

## Eilftes Capitel.

### Entwicklung der Functionen.

§. 55. (Höhere Differentialien.) Da der Differentialcoefficient irgend einer Function von  $x$  im Allgemeinen wieder eine Function von  $x$  ist, so wird sich derselbe ebenfalls einer neuen Differentiation unterwerfen lassen. Ist z. B. der Ausdruck gegeben

$$u = x^4,$$

so hat man für den Differentialcoefficienten desselben, nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{du}{dx} = 4x^3.$$

Wenn man nun diese GröÙe  $u' = 4x^3$  neuerdings differentiirt, so hat man eben so

$$\frac{du'}{dx} = 12x^2.$$

Da aber  $u' = \frac{du}{dx}$  ist, so kann man, analog mit dem Vorhergehenden, für  $du'$  die Bezeichnung einführen:

$$du' = \frac{d^2u}{dx^2},$$

so dafs man also hat

$$\frac{du'}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2},$$

und daher auch

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 12x^2 \quad \text{oder} \quad d^2u = 12x^2 dx^2,$$

und man nennt, übereinstimmend mit §. 47, II., die GröÙe  $d^2u$  das *zweyte Differential* der gegebenen GröÙe  $u$ . — Eben so wird man für das dritte Differential  $d^3u$  derselben GröÙe erhalten

$$d^3u = 24x dx^3,$$

und für das vierte

$$d^4u = 24 dx^4,$$

während alle folgenden Differentialien  $d^5u, d^6u, \dots$  verschwin-



den, wenn man nämlich, wie hier vorausgesetzt wird, das erste Differential  $dx$  der Stammgröße der aufgestellten Function als eine gegebene oder unveränderliche Größe betrachtet.

I. Diese Voraussetzung, daß bey dem Übergange zu den höheren Differentialien einer Function das erste Differential der Stammgröße, oder daß überhaupt irgend ein erstes Differential als constant angenommen werde, ist selbst nothwendig, weil sonst die Werthe von  $d^2 u$ ,  $d^3 u$ , . . . keine bestimmte Bedeutung mehr haben könnten. Hätte man z. B. den Ausdruck

$$\frac{x^2 d^2 x}{d x^2},$$

worin kein erstes Differential als constant angenommen ist, so wird derselbe, wenn man  $dx = \text{Const.}$ , also  $d^2 x = 0$  nimmt, den Werth 0 annehmen. Hätte man aber irgend ein anderes erstes Differential, z. B.  $d.x^2 = \text{Const.}$  oder  $2x dx = \text{Const.}$  angenommen, so wäre

$$2 dx^2 + 2x d^2 x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 x}{d x^2} = -\frac{1}{x},$$

und daher der Werth des oben gegebenen Ausdruckes gleich  $-x$ . Eben so würde man für diesen Werth  $-2x$  finden, wenn man  $d.x^3 = 3x^2 dx = \text{Const.}$  oder  $6x dx^2 + 3x^2 d^2 x = 0$  angenommen hätte, u. s. w.

§. 56. (Taylor's Theorem.) Sey  $u = f(x)$  als eine Function von  $x$  gegeben. Wenn in dieser Function die Stammgröße  $x$  in  $x + y$  übergeht, welches wird dann der Ausdruck der so veränderten Function  $u' = f(x + y)$  seyn?

Die Beantwortung dieser Frage enthält das hier in Rede stehende Theorem.

Um diese Antwort zu geben, bemerken wir zuerst, daß eine willkürliche Function von der Summe zweyer Größen  $x + y$ , daß z. B. die Function

$(x + y)^m$ , oder  $\log(x + y)$  oder  $a^{x+y}$  u. f. immer denselben Differentialcoefficienten geben wird, welche von den beyden Größen  $x$  oder  $y$  man auch als die einzige Veränderliche betrachten mag. Ist z. B.

$$u = (x + y)^m$$



gegeben, so hat man, wenn man blofs die Gröfse  $x$  als veränderlich sieht:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = m(x+y)^{m-1},$$

und wenn man nur die Gröfse  $y$  sich verändern läfst:

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = m(x+y)^{m-1}$$

wie zuvor, so dafs man daher erhält

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dy}\right),$$

wo die Klammern anzeigen, dafs man in  $\left(\frac{du}{dx}\right)$  blofs  $x$ , so wie in  $\left(\frac{du}{dy}\right)$  blofs die Gröfse  $y$  als veränderlich angesehen hat.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun annehmen, dafs der gesuchte Ausdruck von  $u' = f(x+y)$  sich in eine Reihe entwickeln lasse, die nach Potenzen von  $y$  fortgeht. Nehmen wir für diese Reihe, da wir sie noch nicht näher kennen, folgende allgemeine Gestalt an:

$$f(x+y) = L + My^{\alpha} + Ny^{\beta} + Py^{\gamma} + \dots,$$

wo  $L, M, N, \dots$  noch unbekannte Factoren von  $x$  sind, die kein  $y$  weiter enthalten, und wo  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  unbestimmte Exponenten vorstellen, die wir nun, sammt den Coefficienten  $L, M, N, \dots$  zu bestimmen suchen wollen.

Man sieht zuerst von selbst, dafs keiner dieser Exponenten negativ seyn kann. Denn wenn z. B. das zweyte Glied jener Entwicklung die Form

$$My^{-\alpha} = \frac{M}{y^{\alpha}}$$

hätte, so würde für  $y=0$  die zweyte Seite des für  $f(x+y)$  aufgestellten Ausdruckes unendlich grofs werden, während doch die erste Seite, oder die Gröfse  $f(x+y)$  selbst, nur in  $f(x)$  übergeht, was unmöglich ist.

Wenn aber alle Exponenten  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  positiv sind, so erhält man, wenn man  $y=0$  setzt, was man darf, da  $y$  als eine ganz unbestimmte Gröfse alle Werthe haben, also auch gleich Null seyn kann, sofort

$$f(x) = L,$$



wodurch daher bereits der erste Coefficient  $L$  der oben aufgestellten Reihe bestimmt ist.

Bildet man dann den Differentialcoefficienten dieser Entwicklung der Gröfse  $f(x+\gamma)$ , und zwar so, dafs man zuerst blofs  $x$ , und dann blofs  $\gamma$  als eine veränderliche Gröfse betrachtet, so erhält man

$$\left(\frac{dL}{dx}\right) + \left(\frac{dM}{d\gamma}\right)\gamma^\alpha + \left(\frac{dN}{d\gamma^2}\right)\gamma^\beta + \left(\frac{dP}{d\gamma^3}\right)\gamma^\gamma + \dots,$$

und eben so, nach §. 51.:

$$\alpha M\gamma^{\alpha-1} + \beta N\gamma^{\beta-1} + \gamma P\gamma^{\gamma-1} + \dots,$$

und diese beyden Ausdrücke müssen, der oben vorausgeschickten Bemerkung zu Folge, einander völlig gleich seyn, welches auch der Werth von  $\gamma$  seyn mag. Diese Gleichheit kann aber offenbar nur dann Statt finden, wenn in beyden Ausdrücken gleiche Exponenten von  $\gamma$  vorkommen. Allein wenn in dem ersten Ausdrücke diese Exponenten steigend geordnet sind, so dafs  $\beta$  grösser als  $\alpha$ ,  $\gamma$  grösser als  $\beta$  u. f. ist, so sind sie auch in dem zweyten Ausdrücke steigend, und man hat daher

$$\alpha - 1 = 0, \alpha = \beta - 1, \beta = \gamma - 1, \gamma = \delta - 1 \text{ u. f.},$$

das heifst, man hat

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, \delta = 4 \text{ u. f.}$$

Substituirt man diese Werthe von  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  in den erwähnten beyden Ausdrücken, und setzt sie dann, da sie nach dem Vorhergehenden identisch sind, einander gleich, so erhält man die Gleichung

$$0 = \left[M - \left(\frac{dL}{dx}\right)\right] + \left[2N - \left(\frac{dM}{d\gamma}\right)\right]\gamma + \left[3P - \left(\frac{dN}{d\gamma^2}\right)\right]\gamma^2 + \left[4Q - \left(\frac{dP}{d\gamma^3}\right)\right]\gamma^3 + \dots,$$

und dieser Ausdruck soll für *alle* Werthe von  $\gamma$  gleich Null seyn. Diefs kann aber nach §. 34, III. nur dann Statt haben, wenn die einzelnen Factoren der Potenzen

$$\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \dots$$

jeder für sich gleich Null sind, das heifst, wenn man die Bedingungsgleichungen hat:



$$M = \left( \frac{dL}{dx} \right),$$

$$N = \frac{1}{2} \left( \frac{dM}{dx} \right),$$

$$P = \frac{1}{3} \left( \frac{dN}{dx} \right),$$

$$Q = \frac{1}{4} \left( \frac{dP}{dx} \right) \text{ u. f.}$$

Es wurde aber bereits zuvor

$$L = f(x)$$

gefunden, also ist auch, wenn man diesen Werth von  $L$  in der ersten der vorhergehenden Bedingungsgleichungen substituirt:

$$M = \left( \frac{d f x}{dx} \right),$$

und dadurch ist auch der zweyte der obigen Coefficienten  $L, M, N, \dots$  bestimmt. Es ist nämlich dieser zweyte Coefficient  $M$  nichts anderes, als der erste Differentialcoefficient der gegebenen Function  $f(x)$ .

Substituirt man dann diesen Werth von  $M$  in der zweyten unserer Bedingungsgleichungen, so erhält man, vermöge der oben (§. 55.) eingeführten Bezeichnung der höheren Differentia-  
lien, wenn das erste Differential  $dx$  der Stammgröße  $x$  constant ist:

$$N = \frac{1}{2} \left( \frac{dM}{dx} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{d \left( \frac{d f x}{dx} \right)}{dx} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 f x}{dx^2} \right),$$

wodurch auch der dritte unserer Factoren  $N$  bestimmt ist.

Ganz eben so erhält man für die übrigen

$$P = \frac{1}{3} \left( \frac{dN}{dx} \right) = \frac{1}{2 \cdot 3} \left( \frac{d^3 f x}{dx^3} \right),$$

$$Q = \frac{1}{4} \left( \frac{dP}{dx} \right) = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left( \frac{d^4 f x}{dx^4} \right) \text{ u. f.}$$

Substituirt man daher die gefundenen Werthe von  $L, M, N, \dots$  in den oben für  $f(x+y)$  aufgestellten Ausdruck, so erhält man

$$f(x+y) = f x + y \left( \frac{d f x}{dx} \right) + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \left( \frac{d^2 f x}{dx^2} \right) + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{d^3 f x}{dx^3} \right) + \dots (\Delta),$$



oder auch, wenn man wieder, der Kürze wegen,

$$fx = u \quad \text{und} \quad f(x+y) = u'$$

setzt:

$$u' = u + y \left( \frac{du}{dx} \right) + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{d^3 u}{dx^3} \right) + \dots \quad (\text{A}).$$

I. Von dieser Reihe, die nach ihrem Erfinder unter der Benennung des *Theorems von Taylor* bekannt ist, ist das einfache Gesetz des Fortganges der Glieder für sich klar, und sie zeigt uns die zwey sehr merkwürdigen Eigenschaften der Entwicklung einer jeden Function  $f(x)$ , wenn man in ihr die Stammgröße  $x$  in  $x+y$  übergehen läßt: daß erstens diese Entwicklung durch eine Reihe dargestellt wird, die nach den natürlichen Potenzen  $0, 1, 2, 3, \dots$  der Größe  $y$  fortgeht, und daß zweytens jedes einzelne Glied aus dem ihm unmittelbar vorhergehenden ganz auf dieselbe Art und durch dasselbe Verfahren abgeleitet wird, wie dieses vorhergehende Glied selbst wieder aus dem ihm vorhergehenden entstanden ist. Das zweyte Glied ist nämlich der Differentialcoefficient des ersten, multiplicirt in die Größe  $y$ ; das dritte ist eben so das Differential des zweyten, multiplicirt in  $\frac{1}{2}y$ ; das vierte ist das Differential des dritten, multiplicirt in  $\frac{1}{3}y$  u. s. f., so daß es daher schon genügt, von jeder gegebenen Function  $f(x)$  das erste Differential zu kennen, um daraus auch sofort die Entwicklung von  $f(x+y)$  abzuleiten, wo  $y$  jede willkürliche, constante oder veränderliche Größe bezeichnet. Aus dieser Ursache haben wir auch in dem vorhergehenden zehnten Capitel das erste Differential der verschiedenen Gattungen von Functionen

$$f(x) \dots x^m, \log x, a^x, \dots$$

die wir bisher kennen gelernt haben, aufgesucht, um sie, wie wir sogleich näher sehen werden, zur Entwicklung der Function  $f(x+y)$  zu verwenden.

II. Bemerken wir noch, daß, wenn in der gegebenen Function  $f(x)$  die Größe  $x$ , statt zu wachsen, wie wir bisher angenommen haben, um die Größe  $y$  abnimmt, daß dann diese Größe  $y$  in der Gleichung (A) negativ genommen wird, so daß man also für den so veränderten Zustand der Function  $f(x)$  hat

$$f(x-y) = fx - y \left( \frac{d \cdot fx}{dx} \right) + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \left( \frac{d^2 \cdot fx}{dx^2} \right) - \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{d^3 \cdot fx}{dx^3} \right) + \dots$$



III. Ist endlich der Zuwachs der Stammgröße  $x$ , den wir bisher allgemein durch  $\gamma$  bezeichnet haben, gleich dem Differential  $dx$  dieser Stammgröße selbst, so wird man in der Gleichung (A) die Größe  $\gamma = dx$  setzen, wodurch man erhält

$$f(x+dx) - fx = d.fx + \frac{1}{1.2} d^2.fx + \frac{1}{1.2.3} d^3.fx + \dots,$$

oder auch, nach dem zweyten Ausdrücke der Gleichung (A):

$$u' - u = du + \frac{1}{1.2} d^2 u + \frac{1}{1.2.3} d^3 u + \dots,$$

und *dies* ist demnach der *vollständige* Zuwachs der Function  $u = fx$ , wenn  $x$  in seinen nächstfolgenden Werth  $x + dx$  übergeht. Da aber jedes Glied dieser Reihe gegen sein nächstvorhergehendes unendlich klein ist, so werden, dem oben (§. 47, I.) aufgestellten Princip der Differentialrechnung gemäß, alle Glieder dieser Reihe, bis auf das erste, verschwinden, wodurch man erhält

$$f(x+dx) - fx = d.fx$$

oder

$$u' - u = du, \text{ wie zuvor.}$$

§. 57. (Maclaurin's Lehrsatz.) Wenn man in der Reihe (A) des vorhergehenden §. 56. sowohl in dem Ausdrücke  $f(x)$ , als auch in den Differentialcoefficienten

$$\frac{d.fx}{dx}, \frac{d^2.fx}{dx^2}, \frac{d^3.fx}{dx^3}, \dots$$

nach vollbrachter Differentiation, die Stammgröße  $x = 0$  setzt, und wenn man, der Kürze wegen, die dieser Annahme von  $x = 0$  entsprechenden Werthe von

|                      |      |                       |       |             |
|----------------------|------|-----------------------|-------|-------------|
| $u$                  | oder | $fx$                  | durch | $U,$        |
| $\frac{du}{dx}$      | »    | $\frac{d.fx}{dx}$     | »     | $U',$       |
| $\frac{d^2 u}{dx^2}$ | »    | $\frac{d^2 fx}{dx^2}$ | »     | $U''$ u. f. |

bezeichnet, so geht die Reihe (A), da jetzt in ihr die Größe  $f(x+\gamma)$  gleich  $f(\gamma)$  wird, in folgende über:

$$f(\gamma) = U + \gamma \cdot U' + \frac{\gamma^2}{1.2} \cdot U'' + \frac{\gamma^3}{1.2.3} \cdot U''' + \dots$$

Da dieser Ausdruck für jeden willkürlichen Werth von  $\gamma$



Statt hat, und da die Größen  $U, U', U'', \dots$  kein  $y$  enthalten, so kann man in demselben auch  $x$  statt  $y$  setzen, so daß man demnach für jede gegebene Function  $u = f(x)$  von  $x$  den Ausdruck hat

$$u = f(x) = U + x \cdot U' + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot U'' + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot U''' + \dots \quad (B),$$

wo wieder  $U, U', U'', \dots$  die Werthe von  $u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \dots$  für den Fall  $x=0$  bezeichnen.

Dieser Ausdruck, der, wie man sieht, nur eine Modification des *Taylor'schen* Theorems ist, wird der Lehrsatz *Maclaurin's* genannt.

Beide Theoreme sind von dem wichtigsten Einflusse auf das ganze Gebiet der mathematischen Analysis, besonders aber auf die Entwicklung der verschiedenen Functionen, wie wir sogleich näher zeigen wollen.

§. 58. (Entwicklung des Binoms.) Sey die Function

$$u = f(x) = x^n$$

gegeben, wo  $x$  eine veränderliche, und  $n$  eine constante willkürliche Zahl bezeichnet. Man suche den Werth dieser Function, wenn die Stammgröße  $x$  derselben in  $x+y$  übergeht, oder man suche

$$u = f(x+y) = (x+y)^n.$$

Nach §. 51. hat man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = nx^{n-1},$$

und wenn man von diesem Ausdrucke wiederholt das Differential nimmt, und  $dx$  constant voraussetzt:

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = n(n-1)x^{n-2},$$

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) = n(n-1)(n-2)x^{n-3} \text{ u. f.}$$

Substituirt man diese Werthe von  $\left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \dots$  in der Gleichung (A) des §. 56., so erhält man

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}y^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3}y^3 + \dots \quad (I), \end{aligned}$$



und diese Entwicklung der Function  $(x + y)^n$  ist unter dem Namen von *Newton's Binom* bekannt.

Das Gesetz des Fortganges der Reihe ist auch hier für sich klar. So ist das nächstfolgende oder vierte Glied, wenn das erste das  $0^{\text{te}}$  heisst:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4} y^4,$$

und so ist auch, wenn  $r$  irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet, das  $r^{\text{te}}$  Glied dieser Reihe

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-[r-1])}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)r} \cdot x^{n-r} y^r.$$

Man sieht, daß diese Reihe abbricht oder endlich ist, wenn  $n$  eine ganze, positive Zahl ist.

I. Setzt man in dem vorhergehenden Ausdrucke für  $n$  nach der Ordnung die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, . . . so hat man für  $x=1$

$$\begin{aligned} (1+y) &= 1+y, \\ (1+y)^2 &= 1+2y+y^2, \\ (1+y)^3 &= 1+3y+3y^2+y^3, \\ (1+y)^4 &= 1+4y+6y^2+4y^3+y^4, \\ (1+y)^5 &= 1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5, \\ (1+y)^6 &= 1+6y+15y^2+20y^3+15y^4+6y^5+y^6, \end{aligned}$$

welche Reihen, selbst wenn ihre allgemeine Form durch das Vorhergehende noch nicht gegeben wäre, sich leicht fortsetzen lassen, da jedes Glied gleich dem zunächst über ihm stehenden und dem diesem vorhergehenden Gliede ist. So ist

$$\begin{aligned} 6 &= 3 + 3, \\ 10 &= 6 + 4, \\ 15 &= 10 + 5 \text{ u. f.} \end{aligned}$$

II. Ist die GröÙe  $y$  negativ, so erhält man

$$(x-y)^n = x^n - nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}y^2 - + \dots$$

III. Setzt man in der gefundenen Entwicklung

$$y = \frac{ax}{1-a},$$

also auch

$$x+y = \frac{x}{1-a},$$



so hat man

$$(x+y)^n = x^n \cdot (1-a)^{-n}.$$

Es ist aber, wenn man in (I) die Gröfse  $x=1$ ,  $y=-a$  und  $n=-n$  setzt:

$$(1-a)^{-n} = 1 + na + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \dots,$$

also ist auch, wenn man den Werth von  $a = \frac{y}{x+y}$  wieder herstellt:

$$(x+y)^n = x^n \cdot \left[ 1 + nX + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} X^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} X^3 + \dots \right],$$

wo  $X = \frac{y}{x+y}$  gesetzt worden ist. Diese Reihe bricht ab, wenn  $n$  eine ganze negative Zahl ist, und sie convergirt oft viel schneller, als die vorhergehende Reihe (I).

IV. Ist  $x=y=1$ , so gibt die Reihe (I)

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Die Summe der Coefficienten des *Newton'schen* Binoms ist also gleich  $2^n$ .

Ist aber  $x=y=1$ , und setzt man statt  $n$  die Gröfse  $-n$ , so gibt dieselbe Reihe (I)

$$\frac{1}{2^n} = 1 - n + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Ist endlich  $x=1$  und  $y=-1$ , so hat man für jeden Werth von  $n$ :

$$0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

§. 59. (Ausziehung der Wurzeln.) Mit Hülfe des vorhergehenden Satzes wird man von jeder gegebenen Zahl  $A$  irgend eine Potenz derselben, also auch, wenn der Exponent dieser Potenz eine gebrochene Zahl ist, die *Wurzel* der Zahl  $A$ , und somit den Werth aller irrationalen Zahlen (§. 30.) angeben können.

Es war nämlich die Gleichung (I)

$$(x+y)^n = x^n \cdot \left[ 1 + n\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \dots \right].$$



Man wird daher jede Zahl  $A$ , aus welcher man z. B. die zweyte oder die Quadratwurzel ziehen soll, in zwey Theile

$$a^2 + b$$

so zerlegen, dafs der erste Theil ein vollkommenes oder bekanntes Quadrat, und dafs der zweyte Theil gegen den ersten sehr klein ist. Denn setzt man

$$c = \frac{b}{a^2},$$

so geht der vorhergehende Ausdruck in folgenden über:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} = a \left[ 1 + \frac{1}{2}c - \frac{1}{8}c^2 + \frac{1}{16}c^3 - \frac{5}{128}c^4 + \frac{7}{256}c^5 - \frac{31}{1024}c^6 + \dots \right].$$

Eben so wird man, um aus einer gegebenen Zahl  $A$  die Kubikwurzel auszuziehen, diese Zahl in zwey Theile

$$a^3 + b$$

so theilen, dafs der erste Theil ein vollkommener Würfel, und dafs der zweyte gegen den ersten sehr klein ist. Setzt man dann

$$c = \frac{b}{a^3},$$

so hat man

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{a^3 + b} = a \left[ 1 + \frac{1}{3}c - \frac{1}{9}c^2 + \frac{5}{81}c^3 - \frac{10}{243}c^4 + \frac{22}{729}c^5 - \frac{154}{6561}c^6 + \dots \right],$$

und so fort für alle anderen Wurzeln.

Um dies durch ein Beyspiel zu zeigen, wollen wir die Quadratwurzel von 2 suchen. Setzt man in einer ersten Näherung  $a=1$  und  $b=1$ , also auch  $c=1$ , so hat man

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \text{ oder nahe } \sqrt{2} = 1.4.$$

Sey daher in einer zweyten Näherung  $a=1.4$ , also auch  $a^2=1.96$ , und sonach  $b=0.04$  und  $c = \frac{0.04}{1.96} = \frac{1}{49}$ , so hat man

$$\sqrt{2} = 1.4 \left[ 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{49}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{49}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{49}\right)^3 - \dots \right],$$

eine viel schneller convergirende Reihe, als zuvor.

Wenn man diese Brüche in Decimalbrüche verwandelt, so ist



$$\sqrt{2} = 1.4 \left\{ \begin{array}{l} + 0.010 \ 2041 \\ - 0.000 \ 0521 \\ + 0.000 \ 0005 \end{array} \right\} \quad \text{oder} \quad \sqrt{2} = 1.4 \{ 1.0101525 \},$$

so daß man daher hat

$$\sqrt{2} = 1.4142135,$$

und dieser Werth, wie man sieht, bis auf die sechste Decimalstelle inclus. genau.

Will man noch weiter gehen, so kann man  $a = 1.414213$  setzen, woraus folgt

$$a^2 = 1.99999 \ 8409369, \text{ also auch}$$

$$b = 0.000001 \ 590631 \text{ und}$$

$$c = \frac{b}{a^2} = 0.000000 \ 795316 \ 132527,$$

so daß man daher die folgende sehr schnell convergirende Reihe erhält:

$$\sqrt{2} = 1.414213 \left\{ \begin{array}{l} + 0.000000 \ 397658 \ 0662636 \\ - 0.000000 \ 000000 \ 0790667 \\ + 0.000000 \ 000000 \ 0000003 \end{array} \right\}$$

oder

$$\sqrt{2} = 1.414213 \{ 1.000000 \ 397657 \ 9871972 \},$$

oder endlich

$$\sqrt{2} = 1.414213 \ 562373 \ 095048$$

noch in der letzten oder 18<sup>ten</sup> Decimalstelle genau.

Eben so erhält man

$$\sqrt{3} = 1.732050 \ 807569,$$

woraus man dann durch einfache Rechnung auch findet

$$\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}, \quad \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \text{ so wie}$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ u. f.}$$

Eben so hat man endlich zur Übung in solchen Rechnungen:

$$\sqrt[10]{10} \text{ oder } 10^{\frac{1}{10}} = 1.25892 \ 54118 \dots$$

$$10^{\frac{1}{100}} = 1.02329 \ 29923 \dots$$

$$10^{\frac{1}{1000}} = 1.00230 \ 52381 \dots \text{ u. f.}$$



§. 60. (Entwicklung der Logarithmen.) Sey die Function gegeben

$$u = \text{Log}(1+x),$$

so hat man, nach §. 52.:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{m}{1+x},$$

also auch

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = -\frac{m}{(1+x)^2}, \quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) = \frac{2m}{(1+x)^3},$$

$$\left(\frac{d^4u}{dx^4}\right) = -\frac{2 \cdot 3m}{(1+x)^4} \text{ u. f.}$$

Setzt man in allen diesen Ausdrücken die Gröfse  $x=0$ , so erhält man, nach *Maclaurin's* Theorem, da  $\text{Log } 1=0$  ist:

$$U=0, \quad U'=m, \quad U''=-m, \quad U'''=2m, \quad U''''=-2 \cdot 3m, \dots$$

also auch, wenn man diese Werthe von  $U, U', U'', \dots$  in der Reihe (B) des §. 57., das heifst, in dem Ausdrucke

$$u = U + xU' + \frac{x^2}{1 \cdot 2}U'' + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}U''' + \dots$$

substituirt:

$$\text{Log}(1+x) = m\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) \dots (C),$$

und diefs ist die schöne und einfache Reihe, welche den Logarithmus jeder Zahl  $(1+x)$  durch diese Zahl  $x$  selbst ausdrückt.

I. Man kann der gefundenen Reihe mehrere verschiedene Gestalten geben, die sie zur Berechnung der Logarithmen bequemer machen.

Setzt man z. B. in ihr statt der willkürlichen Gröfse  $x$  die Gröfse  $-x$ , so erhält man

$$\text{Log}(1-x) = -m\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right).$$

Subtrahirt man aber diese beyden Reihen von einander, und bemerkt man, dafs nach §. 44, III.

$$\log y - \log z = \log \frac{y}{z}$$

ist, so hat man

$$\text{Log} \frac{1+x}{1-x} = 2m\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right\}.$$

Setzt man endlich in dem letzten Ausdrucke statt  $x$  die



Gröſſe  $\frac{y}{2x+y}$ , so erhält man

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{x+y}{x},$$

so daſs man daher hat:

$$\begin{aligned} & \text{Log}(x+y) \\ = & \text{Log } x + 2m \left\{ \left( \frac{y}{2x+y} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{y}{2x+y} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{y}{2x+y} \right)^5 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

### §. 61. (Entwicklung der Exponentialgröſſen.)

Ist endlich noch die dritte der oben erwähnten Functionen, oder ist die Exponentialgröſſe

$$u = a^x$$

gegeben, so hat man (nach §. 53.)

$$\left( \frac{du}{dx} \right) = \frac{1}{m} \cdot a^x, \text{ also auch}$$

$$\left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \frac{1}{m^2} \cdot a^x, \quad \left( \frac{d^3 u}{dx^3} \right) = \frac{1}{m^3} \cdot a^x \text{ u. f.}$$

und wenn man in diesen Ausdrücken die Gröſſe  $x=0$  setzt,

$$U = 1, \quad U' = \frac{1}{m}, \quad U'' = \frac{1}{m^2}, \quad U''' = \frac{1}{m^3} \text{ u. f.,}$$

so daſs man daher nach *Maclaurin's* Theorem (§. 57, Gleichung B) erhält:

$$a^x = 1 + \left( \frac{x}{m} \right) + \frac{1}{1 \cdot 2} \left( \frac{x}{m} \right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{x}{m} \right)^3 + \dots \text{ (D),}$$

und dieſs ist die gesuchte Entwicklung der Potenz  $a^x$  durch ihren veränderlichen Exponenten  $x$ .

### §. 62. (Bestimmung der vorhergehenden Zahl $m$ .)

Wir haben bereits oben (§. 45, I.) gesehen, daſs das Verhältniſs der Logarithmen derselben Zahl  $x$ , in zwey verschiedenen Systemen, ein *constant*es Verhältniſs zu einander haben, welches Verhältniſs wir a. a. O. durch die Zahl  $m$  bezeichnet haben, so daſs

$$\text{Log } x = m \cdot \log x$$

ist, wenn durch die beyden Symbole *Log* und *log* die Logarithmen von zwey Systemen bezeichnet werden, deren Basis  $a$  und  $e$  sind, für welche man also den Werth von  $\text{Log } a$  in dem ersten, und von  $\log e$  in dem zweyten Systeme, der Einheit gleich ist.



Da es unzählige Systeme von Logarithmen gibt, indem jede willkürliche Zahl als die Basis eines solchen Systems angenommen werden kann, so wird es von unserer Wahl abhängen, eines derselben gleichsam vorzugsweise zu betrachten, und auf dasselbe alle anderen zu beziehen.

Die Gleichung (C) des §. 60. gab für den allgemeinen Ausdruck des Logarithmus in jedem Systeme

$$\text{Log}(1+x) = m \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right).$$

Da die Gröfse  $m$ , dem Vorhergehenden zu Folge, eine beständige Zahl ist, deren Werth aber unserer Wahl überlassen bleibt, und da es am einfachsten und natürlichsten ist, diese Zahl  $m$  gleich der Einheit anzunehmen, so wollen wir auch die unter dieser Annahme entstehenden Logarithmen die *natürlichen* nennen, und sie durch das zweyte der oben erwähnten Symbole, oder durch *log* bezeichnen, so dafs man daher für diese natürlichen Logarithmen, deren Basis wir, wie zuvor, durch  $e$  anzeigen wollen, nach §. 60. die Ausdrücke haben wird:

$$\begin{cases} \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ \log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right) \text{ u. f.} \end{cases}$$

während wir für jedes andere System, dessen Basis  $a$  ist, die zu diesem System gehörenden Logarithmen durch die in §. 60. gegebenen, unveränderten Ausdrücke bestimmen:

$$\begin{cases} \text{Log}(1+x) = m \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) \\ \text{Log} \frac{1+x}{1-x} = 2m \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) \text{ u. f.} \end{cases}$$

Wir wollen diese letzten, durch *Log* bezeichneten Logarithmen, zum Unterschiede von den natürlichen, die *gewöhnlichen Logarithmen* nennen.

Diefs vorausgesetzt, werden wir nur noch anzugeben haben, wie die Gröfsen  $a$  und  $m$  von einander abhängen, oder welches der Factor  $m$  ist, durch welchen man alle natürlichen Logarithmen, deren Basis  $e$  ist, multipliciren mufs, um dadurch die gewöhnlichen Logarithmen, deren Basis  $a$  ist, zu erhalten.



I. Zu diesem Zwecke wollen wir in der Reihe (D) des §. 61. die Gröfse  $x=1$  setzen, wodurch man erhält:

$$a = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{1 \cdot 2 m^2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 m^3} + \dots,$$

und dieser Ausdruck gibt den Werth der Basis  $a$  des gewöhnlichen Logarithmensystems, wenn sein Factor, oder, wie man zu sagen pflegt, wenn sein *Model*  $m$  bekannt ist.

II. Setzt man eben so in der Gleichung (C) des §. 60. die Gröfse  $x=a-1$  oder  $1+x=a$ , so erhält man, da für das gewöhnliche System  $\text{Log } a=1$  ist:

$$\frac{1}{m} = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \dots,$$

und dieser Ausdruck gibt den *Model*  $m$  des Systems, wenn die Basis  $a$  desselben bekannt ist.

III. Wegen der bey uns eingeführten decadischen Art zu zählen (§. 16, II.), hat man die Zahl 10 für die Basis der gewöhnlichen Logarithmen, mit welchen wir zu rechnen pflegen, gewählt. Setzt man also  $a=10$ , so gibt die letzte Reihe

$$\frac{1}{m} = 9 - \frac{1}{2}9^2 + \frac{1}{3}9^3 - \frac{1}{4}9^4 + \dots$$

Diese Reihe convergirt erst in ihren höheren Gliedern, und auch da anfangs nur langsam. Wir werden aber bald ein anderes Mittel finden, den Werth der Gröfse  $m$  auf eine bequemere Weise zu bestimmen. Berechnet man indeß eine gröfsere Anzahl Glieder der letzten Reihe, so erhält man

$$\frac{1}{m} = 2.302585 \ 092994 \ 045684,$$

und daher auch

$$m = 0.434294 \ 481903 \ 251828.$$

Mit diesem Factor  $m$  wird man daher die natürlichen Logarithmen jeder Zahl multipliciren, um die gewöhnlichen Logarithmen derselben Zahl zu erhalten.

Bemerken wir noch, daß dieser Werth von  $m$  zugleich der Werth des gewöhnlichen Logarithmus von  $e$ , und der reciproke Werth des natürlichen Logarithmus von  $a$  ist, da man, nach §. 45, I. hat:

$$m = \text{Log } e \quad \text{und} \quad \frac{1}{m} = \log a.$$



§. 63. (Bestimmung der vorhergehenden Zahl  $e$ .)

Noch ist die Bestimmung des Werthes von  $e$  oder von der Basis der natürlichen Logarithmen übrig.

Da aber, nach dem Vorhergehenden, die Gröſſe  $a$  in  $e$  übergeht, wenn  $m$  gleich der Einheit ist, so gibt die Gleichung (D) des §. 61, wenn man in ihr  $m=1$  und daher  $a=e$  setzt,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots \text{ (E),}$$

also auch, wenn man in diesem Ausdrücke  $x=1$  setzt,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

Berechnet man eine gröſſere Anzahl von Gliedern der letzten Reihe, so findet man

$$e = 2.718281\ 828459\ 045235 \dots$$

eine sehr wichtige Zahl, auf die wir in der Folge noch öfter zurückkommen werden.

§. 64. (Berechnung der Logarithmen und Gebrauch der logarithmischen Tafeln.) Nachdem wir in dem Vorhergehenden die Theorie der Logarithmen vollständig kennen gelernt haben, wollen wir nun auch zu dem Gebrauch derselben übergehen, wie er bey unseren Rechnungen erfordert wird. Dazu aber ist es vor allem nothwendig, die numerischen Werthe dieser Logarithmen für alle natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... in einer Tafel aufgestellt zu haben. Diese zu finden, werden uns die vorhergehenden Ausdrücke mehr als ein Mittel an die Hand geben.

Setzt man z. B. in der letzten Gleichung des §. 60, I. die Gröſſe  $x=y=1$ , und nimmt man auch  $m=1$ , so hat man für die natürlichen Logarithmen

$$\log(x+y) = \log x + 2 \left\{ \left( \frac{y}{2x+y} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{y}{2x+y} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{y}{2x+y} \right)^5 + \dots \right\}$$

oder

$$\log 2 = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \dots \right),$$

das heißt, wenn man diese Brüche in Decimalbrüche auflöst:

$$\log 2 = 0.69314\ 71806.$$



Eben so gibt  $x=2$  und  $y=1$

$$\log 3 = \log 2 + 2 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \dots \right) \text{ oder}$$

$$\log 3 = 1.09861 \ 22887.$$

Auf dieselbe Weise findet man auch

$$\log 5 = 1.60943 \ 79124,$$

$$\log 7 = 1.94591 \ 01490.$$

Hat man aber so bereits die Logarithmen von 2, 3, 5 und 7, so findet man die übrigen bis zu 10 durch folgende einfache Gleichungen (§. 44.):

$$\log 4 = 2 \log 2, \quad \log 6 = \log 2 + \log 3,$$

$$\log 8 = 3 \log 2, \quad \log 9 = 2 \log 3 \quad \text{und}$$

$$\log 10 = \log 2 + \log 5 \quad \text{u. s. f.}$$

Auf diese Weise erhält man z. B. den letzten dieser Logarithmen, oder

$$\log 10 = 2.30258 \ 50930 \dots,$$

und dies ist zugleich der Werth von der Größe  $\frac{1}{m}$ , die wir oben (§. 62, III.) durch eine langsam convergirende Reihe bestimmt haben.

I. Bemerken wir noch, daß die zwey in §. 62. aufgestellten Ausdrücke für  $\log(1+x)$  und für  $\log \frac{1+x}{1-x}$  geben, wenn man in ihnen  $x=1$  setzt:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\text{und } \log \infty = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots,$$

so wie zugleich die erste, für  $x=-1$ , gibt

$$-\log 0 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Da aber der Logarithmus einer unendlich großen Zahl ohne Zweifel ebenfalls unendlich groß ist, und da, wie aus den Gleichungen

$$e^{-u} = x \quad \text{oder} \quad u = -\log x$$

folgt, die Größe  $-\log 0$  positiv und unendlich groß ist, so ist die erste der drey vorhergehenden Reihen convergent, während die bey den anderen divergent sind, übereinstimmend mit §. 23, II.

II. Man hat bereits mehrere Tafeln berechnet, welche die gewöhnlichen Logarithmen der natürlichen Zahlen enthalten.



Unter den neueren sind die vorzüglichsten die von *Vega* und *Callet*, und die bequemsten für kleinere Rechnungen die von *Lalande*.

Die allgemeinen Vorschriften für den Gebrauch dieser Tafeln sind ihnen gewöhnlich beygegeben, daher wir uns hier nicht dabey aufhalten, und nur einige Bemerkungen über diesen Gegenstand hinzufügen.

A. Da  $\text{Log } 1 = 0$  ist, so sind die Logarithmen aller eigentlichen Brüche negativ. So findet man z. B. in diesen Tafeln, wo ich mich hier der Kürze wegen nur auf drey Decimalstellen beschränke:

$$\text{Log } 624 = 2.795,$$

$$\text{Log } 62.4 = 1.795,$$

$$\text{Log } 6.24 = 0.795.$$

Setzt man dieß weiter fort, so erhält man auf dieselbe Weise

$$\text{Log } 0.624 = 0.795 - 1,$$

$$\text{Log } 0.0624 = 0.795 - 1.$$

Es ist aber viel bequemer, die letzten Ausdrücke so darzustellen:

$$\text{Log } 0.624 = 9.795,$$

$$\text{Log } 0.0624 = 8.795 \text{ u. f.}$$

Man wird nämlich nie anstehen, in dem Endresultate einer jeden Rechnung zu entscheiden, ob der letzte Logarithmus, wie hier 8.795, zu einem sehr kleinen Bruch, wie hier 0.0624, oder zu einer ganzen Zahl mit 9 Ziffern gehören soll.

B Die Logarithmen der negativen Gröfsen sind imaginär, da in der Gleichung

$$y = 10^x \text{ oder } x = \text{Log } y$$

die Gröfse  $y$  nie negativ werden kann, welchen Werth man auch der Gröfse  $x$  geben mag. Dieß hindert aber nicht, während der Berechnung eines algebraischen Ausdrucks, die Zeichen vorerst wegzulassen, um sie dann in dem Endresultate wieder zu berücksichtigen. Um Irrungen zu vermeiden, kann man die Logarithmen der negativen Zahlen durch ein  $N$  bezeichnen. Wollte man z. B. von den beyden Zahlen 0.0036 und  $-0.048$  das Product mit Hülfe der Logarithmen suchen, so hätte man



$$\text{Log } 0.0036 = 7.55630$$

$$\text{Log } (-0.048) = \frac{8.68124}{N}$$

$$\text{Summe} \dots 6.23754.$$

Von diesem Logarithmus geben die Tafeln die Zahl 1728, also ist auch das gesuchte Product gleich  $-0.0001728$ .

C. Endlich bemerken wir noch, daß eine solche Tafel das bequemste Mittel darbietet, die Wurzeln aller Zahlen, wenigstens innerhalb den Grenzen, welche diese Tafeln gewähren, zu finden, da nach §. 44. die Ausziehung der Wurzeln durch die Logarithmen in eine einfache Division verwandelt wird. So findet man z. B. aus den erwähnten Tafeln *Vega's* ohne Anstand die zehnte Wurzel aus der Zahl 1000. Da nämlich

$$\text{Log } 1000 = 3.0000000$$

ist, so gibt der zehnte Theil dieser Zahl oder die Gröfse

$$0.3000000$$

in jener Tafel sofort 1.9952623 für den gesuchten Werth von  $\sqrt[10]{1000}$ .

§. 65. (Größte und kleinste Werthe, und unbestimmte Ausdrücke der Functionen.) Wenn in einer Function  $u = f(x)$  von  $x$  die Stammgröfse  $x$  übergeht in  $x + h$ , so hat man, nach der Gleichung (A) des §. 56, für den so veränderten Werth dieser Function

$$u' - u = h \cdot \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + \dots,$$

und eben so erhält man, wenn  $x$  in  $x - h$  übergeht:

$$u' - u = -h \cdot \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{h^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + \dots,$$

und man sieht leicht, daß man die Gröfse  $h$  so klein annehmen kann, daß, in diesen beyden Reihen, jedes einzelne Glied grösser wird, als die Summe aller ihm folgenden Glieder. Bleibt man bey dem ersten Gliede stehen, so ist also  $u' - u$  im ersten Falle positiv, und im zweyten negativ, oder  $u'$  ist im ersten Falle grösser, und im zweyten kleiner, als  $u$ . Es kann daher zwischen  $x + h$  und  $x - h$  kein größter oder kleinster Werth von  $u$  Statt haben, ausser in dem Falle, wo  $\frac{du}{dx} = 0$  ist, wo nämlich



das erste Glied in beyden Reihen völlig verschwindet, und wo man daher, wenn man zu dem zweyten übergeht und bey demselben stehen bleibt, in beyden Reihen haben wird

$$u' - u = + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2};$$

ein Ausdruck, der, da das Quadrat von  $h$  immer positiv ist, mit der Gröfse  $\frac{d^2 u}{dx^2}$  zugleich positiv oder zugleich negativ seyn wird.

Ist also  $du$  gleich Null, so wird für  $x+h$  sowohl, als auch für  $x-h$  die Gröfse  $u'$  gröfser oder kleiner als  $u$  seyn, je nachdem  $d^2 u$  negativ oder positiv ist, d. h.  $u'$  wird in jenem Falle gröfser, und in diesem kleiner seyn, als alle ihm zunächst vorhergehenden oder zunächst nachfolgenden Werthe von  $u$ .

Die Function  $u$  kann also nur dann ein Größtes oder Kleinstes seyn, wenn  $du=0$  ist. Sucht man dann aus dieser Bedingungsgleichung  $du=0$  den Werth von  $x$ , und substituirt ihn in  $d^2 u$ , so wird  $u$ , für diesen Werth von  $x$ , ein Größtes oder Kleinstes seyn, wenn  $d^2 u$  negativ oder positiv ist.

Ist aber  $d^2 u$  ebenfalls, so wie  $du$ , gleich Null, so kann, wie zuvor,  $u$  nur dann ein Größtes oder Kleinstes seyn, wenn auch noch  $d^3 u=0$  ist. Sucht man dann aus der letzten Gleichung den Werth von  $x$ , und substituirt ihn in  $d^4 u$ , so wird  $u$ , für diesen Werth von  $x$ , ein Größtes oder Kleinstes seyn, wenn  $d^4 u$  negativ oder positiv ist u. s. w.

Beyspiele werden diefs sofort deutlich machen.

Ex. I. Sey  $u=x^2+4x+2$  gegeben, so hat man

$$\frac{du}{dx} = 2x + 4 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 2.$$

Setzt man aber  $2x+4$  gleich Null, so erhält man  $x=-2$ , und da überdiefs  $d^2 u$ , für alle Werthe von  $x$ , positiv bleibt, so ist die gegebene Function  $u$  für  $x=-2$  ein Kleinstes, nämlich selbst gleich  $-2$ .

Ex. II. Eben so gibt die Function  $u=x^3+3x^2-9x+18$  für ihre beyden ersten Differentiale

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 6x - 9 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 6x + 6.$$

Aber die Gleichung  $du=3x^2+6x-9=0$  hat die beyden Wurzeln  $x=+1$  und  $x=-3$ ;



$x = +1$  gibt  $\frac{d^2 u}{dx^2} = +12$ , also ein Kleinstes, und  
 $x = -3$  gibt  $\frac{d^2 u}{dx^2} = -12$ , also ein Größtes.

Diese Function  $u$  ist demnach ein Kleinstes, und zwar  $u = +13$  für  $x = 1$ , und ein Größtes,  $u = +45$  für  $x = -3$ .

Eben so wird man finden, dafs man hat:

$u = \frac{x}{1+x^2}$  ein Größtes für  $x = 1$ , und  
 ein Kleinstes für  $x = -1$ ,

$u = \frac{2-3x+x^2}{2+3x+x^2}$  ein Größtes für  $x = -\sqrt{2}$ , und  
 ein Kleinstes für  $x = \sqrt{2}$ ,

und  $u = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$  ein Kleinstes  
 für  $x = 1$ , ein Größtes für  $x = 2$ , und wieder ein Kleinstes für  
 $x = 3$ .

I. Noch wollen wir, zum Schlusse dieses Gegenstandes, bemerken, dafs man öfter Ausdrücke findet, die für gewisse Werthe der in ihnen enthaltenen Gröfsen die Gestalt  $\frac{0}{0}$  annehmen. Sind  $X$  und  $X'$  solche Functionen, die z. B. für  $x = a$ , beyde verschwinden, und soll man den Werth von

$$u = \frac{X}{X'}$$

für  $x = a$  bestimmen, so hat man, wenn  $x$  in  $x+h$  übergeht, nach der Gleichung (A) des §. 56.

$$u' = \frac{X + h \cdot \frac{dX}{dx} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + \dots}{X' + h \cdot \frac{dX'}{dx} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 X'}{dx^2} + \dots}$$

Da nun, für  $x = a$ ,  $X$  sowohl als  $X'$  verschwindet, so gibt der letzte Ausdruck

$$u' = \frac{\frac{dX}{dx} + \frac{h}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + \dots}{\frac{dX'}{dx} + \frac{h}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 X'}{dx^2} + \dots},$$

und daher, für  $h = 0$ , der gesuchte Werth

$$u' = \frac{dX}{dx} : \frac{dX'}{dx}.$$



