

Dreyzehntes Capitel.

R e i h e n.

§. 72. (Geometrische Reihen.) Wenn von den Gliedern einer Reihe je zwey nächste immer *dasselbe Verhältniß* (§. 37.) haben, so wird die Reihe eine *geometrische* genannt. Ist a das erste Glied derselben, und ist b das Verhältniß je zwey nächster Glieder, so ist die allgemeine Form der geometrischen Reihe

$$a + ab + ab^2 + ab^3 + \dots$$

Diese Reihe ist aber schon oben (§. 23.) vorgekommen, und wir haben dort gesehen, daß sie aus der Division der Gröfse a durch $(1 - b)$ entsteht, so daß man demnach hat

$$\frac{a}{1-b} = a + ab + ab^2 + ab^3 + \dots$$

Das allgemeine oder n^{te} Glied U einer solchen Reihe ist offenbar

$$U = ab^{n-1},$$

da man das erste, zweyte, dritte Glied der Reihe erhält, wenn man in U die Gröfse $n=1, 2, 3, \dots$ setzt.

I. Welches ist aber das *summatorische Glied* S dieser Reihe, d. h. welches ist diejenige Function von dem *Index* n der Reihe, der die Summe der 2, 3, 4, $\dots$ ersten Glieder gibt, wenn man in ihm $n=2, 3, 4, \dots$ setzt.

Setzt man die Reihe bis zu ihrem n^{ten} Gliede fort, so hat man

$S = a + ab + ab^2 + ab^3 + \dots + ab^{n-3} + ab^{n-2} + ab^{n-1}$,
also auch, wenn man alle Glieder dieses Ausdruckes durch b multiplicirt:

$$Sb = ab + ab^2 + ab^3 + \dots + ab^{n-2} + ab^{n-1} + ab^n.$$

Subtrahirt man diese beyden Ausdrücke von einander, so heben sich von den zwey Reihen alle Glieder, bis auf das erste

und letzte, gegenseitig auf, und man erhält

$$Sb - S = ab^n - a,$$

so daß man daher für das gesuchte summatorische Glied hat

$$S = \frac{a(b^n - 1)}{b - 1},$$

oder auch, wenn man den vorigen Werth des allgemeinen Gliedes in S substituirt:

$$S = \frac{Ub - a}{b - 1}.$$

II. Ist also die Reihe convergent (§. 23, II.), so ist für ein unendlich großes n die Gröfse b^n oder auch $U = ab^{n-1}$ unendlich klein, da für eine convergente Reihe b ein eigentlicher Bruch ist, und dann ist die Summe *aller* Glieder dieser Reihe, ohne Ende fortgesetzt:

$$S = \frac{a}{1 - b},$$

oder dann ist das summatorische Glied S gleich dem erzeugenden Bruch $\frac{a}{1-b}$, aus dessen Entwicklung durch Division die Reihe entstanden ist.

Ex. I. Für die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

ist $a=1$ und $b=\frac{1}{2}$, also ist auch, für $n=10$, die Summe der ersten zehn Glieder:

$$S = \frac{a(b^n - 1)}{b - 1} = \frac{2^{10} - 1}{2^9} = \frac{1023}{512} = 1.998046875.$$

Die Summe der *ganzen* Reihe, ohne Ende fortgesetzt, aber ist

$$S = \frac{a}{1 - b} = 2.$$

Ex. II. Für die Reihe

$$1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - \dots$$

ist $a=1$ und $b=-2$, also auch die Summe der ersten zehn Glieder

$$S = \frac{1 - 2^{10}}{1 + 2} = -341;$$

die Summe *aller* Glieder aber ist unendlich groß, da diese Reihe divergirt.

§. 73. (Arithmetische Reihen.) Eine Folge von Grö-
ßen, deren je zwey nächste immer dieselbe Differenz haben, ist
eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung. Sind aber in ei-
ner Reihe erst die Unterschiede dieser Differenzen oder sind erst
die zweyten Differenzen constant, so heißt sie eine arithmeti-
sche Reihe der zweyten Ordnung, und eben so wird sie der drit-
ten Ordnung seyn, wenn die Unterschiede der zweyten Differen-
zen oder wenn erst die dritten Differenzen der Glieder constant
sind, u. s. w.

So ist die arithmetische Reihe

- I. . . . 1, 2, 3, 4, . . . der ersten Ordnung,
II. . . . 1, 2², 3², 4², . . . » zweyten »
III. . . . 1, 2³, 3³, 4³, . . . » dritten » u. f.,

weil alle ersten Differenzen von I. gleich 1, alle zweyten von II.
gleich 2, und alle dritten Differenzen von III. gleich 6 sind.

Sey die arithmetische Reihe irgend einer Ordnung

$$a + b + c + d + e + \dots,$$

so hat man für die Differenz von je zwey nächsten Gliedern

$$b - a, c - b, d - c, e - d, \dots$$

und davon sind wieder die Differenzen

$$c - 2b + a, d - 2c + b, e - 2d + c, \dots,$$

und von diesen neuerdings die Differenzen

$$d - 3c + 3b - a, e - 3d + 3c - b \text{ u. s. f.}$$

Nennen wir, der Kürze wegen, die ersten Glieder dieser
Differenzreihen $\Delta a, \Delta^2 a, \Delta^3 a, \dots$ so daß man hat

$$\Delta a = b - a,$$

$$\Delta^2 a = c - 2b + a,$$

$$\Delta^3 a = d - 3c + 3b - a,$$

$$\Delta^4 a = e - 4d + 6c - 4b + a \text{ u. f.},$$

so zeigt schon der Anblick dieser Reihen, daß die Coefficienten
der einzelnen Glieder derselben die des Binoms (§. 58, I.) sind,
so daß man demnach allgemein für die n^{te} Differenz $\Delta^n a$ den
Ausdruck hat

$$\Delta^n a = a + nb + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} c - \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \dots$$

I. Mit Hülfe der letzten Gleichung kann man auch die Glieder $b, c, d, \dots$ der ersten gegebenen Reihe bloß durch das erste Glied a und durch die auf einander folgenden Differenzen $\Delta a, \Delta^2 a, \Delta^3 a, \dots$ ausdrücken. Man erhält nämlich

$$b = a + \Delta a,$$

$$c = a + 2\Delta a + \Delta^2 a,$$

$$d = a + 3\Delta a + 3\Delta^2 a + \Delta^3 a,$$

$$e = a + 4\Delta a + 6\Delta^2 a + 4\Delta^3 a + \Delta^4 a \text{ u. f.},$$

so daß man also auch hier für das *allgemeine* oder für das n^{te} Glied U der oben aufgestellten Reihe, nach der Analogie mit dem Binom, haben wird

$$U = a + \frac{n-1}{1} \Delta a + \frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2} \Delta^2 a + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 a + \dots$$

II. Sucht man endlich noch auf ähnliche Weise auch die *Summe* der ersten Glieder der gegebenen Reihe, so hat man für die Summe

$$\text{der 2 ersten Glieder} \dots a + b = 2a + \Delta a,$$

$$» 3 » » a + b + c = 3a + 3\Delta a + \Delta^2 a,$$

$$» 4 » » a + b + c + d = 4a + 6\Delta a + 4\Delta^2 a + \Delta^3 a \text{ u. f.},$$

so daß also auch hier die Coefficienten des Binoms wieder sichtbar werden, und daß man daher für die Summe der ersten n Glieder, d. h. für das *summarische Glied* S einer jeden arithmetischen Reihe den Ausdruck haben wird

$$S = na + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \Delta a + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^2 a + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^3 a + \dots,$$

wo für eine Reihe der $1^{\text{sten}}, 2^{\text{ten}}, 3^{\text{ten}}, \dots$ Ordnung die Differenz $\Delta a, \Delta^2 a, \Delta^3 a, \dots$ constant, und alle folgenden gleich Null sind.

In den beyden vorhergehenden Ausdrücken von U und S ist die ganze Theorie der arithmetischen Reihen irgend einer Ordnung enthalten. — Wir wollen uns hier mit der näheren Betrachtung der zwey ersten Ordnungen begnügen.

§. 74. (Arithmetische Reihen der ersten Ordnung.)

Für diese Reihen der ersten Ordnung ist, nach dem Vorhergehenden, die erste Differenz $\Delta a = d$ constant, also auch $\Delta a = \Delta^2 a \dots$ gleich Null.

Demnach geben die Ausdrücke für U und S (in §. 72, II.) sofort folgende einfache Gleichungen:

$$U = a + (n-1)d \quad \text{und}$$

$$S = na + \frac{1}{2}n(n-1)d = \frac{1}{2}n[a + (n-1)d],$$

wo man, statt der letzten, auch schreiben kann

$$S = \frac{1}{2}n(a + U).$$

Der erste Ausdruck für S zeigt, daß in diesen Reihen die Summe je zweyer, vom Anfang und Ende gleich weit entfernten Glieder, gleich $2a + (n-1)d$ ist.

Ex. I. In der Reihe der natürlichen Zahlen

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

ist $a = d = 1$, also auch das allgemeine Glied

$$U = n,$$

und das summatorische Glied, oder die Summe der n ersten Glieder

$$S = \frac{1}{2}n(n+1).$$

So ist z. B. die Summe der ersten Million Glieder dieser Reihe, da $n = 1000000$ ist, gleich

$$S = 500000 \cdot 500000.$$

Ex. II. Ebenso hat man für die Reihe der ungeraden Zahlen

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots$$

$a = 1$ und $d = 2$, also auch

$$U = 2n - 1 \quad \text{und} \quad S = n^2,$$

also auch die Summe der ersten 1000 Glieder

$$S = 1000^2 = 1000000.$$

Ex. III. Endlich gibt die Reihe

$$1 + 1.1 + 1.2 + 1.3 + 1.4 + \dots$$

$a = 1$ und $d = 0.1$, also auch

$$U = \frac{1}{10}(n+9) \quad \text{und} \quad S = \frac{n}{20}(n+19),$$

so daß man für die Summe der ersten 1000 Glieder dieser Reihe hat

$$S = 50950.$$

§. 75. (Arithmetische Reihen der zweyten Ordnung.) Für solche Reihen ist $\Delta^3 a = \Delta^4 a \dots$ gleich Null, also hat man (nach §. 72.) für das allgemeine Glied

$$U = a + (n-1)\Delta a + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\Delta^2 a,$$

und eben so für das summatorische Glied dieser Reihen

$$S = na + \frac{1}{2}n(n-1)\Delta a + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\Delta^2 a.$$

Ex. Die Reihen der sogenannten *Polygonalzahlen* sind:

Zahlen des Dreyecks . . . $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + \dots$

» » Vierecks . . . $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + \dots$

» » Fünfecks . . . $1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + \dots$

» » Sechsecks . . . $1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + \dots$

Für die Dreyeckszahlen ist demnach $a = 1$, $\Delta a = 2$ und $\Delta^2 a = 1$, also auch

$$U = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ und } S = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$

und eben so hat man für die Viereckzahlen

$$U = n^2 \text{ und } S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ u. f.}$$

§. 76. (Reversion der Reihen.) Oft wird eine Gröfse y durch irgend eine andere x mittelst einer Reihe der Form

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots$$

gegeben, und man sucht umgekehrt die Gröfse x durch eine ähnliche, nach den Potenzen von y fortschreitende Reihe auszudrücken. — Nehmen wir an, die gesuchte Reihe sey von der Gestalt

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \dots,$$

so daß also die unbekannten Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ durch die bekannten $a, b, c, \dots$ zu bestimmen sind.

Zu diesem Zwecke entwickeln wir zuerst die Potenzen von $x^2, x^3, x^4, \dots$ indem wir die zweyte unserer Reihen wiederholt mit ihr selbst multipliciren. Dadurch erhält man

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \dots$$

$$x^2 = \alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta y^3 + (2\alpha\gamma + \beta^2) y^4 + \dots$$

$$x^3 = \alpha^3 y^3 + 3\alpha^2\beta y^4 + \dots$$

$$x^4 = \alpha^4 y^4 + \dots$$

Substituirt man dann diese Werthe von $x, x^2, x^3, \dots$ in der ersten gegebenen Reihe, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha a - 1)\gamma \\ &+ (\beta a + a^2 b)\gamma^2 \\ &+ (\gamma a + 2\alpha\beta b + a^3 c)\gamma^3 \\ &+ (\delta a + (2\alpha\gamma + \beta^2)b + 3\alpha^2\beta c + a^4 d)\gamma^4 + \dots, \end{aligned}$$

und da diese Reihe für alle Werthe von γ gleich Null seyn soll, so hat man (§. 34, III.) die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha a - 1, \\ 0 &= \beta a + a^2 b, \\ 0 &= \gamma a + 2\alpha\beta b + a^3 c \text{ u. f.}, \end{aligned}$$

aus welchen man also die Werthe der gesuchten Größen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ bestimmen wird. Man findet nämlich $\alpha = \frac{1}{a}$ oder

$$\begin{aligned} \alpha \cdot a &= 1, \\ \beta \cdot a^3 &= -b, \\ \gamma \cdot a^5 &= 2b^2 - ac, \\ \delta \cdot a^7 &= 5abc - a^2d - 5b^3, \\ \epsilon \cdot a^9 &= 14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e \text{ u. f.} \end{aligned}$$

Ex. Wir haben oben (§. 60.) den Ausdruck erhalten

$$\gamma = \text{Log}(1+x) = m\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\right).$$

Sucht man daraus die Größe x durch γ zu bestimmen, und nimmt man, wie zuvor, an

$$x = \alpha\gamma + \beta\gamma^2 + \gamma\gamma^3 + \dots,$$

so hat man $a = m$, also auch $\alpha = \frac{1}{m}$,

$$b = -\frac{m}{2}, \quad \text{»} \quad \beta = \frac{1}{2m^2},$$

$$c = -\frac{m}{3}, \quad \text{»} \quad \gamma = \frac{1}{2 \cdot 3 m^2},$$

$$\delta = -\frac{m}{4}, \quad \text{»} \quad \delta = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 m^3} \text{ u. f.},$$

so dafs man demnach erhält

$$x = \frac{1}{m} \text{Log}(1+x) + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{\text{Log}(1+x)}{m}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\text{Log}(1+x)}{m}\right)^3 + \dots$$

Da aber $\text{Log}(1+x) = \gamma$ ist, so ist auch $1+x = a^\gamma$, und

daher die letzte Reihe

$$a^y = 1 + \left(\frac{y}{m}\right) + \frac{1}{1.2} \left(\frac{y}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3} \left(\frac{y}{m}\right)^3 + \dots,$$

übereinstimmend mit der Reihe (D) des §. 61.

§. 77. (Entwicklung der Functionen in Reihen durch die Methode der unbestimmten Coefficienten.) Dasselbe Verfahren des §. 76. läßt sich auch auf die Entwicklung gegebener Functionen in Reihen anwenden.

Sey z. B. das ohne Ende fortgehende Polynom

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$

gegeben, und die n^{te} Potenz desselben durch eine, nach den Potenzen von x fortgehende Reihe darzustellen, oder sey

$$y = (a + bx + cx^2 + \dots)^n$$

in eine Reihe der Form

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \dots,$$

zu entwickeln, also die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ durch die bekannten a, b, c , zu bestimmen.

Nimmt man von dem ersten Ausdrucke die logarithmischen Differentialien (nach §. 52.), so hat man

$$\frac{dy}{y} = \frac{n(b + 2cx + 3dx^2 + \dots)dx}{a + bx + cx^2 + \dots}.$$

Eben so hat man, wenn man auch den zweyten Ausdruck von y differentiirt:

$$\frac{dy}{dx} = \beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + \dots$$

Setzt man beyde Ausdrücke von $\frac{dy}{dx}$ einander gleich, so erhält man

$$n(b + 2cx + 3dx^2 + \dots)(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots) - (\alpha + bx + cx^2 + \dots)(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + \dots) = 0.$$

Führt man aber diese zwey Multiplicationen aus, und ordnet das Product nach den Potenzen von x , so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha\beta - nb\alpha) \\ &+ (2a\gamma + b\beta - nb\beta - 2nca)x \\ &+ (3a\delta + 2b\gamma + c\beta - nb\gamma - 2nc\beta - 3nda)x^2 + \dots, \end{aligned}$$

und wenn man auch hier wieder, nach §. 34, III., den Factor einer jeden Potenz von x für sich gleich Null setzt, so erhält man

$$\begin{aligned} a\beta &= n \cdot b\alpha, \\ 2a\gamma &= (n-1)b\beta + 2n \cdot c\alpha, \\ 3a\delta &= (n-2)b\gamma + (2n-1)c\beta + 3n \cdot d\alpha, \\ 4a\varepsilon &= (n-3)b\delta + (2n-2)c\gamma + (3n-1)d\beta + 4n \cdot e\alpha, \\ 5a\zeta &= (n-4)b\varepsilon + (2n-3)c\delta + (3n-2)d\gamma + (4n-1)e\beta \\ &\quad + 5n \cdot f\alpha, \\ 6a\eta &= (n-5)b\zeta + (2n-4)c\varepsilon + (3n-3)d\delta + (4n-2)e\gamma \\ &\quad + (5n-1)f\beta \\ &\quad + 6n \cdot g\alpha, \end{aligned}$$

u. s. w.,

wovon das Gesetz des Fortganges deutlich ist. Dabey bleibt die erste Gröfse a unbestimmt. Es ist aber $a = a^n$, wie man findet, wenn man in dem ersten Ausdrucke für γ die Gröfse $x = 0$ setzt.

Ist $c = d = e \dots$ gleich Null, so erhält man $\gamma = (a + bx)^n$, übereinstimmend mit §. 58.

Für das Trinom

$$\gamma = (1 + Ax + Bx^2)^n = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots$$

endlich erhält man, wenn man in dem Vorhergehenden $a = 1$, $b = A$, $c = B$ und $d = e = f \dots$ gleich Null setzt, zur Bestimmung der Factoren α , β , $\gamma, \dots$ die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \\ \beta &= nA, \\ 2\gamma &= (n-1)A\beta + 2nB, \\ 3\delta &= (n-2)A\gamma + (2n-1)B\beta, \\ 4\varepsilon &= (n-3)A\delta + (2n-2)B\gamma, \\ 5\zeta &= (n-4)A\varepsilon + (2n-3)B\delta \text{ u. f.} \end{aligned}$$

§. 78. (Interpolation der Reihen.) Wenn man das allgemeine Glied U einer Reihe kennt, das immer eine Function des Index n (§. 72, I.) der Reihe ist, so erhält man daraus das 1^{ste}, 2^{te}, 3^{te}, . . . Glied der Reihe, wenn man in U diese Gröfse n gleich 1, 2, 3, . . . setzt. So war oben (§. 74.) für die Dreyeckszahlen

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15$$

das allgemeine Glied

$$U = \frac{1}{2}n(n+1),$$

also ist auch, wenn man z. B. $n = 100$ setzt, das hundertste Glied dieser Reihe

$$50(101) = 5050.$$

Allein nichts hindert uns, für diesen Index nicht blofs ganze, positive oder negative Zahlen, sondern auch Brüche zu setzen, wo man dann diejenigen Glieder erhalten wird, die zwischen die Glieder der gegebenen Reihe fallen. Man nennt diese neuen Glieder die eingeschalteten oder interpolirten Gröfsen.

So gibt unser Beyspiel, wenn man zwischen je zwey Glieder der Reihe ein mittenliegendes einschalten will,

$$\begin{array}{rcl} \text{für } n = \frac{3}{2} & . . . & U = \frac{15}{8}, \\ & & \frac{5}{2} . . . \frac{35}{8}, \\ & & \frac{7}{2} . . . \frac{63}{8} \text{ u. f. ,} \end{array}$$

so dafs daher die so interpolirte Reihe der Dreyeckzahlen seyn wird

$$\frac{8}{8} + \frac{15}{8} + \frac{24}{8} + \frac{35}{8} + \frac{48}{8} + \frac{63}{8} + \frac{80}{8} + \dots,$$

und auch dieß ist eine arithmetische Reihe der zweyten Ordnung, da ihre zweyten Differenzen constant und gleich $\frac{1}{4}$ sind.

Da es aber sehr viele Reihen gibt, die, ohne eben zu den arithmetischen zu gehören, wenn auch nicht auf genau constante, doch auf nahe beständige höhere Differenzen führen, so läßt sich dieses Verfahren oft mit Vortheil auch auf solche Reihen anwenden, ohne dafs man ihr allgemeines Glied zu kennen braucht.

Betrachtet man nämlich eine solche Reihe, deren Differenzen einmal nahe constant werden, als eine arithmetische Reihe höherer Ordnung, so erhält man für das allgemeine Glied derselben (nach §. 73, I.):

$$U = a + (n-1)\Delta a + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \Delta^2 a + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 a + \dots,$$

wo a das erste, dem Index 1 entsprechende Glied, und wo die übrigen auf einander folgenden Glieder sind

$$\overset{1}{a} + \overset{2}{b} + \overset{3}{c} + \overset{4}{d} + \dots,$$

so daß man für die 1^{sten}, 2^{ten}, 3^{ten}, . . . Differenzen (nach §. 73.) hat

$$\Delta a = b - a,$$

$$\Delta^2 a = c - 2b + a,$$

$$\Delta^3 a = d - 3c + 3b - a,$$

$$\Delta^4 a = e - 4d + 6c - 4b + a \text{ u. f.}$$

Ex. Um die Anwendung dieses Verfahrens durch ein Beispiel deutlich zu machen, wollen wir annehmen, man hätte bereits (nach §. 64.) die Logarithmen von den fünf folgenden Zahlen auf 6 Decimalstellen genau gefunden, und wollte nun die dazwischen liegenden Logarithmen der ganzen Zahlen durch Interpolation bis auf 5 Decimalstellen genau bestimmen.

Index.	Zahl.	Logarithmus.
1	1000	3.000000 = a,
2	1010	3.004321 = b,
3	1020	3.008600 = c,
4	1030	3.012837 = d,
5	1040	3.017033 = e.

Von diesen Logarithmen sind die Differenzen

$$\Delta a = 0.004321,$$

$$\Delta^2 a = -0.000042.$$

Ferner ist $\Delta^3 a$ schon sehr nahe gleich Null, und überdies $a=3$.

Es ist demnach das n^{te} Glied dieser Reihe

$$U = 3.000000 + 0.004321(n-1) - 0.000021(n-1)(n-2).$$

Mit diesem Ausdrücke von U erhält man für

$n=1.1$	$n=1.2$	$n=1.3$	$n=1.4$
3.000000	3.000000	3.000000	3.000000
432	864	1296	1728
<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>
3.00043	3.00087	3.00130	3.00173

so daß man daher für die ersten der gesuchten Einschaltungen erhält

$$\text{Log } 1001 = 3.00043,$$

$$\text{Log } 1002 = 3.00087,$$

$$\text{Log } 1003 = 3.00130,$$

$$\text{Log } 1004 = 3.00173,$$

übereinstimmend mit den gewöhnlichen Tafeln unserer Logarithmen. Übrigens wird in diesen, wie in allen ähnlichen Fällen, wo dieselben Rechnungen öfter wiederholt werden sollen, eine geringe Aufmerksamkeit schon hinreichen, mehrere Vortheile und Abkürzungen an die Hand zu geben, die keiner besonderen Erläuterung bedürfen, und daher besser der Umsicht und Selbsterfahrung des Rechners überlassen bleiben. So wird es z. B. hier bequemer, und doch gleich sicher seyn, nicht immer von dem ersten Gliede a , sondern für jedes neue Zwischenglied, das z. B. zwischen b und c fällt, von dem ihm zunächst vorstehenden Gliede b auszugehen, und dieses Zwischenglied durch eine einfache Proportion aus b und c abzuleiten. Dabey wird allerdings nur auf die erste Differenz Δa Rücksicht genommen, und die zweyte $\Delta^2 a$ vorläufig gleich Null gesetzt. Allein man sieht, daß die aus dieser vorläufigen Annahme entspringende Correction, so lange man immer nur von einem gegebenen Gliede b zu dem nächstfolgenden c , oder von c zu d übergeht, eine constante Gröfse, und zwar in unserem Falle gleich $+0.000004$ ist, daher man nur diese Constante zu dem aus der erwähnten Proportion erhaltenen Resultate für alle zwischen a und e enthaltenen Zahlen wieder hinzusetzen wird.

Sucht man z. B. den Logarithmus von 1015, so hat man, da $c - b = 0.004279$ ist, die Proportion

$$10 : 0.004279 = 5 : x \quad \text{oder} \quad x = 0.002140,$$

also auch und eben so

$$\text{Log } 1010 = 3.004321 \qquad \text{Log } 1020 = 3.008600$$

$$\text{Proportionaltheil} \quad 2140 \qquad 2118$$

$$\text{Constante} \quad . \quad . \quad . \quad 4 \qquad 4$$

$$\text{Log } 1015 = 3.00647, \qquad \text{Log } 1025 = 3.01072,$$

$$\text{Log } 1030 = 3.012837$$

$$2098$$

$$4$$

$$\text{Log } 1035 = 3.01494,$$

und alle diese Logarithmen sind, der aufgestellten Forderung gemäß, in der fünften Decimalstelle noch richtig.