Neuntes Capitel.

Logarithmen.

§. 42. (Exponentialgröfsen.) Wenn in dem Ausdrucke

$$y = a^x,$$

wo a eine constante, x und y aber eine veränderliche Gröfse bezeichnet, der Exponent x bekannt oder gegeben ist, so wird man, nach dem Vorhergehenden, immer den entsprechenden Werth von y finden können. So hat man z. B. wenn $a = 2$ ist,

für $x = 2$ den Werth von $y = 4$,
» $x = 3$ » » » $y = 8$ u. f.,

und selbst wenn x irgend ein Bruch, z. B. gleich $\frac{1}{2}$ ist, so wird $y = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ seyn, eine irrationale Gröfse, deren Werth man aber nach §. 29, II. der Wahrheit so nahe, als man nur will, finden kann, wie wir weiter unten sehen werden.

Wenn aber umgekehrt in dem gegebenen Ausdrucke

$$y = a^x$$

die Gröfse y die bekannte Zahl ist, oder wenn man z. B. die Gleichung hat:

$$2^x = 3,$$

so bietet alles Vorhergehende kein Mittel dar, denjenigen Werth von x zu finden, welcher der Gleichung $2^x = 3$ entspricht.

Man nennt aber solche Ausdrücke, wie a^x, wo der Exponent die unbekannte oder veränderliche Gröfse ist, *Exponentialgröfsen*, zum Unterschiede mit den *gewöhnlichen Potenzen*

$$x^a \quad \text{oder} \quad (1 + x)^a,$$

in welcher der Exponent a constant ist.

Diese Exponentialgröfsen bilden, so wie die irrationalen Zahlen, ein eigenes, weitverbreitetes Geschlecht von Gröfsen, das sich von allen anderen wesentlich unterscheidet, und das in der Mathematik eine sehr wichtige Rolle spielt. Man heifst sie,

und die mit ihr verwandten, *transcendente* Gröfsen, zum Unterschiede mit den bisher betrachteten, die man *algebraische* Grössen zu nennen pflegt.

Um diesen Unterschied besser zu übersehen, wollen wir z. B. in der *Potenz*

$$y = x^a$$

für a die constante Gröfse 2, und dann für x die auf einander folgenden Werthe $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$ setzen, wodurch man für die entsprechenden Werthe von $y = 1, 4, 8, 16, \ldots$ erhält. Eben so gibt $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ die Werthe $y = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$, wo immer die Werthe von y nach einem constanten und sehr einfachen Gesetze auf einander folgen.

Ähnliche Resultate erhält man auch, wenn man für x dieselben Gröfsen $1, 2, 3, \ldots$ aber negativ annimmt u. s. f.

Anders aber verhalten sich die auf einander folgenden Werthe der *Exponentialgröfse* a^x. Nimmt man in derselben für die constante Gröfse a z. B. die Zahl -2, so erhält man

$$\begin{array}{lllll} \text{für } x = 1, & 2, & 3, & 4, \ldots \\ a^x = -2, & +4, & -8, & +16, \ldots \\ \text{und für } x = -1, & -2, & -3, & -4, \ldots \\ a^x = -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{4}, & -\frac{1}{8}, & +\frac{1}{16}, \ldots \end{array}$$

so dafs also hier die positiven Gröfsen mit den negativen abwechseln.

Setzt man aber für x die reciproquen natürlichen Zahlen, oder ist

$$x = 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \ldots,$$

so hat man $a^x = -2, \sqrt{-2}, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{-2}, -\sqrt[5]{2}, \ldots$

wo sogar die reellen Werthe mit den imaginären wechseln.

Setzt man ferner die Gröfse a gleich Null, so hat man, so lange x positiv bleibt, wie grofs dasselbe auch werden mag, immer

$$a^x = 0^x = 0.$$

Wird aber x ebenfalls Null, so erhält man

$$a^x = a^0 = 1,$$

und erhält endlich x irgend einen negativen Werth, z. B. $x = -1$, so hat man

$$a^x = \frac{1}{a} = \frac{1}{0} \quad \text{für} \quad a = 0,$$

oder a^x wird dann unendlich grofs (§. 23, II.).

Noch auffallendere Sprünge erhält man, wenn x irgend eine irrationale Gröfse, z. B. wenn $x = \sqrt{2}$ wird. Nach dem oben (§. 30, II.) Erwähnten ist annähernd:

$$\sqrt{2} = 1.41421 \ldots$$

Setzt man also wieder die Gröfse $a = +2$, und nimmt man von der vorhergehenden Wurzelgröfse nach und nach immer mehr genäherte Werthe, und bemerkt man, dafs (nach §. 32, II.) jede Gröfse $a^{\frac{1}{m}}$ immer eine Anzahl von m reeller oder imaginärer Werthe hat, so erhält

für $\sqrt{2} = \frac{14}{10}$ die Gröfse $a^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}} \ldots$ zehn,
» $\sqrt{2} = \frac{141}{100}$ » » » » ... hundert,
» $\sqrt{2} = \frac{1414}{1000}$ » » » » ... tausend u. f.

verschiedene Werthe, ja die wahre Anzahl dieser Werthe wird in der That unendlich grofs seyn, da der wahre Werth von $\sqrt{2}$ selbst nur durch einen ohne Ende fortgehenden Bruch angegeben werden kann.

Wäre endlich noch die Gröfse a negativ, und z. B. $a = -2$, und wie zuvor $x = \sqrt{2}$ eine irrationale Gröfse, so hätte man

$$(-2)^{\sqrt{2}},$$

und von diesem Ausdrucke läfst sich nicht einmal angeben, ob er zu den reellen oder zu den imaginären Gröfsen gehört, da man nicht sagen kann, ob $\sqrt{2}$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Dieſs wird genügen, die Verschiedenheit der transcendenten und algebraischen Gröfsen zu erkennen.

§. 43. (Logarithmen.) Gehen wir wieder zu unserer Gleichung

$$y = a^x$$

zurück. Obschon wir, wie gesagt, den Werth des Exponenten x für jeden gegebenen Werth von y jetzt noch nicht bestimmen können, so ist doch klar, dafs dieser Werth von x, für dasselbe y, seinen Werth mit der constanten Gröfse a ändern werde, dafs er

z. B. ein anderer für $3 = 2^x$, als für $3 = 4^x$ oder $3 = 5^x$ . . . seyn werde. Die gesuchte Gröfse x wird also nicht blofs von y, sondern auch von demjenigen Werthe abhängen, den man der constanten Gröfse a gegeben hat. — Wir wollen im Folgenden annehmen, dafs diese Gröfse a positiv und gröfser, als die Einheit ist, ohne weiter etwas Näheres über ihren absoluten Werth festzusetzen.

Da wir noch sehr oft auf das Problem zurückkommen werden, aus dem Ausdrucke

$$a^x = y$$

die Gröfse x für jedes gegebene a und y zu finden, so wollen wir dieser Grofse x eine eigene Bezeichnung geben, und sie den *Logarithmus* von y nennen, was wir abkürzend auf folgende Art ausdrücken:

$$x = \text{Log}\, y.$$

Die constante Zahl a aber, die, als solche, immer denselben, übrigens willkürlichen Werth beybehält, während die beyden Gröfsen x und y sich ändern, wollen wir die *Basis* dieser Logarithmen nennen.

Wäre also z. B. die Basis $a = 10$, so hätte man die Gleichung

$$10^x = y,$$

und da $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ u. f. ist, so würde man auch, für diese Basis, haben:

$$\begin{aligned} \text{Log}\, 1 &= 0, \\ \text{Log}\, 10 &= 1, \\ \text{Log}\, 100 &= 2, \\ \text{Log}\, 1000 &= 3 \text{ u. f.} \end{aligned}$$

Wie man aber die Logarithmen der zwischen dieser Zahlen 1, 10, 100, . . . fallenden Gröfsen, wie man also Log 2, Log 3, Log 4, . . . finden soll, ist jetzt noch nicht bekannt.

Da übrigens die Logarithmen aus der Exponentialgröfse a^x unmittelbar entspringen, so gehören auch sie, nach §. 42, zu den *transcendenten* Gröfsen.

§. 44. (Eigenschaften der Logarithmen.) Wie es sich aber auch mit dieser Bestimmung der Logarithmen einer jeden gegebenen Zahl verhalten mag, so lassen sich doch hier

schon einige sehr merkwürdige Eigenschaften derselben aus den zwey für sie aufgestellten Gleichungen

$$a^x = y \quad \text{und} \quad x = \text{Log}\, y$$

ableiten.

I. Da nämlich zuerst, für jeden Werth der Basis a, die positiv und > 1 ist, wenn man $x = 0$ setzt, der Werth von $y = 1$ wird, so hat man auch für jede Basis

$$\text{Log}\, 1 = 0.$$

Und da eben so $y = a$ für $x = 1$ wird, so hat man auch

$$\text{Log}\, a = 1.$$

Das heifst also: »Für jeden Werth der Basis a, oder für »jedes logarithmische System, ist der Logarithmus dieser Basis »immer gleich der Einheit, und der Logarithmus der Einheit ist »immer gleich Null.«

II. Da $a^x = y$ ist, wo x und y willkürliche Zahlen bezeichnen, so ist auch, wenn u und z ähnliche Zahlen ausdrücken,

$$a^u = z.$$

Man hat daher, nach der in §. 43. gegebenen Erklärung eines Logarithmus

$$x = \text{Log}\, y, \quad \text{und eben so} \quad u = \text{Log}\, z.$$

Allein nach §. 29, II. ist

$$a^x \cdot a^u = a^{x+u} \quad \text{oder}$$
$$a^{x+u} = y \cdot z,$$

also ist auch, nach derselben Erklärung des Logarithmus,

$$x + u = \text{Log}\,(y \cdot z),$$

das heifst, es ist

$$\text{Log}\,(y \cdot z) = \text{Log}\, y + \text{Log}\, z,$$

oder »der Logarithmus eines Products zweyer Zahlen ist gleich »der Summe der Logarithmen der einzelnen Factoren.«

So war in dem vorhergehenden Beyspiele für $a = 10$

$$\text{Log}\, 10 = 1 \quad \text{und} \quad \text{Log}\, 100 = 2,$$

also ist auch

$$\text{Log}\, 10 \times 100 \quad \text{oder} \quad \text{Log}\, 1000 = \text{Log}\, 10 + \text{Log}\, 100,$$

das heifst, es ist

$$\text{Log}\, 1000 = 1 + 2 = 3, \quad \text{wie zuvor.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist für sich klar, dafs sich dasselbe auch auf Producte von mehr als zwey Factoren fortsetzen läfst. Denn setzt man statt y die Gröfse $x.y$, was man kann, da x und y ganz willkürliche Gröfsen sind, so gibt die letzte Gleichung

$$\text{Log}(x.y.z) = \text{Log}(x.y) + \text{Log}\,z,$$

und da bereits $\text{Log}(x.y) = \text{Log}\,x + \text{Log}\,y$ ist, so hat man auch

$$\text{Log}(x.y.z) = \text{Log}\,x + \text{Log}\,y + \text{Log}\,z \quad \text{u. s. f.}$$

III. Ganz auf dieselbe Weise ist auch

$$\frac{a^x}{a^u} = a^{x-u} \quad \text{oder} \quad a^{x-u} = \frac{y}{z},$$

und daher

$$x - u = \text{Log}\frac{y}{z},$$

oder, was dasselbe ist,

$$\text{Log}\frac{y}{z} = \text{Log}\,y - \text{Log}\,z,$$

d. h.: »der Logarithmus eines Quotienten ist gleich dem Loga»rithmus des Dividends, weniger dem des Divisors.«

IV. Endlich ist noch (nach §. 29, II.)

$$(y^x)^u = y^{xu},$$

also auch, nach derselben Erklärung des Logarithmus,

$$u\,\text{Log}\,y^x = xu\,\text{Log}\,y,$$

oder, wenn man beyde Glieder dieses Ausdrucks durch u dividirt,

$$\text{Log}\,y^x = x\,\text{Log}\,y,$$

d. h.: »der Logarithmus einer Potenz y^x ist gleich dem Producte »des Exponenten x in dem Logarithmus der Gröfse y.«

Da in dem letzten Ausdrucke die willkürliche Gröfse x auch ein Bruch seyn kann, so hat man, wenn man $\frac{1}{x}$ statt x setzt,

$$\text{Log}\,y^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\,\text{Log}\,y,$$

oder, was dasselbe ist (§. 29.),

$$\text{Log}\sqrt[x]{y} = \frac{1}{x}\,\text{Log}\,y,$$

d. h.: »der Logarithmus der x^{ten} Wurzel aus einer jeden Zahl y »ist gleich dem x^{ten} Theile des Logarithmus dieser Zahl y selbst.«

Aus dem Vorhergehenden folgt demnach, dafs durch die Logarithmen verwandelt wird:

die Multiplication . . . . . in Addition,
» Division . . . . . » Subtraction,
» Erhebung auf ganze Potenzen . . » Multiplication,
» Ausziehung der Wurzeln . . . . » Division.

Wenn daher, für irgend eine Basis a, die Logarithmen aller natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, . . . bereits berechnet und in eine Tafel gebracht wären, so würden dadurch alle gröfseren und oft sehr zeitraubenden Rechnungen ungemein erleichtert werden, so zwar, dafs die Arbeit mehrerer Monate auf die einiger Stunden herabgebracht, und dadurch das Leben des Geometers gleichsam vielfach verlängert werden könnte.

Die Logarithmen sind daher eine der nützlichsten und wichtigsten Entdeckungen, und der menschliche Geist darf sich dieser Eroberung auf dem Gebiete der Wissenschaft um so mehr erfreuen, da er sie nicht dem Zufalle oder einer äufseren Einwirkung, sondern da er sie ganz sich selbst verdankt, während ihm bey den meisten anderen seiner Erfindungen, besonders in den Künsten und Manufacturen, die Veranlassung sowohl, als auch selbst den Stoff zu seiner Entdeckung erst von aufsen entgegengeführt werden mufs.

§. 45. (Vergleichung der Logarithmen verschiedener Systeme.) Das Vorhergehende bezieht sich auf solche Logarithmen, deren Basis eine bestimmte Zahl a ist, und wir haben für die Logarithmen dieses Systems die Gleichungen aufgestellt:

$$y = a^x, \quad x = \mathrm{Log}\, y \quad \text{und} \quad \mathrm{Log}\, a = 1.$$

Betrachten wir nun irgend ein anderes System, dessen Basis wir durch e bezeichnen wollen, und bezeichnen wir die Logarithmen dieses zweyten Systems, zum Unterschiede mit jenen, durch das analoge Symbol *log*, so dafs man, wenn y dieselben Zahlen wie vorher bedeutet, für dieses zweyte System die Gleichungen hat:

$$y = e^u, \quad u = \log y \quad \text{und} \quad \log e = 1,$$

wo demnach u eine solche Zahl ist, die für e^u denselben Werth, nämlich y gibt, wie x für a^x gegeben hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn man die beyden vorhergehenden Gleichungen

$$x = \mathrm{Log}\, y \quad \text{und} \quad u = \log y$$

durch einander dividirt, so erhält man

$$\frac{\mathrm{Log}\, y}{\log y} = \frac{x}{u}$$

für das Verhältnifs der Logarithmen derselben Zahl y in den beyden Systemen, deren Basis a und e ist.

Allein dieses Verhältnifs der beyden Logarithmen $\mathrm{Log}\, y$ und $\log y$ kann, wenn es sonst ein veränderliches Verhältnifs ist, nur von der Gröfse y selbst abhängig, oder es kann blofs eine Function (§. 34.) von y seyn, die wir, da wir sie noch nicht kennen, allgemein durch $f(y)$ bezeichnen wollen, so dafs man demnach hat:

$$\mathrm{Log}\, y = f(y) \,.\, \log y.$$

Da aber in diesen Ausdrücken die Gröfse y ganz willkürlich ist, so wird man auch statt ihr irgend eine Potenz derselben, z. B. y^n setzen können, so dafs man also auch die Gleichung haben wird:

$$\mathrm{Log}\,(y^n) = f(y^n) \,.\, \log (y^n).$$

Allein nach §. 44, IV. hat man für den Logarithmus eines jeden Systems

$$\mathrm{Log}\,(y^n) = n\, \mathrm{Log}\, y, \quad \text{und eben so}$$
$$\log (y^n) = n \log y,$$

so dafs demnach die vorhergehende Gleichung in die folgende übergeht:

$$\mathrm{Log}\, y = f(y^n) \,.\, \log y,$$

und diese, mit der ersten Gleichung

$$\mathrm{Log}\, y = f(y) \,.\, \log y$$

verglichen, zeigt, dafs

$$f(y^n) = f(y),$$

das heifst, dafs die gesuchte Function $f(y)$ der Art ist, dafs sie ihren Werth nicht ändert, wenn man auch in ihr statt y irgend eine Potenz y^n setzt, wo n eine ganz willkürliche Gröfse bezeichnet. Daraus folgt aber sofort, dafs $f(y)$ von y selbst ganz und gar nicht abhängig seyn kann, dafs also $f(y)$ irgend eine constante Gröfse seyn mufs, die wir gleich m setzen wollen, so dafs man daher hat:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{Log}\,y = m \,.\, \log y,$$

d. h. also, das Verhältnifs der Logarithmen *derselben* Zahlen y in zwey verschiedenen Systemen ist für alle Zahlen dasselbe, oder ist eine constante Gröfse.

I. Um diese Constante m näher zu bestimmen, so hat man, wenn man die beyden obigen Werthe von y, nämlich

$$y = a^x \quad \text{und} \quad y = e^u$$

einander gleich setzt:

$$a^x = e^u.$$

Nimmt man von den beyden Gliedern dieser Gleichung die Logarithmen des einen sowohl, als auch des anderen Systems, so hat man

$$\left.\begin{aligned} x\,\text{Log}\,a &= u\,\text{Log}\,e \\ \text{und}\quad x\,\log a &= u\,\log e \end{aligned}\right\}.$$

Da aber, nach dem Vorhergehenden,

$$\frac{x}{u} = m \quad \text{und} \quad \text{Log}\,a = \log e = 1$$

ist, so gehen die beyden letzten Gleichungen in folgende einfachere über:

$$\left.\begin{aligned} m &= \text{Log}\,e \\ \text{und}\quad m &= \frac{1}{\log a} \end{aligned}\right\},$$

wodurch demnach die gesuchte constante Gröfse m auf doppelte Weise bestimmt ist.

Kennt man also bereits den Logarithmus einer Zahl y in dem einen der beyden Systeme, z. B. in dem ersten, dessen Basis a ist, oder kennt man bereits die Gröfse $\text{Log}\,y$, so hat man auch sofort den Logarithmus derselben Gröfse y in dem zweyten Systeme durch die Gleichung

$$\log y = \log a \,.\, \text{Log}\,x = \frac{1}{m} \,.\, \text{Log}\,x,$$

und eben so hat man auch umgekehrt

$$\text{Log}\,y = \text{Log}\,e \,.\, \log y = m \,.\, \log y,$$

und endlich, wie aus diesen beyden Gleichungen unmittelbar folgt:

$$\log a \,.\, \text{Log}\,e = 1.$$
