

Zwölftes Capitel.

Auflösung der Gleichungen.

§. 66. (Anzahl der Wurzeln einer Gleichung.)
Jede geordnete algebraische Gleichung des m^{ten} Grades hat, nach §. 34, die Form

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + hx + k = 0,$$

wo m eine ganze, positive Zahl, und wo $a, b, c, \dots, h, k$ reelle und rationelle Größen bezeichnen. Statt diesem Ausdrucke wollen wir, der Kürze wegen, hier und im Folgenden

$$X = 0$$

setzen. — Man kann eine solche Gleichung im Allgemeinen als das Product von m Gleichungen der ersten Ordnung, oder als das Product der m Factoren

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots$$

ansehen, da dieses Product, wenn es entwickelt wird, die Gestalt der obigen Gleichung $X=0$ annimmt. Da aber dieses Product, so wie jener ihm gleichgeltende Ausdruck X , gleich Null wird, wenn man statt x die Größe α , oder β , oder γ , ... setzt, so werden $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ nach §. 34, II., die *Wurzeln* der Gleichung $X=0$ seyn, und man sieht, daß die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung des m^{ten} Grades gleich m seyn wird. Diese Wurzeln können übrigens gleich oder ungleich, rational oder irrational und selbst imaginär seyn.

I. Ist aber die gegebene Gleichung nicht algebraisch, sondern transcendent, so ist die Anzahl ihrer Wurzeln unendlich groß. So ist die Gleichung

$$0 = a - e^x,$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, nach §. 63. mit der folgenden Gleichung identisch,

$$0 = a - 1 - x - \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots,$$

die nach dem Vorhergehenden unendlich viele Wurzeln hat, da sie einer ohne Ende fortgehenden Reihe gleichgeltend ist.

Die *Auflösung* einer gegebenen Gleichung besteht in der Bestimmung ihrer Wurzeln.

§. 67. (Auflösung der Gleichungen des ersten Grades.) Da die algebraischen Gleichungen des ersten Grades die unbekannte Gröfse x nur in der ersten Potenz enthalten, so besteht die Auflösung derselben in der Isolirung oder in der *Sonderung* dieser Unbekannten von den übrigen Gröfßen der Gleichung, wovon bereits oben §. 35. gehandelt worden ist, wenn man blofs *eine* Gleichung mit einer Unbekannten vorgelegt hat.

I. Sind aber zwey Unbekannte x und y in zwey Gleichungen gegeben, so wird man am einfachsten auch hier in jeder der zwey Gleichungen die eine der beyden Unbekannten sondern, und dann die so erhaltenen Werthe dieser Unbekannten einander gleich setzen. Dadurch erhält man eine Gleichung, die blofs die zweyte Unbekannte enthält, und die man daher wieder nach den Vorhergehenden behandeln wird.

Sind z. B. die beyden Gleichungen gegeben

$$\left. \begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned} \right\},$$

so erhält man durch Absonderung der Gröfse x aus der ersten

$$x = - (by + c) \frac{1}{a},$$

und aus der zweyten

$$x = - (b'y + c') \frac{1}{a'}.$$

Setzt man beyde Werthe von x einander gleich, so hat man die Gleichung

$$a(b'y + c') = a'(by + c),$$

und wenn man aus derselben die Gröfse y nach §. 35. sucht, so erhält man

$$y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Substituirt man dann diesen Werth von y in einem der zwey oben gegebenen Werthe von x , so erhält man

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b},$$

und dadurch sind demnach beyde unbekannten Gröſſen x und y gefunden. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$m = ab' - a'b,$$

so hat man

$$m \cdot x = bc' - b'c \quad \text{und}$$

$$m \cdot y = ac' - a'c.$$

Man sieht, wie sich dasselbe Verfahren auf drey und mehr Gleichungen der ersten Ordnung zwischen eben so viel Unbekannten fortsetzen läßt.

§. 68. (Auflösung der Gleichungen des zweyten Grades.) Die Gleichungen des zweyten Grades oder die quadratischen Gleichungen sind sämmtlich in der Form enthalten:

$$x^2 + ax + b = 0,$$

oder auch

$$x^2 + ax = -b.$$

Wäre nun der erste Theil $x^2 + ax$ dieser Gleichung ein vollkommenes Quadrat, von dem sich die Wurzel in einem geschlossenen Ausdrücke angeben läßt, so würde man den gesuchten Werth von x ohne Anstand bestimmen, wenn man aus diesem Theile die Wurzel zieht.

Es ist aber immer leicht, diesen ersten Theil zu einem solchen Quadrat zu machen. Zu diesem Zwecke darf man nämlich nur den Factor a von x durch 2 theilen, und dann das Quadrat dieses Quotienten oder die Gröſſe $\frac{1}{4}a^2$ zu beyden Seiten der gegebenen Gleichung addiren. Dadurch erhält man

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(x + \frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2 - b.$$

Zieht man dann auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens die Quadratwurzel aus, so hat man

$$x + \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$$

das doppelte Zeichen wegen §. 32, und daher auch

$$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{a^2 - 4b};$$

und diels ist die gesuchte doppelte Wurzel (§. 66.) der gegebenen quadratischen Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0.$$

I. Ist daher $a^2 = 4b$, oder ist $a = 2\sqrt{b}$, so sind die beyden Wurzeln der Gleichung gleich, und jede $= -\frac{1}{2}a = -\sqrt{b}$. Ist a^2 gröfser als $4b$, so sind beyde Wurzeln reell, und ist endlich a^2 kleiner als $4b$, so sind beyde Wurzeln imaginär. Ist die Gröfse $(a^2 - 4b)$ ein vollkommenes Quadrat, so sind die Wurzeln rational, im entgegengesetzten Falle aber sind sie irrational.

Ex. Ist die Gleichung gegeben

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

so hat man $a = 1$ und $b = -1$, also ist auch

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5},$$

oder die beyden Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 0.618034 \dots$$

$$\text{und } x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = -1.618034 \dots$$

Eben so wird man finden, dafs

zu der Gleichung

die Wurzeln gehören:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \dots \quad x = 1 \quad \text{und} \quad x = 2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \dots \quad x = 3 \quad \text{»} \quad x = -1$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \dots \quad x = 1 + \sqrt{-1} \quad \text{»} \quad x = 1 - \sqrt{-1}.$$

II. Auf dieselbe Weise lassen sich auch höhere Gleichungen der Form

$$x^{2m} + ax^m + b = 0$$

behandeln, da sie, wenn man $x^m = u$ setzt, die Gestalt

$$u^2 + au + b = 0$$

einer quadratischen Gleichung annehmen, für die man, nach dem Vorhergehenden, hat:

$$u = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b},$$

also auch, da $x = \sqrt[m]{u}$ ist:

$$x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}}.$$

Wäre z. B. die Gleichung gegeben:

$$x^6 - 3x^3 + 2 = 0,$$

so hätte man für $x^3 = u$ auch

$$u^2 - 3u + 2 = 0,$$

und da von der letzten Gleichung die Wurzeln

$$u = 1 \quad \text{und} \quad u = 2$$

sind, so hat man auch für die Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x = \sqrt[3]{1} \quad \text{und} \quad x = \sqrt[3]{2},$$

oder da jeder der zwey letzten Ausdrücke (nach §. 33, I.) einen dreyfachen Werth hat, so sind die sechs Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$\begin{aligned} x &= 1 & \text{und} \quad x &= \sqrt[3]{2} \\ &= \frac{1}{3}(-1 + \sqrt{-3}) & &= \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(-1 + \sqrt{-3}) \\ &= \frac{1}{3}(-1 - \sqrt{-3}) & &= \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(-1 - \sqrt{-3}). \end{aligned}$$

§. 69. (Eigenschaften der Wurzeln der höheren algebraischen Gleichungen.) Obschon die Theorie der algebraischen Gleichungen, mit welcher sich die vorzüglichsten Geometer beschäftigt haben, bereits sehr ausgebildet ist, so läßt sie doch noch vieles zu wünschen übrig, und besonders ist das Fundamentaltheorem, die Bestimmung der Wurzeln einer jeden Gleichung, welches wir so eben für die quadratischen Gleichungen betrachtet haben, nur noch auf die Gleichungen des dritten und vierten Grades fortgeführt worden, und selbst hier sind die Endresultate gewöhnlich sehr complicirt und für die Anwendung unbequem. Für Gleichungen des fünften und höheren Grades aber scheint die Auflösung dieser Aufgabe die Kräfte unserer Analysis ganz zu übersteigen.

I. Wenn jedoch die Coefficienten der Gröfse x in einer gegebenen Gleichung nicht mehr *allgemeine Zeichen* oder Buchstaben, die jeden Werth annehmen können, sondern wenn sie gegebene *Zahlen* von bestimmtem Werthe sind, wo dann die Gleichung eine *numerische* genannt wird, so hat man allerdings mehr als ein Mittel, die Wurzel einer solchen Gleichung, selbst wenn sie transcendent ist, zu bestimmen, wie wir bald sehen werden.

Hier wollen wir uns damit begnügen, die vorzüglichsten jener Sätze, die man über die Relationen der Wurzeln der *allgemeinen* algebraischen Gleichungen gefunden hat, kurz zusammen zu stellen.

II. Wenn, wie in §. 66, die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ die Wurzeln einer Gleichung $X=0$ bezeichnen, so ist, wie a. a. O. gesagt wurde,

$$X = 0 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \dots$$

Entwickelt man diese Producte, so hat man z. B. für jede Gleichung des vierten Grades

$$\begin{aligned} X = 0 = x^4 &- (\alpha + \beta + \gamma + \delta) x^3 \\ &+ (\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) x^2 \\ &- (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) x \\ &+ \alpha\beta\gamma\delta. \end{aligned}$$

Vergleicht man aber diesen Ausdruck mit der allgemeinen Form einer Gleichung des vierten Grades, die nach §. 66. ist:

$$X = 0 = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

so erhält man für die Coefficienten a, b, c, d folgende Werthe:

$$\begin{aligned} a &= -(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \\ b &= +(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) \\ c &= -(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) \\ d &= +\alpha\beta\gamma\delta. \end{aligned}$$

Ganz ähnliche Ausdrücke findet man auch für Gleichungen des 5^{ten}, 6^{ten}, . . . Grades u. f., und man hat daraus das Theorem abgeleitet:

»In jeder Gleichung der Form

$$X = 0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + hx + k$$

»ist der Factor a des zweyten Gliedes gleich der Summe aller
»Wurzeln der Gleichung, diese Wurzeln mit verkehrten Zeichen
»genommen; der Factor b des dritten Gliedes ist die Summe aller
»Paare oder aller Amben der so genommenen Wurzeln; der
»Factor c des vierten Gliedes ist die Summe aller Ternen u. s. f.,
»und der Factor k des letzten Gliedes ist das Product aller dieser
»Wurzeln, dieselben mögen reell oder imaginär seyn.«

III. Wenn in derselben Gleichung $X=0$ für $x=A$ der Werth von X positiv, und für $x=B$ negativ wird, so liegt zwischen den beyden Größen A und B immer wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung, vielleicht aber auch 3, 5, 7, . . . oder überhaupt eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln.

Wird aber für $x=A$ sowohl, als auch für $x=B$ der Werth

von X in beyden Fällen positiv, oder in beyden Fällen negativ, so liegt zwischen A und B entweder keine, oder 2, oder 4, oder überhaupt eine *gerade* Anzahl reeller Wurzeln.

IV. Jede Gleichung des 3^{ten}, 5^{ten}, 7^{ten}, . . . und überhaupt eines ungeraden Grades, hat wenigstens *eine* reelle Wurzel, und diese ist positiv, wenn das letzte constante Glied k negativ ist, und umgekehrt. So kann aber auch 3, 5, 7, . . . reelle Wurzeln haben. Jede Gleichung eines geraden Gliedes hat aber entweder keine, oder 2, 4, 6, . . . reelle Wurzeln.

V. Jede Gleichung des 2^{ten}, 4^{ten}, 6^{ten}, und überhaupt eines geraden Grades, deren letztes constantes Glied k negativ ist, hat wenigstens zwey reelle Wurzeln, von welchen immer die eine positiv und die andere negativ ist.

VI. Wenn in der obigen Gleichung $X=0$ das letzte Glied k negativ ist, und wenn die positiven Glieder, falls solche da sind, alle unmittelbar auf das erste folgen, so hat die Gleichung immer eine reelle positive Wurzel. So hat z. B. die Gleichung

$$x^2 + 7x^2 - 5x - 35 = 0$$

die Wurzeln $+ \sqrt{5}, - \sqrt{5}$ und $- 7$.

VII. Die irrationalen Wurzeln jeder Gleichung sind immer paarweise da, und wenn die eine die Form hat $\alpha + \sqrt{\beta}$, so hat die andere die Form $\alpha - \sqrt{\beta}$.

Dasselbe gilt auch von den imaginären Wurzeln, die ebenfalls immer paarweise von der Form

$$\alpha + \beta \sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \alpha - \beta \sqrt{-1}$$

vorkommen.

VIII. Um von einer Gleichung alle ihre positiven Wurzeln in negative, und alle ihre negativen Wurzeln in positive zu verwandeln, wird man bloß die Zeichen derjenigen Glieder ändern, in welchen der Exponent von x ungerade ist.

IX. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ die Wurzeln der obigen Gleichung

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + gx^2 + hx + k,$$

so sind auch $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \dots$ die Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^m + \frac{h}{k}x^{m-1} + \frac{g}{k}x^{m-2} + \dots + \frac{b}{k}x^2 + \frac{ax}{k} + \frac{1}{k},$$

und man nennt die letzte Gleichung die *reciproke* der ersten, so

wie auch die Gröſſen $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \dots$ die reciproken Gröſſen von $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ genannt werden.

X. Um die ſämmtlichen Wurzeln einer Gleichung um die Gröſſe A zu vermehren, darf man bloß in dieser Gleichung statt x die Gröſſe $x + A$ setzen.

XI. Um in der gegebenen Gleichung

$$X = 0 = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \dots + h x + k$$

das zweyte Glied $a x^{m-1}$ wegzubringen, darf man bloß in dieser Gleichung statt x die Gröſſe $x - \frac{a}{m}$ setzen, wodurch dann eine Gleichung der Form entsteht:

$$0 = x^m + A x^{m-2} + B x^{m-3} + \dots + H x + K.$$

In einer solchen Gleichung, der das zweyte Glied fehlt, ist die Summe aller ihrer positiven Wurzeln gleich der Summe aller ihrer negativen Wurzeln, wenn diese Wurzeln ſämmtlich reell sind.

Fehlt endlich in einer Gleichung

$$0 = x^m + a x^{m-1} + \dots + g x^2 + h x$$

das letzte oder constante Glied k , so ist immer eine ihrer Wurzeln gleich Null.

XII. Wenn kein Glied der Gleichung fehlt, und wenn diese Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, so hat sie auch immer eben so viel positive Wurzeln, als sie Zeichenwechsel $[+ - \text{ oder } - +]$ ihrer Glieder hat, und eben so viele negative Wurzeln, als sie Zeichenfolgen $[++ \text{ oder } --]$ ihrer Glieder hat.

So hat die Gleichung

$$x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0$$

zwey Zeichenwechsel und nur eine Zeichenfolge, also hat sie auch, da alle ihre Wurzeln reell sind, zwey positive Wurzeln $+2$ und $+7$, und eine negative Wurzel -1 .

Wenn aber einige Glieder der Gleichung fehlen, so kann man sich dieselben durch Glieder mit dem Coefficienten Null ersetzt denken, deren Zeichen sich willkürlich annehmen lassen. Nimmt man nun diese Zeichen so an, daß die Anzahl N sämtlicher Wechsel ein Kleinstes ist, und nimmt man sie dann auch so an, daß die Anzahl N' sämtlicher Folgen der Zeichen ein

Kleinstes ist, so ist die Zahl der positiven Wurzeln der Gleichung nicht gröfser als N , und die Zahl der negativen Wurzeln nicht gröfser als N' , und zugleich ist die Anzahl der imaginären Wurzeln der Gleichung nicht gröfser als

$$m - (N + N'),$$

wenn die Gleichung des m^{ten} Grades ist.

So hat z. B. die Gleichung

$$x^m + 1 = 0$$

alle ihre Wurzeln imaginär, wenn m gerade, und sie hat nur eine reelle Wurzel, wenn m ungerade ist.

§. 70. (Genäherte Auflösung aller numerischen Gleichungen.) Wenn eine numerische Gleichung $X=0$, in welcher die Coefficienten von x gegebene Zahlen sind (§. 69, I.), zur Auflösung vorgelegt wird, so ist es bey nahe immer sehr leicht, durch blofse Versuche einen ersten, wenn auch nur sehr wenig genäherten Werth einer ihrer Wurzeln zu finden. So wird man z. B. nach §. 69, II. sofort erfahren, dafs eine solche Wurzel zwischen $x=A$ und $x=B$ fällt, wenn die Summe aller Glieder der Gleichung für $x=A$ positiv, und für $x=B$ negativ ist.

Sey demnach $x=a$ ein solcher genäherter Werth von x . Substituirt man ihn in der gegebenen Gleichung, so wird er die gegebene Gröfse X nicht auf Null bringen, da nur der wahre Werth von x , nämlich nur die eigentliche Wurzel der Gleichung, also noch nicht der blofs genäherte Werth derselben, die Gröfse X gleich Null machen kann.

Nehmen wir also an, dafs wir durch diese Substitution von $x=a$ in der Gleichung, statt $X=0$, den Ausdruck erhalten

$$X = \omega,$$

wo ω eine von Null desto weniger verschiedene Gröfse seyn wird, je näher bereits a dem wahren Werthe von x genommen worden ist.

Sey eben so a' eine von a nur wenig verschiedene Gröfse, die also ebenfalls als ein zweyter genäherter Werth von x betrachtet werden kann. Substituirt man diesen Werth $x=a'$ in der gegebenen Gleichung, so gehe diese über in

$$X = \omega'.$$

Wir haben demnach zwey Hypothesen für den wahren Werth von x angenommen, nämlich $x=a$ und $x=a'$, und wir haben auch zugleich die Fehler der Endresultate, oder die Gröfsen ω und ω' erhalten, die aus jenen zwey Hypothesen entstanden sind.

Man hat nämlich

	Fehler der Hypothese,	Fehler des Resultats
in der ersten Voraussetzung . . .	$a - x$	ω
» » zweyten » . . .	$a' - x$	ω'

Je näher aber die beyden aufgestellten Hypothesen der gesuchten Wahrheit liegen, oder je kleiner die beyden Fehler $a-x$ $a'-x$ dieser Hypothesen sind, desto näher wird auch das Verhältniß derselben, oder desto näher wird die Gröfse

$$\frac{a-x}{a'-x} \text{ der Gröfse } \frac{\omega}{\omega'}$$

liegen, so daß man, da es sich hier doch nur um eine erste Näherung handelt,

$$\frac{a-x}{a'-x} = \frac{\omega}{\omega'} \dots (I)$$

setzen kann, woraus sofort folgt:

$$x = \frac{a'\omega - a\omega'}{\omega - \omega'}, \text{ oder auch } x = a - \frac{(a-a')\omega}{\omega - \omega'} = a' - \frac{(a-a')\omega'}{\omega - \omega'} \dots (II),$$

und dieser Ausdruck wird einen anderen Werth von x geben, welcher der Wahrheit näher liegt, als die beyden vorhergehenden $x=a$ und $x=a'$, so daß man daher, mit dieser neuen Hypothese, in Verbindung mit einer der vorhergehenden, dieselbe jetzt bereits mehr gesicherte Rechnung wiederholen, und so, durch Fortsetzung der Operation, der gesuchten Wahrheit immer näher kommen kann.

In der That, um zu zeigen, daß die Gleichung (I) der Wahrheit desto näher kömmt, je kleiner die Fehler der beyden Voraussetzungen sind, so kann man die gegebene Gleichung als eine Function von x ansehen, die für den gesuchten Werth von x gleich Null ist, so daß man daher hat

$$u = f(x) = 0.$$

Läßt man in diesem Ausdrücke die Gröfse x in $x + (a-x)$,

das heist, in a übergehen, so hat man, nach dem *Taylor'schen* Lehrsatz (§. 56.)

$$u' = u + (a-x) \cdot \frac{du}{dx} + \frac{(a-x)^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \dots,$$

und eben so erhält man, wenn x in $x + (a'-x)$ oder in a' übergeht:

$$u'' = u + (a'-x) \cdot \frac{du}{dx} + \frac{(a'-x)^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \dots$$

Je kleiner aber die Gröfsen $(a-x)$ und $(a'-x)$ sind, das heist, je näher die beyden Hypothesen $x=a$ und $x=a'$ der Wahrheit liegen, desto mehr wird man auch, in den beyden vorhergehenden Ausdrücken, die zweyten und höheren Potenzen dieser Gröfsen, gegen die erste, in einer blofsen Annäherung, weglassen können, so daß dann jene Ausdrücke sich blofs auf ihre ersten Glieder, oder da $u'-u=\omega$ und $u''-u=\omega'$ ist, auf die beyden einfachen Gleichungen reduzieren:

$$\omega = (a-x) \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{und}$$

$$\omega' = (a'-x) \cdot \frac{du}{dx},$$

deren Division die Gleichung (I) wieder gibt.

Ex. Um die Wurzel der Gleichung

$$X = x^3 - 2x + 1 = 0$$

zu finden, hat man, wenn $x=a=0.5$ gesetzt wird, $X=0.125$, und eben so wird $x=a'=0.7$ geben $X=-0.057$. Setzt man daher $a=0.5$ und $\omega=0.125$, so wie $a'=0.7$ und $\omega'=-0.057$, so gibt die Gleichung (II) für einen weiter genäherten Werth

$$x = a - \frac{(a-a')\omega}{\omega-\omega'} = 0.5 + 0.137 = 0.637.$$

Setzt man daher in einer zweyten Berechnung $a=0.637$, so findet man $X=\omega=-0.01552$, und da, wegen dem negativen Werth von ω dieses a noch etwas zu groß ist, so kann man $a'=0.620$ annehmen, wodurch $X=\omega'=-0.00176$ wird. Dieses zweyte Hypothesenpaar gibt, durch die Gleichung (II) den neuen genäherten Werth

$$x = 0.637 - 0.01905 = 0.61795.$$

Nimmt man in einer dritten Rechnung

$$a = 0.6180, \text{ also auch } X = \omega = 0.00002903 \text{ und}$$

$$a' = 0.6181, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad X = \omega' = -0.00005637,$$

so gibt die Gleichung (II)

$$x = 0.6180 + 0.0000340 = 0.6180340,$$

und dieser letzte Werth von x ist noch in der letzten Decimalstelle genau, da die wahren Wurzeln der gegebenen Gleichung sind:

$$\begin{array}{ll} 1 & \text{oder } 1 \\ \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) & \text{» } 0.6180340 \\ \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}) & \text{» } -1.6180340. \end{array}$$

Dafs sich aber dasselbe Verfahren auch auf transcendente Gleichungen anwenden lasse, ist für sich klar. — Zur Übung in diesen Entwicklungen mögen folgende Beyspiele dienen:

$$x^x = 10 \text{ gibt } x = 2.50618,$$

$$10^x = x^{10} \quad \text{»} \quad x = 1.37129,$$

$$4^x + 5^x = 20 \quad \text{»} \quad x = 1.52761.$$

§. 71. (Homogenität der Glieder einer Gleichung.)

Beschliessen wir diesen Gegenstand noch mit einer allen gegebenen Gleichungen zukommenden Bemerkung.

In jeder Gleichung müssen nämlich, wie es die Natur der Sache erfordert, die *Dimensionen* (§. 33, II.) eines jeden Gliedes eben so groß, als in jedem anderen Gliede seyn.

Demnach kann z. B. die folgende Gleichung

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 7 = 0$$

nicht bestehen, da 3 die Dimension des ersten, 2 die des zweiten, 1 die des dritten und 0 die Dimension des vierten Gliedes ist. In der That wird nach dem, was a. a. O. gesagt ist, x^3 einen Körper, x^2 eine Fläche und x eine Linie bezeichnen können, und es ist unmöglich, dafs dergleichen, ganz heterogene Dinge, unter sich eine Gleichung bilden.

Wenn daher solche Gleichungen, in welchen die Gleichheit der Dimensionen für die einzelnen Glieder nicht Statt hat, oder wenn solche nicht homogene Gleichungen doch öfter vorkommen, wie dieß auch in der That der Fall ist, so wird ihnen immer

die Voraussetzung zu Grunde liegen, daß man früher irgend eine GröÙe als die *Einheit* der GröÙen ihrer Art angenommen hat, wodurch dann diese GröÙe, eben weil sie durch die Einheit vorgestellt wird, aus der Gleichung gleichsam verschwunden oder doch in ihr unsichtbar gemacht worden ist.

Wenn z. B. in der Gleichung

$$x \cdot y = 12$$

die GröÙe x sowohl, als y Linien bezeichnet, und wenn man eine Linie von bestimmter Länge, z. B. die Toise, als die Einheit aller Linien annimmt, so werden dann die GröÙen x und y als bloÙe Vielfache der Toise, d. h. als bloÙe Zahlen zu betrachten seyn, und dann wird die gegebene Gleichung, obschon sie nicht homogen erscheint, z. B. für $x=3$ und $y=4$ bestehen können. — Wollte man aber dann, nicht die Toise, sondern den Fuß, deren 6 auf die Toise gehen, zur Einheit des LängenmaÙes annehmen, so würde, für jeden speciellen Fall (wie vorhin für $x=3$ und $y=4$), die GröÙe x sowohl, als y sechsmal gröÙer, als zuvor, werden, oder man würde haben

$$x' = 6x \quad \text{und} \quad y' = 6y,$$

$$\text{also auch} \quad x = \frac{1}{6}x' \quad \text{»} \quad y = \frac{1}{6}y'.$$

Substituirt man diese Werthe von x und y in der gegebenen Gleichung, so geht sie in folgende über:

$$\frac{x'}{6} \cdot \frac{y'}{6} = 12,$$

welche Gleichung demnach für denselben speciellen Fall $x=3$, $y=4$ Toisen, d. h. für $x'=18$, $y'=24$ Fuß ebenfalls Statt hat.

Man sieht daraus, daß, wenn sich die gegebene Gleichung $x \cdot y = 12$, die sich auf irgend eine Einheit bezieht, auf eine andere a Mal gröÙere Einheit beziehen soll, daß man nur alle in der Gleichung enthaltenen Buchstaben durch diese GröÙe a dividiren darf, wodurch zugleich auch die äußere Homogenität der Gleichung hergestellt wird.

So geht die Gleichung $xy=1$, wenn in ihr die GröÙe a als Einheit angenommen wird, in folgende über:

$$\frac{xy}{a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad xy = a^2,$$

in welchem letzten Ausdrucke jedes Glied zwey Dimensionen hat.

Unter derselben Voraussetzung wird die oben aufgestellte Gleichung

$$y^3 - 2x^2 + 3x - 7 = 0.$$

in folgende übergehen:

$$\frac{y^3}{a^3} - \frac{2x^2}{a^2} + \frac{3x}{a} - 7 = 0,$$

oder

$$y^3 - 2ax^2 + 3a^2x - 7a^3 = 0,$$

wo jedes Glied drey Dimensionen hat.

Eben so wird endlich die Gleichung

$$b^2x^2 + y^2 = b^2$$

übergehen in

$$\frac{b^2x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

das heist in die Gleichung

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

von vier Dimensionen, oder in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo jedes Glied die Dimension Null hat.

I. Dasselbe wird man von denjenigen Gleichungen bemerken, in welchen mehrere unter sich heterogene Gröfsen vorkommen. Wenn man z. B. zwischen den Gröfsen k , l , t die Gleichung hätte:

$$k = l \cdot t^2,$$

wo k eine Kraft anzeigt, die einen Körper, auf den sie wirkt, in der Zeit t durch den Weg l bewegen soll, so ist die auf diese Weise ausgedrückte Gleichung unmöglich, da Kräfte, Wege und Zeiten unter sich nicht unmittelbar verglichen werden, also auch keine Gleichung bilden können. Eine solche Gleichung setzt also eine gewisse Einheit der Kräfte, eine der Wege und eben so eine Einheit der Zeiten, z. B. eine Secunde voraus. Nennt man aber κ , λ und τ diejenige Kraft, den Weg und diejenige Zeit, die

man früher als Einheit angenommen hat, so wird die gegebene Gleichung in folgende homogene übergehen:

$$\frac{k}{x} = \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{t^2}{\tau^2},$$

und da die Gleichung, in der letzten Gestalt, nur mehr die *Verhältnisse* jener drey Gröfsen, nicht aber diese Gröfsen selbst, d. h. da sie nunmehr bloße *Zahlen* enthält, so ist dadurch ihre Realität hergestellt.