

Zehntes Capitel.

Änderungen der Functionen oder Principien der Differentialrechnung.

§. 46. (Erklärung.) Wenn in irgend einem analytischen Ausdruck u , der eine veränderliche Gröſſe x , und überdieß vielleicht noch mehrere constante Gröſſen $a, b, c, \dots$ enthält, oder wenn in irgend einer Function (§. 34.) von x , welche Function wir allgemein durch

$$u = f(x)$$

bezeichnen wollen, diese Stammgröſſe x sich ändert und z. B. in $x + h$ übergeht, so wird auch die Function $f(x)$ sich ändern, oder einen anderen Werth annehmen, und in

$$u' = f(x + h)$$

übergehen, und man wird die auf diese Weise erfolgte Änderung ($u' - u$) der Function erhalten, wenn man diese beyden Werthe u' und u , welche die Function für jene beyden Werthe von x hat, von einander abzieht.

Eben so wird also auch das *Verhältniß* der Änderung ($u' - u$) der Function, zu der Änderung h ihrer Stammgröſſe x gleich seyn

$$\frac{u' - u}{h} \quad \text{oder} \quad \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Hat man z. B., um dieß sogleich durch einen besonderen Fall zu erläutern, die Function

$$u = f(x) = ax^2$$

gegeben, und geht x über in $x + h$, so erhält man

$$u' = f(x + h) = a(x + h)^2,$$

und wenn man die Potenz $(x + h)^2$ (nach §. 21, 1.) entwickelt:

$$u' = a(x^2 + 2hx + h^2).$$

Zieht man von diesem Ausdrücke den früheren Werth des-

selben, oder $u = ax^2$ ab, und dividirt den Rest durch h , so hat man:

$$\frac{u' - u}{h} = 2ax + ah.$$

Dieses Verhältniß $\frac{u' - u}{h}$ der beyden Änderungen, der Function und ihrer Stammgröße, besteht also, wie man sieht, aus zwey Theilen $2ax$ und ah , die wesentlich von einander verschieden sind. Der erste Theil $2ax$ ist nämlich, da er die Größe h nicht mehr enthält, von dieser Änderung der Stammgröße ganz unabhängig, oder er behält immer denselben Werth jener Änderung, h mag groß oder klein gewesen seyn. Nicht so der zweyte Theil oder die Größe ah , die allerdings von h abhängt und die offenbar immer kleiner ist, je kleiner diese erste Änderung h der Stammgröße x selbst genommen wird.

Je kleiner also diese Änderung h wird, desto mehr nähert sich das Verhältniß

$$\frac{u' - u}{h}$$

dem ersten Gliede seines vorhergehenden Ausdrucks, oder desto mehr nähert sich dieses Verhältniß dem Werthe $2ax$, als einer Grenze, welcher dieses Verhältniß, bey immer abnehmendem Werthe von h , immer näher tritt, und welche es offenbar nur dann als in der That erreichend betrachtet werden kann, wenn die Größe h selbst so klein geworden ist, daß sie schon ganz außer unserer Betrachtung fallend angenommen werden kann, oder wenn diese Größe h kleiner noch geworden ist, als jede andere uns noch angebbare Größe, in welchem Zustande dann die Größe h (nach §. 23, II.) eine *unendlich kleine* Größe genannt zu werden pflegt.

Da wir uns mit diesem letzten Zustande von stets abnehmenden Größen fortan öfter beschäftigen werden, so wird es, zur größseren Kürze und Deutlichkeit des Vortrags, angemessen seyn, für diese äußersten Grenzwerte der Größen eine eigene Bezeichnung einzuführen. Wir wollen demnach diese Änderung h der Stammgröße x , wenn sie in jenem Zustand der letzten Abnahme übergegangen, oder wenn sie, in dem so eben aufgestellten Sinne des Wortes, unendlich klein geworden ist, durch das Symbol dx bezeichnen, so daß demnach die durch sie er-

zeugte, im Allgemeinen ebenfalls unendlich kleine Änderung $u' - u$ der Function, auch durch das Zeichen du angezeigt werden wird.

Demnach wird also die vorhergehende Gleichung

$$\frac{u' - u}{h} = 2ax + ah,$$

für den Zustand der letzten Abnahme von h , oder für den Fall, wo diese Änderung h der Stammgröße x kleiner, als jede andere noch angebliche Größe geworden ist, durch den folgenden Ausdruck dargestellt werden:

$$\frac{du}{dx} = 2ax.$$

I. Man pflegt die Größen dx und du das *Differential* der Stammgröße x und ihrer Function u , so wie das Verhältniß $\frac{du}{dx}$ den *Differentialcoefficienten* der Function u zu nennen. Der Differentialcoefficient einer Function ist daher als die äußerste Grenze des Verhältnisses, der Änderung der Function zu der Änderung ihrer Stammgröße, zu betrachten, oder als diejenige Grenze, welcher sich dieses Verhältniß immer mehr nähert, je kleiner die Änderung der Stammgröße x wird, bis es endlich, für eine unendlich kleine Änderung dx dieser Stammgröße, jene Grenze selbst erreicht.

Ganz eben so hat man in einem zweyten Beyspiele, wenn die Function

$$u = ax^3$$

gegeben ist, und wenn in ihr die Größe x wieder in $x + h$ übergeht:

$$u' = a(x + h)^3,$$

oder wenn man entwickelt, wie zuvor:

$$\frac{u' - u}{h} = a(3x^2 + 3hx + h^2).$$

Auch hier ist, wie man sieht, bloß das erste Glied $3ax^2$ des Verhältnisses $\frac{u' - u}{h}$ von der Größe h unabhängig, so daß demnach hier ebenfalls dieses Glied wieder die Grenze seyn wird, welcher sich jenes Verhältniß immer mehr nähert, je kleiner h angenommen wird, und daß daher dieses letzte Grenzverhält-

nifs, wenn h gleich dx oder unendlich klein geworden ist, durch die einfache Gleichung

$$\frac{du}{dx} = 3ax^2$$

ausgedrückt wird, und so fort in allen anderen Fällen.

Man sieht daraus, dafs, wenn auch die beyden Änderungen du und dx , der Function und ihrer Stammgröfse, jede für sich, unendlich klein geworden sind, dafs doch das *Verhältnifs dieser Änderungen* demungeachtet noch eine endliche Gröfse seyn kann, d. h. dafs, wenn auch die Gröfsen du und dx , wegen ihrer Kleinheit, von uns nicht mehr angegeben werden können, da sie in der That, der aufgestellten Erklärung zu Folge, noch unter jeder angebbaren Gröfse stehen sollen, dafs demungeachtet das *Verhältnifs* dieser an sich selbst nicht mehr angebbaren Gröfsen, noch immer sehr wohl angegeben werden kann, oder endlich, dafs, wenn auch die *Differentialien* zweyer Gröfsen, du und dx , unendlich klein sind, doch das *Verhältnifs* derselben oder der *Differentialcoefficient* $\frac{du}{dx}$ noch immer eine endliche Gröfse, deren Werth von uns vollkommen bestimmbar ist, seyn kann.

Diefs vorausgesetzt, wird es nun unsere Aufgabe seyn, diesen Differentialcoefficienten, oder dieses Grenzverhältnifs der Änderung der Function und ihrer Stammgröfse, für jede angegebene Function, z. B. für die Potenz x^a , oder für die Exponentialgröfse a^x , oder für den Logarithmus $\log x$ u. f. zu bestimmen. Diese Bestimmungen machen den Gegenstand der sogenannten *Differentialrechnung* aus. — Ehe wir aber zu diesem Geschäfte übergehen, wird es angemessen seyn, einige Bemerkungen über dasselbe vorzuschicken.

§. 47. (Einfachere Darstellung und Erweiterung des Vorhergehenden.) Das in unserem vorhergehenden ersten Beyspiele erhaltene Grenzverhältnifs

$$\frac{du}{dx} = 2ax$$

läfst sich auch, in Gestalt einer gewöhnlichen Gleichung, auf folgende Art ausdrücken:

$$du = 2ax \cdot dx,$$

in welcher Gleichung a und x endliche, du und dx aber unendlich kleine Gröſſen bezeichnen.

Um aber zu dieser Gleichung zu gelangen, kann man annehmen, daſs sie aus der analogen, früher (in §. 46.) erhaltenen Gleichung:

$$\frac{du}{dx} = (2ax + adx) \quad \text{oder}$$

$$du = (2ax + adx) dx,$$

und zwar dadurch entstanden ist, daſs man, in diesem letzten Ausdrücke, die unendlich kleine Gröſſe adx gegen die endliche $2ax$ weggelassen hat, wie man wohl, der oben aufgestellten Erklärung einer unendlich kleinen Gröſſe zu Folge, berechtigt zu seyn annehmen darf, da die unendlich kleine Gröſſe adx , die kleiner als jede von uns noch angebbare Gröſſe ist, auf die allerdings noch angebliche, endliche Gröſſe $2ax$, keinen für uns mehr bemerkbaren Einfluss äufsern kann, oder da diese beyden Gröſſen

$$2ax \quad \text{und} \quad 2ax + adx,$$

in Beziehung auf die Angabe ihres absoluten Werthes, von uns, der aufgestellten Definition zu Folge, nicht mehr unterschieden werden können.

Auf gleiche Weise haben wir in unserem zweyten Beyspiele des §. 46. aus dem gegebenen Ausdrücke

$$u = ax^3$$

für die Differenz $u' - u$ oder für du erhalten:

$$du = a(3x^2 + 3xdx + dx^2) \cdot dx,$$

einen Ausdruck, den man auch so darstellen kann:

$$du = [3ax^2 + a(3x + dx) \cdot dx] \cdot dx.$$

Läſst man hier wieder die unendlich kleine Gröſſe dx gegen die endliche $3x$ in dem Gliede $(3x + dx)$ weg, so erhält man

$$du = [3ax^2 + 3axdx] \cdot dx,$$

oder, was dasselbe ist:

$$du = 3ax(x + dx) \cdot dx,$$

und daher, wenn man auch hier wieder, analog dasselbe Verfahren anwendend, statt $x + dx$ die Gröſſe x setzt,

$$du = 3ax^2 dx,$$

oder auch

$$\frac{du}{dx} = 3ax^2, \text{ wie zuvor.}$$

Man kömmt daher zu demselben Zwecke, wenn man, wie in §. 46, das Grenzverhältniß der Änderung einer Function zur Änderung ihrer Stammgröße sucht, oder wenn man, wie hier, die Veränderung du einer Function u , die aus einer Änderung dx ihrer Stammgröße x folgt, unter der Voraussetzung sucht, daß man, bey diesem zweyten Verfahren, diese Änderung dx so klein annimmt, daß sie gegen jede andere, endliche, noch angebbare Größe als völlig verschwindend betrachtet, und daher, jener Größe gegenüber, ganz weggelassen werden kann.

Beide Verfahren führen zu demselben Resultate, aber das letzte ist offenbar einfacher und zur Anwendung bequemer, ob schon es übrigens nur als ein, wegen dieser Einfachheit eingeführter, abgekürzter Ausdruck des ersten, gleichsam als eine Redens- oder Schreibart zu betrachten ist, deren man sich, als eines bequemen Mittels zu demselben Zwecke, bedienen kann, wenn man ihr die oben (§. 46.) gegebene Bedeutung zu Grunde legt.

I. Demnach besteht, dieser zweyten Darstellungsweise zu Folge, das *Princip* der Differentialrechnung darin, »daß man »zwey endliche Größen, welche unter sich nur durch eine unendlich kleine Größe verschieden sind, als völlig gleiche Größen betrachtet,« weil man, nach der vorhergehenden Erklärung des Wortes *unendlich klein*, zwischen jenen zwey Größen keinen Unterschied, keine weiter noch angebliche Ungleichheit auffinden kann.

II. Wenn man aber diesen Begriff der unendlich kleinen Größen einmal eingeführt hat, so folgt daraus unmittelbar, daß die Verhältnisse dieser, so wie die der endlichen Größen, unter einander sehr verschieden, und selbst wieder unendlich klein seyn können. Ist z. B. dx eine unendlich kleine Größe, so ist das Verhältniß des Quadrats derselben zu ihr selbst gleich

$$\frac{dx^2}{dx}, \text{ also gleich } dx;$$

d. h. dieses Verhältniß ist selbst wieder unendlich klein, so daß man daher, nach demselben oben aufgestellten Princip, die

Gröfse dx^2 gegen dx weglassen, oder dafs man die beyden Ausdrücke

$$dx + dx^2 \text{ und } dx$$

als nicht mehr nnter sich verschieden, sondern als vollkommen identisch betrachten mufs, wie diefs auch schon oben, bey unserem zweyten Beyspiele, geschehen ist, wo man in der Gleichung

$$du = a(3x^2 + 3xdx + dx^2) \cdot dx$$

die Gröfse $3xdx + dx^2$ gleich $3xdx$ angenommen hat. In der That ist auch

$$dx + dx^2 = dx(1 + dx),$$

und da, nach dem erwähnten Princip, $1 + dx = 1$ ist, so mufs auch

$$dx + dx^2 = dx$$

seyn.

Man pflegt aber solche Gröfsen, wie dx^2 , *unendlich kleine Gröfsen der zweyten Ordnung* zu nennen, und diese überhaupt durch d^2x anzudeuten, so dafs demnach Ausdrücke der Form

$$d^2u, \quad dx^2, \quad du \cdot dx \text{ u. f.}$$

als unendlich kleine Gröfsen der zweyten Ordnung anzusehen sind, weil ihr Verhältnifs zu den unendlich kleinen Gröfsen du , dx , dy , . . . der ersten Ordnung selbst wieder unendlich klein ist.

Ganz eben so wird man auch Ausdrücke der Art,

$$d^3u, \quad dx^3, \quad d^2u \cdot dx, \quad du \cdot dx \cdot dy \text{ u. f.}$$

zu den unendlich kleinen Gröfsen der dritten Ordnung zählen u. s. f.

III. Übrigens wird man auf diesen Begriff der unendlich kleinen Gröfsen durch die uns von allen Seiten umgebenden Erscheinungen der Natur gleichsam von selbst geführt, und man kann sie daher keineswegs, wie manche glauben, als blofse Einbildungen betrachten, welche sich die Geometer zu ihren Speculationen ausgedacht haben, und von denen sich, aufser dieser Einbildung, kein reeller Grund nachweisen läfst. So wächst die Zeit durch die Aufeinanderfolge von Momenten, deren Intervalle kleiner sind, als jede andere, noch angebbare, wenn auch noch so kleine Zeit. So wächst die von einem bewegten Körper beschriebene gerade oder krumme Linie auf eine Weise, dafs der

zwischen je zwey nächsten Puncten dieser Linie enthaltene Raum kleiner ist, als jede andere noch angebliche Linie u. f. Aus diesem Grunde wird man auch jene krummen Linien in der Geometrie, unserem aufgestellten Princip gemäß, als Vielecke von unendlich vielen, aber unendlich kleinen, *geradlinigen* Seiten betrachten können, und die auf diese Betrachtungen gegründeten Resultate werden mit denjenigen als identisch zusammenfallen, die unmittelbar aus dem Begriffe der *stetigen* Aufeinanderfolge der Puncte hervorgehen, die ein in Bewegung begriffener, und dadurch diese Linie beschreibender Punct nach und nach einnimmt. — Ein in einem Kreise eingeschriebenes, oder ihm umschriebenes Vieleck wird diesem Kreise desto näher kommen, je kleiner die Seiten dieses Vieleckes sind, und beyde, Kreis und Vieleck, werden als ganz identische Größen zusammenfallen, oder der Unterschied zwischen ihnen wird nicht weiter angegeben werden können, wenn einmal diese Seiten des Vieleckes selbst kleiner, als jede noch angebliche gerade Linie, d. h. wenn diese Seiten unendlich klein seyn werden. — Die Geometrie, die uns auf diese Weise gleichsam von selbst auf die Betrachtung der unendlich kleinen Größen geführt hat, leitet uns auch noch auf den Unterschied, der zwischen diesen unendlich kleinen Größen, in Beziehung auf die oben erwähnten Ordnungen derselben, Statt hat. So muß z. B. der Flächeninhalt einer in allen ihren Dimensionen unendlich kleinen Oberfläche irgend eines Körpers immer wenigstens eine unendlich kleine Größe der *zweyten* Ordnung seyn, weil dieser Flächeninhalt kleiner ist, als das Quadrat der längsten geraden Linie, die man von einem Puncte des Umfanges dieser Oberfläche zu einem anderen ziehen kann. Und eben so muß auch das Volum eines in allen seinen Dimensionen unendlich kleinen Körpers wenigstens eine unendlich kleine Größe der *dritten* Ordnung seyn, weil dieses Volum kleiner ist, als der Würfel der längsten geraden Linie, die man von einem Puncte des Umfanges dieses Körpers zu einem anderen Puncte dieses Umfanges ziehen kann.

§. 48. (Differential der einfachsten algebraischen Functionen.) Sey zuerst der Ausdruck gegeben

$$u = f(x) = a - bx,$$

6 *

wo a und b constante Größen sind, so hat man, nach dem Vorhergehenden, sofort

$$du = f(x + dx) - f(x) \quad \text{oder}$$

$$du = [a - b(x + dx)] - (a - bx),$$

das heist, man hat

$$du = -b dx,$$

und dieß ist das gesuchte Differential der Function $u = a - bx$, also ist auch ihr Differentialcoefficient

$$\frac{du}{dx} = -b,$$

oder eine constante Gröfse.

I. Ist eben so die Function gegeben

$$u = A - Bx + Cx^2 - Dx^3,$$

wo A , B , C und D constante Größen bezeichnen, so hat man auf dieselbe Weise

$$u + du = A - B(x + dx) + C(x + dx)^2 - D(x + dx)^3.$$

Wenn man diese Potenzen entwickelt, und dann von dem so entwickelten Ausdrücke die gegebene Gleichung

$$u = A - Bx + Cx^2 - Dx^3$$

subtrahirt, so erhält man

$$du = -B dx + C(2x + dx).dx - D[3x^2 + 3(1 + dx)x.dx]dx.$$

Da aber, nach dem oben aufgestellten Princip der Differentialrechnung, die Größen

$$2x + dx, \quad 3x^2 + 3x dx \quad \text{und} \quad 1 + dx$$

in derselben Ordnung gleich

$$2x, \quad 3x^2 \quad \text{und} \quad 1$$

sind, so hat man auch sofort für das gesuchte Differential:

$$du = -B dx + 2C x dx - 3D x^2 dx,$$

oder für den gesuchten Differentialcoefficienten:

$$\frac{du}{dx} = -B + 2Cx - 3Dx^2.$$

II. Auf dieselbe Weise wird man für

$$u = ax^4, \quad u = bx^5, \dots$$

die Differentialien erhalten

$$du = 4ax^3 dx, \quad du = 5bx^4 dx,$$

so daß man daraus leicht durch Analogie für den Ausdruck

$$u = A + Bx^m$$

das Differential

$$du = mBx^{m-1} dx$$

finden wird, wenn m , wie in allen vorhergehenden Beyspielen, eine positive, ganze Zahl bezeichnet. Wir werden aber bald (§. 51.) sehen, daß dieser Ausdruck auch allgemein, für jede willkürliche Zahl m , geltend ist.

§. 49. (Differential eines Products.) Sey u das Product zweyer veränderlichen Größen x und y , oder sey die Function

$$u = x \cdot y$$

gegeben. Läßt man in ihr die Gröfse x in $x + dx$, und die Gröfse y in $y + dy$ übergehen, so hat man für den so veränderten Werth der gegebenen Function den Ausdruck

$$u + du = (x + dx) \cdot (y + dy),$$

oder wenn man entwickelt:

$$u + du = xy + xdy + ydx + dx \cdot dy.$$

Subtrahirt man von dem letzten Ausdrucke die gegebene Gleichung $u = xy$, und subtrahirt den Rest durch dx , so erhält man

$$\frac{du}{dx} = \frac{xdy}{dx} + y + dy.$$

Da aber, nach dem Vorhergehenden, der Differentialcoefficient $\frac{dy}{dx}$ eine endliche Gröfse ist, so ist auch

$$\frac{xdy}{dx} \text{ sowohl, als auch } y$$

eine endliche, dy aber ist eine unendlich kleine Gröfse, und daher, nach dem erwähnten Princip dieser Rechnungsart:

$$\frac{xdy}{dx} + y + dy = \frac{xdy}{dx} + y,$$

also auch

$$\frac{du}{dx} = \frac{xdy}{dx} + y,$$

so dafs man daher, wenn man alle Glieder dieses Ausdruckes wieder durch dx multiplicirt, für das gesuchte Differential eines Products $u = xy$ erhält:

$$d.(xy) = x.dy + y.dx;$$

es ist daher das Differential eines Products von zwey veränderlichen Factoren gleich der Summe der Producte eines jeden dieser Factoren in das Differential des anderen Factors.

Dieser Satz ist für die gesammte Analysis von der größten Wichtigkeit, und wir werden noch sehr oft Gelegenheit haben, auf ihn wieder zurück zu kommen.

I. Ganz eben so würde man, wenn das Product

$$u = axy$$

gegeben ist, wo a eine constante Gröfse bezeichnet, für das Differential dieses Products erhalten:

$$d.(axy) = a(xdy + ydx).$$

II. Wäre aber das Product

$$u = xyz$$

von drey Factoren gegeben, so kann man das Product von zweyen derselben, z. B. $yz = t$ setzen, wodurch man

$$u = xt,$$

also auch, nach dem Vorhergehenden,

$$du = xdt + tdx$$

erhält. Da aber $t = yz$ ist, so ist, nach derselben Vorschrift, das Differential dieses letzten Products

$$dt = ydz + zdy,$$

so dafs man daher, wenn man diesen Werth von dt in dem vorhergehenden Ausdrucke von du substituirt, für du oder für das Differential des Productes xyz erhält

$$d.(xyz) = xydz + xzdy + yzdx.$$

III. Wäre endlich das Product von mehreren veränderlichen Gröfsen $x, x', x'', x''', \dots$ gegeben, so würde man für das Differential dieses Productes haben:

$$\begin{aligned} d.(xx'x''x'''\dots) &= (x'x''x'''\dots)dx + (xx'x''\dots)dx' \\ &+ (xx'x''\dots)dx'' + (xx'x''x'''\dots)dx''' + \dots, \end{aligned}$$

welchen Ausdruck man auch auf folgende einfachere Weise schreiben kann, indem man alle Glieder desselben durch das gegebene Product $xx'x'' \dots$ dividirt:

$$\frac{d. xx'x''x''' \dots}{xx'x''x''' \dots} = \frac{dx}{x} + \frac{dx'}{x'} + \frac{dx''}{x''} + \frac{dx'''}{x'''} + \dots$$

§. 50. (Differential eines Quotienten.) Ist von dem Ausdrücke

$$u = \frac{x}{y}$$

das Differential zu suchen, so kann man denselben auch so darstellen:

$$x = uy,$$

und von diesem Producte uy ist, nach §. 49., das Differential

$$dx = udy + ydu,$$

woraus folgt

$$du = \frac{dx - udy}{y};$$

oder endlich, wenn man in dem letzten Ausdrücke den Werth von $u = \frac{x}{y}$ wieder herstellt, du oder

$$d. \frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Das Differential eines Bruches ist daher gleich dem Producte des Nenners in das Differential des Zählers, weniger dem Producte des Zählers in das Differential des Nenners, diese Differenz dividirt durch das Quadrat des Nenners.

§. 51. (Differential einer Potenz.) Man suche nun das Differential irgend einer Potenz x^m , wo x eine veränderliche, und m eine beständige, übrigens willkürliche (positive oder negative, ganze oder gebrochene) Zahl bezeichnet (vergl. §. 48, II.).

Obschon uns dieses Differential, seiner Form und seinem Werthe nach, noch ganz unbekannt ist, so werden wir doch annehmen können, daß es die Gestalt

$$d. (x^m) = f(m, x). dx$$

haben müsse, wo $f(m, x)$ irgend eine Function der beyden Grössen m und x bezeichnet, die wir nun näher zu bestimmen suchen wollen.

Da, der Voraussetzung gemäß, die Gröfse m ganz willkürlich ist, so werden wir dafür auch jede andere, z. B. n setzen können, so dafs man daher auch eben so die Gleichung haben wird:

$$d.(x^n) = f(n, x) \cdot dx.$$

Nimmt man von diesen beyden Ausdrücken x^m und x^n das Product, so hat man, nach §. 49.:

$$d.(x^m \cdot x^n) = x^m \cdot d(x^n) + x^n \cdot d(x^m);$$

oder da

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

ist, wenn man in der letzten Gleichung die vorhergehenden Werthe von $d.(x^m)$ und $d.(x^n)$ substituirt:

$$d.x^{m+n} = x^m \cdot f(n, x) dx + x^n \cdot f(m, x) dx \dots (a).$$

Substituirt man aber in der ersten der vorhergehenden Gleichungen, da in ihr m willkürlich ist, statt m die Gröfse $m+n$, so hat man auch, derselben obigen Annahme gemäß:

$$d.x^{m+n} = f(m+n, x) dx \dots (b).$$

Setzt man endlich die beyden Werthe von $d.x^{m+n}$ in den Ausdrücken (a) und (b) einander gleich, so erhält man

$$f(m+n, x) = x^m \cdot f(n, x) + x^n \cdot f(m, x) \dots (I),$$

und diese Gleichung ist es, die uns zu der gewünschten Kenntnifs der Function $f(m, x)$ führen wird.

Nimmt man in dieser Gleichung (I), da m und n ganz willkürliche Gröfsen bezeichnen, $n=m$ an, so erhält man

$$f(2m, x) = 2x^m \cdot f(m, x).$$

Ist aber $n=2m$, so gibt die Gleichung (I)

$$f(3m, x) = x^m \cdot f(2m, x) + x^{2m} \cdot f(m, x),$$

oder da wir bereits $f(2m, x)$ gefunden haben:

$$f(3m, x) = 3x^{2m} \cdot f(m, x).$$

Setzt man dies fort, so erhält man

$$\text{für } n=m \dots f(2m, x) = 2x^m \cdot f(m, x),$$

$$» \quad n=2m \dots f(3m, x) = 3x^{2m} \cdot f(m, x),$$

$$» \quad n=3m \dots f(4m, x) = 4x^{3m} \cdot f(m, x),$$

$$» \quad n=4m \dots f(5m, x) = 5x^{4m} \cdot f(m, x) \text{ u. f.},$$

woraus sofort folgt, dafs man, wenn r irgend eine ganze, posi-

tive Zahl bezeichnet, den Ausdruck hat

$$f(r m, x) = r x^{(r-1)m} \cdot f(m, x),$$

oder, wenn man beyde Theile dieser Gleichung durch $r m \cdot x^{mr-1}$ dividirt:

$$\frac{f(r m, x)}{r m \cdot x^{mr-1}} = \frac{f(m, x)}{m x^{m-1}}.$$

Allein diese Gleichung zeigt offenbar, daß der Ausdruck

$$\frac{f(m, x)}{m x^{m-1}}$$

von m sowohl, als auch von x ganz unabhängig seyn muß, da der Werth dieses Ausdruckes, der letzten Gleichung zu Folge, ganz unverändert bleibt, wenn man auch in ihm statt m irgend ein Vielfaches $r m$ von m substituirt, obgleich diese Gröfse m in dem erwähnten Ausdrucke nicht blofs als Factor, sondern auch noch als Exponent von x erscheint. Wenn aber dieser Ausdruck

$$\frac{f(m, x)}{m x^{m-1}}$$

von den Gröfsen m und x unabhängig ist, so muß er, da doch nichts, als diese beyden Gröfsen, in ihm vorkommen, irgend einer mit x und m nicht weiter zusammenhängenden, in allen Fällen denselben Werth beybehaltenden, d. h. er muß einer *constanten Gröfse* gleich seyn. Nennen wir A diese Constante, so hat man

$$\frac{f(m, x)}{m x^{m-1}} = A,$$

und es ist nur noch übrig, den absoluten Werth dieser Constante zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke sey für einen speciellen Fall die Gröfse $m=1$, so gibt die erste der obigen Gleichungen

$$d \cdot x^m = f(m, x) \cdot dx,$$

wenn man in ihr $m=1$ setzt:

$$dx = f(1, x) dx \quad \text{oder} \quad f(1, x) = 1.$$

Und eben so gibt auch die letzte der vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{f(m, x)}{m x^{m-1}} = A,$$

wenn man in ihr ebenfalls $m=1$ setzt, da $x^0=1$ ist:

$$f(1, x) = A,$$

woraus daher folgt, daß $A=1$ und daß

$$f(m, x) = m x^{m-1}$$

seyn muß, welchen Werth auch die Gröfse m haben mag.

Substituirt man endlich diesen Werth von $f(m, x)$ in der allerersten der vorhergehenden Gleichungen, so erhält man

$$d.x^m = m x^{m-1} dx,$$

das heißt: *das Differential einer Potenz ist immer gleich dem Producte des Exponenten in die um die Einheit nächst niedere Potenz, und in das Differential der Wurzel dieser Potenz.* Damit stimmt das überein, was wir oben (§. 48, II.) bloß für diejenigen Potenzen gefunden haben, deren Exponenten ganze und positive Zahlen sind.

§. 52. (Differential eines Logarithmus.) Das Differential des Logarithmus irgend einer veränderlichen Gröfse x wird, welches auch sein näher bestimmter Ausdruck seyn mag, die folgende Form haben, wenn man die Logarithmen der Basis a nimmt (§. 43.):

$$d.\text{Log } x = f(x).dx.$$

Da in dieser Gleichung die Gröfse x ganz willkürlich ist, so wird man auch y dafür setzen können, wodurch man eine zweyte Gleichung

$$d.\text{Log } y = f(y).dy$$

erhält. Beyder Gleichungen Summe gibt

$$d. [\text{Log } x + \text{Log } y] = f x . dx + f y . dy.$$

Aber nach der oben (§. 44, II.) aufgestellten Eigenschaft der Logarithmen überhaupt hat man

$$\text{Log } x + \text{Log } y = \text{Log } (xy),$$

und dadurch geht die vorhergehende Gleichung in folgende über:

$$d.\text{Log } (xy) = f x . dx + f y . dy \dots (a).$$

Allein die erste der vorhergehenden Gleichungen gibt auch, wenn man in ihr statt der willkürlichen Gröfse x das eben so willkürliche Product xy setzt:

$$d.\text{Log } (xy) = f(xy) d.(xy);$$

und da (nach §. 49.) für das Differential eines Products

$$d.(xy) = xdy + ydx$$

ist, so kann die unmittelbar vorhergehende Gleichung auch so dargestellt werden:

$$d.\text{Log}(xy) = (xdy + ydx) \cdot f(xy) \dots (b).$$

Setzt man beyde Werthe von $d.\text{Log}(xy)$ aus den Gleichungen (a) und (b) einander gleich, so erhält man

$$[y.f(xy) - fx]dx + [x.f(xy) - fy]dy = 0 \dots (I),$$

und diese Gleichung ist es wieder, die uns die nähere Kenntniss der Function $f(x)$ verschaffen wird.

Setzt man nämlich in der Gleichung (I) die willkürliche Gröfse $y=x$, so erhält man sofort

$$x.f(x^2) = f(x).$$

Setzt man dann in derselben Gleichung (I) die Gröfse $y=x^2$, so gibt sie

$$3x^2.f(x^3) - 2x.f(x^2) - fx = 0,$$

oder da bereits der Werth von $x.f(x^2) = f(x)$ bekannt ist, so hat man auch

$$x^2.f(x^3) = f(x).$$

Setzt man dies fort, so findet man

$$\text{für } y=x \dots x.f(x^2) = f(x),$$

$$» \quad y=2x \dots x^2.f(x^3) = f(x),$$

$$» \quad y=3x \dots x^3.f(x^4) = f(x) \text{ u. s. f.},$$

und diese einfachen Gleichungen zeigen, daß man für jede ganze und positive Zahl r die Gleichung hat

$$x^{r-1}.f(x^r) = f(x),$$

oder auch, wenn man zu beyden Seiten durch x dividirt:

$$x^r.f(x^r) = x.f(x),$$

woraus sofort folgt, daß der Ausdruck

$$x.f(x)$$

sich nicht ändert, wenn man auch statt x irgend eine ganze positive Potenz x^r in ihm substituirt, das heist, daß der Ausdruck $x.f(x)$ ganz unabhängig von x , und daher, wie in §. 51., irgend eine constante Gröfse seyn muß.

Nennt man M diese Constante, so hat man

$$x \cdot f(x) = M \quad \text{oder}$$

$$f(x) = \frac{M}{x},$$

und daher auch für das gesuchte Differential eines Logarithmus den Ausdruck

$$d \cdot \text{Log } x = M \cdot \frac{dx}{x}.$$

Um diese Constante M zu bestimmen, bemerken wir, daß nach §. 45, I. die Größen $\text{Log } x$ und $\log x$, oder daß die Logarithmen derselben Zahl in den beyden Systemen, deren Basis a und e ist, das constante Verhältniß m haben, so daß

$$\text{Log } x = m \cdot \log x$$

ist. Dasselbe Verhältniß wird also auch zwischen den Differentialen dieser Logarithmen bestehen, woraus demnach folgt, daß in dem zweyten Systeme

$$d \cdot \log x = \frac{dx}{x},$$

und daß die vorhergehende Gröfse M mit der in §. 45, I. eingeführten Constante m gleichbedeutend ist, so daß man daher hat

$$m = \text{Log } e \quad \text{oder} \quad m = \frac{1}{\log a}$$

und

$$d \cdot \log x = \frac{dx}{x}, \quad \text{so wie} \quad d \cdot \text{Log } x = \frac{m dx}{x}.$$

§. 53. (Differential einer Exponentialgröfse.) Ist der Ausdruck gegeben

$$y = a^x,$$

so hat man, wenn man davon die Logarithmen in Beziehung auf das erste System nimmt:

$$x = \text{Log } y,$$

und von diesem Ausdrucke ist (nach §. 52.) das Differential

$$dx = \frac{m dy}{y},$$

so daß man daher hat

$$d \cdot y = \frac{y dx}{m};$$

oder, wenn man den Werth von $y = a^x$ wieder herstellt:

$$d \cdot a^x = \frac{a^x dx}{m} = a^x dx \cdot \log a.$$

I. Ist aber $a=e$ die Basis des zweyten Systems, so ist $\log e = 1$, und daher

$$d.e^x = e^x dx.$$

§. 54. (Anwendung des Vorhergehenden.) Wir haben nun die Differentialien eines Products, eines Quotienten, so wie die der Potenzen, der Logarithmen und der Exponentialgrößen, d. h. wir haben die Differentialien aller uns bisher bekannt gewordenen verschiedenen Gattungen von Größen entwickelt. Wenn wir dieselben der bequemern Übersicht wegen zusammenstellen, so hat man

$$\text{I.} \quad d.xy = x dy + y dx,$$

$$\text{II.} \quad d.\frac{x}{y} = \frac{y dx - x dy}{y^2},$$

$$\text{III.} \quad d.x^n = n x^{n-1} dx,$$

$$\text{IV.} \quad d.\log x = \frac{dx}{x} \quad \text{und} \quad d.\text{Log } x = \frac{m dx}{x},$$

$$\text{V.} \quad d.a^x = \frac{a^x dx}{m},$$

$$\text{VI.} \quad d.e^x = e^x dx,$$

$$\text{wo } m = \text{Log } e = \frac{1}{\log a} \text{ ist.}$$

I. Dieß sind die einfachsten Ausdrücke ihrer Art, auf welche sich alle anderen, aus ihnen zusammengesetzten, leicht zurückführen lassen, wie folgende Beyspiele zeigen.

Sey die Function gegeben

$$u = (a + b x^m)^n.$$

Um von ihr das Differential nach den vorhergehenden Vorschriften zu finden, kann man die Gröfse

$$a + b x^m = y$$

setzen, so daß man also den Ausdruck hat

$$u = y^n,$$

wovon das Differential (nach der Gleichung III) ist:

$$du = n y^{n-1} dy.$$

Da aber, nach derselben Gleichung III

$$dy = m b x^{m-1} dx$$

ist, so hat man, wenn man diesen Werth von dy in dem vorher-

gehenden Ausdruck von du substituirt, und den Werth von y wieder herstellt:

$$du = mn b (a + b x^m)^{n-1} \cdot x^{m-1} dx.$$

Dasselbe Resultat wird man auch, ohne Einführung der Hilfsgröße y , unmittelbar aus dem gegebenen Ausdrucke

$$u = (a + b x^m)^n$$

ableiten können. Man hat nämlich (nach Gl. III)

$$du = n(a + b x^m)^{n-1} \cdot d(a + b x^m),$$

also auch, da $d(a + b x^m) = m b x^{m-1} dx$ ist:

$$du = mn b (a + b x^m)^{n-1} \cdot x^{m-1} dx,$$

wie zuvor.

Auf dieselbe Weise wird man auch finden

$$d \cdot \frac{a+x}{a-x} = \frac{2a dx}{(a-x)^2},$$

$$d \cdot (a+x) \sqrt{a-x} = \frac{(a-3x) dx}{2 \sqrt{a-x}},$$

$$d \cdot \log(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$d \cdot \log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx}{x(1+x^2)},$$

$$d \cdot e^x(x-1) = e^x \cdot x dx,$$

$$d \cdot e^x = e^x \cdot e^x dx$$