

Vierzehntes Capitel.

Erste Grundsätze der Geometrie.

§. 79. (Erklärungen.) Der Gegenstand der Geometrie ist die Messung des Raumes. — *Körper* ist eine bestimmte Ausdehnung des Raumes nach allen seinen drey Richtungen (der Länge, Breite und Höhe). — *Fläche* ist die Grenze der Körper, also Ausdehnung nach zwey Richtungen (der Länge und Breite). — *Linie* ist die Grenze der Fläche, also Ausdehnung bloß nach einer Richtung (der Länge). — *Punct* endlich ist die Grenze der Linie, also ohne alle Ausdehnung.

I. *Gerade* heist die Linie, welche in allen ihren Puncten dieselbe Richtung hat; jede andere Linie heist *krumm*. — *Ebene* heist die Fläche, in welcher man zwischen je zwey Puncten derselben eine gerade, ganz in der Fläche liegende Linie ziehen kann; jede andere Fläche heist *krumm*.

II. Die *Neigung* zweyer Geraden AB und AC (Fig. 1) gegen einander heist der *Winkel* dieser zwey Geraden, wo also die Länge dieser Geraden willkürlich oder unbegrenzt ist. — Man bezeichnet den Winkel so, daß der Buchstabe A bey dem Durchschnitte beyder Geraden (des *Scheitels* des Winkels) zwischen den beyden andern Zeichen B und C gestellt wird, also durch BAC oder durch CAB ; oder auch, wo keine Zweydeutigkeit zu besorgen ist, kürzer bloß durch das Zeichen A des Scheitels, oder endlich durch einen in den Winkel eingeschriebenen Buchstaben x . — Die beyden Geraden AB , AC endlich, deren Neigung durch den Winkel ausgedrückt wird, oder die den Winkel begrenzen, heissen die *Schenkel* des Winkels.

III. Wird eine dieser zwey Geraden AB oder AC , z. B. die letzte nach dem Punct D hin, auf der andern Seite des Scheitels A , verlängert, so bildet diese Verlängerung AD mit der ersten Geraden AB wieder einen Winkel $BAD = \gamma$, und die beyden Winkel x und γ , welche eine Gerade BA mit einer andern

Geraden CD in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte A bildet, werden *Nebenwinkel* genannt. Für sie ist der mittlere Schenkel AB beyden Winkeln gemeinschaftlich.

IV. Sind die beyden sich in dem Puncte A schneidenden Geraden EA und CD (Fig. 2) so gegen einander geneigt, daß die Nebenwinkel CAE und EAD einander gleich sind, oder ist die Neigung des gemeinschaftlichen Schenkels AE gegen die beyden Theile AC und AD der andern Geraden dieselbe, so heißen die Nebenwinkel, für diesen besondern Fall, *rechte Winkel*, und die Geraden EA und CD heißen auf einander *senkrecht* (oder lothrecht oder auch perpendicular). Ein kleinerer Winkel, als ein rechter, wie BAC , heist *spitz*, und ein grösserer, wie BAD , heist *stumpf*. — Alle Winkel, ausser dem rechten, heißen auch, mit einem gemeinsamen Worte, *schiefe Winkel*.

V. Zwey in derselben Ebene liegende Gerade heißen *gleichlaufend* oder *parallel*, wenn sie gegen jede dritte sie schneidende Gerade, auf derselben Seite, dieselbe Neigung haben. So sind die beyden Geraden AB und CD (Fig. 3) parallel, wenn von den Winkeln, die sie mit einer dritten Geraden EF bilden, der Winkel $x=y$ oder der Winkel $u=z$ ist.

VI. Jeder von Linien begrenzte Raum heist *Figur*. Sind diese Grenzlinien Gerade, so heist die Figur *Vieleck* oder *Polygon*.

§. 80. (Dreyecke.) Ein von drey geraden Linien begrenzter Raum heist *Dreyeck*, die einfachste Figur unter den Polygonen. Die Grenzlinien heißen die *Seiten*, und die Neigungen dieser Seiten gegen einander heißen die *Winkel* des Dreyecks.

I. Das Dreyeck ist *gleichschenkelig*, wie ABC (Fig. 4), wenn zwey Seiten, z. B. AB und BC desselben unter sich gleich sind; es ist *gleichseitig*, wie ABC (Fig. 5), wenn alle drey Seiten desselben unter sich gleich sind; und es ist *rechtwinklig*, wie ABC (Fig. 6), wenn es einen rechten Winkel (A oder BAC) hat.

II. In dem rechtwinkligen Dreyecke ABC (Fig. 6) heist die dem rechten Winkel A gegenüberstehende Seite BC die *Hypotenuse*, und die beyden andern Seiten AB und AC heißen die *Katheten* des rechtwinkligen Dreyecks.

III. Wenn man endlich die Seite AC (Fig. 5) irgend eines Dreyecks ABC nach D verlängert, so wird der durch diese Verlängerung CD entstehende Winkel BCD aufser dem Dreyeck der *äußere* Winkel, und A und B werden die zwey jenem *entgegengesetzten inneren* Winkel des Dreyecks genannt.

§. 81. (Vierecke.) Ein von vier Geraden begrenztes Polygon wird *Viereck* genannt. — Sind alle Seiten des Vierecks gleich und alle Winkel recht, so heist es *Quadrat*, wie $ABCD$ (Fig. 7). Sind bloß die Seiten alle unter sich gleich, aber die Winkel schief, so heist es *Rhombus*. Sind alle Winkel recht, aber bloß die zwey gegenüberstehenden Seiten unter sich parallel, so heist es ein *Rechteck*, wie $ABCD$ (Fig. 8). Sind endlich in einem Viereck die gegenüberstehenden Seiten unter sich parallel, ohne über die Winkel etwas festzusetzen, so heist es *Parallelogramm*, wie $ABCD$ oder $abcd$ (Fig. 9).

Das Rechteck, der Rhombus und das Quadrat sind daher ebenfalls Parallelogramme, so wie das Quadrat ein besonderer Fall des Rechteckes ist.

Eine Gerade AC oder BD (Fig. 9), welche die Scheitel zweyer gegenüberstehender Winkel eines Vierecks verbindet, wird *Diagonale* genannt.

§. 82. (Kreise) Ein Kreis $AMB N$ (Fig. 10) entsteht, wenn eine in ihrer Länge unveränderliche Gerade CA , CM , CM' , . . . in einer Ebene um ihren festen Endpunct C gedreht wird, und mit dem andern beweglichen Endpuncte A , M , M' , . . . Spuren in der Ebene zurückläßt.

Der feste Endpunct C der beweglichen Geraden heist der *Mittelpunct* (Centrum), und die Geraden CA , CM , CM' , . . . heissen die *Halbmesser* (Radien) des Kreises. Der doppelte Radius ACB wird der *Durchmesser* (Diameter) des Kreises, der von dem beschreibenden Endpuncte A des Radius rings um den Mittelpunct C zurückgelegte Weg $AMBNA$ aber wird die *Peripherie* (der Umfang), und jeder Theil AM , MM' , . . . dieser Peripherie wird ein *Bogen* (*Arcus*) des Kreises genannt.

I. Die Gerade MPN , welche die beyden Endpuncte M und N eines Bogens MN verbindet, heist die *Sehne* (*Chorde*) dieses

Bogens. — Der Theil $MANC$ der Kreisebene, der von dem Bogen MN und von den beyden Radien CM und CN seiner Endpuncte M und N begrenzt wird, heisst *Ausschnitt* (Sector) des Kreises, so wie derjenige Theil $MPNA$ der Kreisebene, der von dem Bogen MN und seiner Sehne MPN begrenzt wird, der *Abschnitt* (Segment) des Kreises genannt wird.

§. 83. (Gleichheit und Aehnlichkeit der Figuren.)

Zwey Figuren heissen *gleich*, wenn sie, auf einander gelegt, sich in allen Puncten vollkommen decken können.

Zwey Figuren heissen *ähnlich*, wenn jeder Winkel, der durch die Verbindung zweyer Scheitel mit den übrigen, mittelst gerader Linien, entsteht, in der einen Figur dem homologen (gleichliegenden) Winkel in der andern Figur gleich ist. So sind z. B. die beyden Parallelogramme (Fig. 9) einander ähnlich, wenn der Winkel $BAD = bad$ und $CAD = cad$, und $ADB = adb$ u. f. ist. So sind daher auch zwey Dreyecke ähnlich, wenn jeder Winkel des einen dem homologen Winkel des andern gleich ist, wobey ihre Seiten sehr verschieden seyn können.

Ähnliche Figuren sind demnach solche, welche dieselbe Gestalt, ohne Rücksicht auf ihre Gröfse, haben, oder solche, die sich blofs durch ihre Gröfse, und sonst durch nichts, unterscheiden. Gleiche Figuren aber sind gar nicht verschieden, sie sind völlig identisch.

Wenn endlich zwey Figuren, welches auch die Verschiedenheit ihrer Gestalt seyn mag, mit ihrem Umfange (Perimeter) gleich grofse Flächen einschliessen, so heissen diese Figuren *äquivalent*.

§. 84. (Folgerungen aus den vorhergehenden Erklärungen.)

I. In Beziehung auf gerade Linien und Winkel.

Aus den vorher gefundenen Erklärungen fließen sofort, ohne weitere Erläuterungen, folgende Sätze:

A. Durch zwey Puncte geht nur eine einzige gerade, aber unzählige krumme Linien. — Unter allen Linien zwischen zwey

Puncten ist die Gerade die *kürzeste*, daher sie auch als das *Mafs* der Entfernung zweyer Puncte von einander gebraucht wird.

B. Alle rechten Winkel sind unter sich gleich, weil sie sich, auf einander gelegt, vollkommen decken (§. 79. und 83).

C. Die Summe zweyer *Nebenwinkel* (§. 79, III.), wie CAB und EAD (Fig. 2) ist immer gleich zwey rechten Winkeln. Denn ist AE senkrecht auf CD , und nennt man z den Winkel BAE , so ist der erste jener Winkel oder so ist CAB um z kleiner, und der zweyte EAD ist um z gröfser, als ein rechter Winkel CAE oder EAD .

D. Also ist auch die Summe aller an einer Seite der Linie CD um einen Punct A liegender Winkel desselben Scheitels gleich *zwey* rechten Winkeln. So ist die Summe der Winkel CAB , BAF , FAD gleich zwey rechten Winkeln. Daraus folgt sofort, dafs die Summe aller rings um einen Punct liegender Winkel gleich *vier* rechten Winkeln ist. So ist die Summe der vier Winkel M , N , m und n der Fig. 11 gleich vier rechten Winkeln.

E. Wenn, wie in der so eben erwähnten Fig. 11, zwey Gerade AB und ED sich in einem Puncte schneiden, so sind die sich paarweise gegenüberstehenden Winkel M und m , so wie N und n , unter sich gleich. Man nennt diese Winkel *Scheitelwinkel*. — Nach (C) ist nämlich die Summe der Winkel M und N , so wie auch die Summe der Winkel m und n gleich zwey rechten Winkeln; also ist auch, wenn man jede dieser Summen um die Gröfse M vermindert, der Winkel N gleich seinem Scheitelwinkel m ; und eben so findet man auch, dafs der Winkel M gleich seinem Scheitelwinkel n ist.

II In Beziehung auf den Kreis.

F. Aus der oben (§. 82.) gegebenen Erklärung des Kreises folgt sofort, dafs in jedem Kreise alle Halbmesser unter sich, also auch alle Durchmesser unter sich gleich sind, dafs also alle Puncte der Peripherie von dem Mittelpuncte des Kreises gleiche Entfernung haben, und dafs endlich jeder Durchmesser die Peripherie sowohl als auch die Fläche des Kreises in zwey gleiche Hälften theilt.

G. Da die Peripherie des Kreises, nach der oben erwähnten Entstehung desselben, eine stetige (ununterbrochene) krumme

Linie ist, die durch die gleichförmige Drehung des Halbmessers um den Mittelpunkt erzeugt wird, so werden zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte auch gleiche Theile der Peripherie, d. h. gleich große Bogen gehören, so daß, wenn z. B. der Winkel ACM' (Fig. 10) zwey Mal so groß ist, als ACM , auch der Bogen AM' das Doppelte von dem Bogen AM betragen wird, da kein Grund angegeben werden kann, warum Bogen und Winkel, die beyde zugleich in irgend einem Punkte, z. B. in A , anfangen, sich auf verschiedene Weise ändern sollten. Dasselbe wird auch von den Flächen AMC , $AM'C$ gelten, die sich wie ihre Winkel ACM , ACM' , also auch wie ihre Bogen AM , AM' verhalten werden.

H. Wie daher die gerade Linie als das Maß der Längen (A) oder als das Maß der Distanz zweyer Punkte von einander gebraucht wird, so wird auch der Bogen eines Kreises, als der einfachste aller krummen Linien, als das Maß der Drehung einer Geraden (des Radius) um ihren Endpunkt, oder als das Maß der Neigung zweyer Geraden gegen einander, d. h. als das Maß des Winkels, zwischen welchem dieser Bogen enthalten ist, gebraucht werden.

I. Man pflegt die ganze Peripherie eines Kreises in 360 gleiche Theile, die man *Grade* nennt, einzutheilen. Da aber nach (D) die Summe aller um einen Punkt liegender Winkel gleich vier rechten Winkeln ist, so wird auch der rechte Winkel oder sein Maß, d. h. so wird auch der vierte Theil (Quadrant) der Peripherie des Kreises 90 solcher Grade betragen.

Um noch kleinere Theile des Winkels, oder, was dasselbe ist, des Bogens angeben zu können, theilt man jeden Grad in 60 *Minuten*, und jede Minute wieder in 60 gleiche Theile, die man *Secunden* nennt. Die Grade bezeichnet man durch $^{\circ}$, die Minuten durch $'$, und die Secunden durch $''$, so daß z. B. der siebente Theil des rechten Winkels oder der 28^{ste} Theil der ganzen Peripherie gleich ist

$$\frac{90^{\circ}}{7} = 12^{\circ}.857142857 \dots$$

oder gleich

$$12^{\circ} 51' 25''.714 \dots$$

das heißt, gleich 12 Grade, 51 Minuten und $25 \frac{714}{1000}$ Secunden.

§. 85. (Summe der Winkel eines Dreyecks.) Seyen zwey ihrer Lage nach unveränderte Gerade AM und AN (Fig. 12) gegeben, die demnach auch einen unveränderlichen Winkel A zwischen sich einschließen. Wenn diese beyden Geraden durch eine dritte Gerade BC in irgend einer Richtung geschnitten werden, so entsteht ein Dreyeck ABC .

Es bewege sich nun diese dritte Linie BC , jedoch so, daß sie immer durch denselben Punct B geht, das heist also, es drehe sich diese Linie BC um den Punct B , so daß sie z. B. in die Lage BC' kommt. Bey einer solchen Bewegung ist für sich klar, daß, so wie sich der Winkel B ändert, sofort auch der Winkel C geändert werden muß, daß demnach beyde Größen B und C sich zugleich ändern, daß also auch, da A der Voraussetzung gemäß immer derselbe Winkel bleibt, daß also auch, bey dieser Bewegung der Linie BC , die beyden Größen

$$(A + B) \text{ und } C$$

sich zu gleicher Zeit ändern werden.

Bewegt sich aber dieselbe Gerade BC so, daß sie mit sich selbst immer parallel bleibt, daß sie also, der obigen Erklärung (§. 79, V) zu Folge, mit den beyden festen Geraden AM und AN immer dieselben Winkel bildet, so wird, wenn diese Gerade BC z. B. in die Lage $B'C'$ gekommen ist, der Winkel $B = B'$ sowohl, als auch der Winkel $C = C'$ noch derselbe seyn, die beyden Größen B und C werden sich nicht geändert haben, und da auch, der erwähnten Voraussetzung gemäß, der Winkel A immer derselbe bleibt, so werden auch, bey dieser Bewegung der Linie BC , die beyden Größen

$$(A + B) \text{ und } C$$

zu gleicher Zeit dieselben constanten Größen bleiben.

Da demnach diese zwey Größen $(A + B)$ und C immer, entweder zugleich constant oder auch zugleich veränderlich sind, so muß eine jede derselben von der anderen abhängen, oder so muß die eine dieser Größen eine *Function* (§. 33) der anderen seyn, so daß, wenn in einem Dreyecke die eine dieser Größen, z. B. $(A + B)$ gegeben ist, dadurch auch zugleich die andere GröÙe C gegeben wird.

I. Wenn daher in zwey oder mehreren Dreyecken ABC die Summe zweyer Winkel z. B. $(A + B)$ in dem einen, gleich der Summe zweyer Winkel in dem andern Dreyecke gleich ist, so müssen auch die dritten Winkel C dieser Dreyecke unter sich gleich seyn.

II. Dieß vorausgesetzt, sey nun ABC (Fig. 13) ein in A rechtwinkliges Dreyeck und AD senkrecht auf die Hypotenuse BC .

Durch diese Senkrechte AD entstehen zwey Dreyecke ABD und ABC , welche den Winkel B gemeinschaftlich und welche die beyden rechten Winkel BAC und BDA (nach §. 84, B.) unter sich gleich haben. In diesen beyden Dreyecken ist also die Summe der zwey Winkel B und BDA in dem einen Dreyecke, gleich der Summe B und BAC in dem andern, also ist auch (nach Nro. I.) der dritte Winkel

$$BAD = C.$$

Ganz eben so haben auch die beyden Dreyecke ACD und ABC den Winkel C gemeinschaftlich und die beyden rechten Winkel BAC und CDA unter sich gleich, also ist auch der dritte Winkel

$$CAD = B.$$

Addirt man diese zwey Gleichungen, so erhält man

$$BAD + CAD = B + C,$$

oder da $BAD + CAD = BAC$ ein rechter Winkel ist, den wir hier und in der Folge überhaupt durch R bezeichnen wollen, so ist

$$B + C = R,$$

das heist: *in jedem rechtwinkligen Dreyecke ist die Summe der beyden schiefen Winkel gleich einem rechten Winkel.*

III. Sey nun ABC (Fig. 14) irgend ein anderes, nicht rechtwinkliges Dreyeck, und wieder AD senkrecht auf BC .

Ist der Winkel $BAD = x$ und $CAD = y$, so hat man, da durch die Senkrechte AD das gegebene Dreyeck ABC in zwey andere bey D rechtwinklige Dreyecke ABD und ACD getheilt wird, nach Nro. II. in dem ersten Dreyecke ABD

$$B + x = R,$$

und eben so in dem zweyten Dreyecke ACD

$$C + y = R.$$

Addirt man wieder diese beyden Gleichungen, so hat man, da $x + y = A$ ist:

$$A + B + C = 2R;$$

das heisst: *In jedem Dreyecke ist die Summe der drey Winkel desselben gleich zwey rechten Winkeln.*

Dasselbe hat auch Statt, wenn das Loth AD (wie in der zweyten Zeichnung der Fig. 14) aufser dem gegebenen Dreyecke ABC , auf die Verlängerung der Seite BC fällt. Denn auch hier ist in dem ersten der so entstehenden rechtwinkligen Dreyecke BAD (nach Nr. II.)

$$B + BAD = R,$$

und eben so ist in dem zweyten Dreyecke CAD der Winkel

$$ACD + CAD = R,$$

und dieser beyden Gleichungen Differenz ist

$$B + BAD - CAD - ACD = 0.$$

Setzt man aber wieder $BAC = x$ und $ACB = y$, so hat man

$$BAD - CAD = BAC = x,$$

und überdieß (nach §. 84, C.) für die Nebenwinkel

$$ACD + y = 2R \text{ oder } ACD = 2R - y,$$

so dafs daher die vorhergehende Gleichung wird:

$$B + x - (2R - y) = 0,$$

oder

$$B + x + y = 2R, \text{ wie zuvor.}$$

IV. Daraus folgt zugleich, dafs in jedem Dreyecke ABC (Fig. 5) der äufsere (durch die Verlängerung einer Seite AC entstandene) Winkel BCD gleich ist der Summe der beyden inneren entgegengesetzten Winkel A und B (vergl. §. 80, III.). Denn da (nach §. 84, C.) die Nebenwinkel $BCD + C = 2R$, und da eben so auch $A + B + C = 2R$ ist, so hat man auch für den erwähnten äufseren Winkel

$$BCD = A + B.$$

Auch folgt aus Nr. III. sofort, dafs in einem Dreyecke nur ein einziger Winkel ein rechter, oder auch ein stumpfer Winkel seyn kann.

§. 86. (Eigenschaften der parallelen Linien.)

Wenn AB und CD (Fig. 3) zwey parallele Grade sind, das heist, nach §. 79, V., wenn der Winkel $x=y$ ist, ist auch (A) der Winkel $u=y$, und eben so ist (B) die Summe der beyden Winkel m und y , oder auch der beyden n und u gleich zwey rechten Winkeln.

Man nennt aber die beyden Winkel u und y (oder auch m und n) die *Wechselwinkel*, so wie man die beyden Winkel m und y (oder auch n und u) die *inneren Winkel* der beyden Parallelen zu nennen pflegt.

Bey parallelen Linien sind daher, nach (A), die Wechselwinkel gleich, und, nach (B), ist die Summe der zwey inneren Winkel gleich $2R$.

Denn, da $x=y$, und da immer (nach §. 84, E.) die Scheitelwinkel $x=u$ sind, so ist auch

$$u = y \dots \text{wie in (A).}$$

Da ferner $x=y$, und da immer (nach §. 84, C.) die Summe der zwey Nebenwinkel

$$m + x = 2R$$

ist, so hat man auch

$$m + y = 2R \dots \text{wie in (B).}$$

I. Jede dieser drey hier ausgesprochenen Bedingungen

$$x = y, \quad u = y, \quad m + y = 2R,$$

hat die beyden anderen zur Folge. Denn hat z. B. die zweyte Bedingung Statt, oder ist $u=y$, so hat man (da nach §. 84, E. immer $u=x$ ist), auch sofort $x=y$, welches die erste Bedingung ist. Da überdiß auch immer (nach §. 84, C.) die Summe der Winkel $u+m=2R$ seyn muß, so ist auch $y+m=2R$, welches die dritte Bedingung ist.

II. Und eben so umgekehrt: Hat eine dieser drey Bedingungen nicht Statt, so haben auch die beyden anderen nicht Statt.

Denn ist z. B. $x=y+a$, wo a irgend eine positive oder negative Gröfse bezeichnet, so hat man doch immer (nach §. 84, C.)

$$m + x = 2R \quad \text{und} \quad n + y = 2R.$$

Dieser beyden Gleichungen Differenz gibt

$$m - n + x - y = 0,$$

oder da $x - y = a$ ist,

$$n - m = a,$$

und nicht $n = m$, wie es nach der zweyten Bedingung seyn soll.

Eben so, wenn man in der vorhergehenden Gleichung $m + x = 2R$ den gegebenen Werth von $x = y + a$ substituirt, so erhält man

$$m + y = 2R - a,$$

und nicht $m + y = 2R$, wie es nach der dritten Bedingung seyn soll, u. s. w.

III. *Zwey parallele Linien können sich, auch ins Unbegrenzte verlängert, nie schneiden.* Denn da schon die Summe ihrer zwey inneren Winkel $m + y$ oder $n + u$ gleich $2R$ ist, so würden diese Linien, wenn sie sich schneiden, mit der dritten Linie EF ein Dreyeck bilden, in welchem die Summe aller drey Winkel grösser als $2R$ ist, was nach §. 85. unmöglich ist.

§. 87. (Verhältniß der Seiten rechtwinkliger Dreyecke.) Seyen ABC und abc (Fig. 15 und 16) zwey in A und a rechtwinklige Dreyecke, deren Hypotenusen (§. 80, II.) von gleicher Gröfse seyn sollen, so dafs also die Seite $BC = bc$ ist. Wir wollen der Kürze wegen diese Hypotenuse für die Einheit der übrigen Seiten dieser Dreyecke, oder für die Einheit unserer Längenmafsse annehmen, so dafs also $BC = bc = 1$ ist.

Diefs vorausgesetzt, kann man den Satz aufstellen: »Zwey rechtwinklige Dreyecke mit derselben Hypotenuse sind unter sich vollkommen gleich (§. 83.), wenn sie einen der beyden schiefen Winkel gleich haben.«

Denn ist z. B. der schiefe Winkel C gleich c , so ist, nach §. 85, I., auch der andere schiefe Winkel B gleich b . — Man lege nun das erste Dreyeck ABC so auf das zweyte abc , dafs der eine Endpunct C der ersten Hypotenuse auf den Endpunct c der zweyten, und dafs überdiefs die erste Hypotenuse CB längs der zweyten cb falle. Dann müssen auch die zweyten Endpuncte B und b der Hypotenusen auf einander fallen, weil diese Hypotenusen, der Voraussetzung gemäß, von gleicher Länge, näm-

lich jede gleich 1 ist. Es muß aber auch die eine Kathete CA auf die andere ca fallen, weil die Winkel C und c gleich sind; so daß also auch der Punct A des ersten Dreyecks irgendwo in die Linie ca des zweyten fallen wird. Aus demselben Grunde muß endlich auch die zweyte Kathete BA auf ba fallen, weil nämlich die Winkel B und b ebenfalls gleich sind; so daß demnach der Punct A des ersten Dreyecks auch irgendwo in die Linie ba des zweyten fallen wird. — Da also der Punct A sowohl auf die Linie ca , als auch auf die Linie ba fällt, und da überdies (nach §. 84, B .) alle rechten Winkel, also auch die Winkel A und a , unter sich gleich sind; so muß der erwähnte Punct A in den der beyden Linien ca und ba gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, oder er muß in den Punct a fallen, und sonach wird das Dreyeck ABC das andere abc in allen seinen Theilen vollkommen decken, oder es wird ihm *gleich* seyn.

I. Unter allen möglichen rechtwinkligen Dreyecken, deren Hypotenusen sämmtlich von gleicher, übrigens willkürlicher Gröfse (die wir gleich der Einheit, z. B. gleich einem Fuße, einem Zoll u. f. angenommen haben) sind, wird daher jedes einzelne vollkommen bestimmt seyn, wenn nur einer der beyden schiefen Winkel desselben gegeben ist, da jedes andere dieser Dreyecke, welches denselben schiefen Winkel haben könnte, mit jenem *gleich*, oder (§. 83.) da es ein mit ihm ganz identisches Dreyeck seyn wird.

II. Ist daher von einem solchen Dreyecke nur einer der zwey schiefen Winkel, ist z. B. der Winkel C gegeben, so ist damit auch sofort das ganze Dreyeck gegeben, so ist also auch jede der beyden Katheten AB sowohl, als auch AC gegeben; oder mit anderen Worten: in allen solchen Dreyecken hängt jede der beyden Katheten blofs von dem Winkel C [oder was dasselbe ist, blofs von dem Winkel B] ab.

Nennen wir der Kürze wegen, hier und in der Folge, in jedem Dreyecke ABC die den Winkeln A , B und C in derselben Ordnung gegenüberstehenden Seiten α , β und γ , so daß also $BC = \alpha$, $AC = \beta$ und $AB = \gamma$ ist.

Unserer vorhergehenden Annahme gemäß sind diejenigen Dreyecke, die wir hier betrachten, alle in A rechtwinklig, und ihre Hypotenusen $\alpha = 1$ sind sämmtlich gleich groß.

Wir haben gesehen, daß in diesen Dreyecken jede der beyden Katheten β oder γ bloß von einem der beyden schiefen Winkel, z. B. von C abhängt. In der That werden auch, wie die Figur 17 selbst ohne Rücksicht auf den vorhergehenden Beweis versinnlicht, wenn die Hypotenuse $CB, CB', CB'', \dots$ immer von derselben GröÙe und gleich der Einheit bleibt, die Katheten $AC = \beta$ und $AB = \gamma$ dieselben bleiben, so lange der Winkel C oder B derselbe bleibt, und sie werden sich ändern, so bald einer dieser Winkel sich ändert; oder mit anderen Worten: die GröÙen β und γ werden Functionen von C seyn (§. 33.).

III. Obschon wir diese Functionen noch nicht näher kennen, so wollen wir doch, da wir in der Folge noch oft auf sie zurückkommen werden, ihnen eine eigene Benennung beylegen, und β den *Cosinus*, so wie γ den *Sinus* des Winkels C heißen, und dieß so bezeichnen:

$$\beta = \text{Cos } C \quad \text{und} \quad \gamma = \text{Sin } C.$$

IV. Diese beyden Gleichungen beziehen sich, wie gesagt, nur auf solche rechtwinklige Dreyecke, deren Anzahl übrigens unendlich ist, bey welchen die Hypotenuse überall von derselben GröÙe und gleich der Einheit ist. Man kann sie aber auch auf alle anderen rechtwinkligen Dreyecke ausdehnen, in welchen die Hypotenuse zwey, drey, vier Mal . . . , und überhaupt α Mal größer, in welcher also die Hypotenuse, die bisher gleich 1 war, allgemein durch α bezeichnet wird. Zu diesem Zwecke wird man nämlich nur (nach §. 71.) in den vorhergehenden zwey Gleichungen alle GröÙen derselben Art, die sich auf Längenmaße oder Linien beziehen, durch die GröÙe α , die bisher durch die Einheit vorgestellt wurde, dividiren, so daß man demnach für alle rechtwinkligen Dreyecke, die beyden Gleichungen hat:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \text{Cos } C \quad \text{und} \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \text{Sin } C.$$

V. Die beyden letzten Ausdrücke beziehen sich auf ein in A rechtwinkliges Dreyeck, wie es durch die Figur 18 dargestellt wird. Allein in dieser Zeichnung kann man auch, ohne das Dreyeck selbst zu ändern, die Bezeichnung desselben durch Buchstaben so variiren lassen, daß man B mit C , also auch β mit γ verwechselt, wodurch A und α ungeändert bleibt, wie es

die nebenstehende Figur 19 darstellt. Beyde Dreyecke (Fig. 18 und 19) sind identisch oder vollkommen dieselben, aber ihre Bezeichnung ist verschieden. Demnach nehmen die zwey letzten Gleichungen, die für das erste Dreyeck (Fig. 18) gehören, da sie unmittelbar auch auf das zweyte (Fig. 19) anwendbar sind, für dieses zweyte Dreyeck die folgende Form an:

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \cos B \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \sin B,$$

welche zwey Gleichungen daher mit denen der Nr. IV. als gleichgeltend, oder welche nur als ein anderer Ausdruck derselben anzusehen sind.

In Worten ausgedrückt, sagt jedes Paar dieser Gleichungen: »In einem rechtwinkligen Dreyecke ist jede Kathete, dividirt durch die Hypotenuse, gleich dem Cosinus des dieser Kathete anliegenden, und auch gleich dem Sinus des dieser Kathete gegenüberstehenden schiefen Winkels.«

VI. Bemerken wir noch, daßs aus den vier vorhergehenden Gleichungen, wegen dem doppelten Ausdruck der Größen $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\gamma}{\alpha}$, sofort folgt:

$$\sin B = \cos C \quad \text{und}$$

$$\sin C = \cos B;$$

so daßs demnach in jedem rechtwinkligen Dreyecke der Sinus des einen schiefen Winkels zugleich der Cosinus des anderen ist.

Da überdieß (nach §. 85, II) die Summe der beyden schiefen Winkel eines rechtwinkligen Dreyeckes gleich einem rechten Winkel oder gleich R ist, so hat man

$$B + C = R \quad \text{oder} \quad B = R - C;$$

so daßs daher die beyden vorhergehenden Gleichungen auch so ausgedrückt werden können:

$$\sin B = \cos (R - B) \quad \text{und}$$

$$\cos B = \sin (R - B);$$

d. h. der Sinus jedes gegebenen Winkels ist gleich dem Cosinus des Complements dieses Winkels zu 90 Graden und umgekehrt. So ist z. B.

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ, \quad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \quad \text{und} \quad \sin 45^\circ = \cos 45^\circ.$$

VII. Endlich folgt noch aus den beyden vorhergehenden Ausdrücken

$$\frac{\beta}{a} = \sin B = \cos C \quad \text{und} \quad \frac{\gamma}{a} = \cos B = \sin C,$$

dafs, wenn in einem rechtwinkligen Dreyecke die beyden schiefen Winkel B und C gleich sind, auch die beyden Katheten β und γ unter sich gleich seyn werden, und umgekehrt.

§. 88. (Ähnliche rechtwinklige Dreyecke.) Wenn man in einem bey A rechtwinkligen Dreyecke ABC (Fig. 20) zu der einen Kathete AB eine Parallele ab zieht, so entsteht ein anderes, dem ersten *ähnliches* Dreyeck abC .

Denn wegen dem Parallelismus der beyden Linien AB und ab sind (§. 86, II.) die Winkel von B und b , so wie auch die Winkel von A und a einander gleich, und der dritte Winkel C ist beyden Dreyecken gemeinschaftlich; also sind in diesen zwey Dreyecken alle Winkel gleich, und daher (§. 83.) die Dreyecke ähnlich.

Wenden wir darauf die zwey Gleichungen des §. 87, V. an, so hat man in dem Dreyecke ABC

$$\frac{AB}{BC} = \sin C,$$

und eben so in dem Dreyecke abC

$$\frac{ab}{bC} = \sin C;$$

also ist auch

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ab}{bC} \dots (1).$$

Auf dieselbe Weise erhält man auch aus den beyden Gleichungen

$$\frac{AC}{BC} = \cos C \quad \text{und} \quad \frac{ac}{bC} = \cos C$$

die folgende:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{ac}{bC} \dots (2);$$

und aus den Gleichungen (1) und (2) folgt sofort

$$\frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac} \dots (3).$$

Wenn daher in einem rechtwinkligen Dreyecke zu einer Kathete eine Parallele gezogen wird, so entstehen zwey ähnliche rechtwinklige Dreyecke, deren Seiten unter sich proportionirt sind.

§. 89. (Darstellung dieser Functionen im Kreise.)

Wenn DE und FG (Fig. 21) zwey auf einander senkrechte Durchmesser des Kreises $DFEG$ sind, so wird durch sie die Peripherie des Kreises in vier gleiche Theile (Quadranten, §. 84, I.) eingetheilt. Wir wollen diese vier Quadranten FD , DG , GE und EF nach der Ordnung durch I, II, III und IV bezeichnen.

Läfst man von dem Endpuncte B des Halbmessers CB ein Loth BA auf den ersten Durchmesser herab, so entsteht ein in A rechtwinkliges Dreyeck ABC , von welchem daher alles das gilt, was wir oben von dem rechtwinkligen Dreyecke überhaupt ausgesagt haben.

Nimmt man nämlich wieder, der Kürze wegen, den Halbmesser des Kreises für die Einheit an, so ist, nach §. 87, III. das erwähnte Loth BA der Sinus, und AC ist der Cosinus des Winkels ACB , oder da (nach §. 84, G.) der Kreisbogen FB das Maß des Winkels ACB ist, so ist auch BA der Sinus, und AC der Cosinus des Bogens FB , so daß man demnach diese zwey Functionen auch so darstellen kann: Wenn man von dem Endpuncte B eines beweglichen Halbmessers eines Kreises, auf einen gegebenen festen Halbmesser desselben ein Loth fällt, so ist dieses Loth der Sinus, und die Distanz des Fußpuncts A dieses Loths von dem Mittelpuncte C ist der Cosinus des Bogens oder des Winkels, der zwischen den beyden Halbmessern enthalten ist.

Da uns nichts hindert, diese Drehung des beweglichen Halbmessers CB durch alle Quadranten des Kreises, selbst mehr als einmal, fortzusetzen, so gelangen wir, durch diese Erklärung unserer beyden Functionen, zu einem allgemeinen Begriffe des Wortes *Winkel*, indem wir dadurch die Neigung einer beweglichen Geraden CB gegen eine fixe Gerade CF für alle Lagen jener Beweglichen um ihren Drehungspunct C verstehen, wodurch wir daher auf Winkel geführt werden, die den rechten Winkel, ja selbst die ganze Peripherie des Kreises, so viel man will, übertreffen können.

Läfst man daher von den Endpuncten b , b' , b'' , ... des be-

weglichen Halbmessers, wenn er in die Lagen Cb , Cb' , Cb'' , ... gekommen ist, die Lothe ba , $b'a'$, $b''a''$, ... auf den fixen Durchmesser FG herab, so wird auch hier, der eingeführten Erklärung zu Folge,

ba der Sinus und Ca der Cosinus des Bogens FBb oder des Winkels FCb

seyn, und dasselbe wird auch für $b'a'$ und Ca' in Beziehung auf den Bogen $FDGb'$, so wie für $b''a''$ und $c''a''$ in Beziehung auf den Bogen $FDGEb''$ gelten u. s. f.

Da aber diese beyden Functionen, wie man sieht, in den verschiedenen Quadranten auch verschiedene, einander entgegengesetzte Lagen einnehmen, so wird es nöthig seyn, diese Lagen zu berücksichtigen, und sie, gleich allen übrigen Größen (§. 18.), durch eigene Zeichen zu unterscheiden. Wir wollen daher diese und alle ähnlichen Functionen, so lange sie dem ersten Quadranten FD angehören, *positiv* nehmen und durch $+$ bezeichnen, woraus von selbst folgt, daß sie, wenn sie in den übrigen Quadranten eine der in dem ersten entgegengesetzte Lage erhalten, als negativ zu betrachten und mit $-$ zu bezeichnen seyn werden. Ganz eben so kann auch die Drehung des beweglichen Halbmessers CB nach zwey entgegengesetzten Richtungen genommen werden. Wir wollen diese Drehung, wenn sie, von F beginnend, nach B , D , G , ... fortgeht, die positive, und daher auch die von F nach $b''EG$... die negative nennen, so daß also auch die Bogen FB , FD , ... positiv, und Fb'' , Fb' , ... negativ seyn werden.

I. Aus dieser Annahme folgt, schon durch den bloßen Anblick der Zeichnung, daß

die Sinus in dem Quadranten I und II positiv, in III und IV aber negativ

sind, weil sie in den beyden letzten eine mit jenen entgegengesetzte Lage haben. Eben so sind die Cosinus in I und IV positiv, in II und III aber negativ. Endlich ist auch der Sinus eines negativen Bogens selbst negativ, während der Cosinus eines negativen Bogens sein positives Zeichen beybehält, so daß man für jeden Bogen x die Gleichungen hat:

$$\sin(-x) = -\sin(+x) \quad \text{und}$$

$$\cos(-x) = \cos(+x).$$

II. Abgesehen aber von dieser *Lage* unserer beyden Functionen sieht man eben so leicht, daß die absolute *Größe* derselben in den verschiedenen Quadranten nach einem bestimmten Gesetze zu- und abnimmt, und daß die frühern Werthe des ersten Quadranten in den folgenden periodisch wiederkehren. So ist, wenn der bewegliche Punct *B* im Anfange seiner Bewegung in *F* ist, wo der Bogen *FB*, also auch der Winkel *FCB* gleich Null ist, auch der Sinus dieses Bogens gleich Null und der Cosinus desselben gleich der Einheit. Wie aber der bewegliche Punct von *F* über *B* nach *D* fortschreitet, und der Bogen *FB* allmählig wächst, wächst auch sein Sinus, bis er für den Punct *D*, am Ende des ersten Quadranten, oder bis er für einen rechten Winkel seinen größten Werth erreicht, der daher gleich dem Halbmesser des Kreises oder gleich der Einheit wird; während im Gegentheile der Cosinus des rechten Winkels für denselben Punct *D* seinen kleinsten Werth erhält oder gleich Null wird.

Von diesem Puncte *D* an nimmt der Sinus durch den ganzen Lauf des zweyten Quadranten wieder stufenweise ab, und zwar auf dieselbe Weise, wie er zuvor, im ersten Quadranten, gewachsen ist, da er nach und nach alle seine früheren Werthe wieder erhält.

Denn wenn der bewegliche Punct *B* z. B. nach *b* gekommen ist, wo der Winkel *bCa* eben so groß ist, als früher der Winkel *BCA* war, so sind die beyden rechtwinkligen Dreyecke *ABC* und *abC* (nach §. 87.) einander gleich; also ist auch die Seite *ba* = *BA*, oder der Sinus des Bogens *FB* ist gleich dem Sinus des Bogens *FbDb*. Setzt man daher den Bogen *FB* = *x*, so ist auch *Gb* = *x* und daher *FbDb* = $180^\circ - x$, wodurch die vorige Gleichung *ba* = *BA* in die folgende übergeht:

$$\sin(180 - x) = \sin x.$$

Aus demselben Grunde (§. 87.) ist auch *Ca* = *CA*. Da aber *CA* der Cosinus des Bogens *FB*, und *Ca* der Cosinus des Bogens *FbDb* ist, und da beyde in ihren Lagen entgegengesetzt sind, so geht die Gleichung *Ca* = *CA* in folgende über:

$$\cos(180 - x) = -\cos x.$$

Ist ferner die durch *B* gehende Gerade *Bb* parallel mit dem

fixen Durchmesser FG , so ist auch (§. 86, II. C.) der Winkel $CBb = ACB$; also sind auch (§. 87.) die beyden Dreyecke ABC und Cbd gleich, und daher die Seite

$$Bd = AC, \text{ so wie } Cd = AB.$$

Setzt man demnach wieder den Bogen $FB = x$, also auch, da $FD = 90^\circ$ ist, den Bogen $BD = 90 - x$, so hat man in dem Dreyecke ABC

$$AB = \sin x \text{ und } AC = \cos x,$$

und eben so in dem Dreyecke Cbd

$$Bd = \sin(90 - x) \text{ und } Cd = \cos(90 - x);$$

so dafs daher die zwey vorhergehenden Gleichungen, $Bd = AC$ und $Cd = AB$, in folgende übergehen:

$$\left. \begin{array}{l} \sin(90 - x) = \cos x \\ \text{und } \cos(90 - x) = \sin x \end{array} \right\};$$

übereinstimmend mit dem, was wir schon oben (§. 87, VI.) unmittelbar aus der blofsen Erklärung dieser beyden Functionen abgeleitet haben. — Man wird diese und ähnliche Bemerkungen sehr leicht auch auf alle übrigen Quadranten fortsetzen können.

III. Betrachtet man dabey vorzüglich diejenigen Punkte des Kreises, für welche diese zwey Functionen ihre grössten und kleinsten Werthe erhalten, so findet man, schon aus dem blofsen Anblick der Zeichnung, dafs für diese Punkte folgende Gleichungen Statt haben, in welchen wieder R den rechten Winkel oder den vierten Theil des Kreisumfangs, und wo n die auf einander folgenden natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$ bedeuten.

$$\sin 2nR = 0 \quad \text{und} \quad \cos(2n+1)R = 0,$$

$$\sin(4n+1)R = +1 \quad \text{»} \quad \cos 4nR = +1,$$

$$\sin(4n+3)R = -1 \quad \text{»} \quad \cos(4n+2)R = -1.$$

§. 90. (Tangenten, Secanten etc.) Aufser den beyden bisher betrachteten Functionen der Sinus und Cosinus, hat man auch noch einige andere eingeführt, die aber blofse einfache Combinationen von jenen sind, übrigens für die Anwendung grossen Nutzen mit Bequemlichkeit vereinigen. So nennt man z. B. den Quotienten

$\frac{\sin x}{\cos x}$ die Tangente,

$\frac{\cos x}{\sin x}$ » Cotangente,

$\frac{1}{\cos x}$ » Secante,

$\frac{1}{\sin x}$ » Cosecante, und endlich

$1 - \cos x$ den Sinusversus des Bogens x ;

und man drückt diese Functionen auf folgende Weise aus:

$$\text{Tang } x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{Sec } x = \frac{1}{\cos x},$$

$$\text{Cotang } x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \text{Cosec } x = \frac{1}{\sin x},$$

$$\text{Sinvers } x = 1 - \cos x.$$

I. Um auch diese Functionen in unserer Zeichnung darzustellen, seyen wieder (Fig. 22) FG und DE zwey auf einander senkrechte Durchmesser des Kreises, dessen Halbmesser als Einheit angenommen wird. An dem Endpunkte F des ersten Durchmessers errichte man die auf ihr senkrechte Gerade Ff , bis sie der Verlängerung des beweglichen Halbmessers CB in f begegnet, und ziehe Dm und Bd senkrecht auf den zweyten Durchmesser DE , so ist

Ff die Tangente, Cf die Secante,

Dm » Cotangente, Cm » Cosecante und

FA der Sinusversus des Bogens FB .

Da nämlich die beyden Linien Ff und BA , so wie auch Dm und Bd unter sich parallel sind (§. 86.), so sind auch die rechtwinkligen Dreyecke ABC und FfC , so wie CBd und CmD unter sich ähnlich, und man hat demnach (§. 88.) die Proportionen

$$CA : AB = CF : Ff,$$

$$Cd : Bd = AB : AC = CD : Dm,$$

$$CA : CB = CF : Cf,$$

$$Cd : CB = AB : CB = CD : Cm.$$

Setzt man aber wieder den Bogen $FB = x$, und nimmt man, wie zuvor, den Halbmesser CF , CB , CD des Kreises für die Einheit an, so geben diese vier Proportionen nach der Reihe die Gleichungen

$$Ff \text{ oder } \text{Tang } x = \frac{\text{Sin } x}{\text{Cos } x},$$

$$Dm \text{ » } \text{Cotg } x = \frac{\text{Cos } x}{\text{Sin } x},$$

$$Cf \text{ » } \text{Sec } x = \frac{1}{\text{Cos } x},$$

$$Cm \text{ » } \text{Cosec } x = \frac{1}{\text{Sin } x},$$

die mit den obigen Ausdrücken übereinstimmen.

Diese Gleichungen geben nicht nur den absoluten Werth oder die Gröfse, sondern auch das Zeichen der neuen Functionen für jeden Punct der Peripherie, wenn die Sinus und Cosinus desselben bekannt sind. So sieht man z. B. dafs für einen rechten Winkel, oder für $x=90^\circ$, wo $\text{Sin } x=1$ und $\text{Cos } x=0$ ist, die Tangente und Secante unendlich grofs, die Cotangente aber gleich Null und die Cosecante gleich der Einheit wird; dafs ferner die Tangente und Cotangente in dem Quadranten I und III positiv, in II und IV aber negativ ist u. f.

Man pflegt diese Ausdrücke der Sinus, Cosinus, Tangenten u. f. unter der gemeinsamen Benennung der *trigonometrischen Functionen* zu begreifen. Ihr Einfluss verbreitet sich über das ganze Gebiet der Geometrie, und sie werden uns in der Folge noch sehr nützlich seyn.