\tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x};$$

oder auch den Sinus und Cosinus bloß durch die Tangente oder Cotangente mittelst des Ausdrucks

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} \text{ u. s. f.}$$

§. 96. (Summe und Differenz der Sinus und Cosinus zweyer Winkel.) Wenn man die vier Gleichungen (C) des §. 94. paarweise addirt und subtrahirt, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \sin(x+y) + \sin(x-y) &= 2 \sin x \cos y \\ \sin(x+y) - \sin(x-y) &= 2 \cos x \sin y \\ \cos(x-y) + \cos(x+y) &= 2 \cos x \cos y \\ \cos(x-y) - \cos(x+y) &= 2 \sin x \sin y \end{aligned} \right\};$$

oder auch, wenn man in diesen Ausdrücken

statt x die Größe $\frac{1}{2}(x+y)$

und statt y die Größe $\frac{1}{2}(x-y)$

substituirt:

$$\left. \begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y) \\ \cos y + \cos x &= 2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) \\ \cos y - \cos x &= 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y) \end{aligned} \right\}.$$

Durch diese Gleichungen wird die Summe oder die Differenz dieser Functionen auf Producte derselben gebracht, welche Producte zur Berechnung mit Logarithmen viel bequemer sind.

§. 97. (Sinus und Cosinus der halben und doppelten Bogen.) Setzt man in den ersten Gleichungen des §. 96. die Gröfse $x = \gamma$, so erhält man

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \text{und } \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, \end{aligned}$$

wo man, nach §. 95., statt der letzten Gleichung auch die folgende hat:

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1.$$

I. Setzt man in den letzten Ausdrücken von $\cos 2x$ statt x die Gröfse $\frac{1}{2}x$, so erhält man

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}x &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \\ \cos \frac{1}{2}x &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \end{aligned}$$

§. 98. (Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen durch die der einfachen.) Setzt man in den ersten Gleichungen des §. 96.

statt x die Gröfse $(n+1)x$
und statt γ die Gröfse x ,

so erhält man

$$\begin{aligned} \sin (n+2)x &= 2 \sin (n+1)x \cdot \cos x - \sin nx \\ \cos (n+2)x &= 2 \cos (n+1)x \cdot \cos x - \cos nx \end{aligned} \quad \dots (a).$$

Substituirt man dann in den beyden letzten Ausdrücken für die Gröfse n nach der Ordnung die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, . . . , so erhält man folgende Gleichungen, in welchen der Kürze wegen

$p = \sin x$ und $q = 2 \cos x$
gesetzt worden ist,

$$\begin{aligned} \sin 2x &= pq, \\ \sin 3x &= p(q^2 - 1), \\ \sin 4x &= p(q^3 - 2q), \end{aligned}$$

$$\sin 5x = p(q^4 - 3q^2 + 1),$$

$$\sin 6x = p(q^5 - 4q^3 + 3q),$$

$$\sin 7x = p(q^6 - 5q^4 + 9q^2 - 1) \text{ u. f.};$$

und eben so

$$2. \cos 2x = q^2 - 2,$$

$$2. \cos 3x = q^3 - 3q,$$

$$2. \cos 4x = q^4 - 4q^2 + 2,$$

$$2. \cos 5x = q^5 - 5q^3 + 5q,$$

$$2. \cos 6x = q^6 - 6q^4 + 9q^2 - 2,$$

$$2. \cos 7x = q^7 - 7q^5 + 14q^3 - 7q \text{ u. f.}$$

Diese Ausdrücke, welche sich leicht fortsetzen lassen, geben die Sinus und Cosinus der 2, 3, 4, ... fachen Bogen, wenn die Sinus und Cosinus der einfachen Bogen bekannt sind.

§. 99. (Potenzen der Sinus und Cosinus der einfachen Bogen durch die Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen.) Noch leichter erhält man die Auflösung der des §. 98. entgegengesetzten Aufgabe, wenn man nämlich die 2^{ten}, 3^{ten}, 4^{ten}, ... Potenzen des Sinus oder des Cosinus eines Bogens bloß durch die ersten Potenzen des Sinus oder Cosinus desselben 2, 3, 4, ... fachen Bogens ausdrücken will.

So hat man z. B. aus §. 97. die beyden Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x &= 1 - \cos 2x \\ \text{und } 2 \cos^2 x &= 1 + \cos 2x \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste durch $\sin x$, und bemerkt man, dafs nach §. 96.

$$\sin x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin x$$

ist, so hat man

$$4 \sin^3 x = 3 \sin x - \sin 3x.$$

Multipliziert man auch diese Gleichung wieder durch $\sin x$, so hat man

$$4 \sin^4 x = 3 \sin^2 x - \sin x \sin 3x.$$

Da aber, wie zuvor,

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x),$$

und nach demselben §. 96.

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x$$

ist, so erhält man

$$8 \sin^4 x = 3 - 4 \cos 2x + \cos 4x.$$

Fährt man auf diese Art fort, und behandelt eben so die zweyte der oben aufgestellten Gleichungen

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x,$$

so erhält man folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x &= -\cos 2x + 1, \\ 4 \sin^3 x &= -\sin 3x + 3 \sin x, \\ 8 \sin^4 x &= \cos 4x - 4 \cos 2x + 3, \\ 16 \sin^5 x &= \sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x, \\ 32 \sin^6 x &= -\cos 6x + 6 \cos 4x - 15 \cos 2x + 10, \\ 64 \sin^7 x &= -\sin 7x + 7 \sin 5x - 21 \sin 3x + 35 \sin x, \\ 128 \sin^8 x &= \cos 8x - 8 \cos 6x + 28 \cos 4x - 56 \cos 2x + 35, \\ 256 \sin^9 x &= \sin 9x - 9 \sin 7x + 36 \sin 5x - 84 \sin 3x + 126 \sin x, \\ 512 \sin^{10} x &= -\cos 10x + 10 \cos 8x - 45 \cos 6x + 120 \cos 4x - 210 \cos 2x + 126 \text{ u. f.;} \end{aligned}$$

und auf dieselbe Weise

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 x &= \cos 2x + 1, \\ 4 \cos^3 x &= \cos 3x + 3 \cos x, \\ 8 \cos^4 x &= \cos 4x + 4 \cos 2x + 3, \\ 16 \cos^5 x &= \cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x, \\ 32 \cos^6 x &= \cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10, \\ 64 \cos^7 x &= \cos 7x + 7 \cos 5x + 21 \cos 3x + 35 \cos x, \\ 128 \cos^8 x &= \cos 8x + 8 \cos 6x + 28 \cos 4x + 56 \cos 2x + 35, \\ 256 \cos^9 x &= \cos 9x + 9 \cos 7x + 36 \cos 5x + 84 \cos 3x + 126 \cos x, \\ 512 \cos^{10} x &= \cos 10x + 10 \cos 8x + 45 \cos 6x + 120 \cos 4x + 210 \cos 2x + 126 \text{ u. f.} \end{aligned}$$

Diese Reihen sind ebenfalls leicht fortzusetzen, da die numerischen Coefficienten die des Binoms (§. 58.) sind, nämlich

$$n \cdot \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}, \quad \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ u. f.,}$$

mit Ausnahme des letzten Gliedes, das nur der Hälfte des binomischen Coefficienten gleich ist.

Die letzten Ausdrücke werden uns in der Folge sehr wesentliche Dienste leisten.

§. 100. (Tangenten der halben und doppelten Bogen.) Nach den ersten Gleichungen des §. 97. ist

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{und}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

woraus sofort, durch Division, folgt:

$$\text{Tang } 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x};$$

oder wenn man Zähler und Nenner dieses Bruches durch $\cos^2 x$ dividirt:

$$\text{Tang } 2x = \frac{2 \text{Tang } x}{1 - \text{Tang}^2 x}.$$

Setzt man in diesem Ausdrücke statt x die Größe $\frac{1}{2}x$, so hat man

$$\text{Tang } x - \text{Tang } x \cdot \text{Tang}^2 \frac{1}{2}x = 2 \text{Tang} \frac{1}{2}x.$$

Löst man aber diese in Beziehung auf $\text{Tang} \frac{1}{2}x$ quadratische Gleichung (nach §. 68.) auf, so erhält man

$$\text{Tang} \frac{1}{2}x = \frac{\text{Tang } x}{1 + \sqrt{1 + \text{Tang}^2 x}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \text{Tang}^2 x}}{\text{Tang } x};$$

oder auch, wenn man in diesem Ausdrücke statt $\text{Tang } x$ seinen Werth $\frac{\sin x}{\cos x}$ substituirt:

$$\text{Tang} \frac{1}{2}x = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

I. Nach §. 95. haben wir überdies

$$\sin x = \frac{\text{Tang } x}{\sqrt{1 + \text{Tang}^2 x}};$$

also ist auch, wenn man in dieser Gleichung den so eben gefundenen Werth von

$$\text{Tang } x = \frac{2 \text{Tang } \frac{1}{2} x}{1 - \text{Tang}^2 \frac{1}{2} x}$$

substituirt:

$$\text{Sin } x = \frac{2 \text{Tang}^2 \frac{1}{2} x}{1 + \text{Tang}^2 \frac{1}{2} x},$$

und eben so erhält man auch

$$\text{Cos } x = \frac{1 - \text{Tang}^2 \frac{1}{2} x}{1 + \text{Tang}^2 \frac{1}{2} x}.$$

§. 101. (Tangente der Summe und Differenz zweyer Winkel.) Dividirt man die Gleichungen (C) des §. 94. unter einander, so erhält man sofort

$$\text{Tang } (x + y) = \frac{\text{Tang } x + \text{Tang } y}{1 - \text{Tang } x \text{Tang } y} \quad \text{und}$$

$$\text{Tang } (x - y) = \frac{\text{Tang } x - \text{Tang } y}{1 + \text{Tang } x \text{Tang } y}.$$

I. Dieselben vier Gleichungen geben auch, wenn man die beyden ersten durch $\text{Cos } x \text{Cos } y$, und die beyden letzten durch $\text{Sin } x \text{Cos } y$ dividirt, für die Summe oder Differenz der Tangenten zweyer Winkel

$$\text{Tang } x \pm \text{Tang } y = \frac{\text{Sin } (x \pm y)}{\text{Cos } x \text{Cos } y} \quad \text{und}$$

$$\text{Cotg } x \pm \text{Tang } y = \frac{\text{Cos } (x \mp y)}{\text{Sin } x \text{Cos } y}.$$

II. Setzt man aber in der ersten Gleichung dieses §. 101. die Gröfse $x = \frac{1}{2} R$, oder $x = 45^\circ$ und $y = \frac{1}{2} x$, so erhält man

$$\text{Tang } \frac{90^\circ + x}{2} = \frac{1 + \text{Tang } \frac{x}{2}}{1 - \text{Tang } \frac{x}{2}} = \frac{\text{Cos } \frac{x}{2} + \text{Sin } \frac{x}{2}}{\text{Cos } \frac{x}{2} - \text{Sin } \frac{x}{2}};$$

also auch, wenn man Zähler und Nenner dieses Bruches durch

$$\text{Cos } \frac{x}{2} + \text{Sin } \frac{x}{2}$$

multiplicirt:

$$\text{Tang } \frac{90^\circ + x}{2} = \frac{1 + \text{Sin } x}{\text{Cos } x} = \frac{\text{Cos } x}{1 - \text{Sin } x} = \sqrt{\frac{1 + \text{Sin } x}{1 - \text{Sin } x}},$$

und eben so ist auch, wenn man in der letzten Gleichung die Gröfse x negativ nimmt:

$$\text{Tang } \frac{90^\circ - x}{2} = \frac{1 - \text{Sin } x}{\text{Cos } x} = \frac{\text{Cos } x}{1 + \text{Sin } x} = \sqrt{\frac{1 - \text{Sin } x}{1 + \text{Sin } x}}.$$

Dieſs ſind die vorzüglichſten Relationen, die man zwiſchen den trigonometriſchen Functionen aufgeſtellt hat. Wir werden bald ſehen, wie man dieſelben zur näheren Beſtimmung der Drey-ecke anwenden kann.

§. 102. (Differentialien der trigonometriſchen Functionen.) Durch das Vorhergehende haben wir demnach eine neue Gattung von Functionen kennen gelernt, die ſehr merkwürdige Eigenſchaften haben. Indem wir ſie den bereits oben erhaltenen Functionen der Potenzen, der Logarithmen und der Exponentialgröſſen, von welchen ſie ſich weſentlich unterſcheiden, hinzufügen, wird es, zum Schluſſe dieſes Gegenſtandes, angemessen ſeyn, auch die Differentialien dieſer neuen Functionen zu beſtimmen.

Um zuerſt das Differential des Sinus eines gegebenen Bogens, oder um den Ausdruck von

$$d . \sin x$$

zu finden, ſo wird man nach dem, was oben (§. 46. u. f.) geſagt worden iſt, die Gleichung haben:

$$d . \sin x = \sin(x + dx) - \sin x.$$

Allein nach den Gleichungen (C) des §. 94. iſt

$$\sin(x + dx) = \sin x \cos dx + \cos x \sin dx,$$

also iſt auch

$$d . \sin x = \sin x (\cos dx - 1) + \cos x . \sin dx.$$

Wenn nun der Bogen dx eines Kreiſes immer abnimmt, oder wenn er ſich der Grenze Null immer mehr nähert, ſo entſteht die Frage, ob auch die beyden Gröſſen

$$\cos dx - 1 \quad \text{und} \quad \sin dx$$

ſich dabey einer beſtimmten Grenze immer mehr nähern, ohne ſie eher, als bis $dx = 0$ iſt, zu erreichen.

Für die erſte Gröſſe $(\cos dx - 1)$ hat man, nach §. 97., für jeden Werth von dx

$$\cos dx = 1 - 2 \sin^2 \frac{dx}{2},$$

woraus folgt, daſs, für ein unendlich kleines dx , die Gröſſe $\cos dx$ gleich der Einheit wird, wie wir auch ſchon oben §. 89, II.

gefunden haben, und wie selbst unmittelbar aus der oben (§. 87, V.) gegebenen Erklärung des Cosinus hervorgeht. Es ist demnach, an der erwähnten Grenze, $1 - \cos dx = 0$ oder $\frac{1}{\cos dx} = 1$.

Um nun auch die Grenze der immer abnehmenden Gröfse $\sin dx$ zu finden, wollen wir bemerken, dafs, im ersten Quadranten des Kreises, die Tangente (§. 90.) eines jeden Bogens immer gröfser, als ihr Bogen, und eben so dieser Bogen immer gröfser, als sein Sinus ist, was man so auszudrücken pflegt (§. 6.)

$$\text{Tang } dx > dx > \sin dx.$$

Dividirt man alle diese Gröfsen durch $\sin dx$, so ist auch noch

$$\frac{\text{Tang } dx}{\sin dx} > \frac{dx}{\sin dx} > 1,$$

oder endlich, da $\frac{\text{Tang } dx}{\sin dx} = \frac{1}{\cos dx}$ ist,

$$\frac{1}{\cos dx} > \frac{dx}{\sin dx} > 1.$$

So lange daher der immer abnehmende Bogen dx die Grenze Null seines Abnehmens noch nicht erreicht hat, ist die Gröfse

$$\frac{dx}{\sin dx}$$

immer gröfser als die Einheit, und zugleich immer kleiner als $\frac{1}{\cos dx}$, welcher letzte Ausdruck sich selbst wieder, nach dem Vorhergehenden, der Einheit desto mehr nähert, je kleiner dx ist; woraus daher folgt, dafs die Einheit selbst die Grenze seyn mufs, welcher sich die Gröfse

$$\frac{dx}{\sin dx}$$

immer mehr nähert, je kleiner der Bogen dx ist, und dafs man also, für diese Grenze selbst, hat:

$$1 - \cos dx = 0 \quad \text{und} \quad \sin dx = dx.$$

Substituirt man diese Werthe in den vorhergehenden Ausdruck von $d \cdot \sin x$, so erhält man

$$d \cdot \sin x = dx \cdot \cos x$$

für das gesuchte Differential des Sinus eines gegebenen Kreisbogens, dessen Halbmesser gleich 1 ist.

I. Ist so das Differential des Sinus eines Bogens bekannt, so findet man auch sofort das Differential der anderen trigonometrischen Functionen.

Setzt man z. B. in der letzten Gleichung, in welcher x jeden willkürlichen Werth haben kann, statt x die GröÙe $90^\circ - x$, so hat man

$$d \cdot \sin(90 - x) = d \cdot (90 - x) \cdot \cos(90 - x);$$

oder da

$$\sin(90 - x) = \cos x \quad \text{und} \quad \cos(90 - x) = \sin x$$

ist (§. 94, B.), so hat man auch

$$d \cdot \cos x = - dx \sin x.$$

II. Weiter ist

$$\tan x \cdot \cos x = \sin x;$$

also auch, wenn man dieses Product nach §. 49. differentiirt:

$$d \cdot \sin x = \tan x \cdot d \cdot \cos x + \cos x \cdot d \cdot \tan x,$$

und daher, wenn man statt $d \cdot \sin x$ und $d \cdot \cos x$ die vorigen Ausdrücke substituirt, und die ganze Gleichung durch $\cos x$ dividirt:

$$d \cdot \tan x = dx (1 + \tan^2 x);$$

oder, was dasselbe ist (§. 95, I.)

$$d \cdot \tan x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Und eben so findet man auch

$$d \cdot \cotg x = - \frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$d \cdot \sec x = \frac{dx \sin x}{\cos^2 x},$$

$$d \cdot \operatorname{cosec} x = - \frac{dx \cos x}{\sin^2 x}.$$

III. Auf gleiche Weise erhält man, da $d \cdot \log u = \frac{du}{u}$ ist, wenn man $u = \sin x$ setzt,

$$d \cdot \log \sin x = dx \cotang x \quad \text{und}$$

$$d \cdot \log \cos x = - dx \tan x,$$

so wie auch

$$d \cdot \log \operatorname{Tang} x = \frac{dx}{\sin x \cos x} = \frac{2 dx}{\sin 2x},$$

$$d \cdot \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x = \frac{dx}{\sin x}, \text{ und}$$

$$d \cdot \log \operatorname{Tang} \frac{90^\circ + x}{2} = \frac{dx}{\cos x},$$

$$d \cdot \log \operatorname{Tang} \frac{90^\circ - x}{2} = - \frac{dx}{\cos x} \text{ u. f.}$$