

Achtes Capitel.

Proportionen.

§. 37. (Erklärung.) Wenn man bey zwey Gröſſen durch Division untersucht, wie oft eine derselben in der anderen enthalten ist, so sucht man dadurch das *Verhältniß* dieser zwey Gröſſen.

So haben die zwey Zahlen 3 und 12 das Verhältniß 4, da die erste in der zweyten 4^{mal} enthalten ist.

Zwey Zahlenpaare, deren Verhältniß gleich ist, bilden eine *Proportion*. So hat 3 zu 12 dasselbe Verhältniß, wie 5 zu 20; also bilden auch diese zwey Zahlenpaare eine Proportion, die man auf folgende Weise zu schreiben pflegt:

$$\begin{aligned} 3 : 12 &= 5 : 20, \text{ oder auch} \\ 12 : 3 &= 20 : 5. \end{aligned}$$

§. 38. (Eigenschaft der Proportionen.) In jeder Proportion ist das Product der beyden äußeren Glieder gleich dem Producte der beyden inneren.

Denn ist überhaupt

$$a : b = c : d,$$

so ist auch, nach der gegebenen Erklärung einer Proportion, wenn man sie mit dem oben (§. 6, II.) angeführten Zeichen der Division in der Gestalt von zwey Brüchen ausdrückt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Bringt man aber diese beyden Brüche auf einerley Nenner, so hat man

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd};$$

also auch, wenn man beyde Glieder dieser Gleichung durch bd multiplicirt:

$$ad = bc;$$

d. h. in der gegebenen Proportion

$$a : b = c : d$$

ist das Product der zwey äußeren gleich dem Product der zwey inneren Glieder.

I. Sind die beyden inneren Glieder einander gleich, oder hat man die Proportion

$$A : B = B : C,$$

so ist, nach dem Vorhergehenden,

$$AC = B^2,$$

oder auch

$$B = \sqrt{AC},$$

und man nennt dieses mittlere Glied $B = \sqrt{AC}$ die *mittlere Proportionale* zwischen den beyden anderen Gliedern A und C .

II. Daraus folgt sofort, daß sich aus je zwey einander gleichen Producten

$$ad = bc$$

immer eine Proportion bilden lasse. Denn dividirt man die letzte Gleichung zu beyden Seiten durch bd , so hat man

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

das heißt, man hat:

$$a : b = c : d.$$

§. 39. (Bestimmung eines Gliedes der Proportion aus den drey anderen.) Wenn drey Glieder einer Proportion gegeben sind, so läßt sich dadurch auch das vierte bestimmen. Denn ist die Proportion gegeben

$$a : b = c : d, \quad \text{so ist auch}$$

$$ad = bc.$$

Ist daher z. B. das letzte Glied d unbekannt, so hat man, wenn man beyde Glieder dieser Gleichung durch a dividirt,

$$d = \frac{bc}{a},$$

und eben so für jedes der übrigen drey Glieder. — Überhaupt ist jedes äußere Glied gleich dem Producte der zwey inneren, dividirt durch das andere äußere — und jedes innere Glied ist gleich dem Producte der zwey äußeren, dividirt durch das andere innere.

Dieser einfache, aber sehr nützliche Satz ist unter der Benennung der *Regeldetri* bekannt.

§. 40. (Veränderungen der Proportionen.) Eine Proportion kann mannigfaltige Veränderungen erleiden, ohne daß dadurch die Gleichheit ihrer Verhältnisse gestört wird. Wir führen nur die vorzüglichsten derselben kurz an.

I. *Umkehrung der Verhältnisse.*

Ist

$$a : b = c : d,$$

so ist auch sofort

$$b : a = d : c,$$

wie schon für sich klar ist.

II. *Verwechslung der inneren Glieder.*

Ist

$$a : b = c : d,$$

so ist auch

$$a : c = b : d,$$

da beyde Proportionen auf die ihnen gemeinsame Gleichung

$$ad = bc$$

zurückgeführt werden können.

III. *Addition und Subtraction der einzelnen Glieder.*

Ist die Proportion gegeben

$$a : b = c : d,$$

so ist auch

$$a \pm b : c \pm d = b : d,$$

und eben so

$$a \pm c : b \pm d = a : b,$$

weil auch die beyden letzten Proportionen sich wieder auf die Gleichung

$$bc = ad,$$

das heist, auf die gegebene Proportion

$$a : b = c : d$$

zurückführen lassen.

IV. *Multiplication der beyden ersten, oder der beyden letzten Glieder durch dieselbe Gröfse.*

Ist die Proportion gegeben

$$a : b = c : d,$$

so ist auch, für jeden Werth der Gröfse m ,

$$am : bm = c : d,$$

und eben so

$$a : b = cm : dm,$$

da jede der zwey letzten Proportionen wieder die Gleichung gibt

$$ad = bc.$$

§. 41. (Verbindung mehrerer Proportionen unter einander.) Die Producte gleichliegender Glieder von zwey oder mehreren Proportionen sind ebenfalls proportionirt.

Sind nämlich die zwey Proportionen gegeben

$$a : b = c : d \text{ und}$$

$$e : f = g : h,$$

so ist auch sofort

$$ae : bf = cg : dh.$$

Denn die erste Proportion gibt $ad = bc$, und die zweyte gibt eben so $eh = fg$, also ist auch

$$ad \cdot eh = bc \cdot fg,$$

oder, was dasselbe ist,

$$ae \cdot dh = cg \cdot bf,$$

also auch

$$ae : bf = cg : dh.$$

I. Daraus folgt sofort:

Sind die zwey Proportionen gegeben

$$\left. \begin{array}{l} a : b = c : d \\ \text{und } b : e = d : f \end{array} \right\},$$

so hat man auch

$$a : e = c : f.$$

II. Sind eben so die zwey Proportionen gegeben

$$\left. \begin{array}{l} a : b = c : d \\ \text{und } b : e = f : c \end{array} \right\},$$

so hat man auch

$$a : e = f : d.$$

III. Sind endlich die zwey Proportionen gegeben

$$\left. \begin{array}{l} a : b = c : d \\ \text{und } e : f = d : g \end{array} \right\},$$

so hat man auch

$$ae : bf = c : g,$$

und dieser Satz III. ist unter dem Namen der *Regelquinque* bekannt.

IV. Das Verfahren in III. gibt, wenn man es auf mehrere Proportionen fortsetzt, die sogenannte *Kettenregel* oder den folgenden Satz:

Sind die Proportionen gegeben:

$$a : b = A : B,$$

$$c : d = B : C,$$

$$e : f = C : D,$$

$$g : h = D : E \text{ u. f.},$$

so besteht zwischen diesen Größen auch die Proportion

$$aceg : bdfh = A : E.$$