

Siebentes Capitel.

Umformung der Gleichungen.

§. 33. (Erklärungen.) Wenn ein Ausdruck eine oder auch mehrere veränderliche Gröfsen, die wir (nach §. 17.) durch $x, y, z, \dots$ bezeichnen wollen, und überdieß auch eine oder mehrere gegebene oder unveränderliche Gröfsen $a, b, c, \dots$ enthält, so wird jener Ausdruck seinen Werth ändern, wenn diese Gröfsen $x, y, z, \dots$ geändert werden, er wird von diesen Gröfsen abhängig, oder er wird, wie man zu sagen pflegt, eine *Function* dieser veränderlichen Gröfsen seyn.

So ist z. B. der Ausdruck

$$\frac{a + bx}{a - bx},$$

oder wenn man für einen besondern Fall $a = 10$ und $b = 1$ setzt, der Ausdruck

$$\frac{10 + x}{10 - x}$$

eine Function der veränderlichen Gröfse x , und diese Function ist gleich 1 für $x = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{11}{9} & \text{ » } x = 1, \\ \frac{3}{5} & \text{ » } x = 2 \text{ u. f.} \end{aligned}$$

Eben so sind

$$\frac{a + bx}{c - dy} \quad \text{oder} \quad ax^2 + bxy + cy^2$$

Functionen von den beyden veränderlichen Gröfsen x und y u. f.

Wenn die veränderlichen Gröfsen $x, y, z, \dots$ oder wenn die *Stammgröfsen* der Function bloß ganze Exponenten enthalten, so heist die Function *rational*, wie die der vorhergehenden Beyspiele; wenn aber diese Stammgröfsen gebrochene Exponenten mit sich führen, so ist die Function *irrational*, wie

$$a + b\sqrt{x} \quad \text{oder} \quad \sqrt{a + bx},$$

und endlich eine *gebrochene* Function, wenn die Stammgröfsen

zugleich im Zähler und Nenner erscheinen, wie der vorhergehende Ausdruck

$$\frac{a + bx}{a - bx} \quad \text{oder auch} \quad \frac{x}{\sqrt{a + bx}},$$

welcher letzte Ausdruck eine gebrochene irrationale Function bezeichnet.

I. Ein aus zwey durch die Zeichen $+$ oder $-$ verbundenen Gliedern bestehender Ausdruck heist ein *Binom*, wie

$$a + bx^2 \quad \text{oder} \quad \sqrt{1 - x}.$$

Ein solcher aus drey Gliedern bestehender Ausdruck

$$a + bx + cx^2$$

wird ein *Trinom*, und wenn er noch mehr als drey Glieder hat, ein *Polynom* genannt.

II. Ein aus 2, 3, 4, . . . Factoren bestehender Ausdruck wird eine Gröfse von 2, 3, 4, . . . *Dimensionen* genannt, wo, bey gebrochenen Functionen, die Nenner als Gröfsen mit negativen Exponenten (§. 28, I.) genommen werden. So sind

$$a, \quad \frac{ax}{b}, \quad \frac{ax^2 + by^2}{ab}, \quad \sqrt{a^2 + bx}$$

sämmtlich Gröfsen von einer Dimension;

$$ax \quad \text{oder} \quad \frac{ax^2}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

sind Gröfsen von zwey Dimensionen; die Gröfsen

$$\frac{a+x}{a-x} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}}$$

gehören zu der Dimension Null;

$$\frac{a}{bx} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{a^2 + bx}$$

zu der Dimension -1 , und endlich

$$\sqrt{x} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{ax}{a-x}}$$

zu der Dimension $\frac{1}{2}$ u. s. f. Wir werden in der zweyten Abtheilung dieser Schrift sehen, daß die *Linien* Gröfsen der ersten, die *Flächen* der zweyten, und daß die *Körper* Gröfsen von drey Dimensionen (Länge, Breite und Höhe) sind.

§. 34. (Gleichung.) Wenn zwey Functionen derselben Stammgrößen, wie z. B.

$$x^2 - ax \quad \text{und} \quad bx - c,$$

einander gleich sind, so bilden sie eine *Gleichung*, die auf folgende Art geschrieben wird:

$$x^2 - ax = bx - c.$$

Da die Gleichheit zweyer Ausdrücke nicht gestört wird, wenn man zu jedem derselben dieselbe GröÙe addirt oder von ihr subtrahirt, so hat man, wenn man in der letzten Gleichung zu beyden Seiten des Gleichheitszeichens die GröÙe c addirt, da $c - c = 0$ ist:

$$x^2 - ax + c = bx;$$

und endlich, wenn man auch hier zu beyden Seiten die GröÙe bx subtrahirt:

$$x^2 - ax - bx + c = 0;$$

oder da die veränderliche GröÙe x als Factor von a und zugleich von b erscheint:

$$x^2 - (a+b)x + c = 0,$$

welcher Ausdruck also ebenfalls eine *Gleichung* für die Variable oder unbekannte GröÙe x darstellt.

Man sieht daraus, daß jede Gleichung so ausgedrückt werden kann, daß auf der einen Seite des Gleichheitszeichens bloß die Null steht, was man eine Gleichung *auf Null bringen* heißt. So ist demnach auch

$$x^2 + Ax + B = 0$$

eine Gleichung für x , und

$$x^2 + Axy + By^2 + C = 0$$

eine Gleichung zwischen den beyden veränderlichen Größen x und y , u. f.

1. Wir betrachten hier zuvörderst nur diejenigen Gleichungen, die bloß Functionen einer einzigen veränderlichen GröÙe x sind. Eine solche Gleichung heißt *geordnet*, wenn die veränderliche oder unbekannte GröÙe x in allen Gliedern der Gleichung bloß im Zähler und bloß mit ganzen positiven Exponenten erscheint, und eine solche geordnete Gleichung gehört zum 1^{sten}, 2^{ten}, 3^{ten}, . . . *Grade*, wenn der höchste Exponent von x

gleich 1, 2, 3, . . . ist. So ist

$$x^2 + ax + b = 0$$

eine geordnete Gleichung des zweyten Grades, und

$$x^3 + ax^2 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{oder auch}$$

$$x^3 + ax + b = 0 \quad \text{oder}$$

$$x^3 + a = 0$$

sind geordnete Gleichungen des dritten Grades. Im Gegentheile sind

$$\frac{a}{1+x} = bx,$$

$$a + b\sqrt{x} = ex,$$

$$\frac{x}{a} + b = a\sqrt{x} \text{ u. f.}$$

noch ungeordnete Gleichungen.

II. Bemerken wir noch, daß eine jede Gleichung, zwischen der veränderlichen x und anderen constanten Größen, *nicht für jeden willkürlichen Werth von x , sondern nur für gewisse besondere Werthe dieser GröÙe gleich Null seyn kann.* So hat man z. B. in der Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0,$$

oder wenn man, für ein specielles Beyspiel, $a=3$ und $b=2$ setzt, in der Gleichung

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

nur *zwey* Werthe von x , welche dieser Gleichung entsprechen, oder welche den Ausdruck $x^2 + 3x + 2 = 0$ geben. Diese Werthe sind nämlich

$$x = -1 \quad \text{und} \quad x = -2,$$

und außer ihnen gibt es keinen anderen Werth von x mehr, welcher der gegebenen Gleichung genügt.

Eben so hat die geordnete Gleichung des dritten Grades

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

nur drey Werthe von x , welche diese Function von x gleich Null geben, nämlich, wie man sofort sieht:

$$x = 1, \quad x = 2 \quad \text{und} \quad x = 3.$$

Man nennt aber diese Werthe von x , welche der gegebenen Gleichung entsprechen, die *Wurzeln* dieser Gleichung, und wir

werden weiter unten (§. 67.) sehen, daß jede geordnete Gleichung des m^{ten} Grades auch m Wurzeln hat, wie dieß in den beyden vorhergehenden Beyspielen der Fall ist.

III. Würde aber der Fall eintreten, daß ein Ausdruck der Art

$$0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$

für alle Werthe, die man der GröÙe x geben kann, gleich Null werden sollte, so würde auch daraus unmittelbar folgen, daß die constanten Coefficienten (§. 18, II.) von $x^0, x^1, x^2, \dots$ oder daß die GröÙen $a, b, c, d, \dots$ jede für sich gleich Null seyn müssen. Denn setzt man in der gegebenen Gleichung die GröÙe x , da man ihr alle möglichen Werthe geben kann, gleich Null, so erhält man

$$a = 0,$$

so daß man also jenen Ausdruck auch so schreiben kann:

$$0 = bx + cx^2 + dx^3 + \dots,$$

oder, da man, ohne die Gleichung zu stören, alle Glieder derselben durch x dividiren kann:

$$0 = b + cx + dx^2 + \dots,$$

also wieder, wenn man neuerdings $x=0$ setzt:

$$b = 0,$$

und eben so erhält man

$$c = 0, \quad d = 0 \quad \text{u. f.}$$

§. 35. (Sonderung der Unbekannten.) Die Bestimmung der *Wurzeln* einer gegebenen Gleichung zwischen x und constanten GröÙen ist eine der wichtigsten Aufgaben der mathematischen Analysis. Man nennt diese Bestimmung der Wurzeln die *Auflösung der Gleichung*. Wir werden unten wieder auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Hier wollen wir nur bemerken, daß diese Auflösung der Gleichungen, so lange sie für x des *ersten* Grades sind, keine Schwierigkeit habe, da sie offenbar nur darin besteht, diese unbekannte GröÙe aus der Gleichung zu sondern, d. h. sie so zu stellen, daß sie ganz allein auf der einen Seite des Gleichheitszeichens steht, während die andere Seite bloß von den constanten oder gegebenen GröÙen $a, b, c, \dots$ der Gleichung ein-

genommen wird. Dadurch ist nämlich der Werth der unbekannten Gröſſe x durch die bekannten $a, b, c, \dots$ sofort gegeben, oder die Gleichung ist aufgelöst.

Um aber zu dieser Sonderung der Unbekannten zu gelangen, muß man mit den gegebenen Gleichungen verschiedene Modificationen vornehmen, durch welche man diesen Zweck erreichen kann.

I. Diese Modificationen gründen sich alle darauf, daß die Gleichheit zweyer Ausdrücke nicht gestört werden kann, wenn man, wie auch zum Theil schon oben geschehen ist, zu jedem dieser Ausdrücke dieselbe Gröſſe addirt, oder von ihnen dieselbe Gröſſe subtrahirt, oder auch, wenn man beyde Ausdrücke durch dieselbe Gröſſe multiplicirt oder dividirt, oder endlich, wenn man jeden dieser Ausdrücke auf dieselbe ganze oder gebrochene Potenz erhebt.

§. 36. (Nähere Erläuterung dieses Verfahrens.)

Die in §. 35, I. angeführten Reductionen lassen sich am einfachsten dadurch ausführen, daß man alles, was auf der einen Seite des Gleichheitszeichens mit der unbekannten Gröſſe

verbunden ist	auf die andere Seite bringt
durch Addition,	durch Subtraction, u. umgekehrt.
» Multiplication,	» Division, und umgekehrt.
» Erhebung auf ganze Potenzen,	» Ausziehung der Wurzeln, und umgekehrt.

Diese Vorschriften werden am besten durch Beyspiele erläutert werden.

I. Ist die Gleichung gegeben

$$\frac{x+2}{5} = 1,$$

so wird man zuerst die Gröſſe 5, da durch sie die ganze linke Seite afficirt wird, durch Multiplication auf die rechte Seite schaffen, wodurch man erhält

$$x + 2 = 5;$$

und wenn man dann noch die Gröſſe $+2$, durch Subtraction, auf die andere Seite bringt:

$$x = 3,$$

wodurch demnach die unbekannte Gröſſe x gegeben wird.

II. Ist die Gleichung gegeben

$$2(3+x) - 3 = 7,$$

so wird man zuerst die Gröfse -3 , durch Addition, auf die andere Seite bringen, so dafs man hat

$$2(3+x) = 10.$$

In dieser Gleichung mufs wieder zuerst der allgemeine Factor 2 der linken Seite weggebracht werden, wodurch man hat

$$3+x=5,$$

und wenn man endlich noch die Gröfse 3 auf die andere Seite bringt:

$$x=2.$$

Eben so wird man auch mit solchen Gleichungen verfahren, die statt den Ziffern allgemeine Zahlzeichen haben.

III. Ist z. B. die Gleichung gegeben:

$$\frac{ax+b}{c}=d,$$

so gibt die Entfernung von c , die hier wieder zuerst vorgenommen werden mufs:

$$ax+b=cd,$$

und dann die von b :

$$ax=cd-b,$$

und endlich die von a :

$$x=\frac{cd-b}{a}.$$

Dieselbe gegebene Gleichung hätte man aber auch so schreiben können:

$$\frac{ax}{c}+\frac{b}{c}=d,$$

und hier gibt die Entfernung von $\frac{b}{c}$ sogleich

$$\frac{ax}{c}=d-\frac{b}{c},$$

und dann die Entfernung von $\frac{a}{c}$

$$x=\frac{c}{a}\left(d-\frac{b}{c}\right),$$

oder wenn man die Klammern auflöst:

$$x=\frac{cd-b}{a}, \text{ wie zuvor.}$$

IV. Erscheint die Gröfse x mehrmal in den Zählern von Brüchen, so kann man sie als gemeinschaftlichen Factor herausnehmen, und dann wie zuvor verfahren.

Ist z. B.

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - c = d$$

gegeben, so hat man auch

$$x \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - c = d,$$

oder wenn man die beyden Brüche auf einerley Nenner bringt, und die Gröfse c auf die andere Seite schafft:

$$x \left(\frac{a+b}{ab} \right) = c + d,$$

also auch, wenn man den Factor $\frac{a+b}{ab}$ durch Division wegbringt:

$$x = \frac{ab(c+d)}{a+b}.$$

Ganz eben so wird

$$\frac{a+x}{b} = \frac{c-x}{d} \quad \text{geben} \quad x = \frac{bc - ad}{b+d},$$

und

$$\frac{b + c(d + ax)}{a} = d \quad \text{geben} \quad x = \frac{(a-c)d - b}{ac}.$$

Alle vorhergehenden Gleichungen sind blofs des ersten Grades. Wenn aber die gegebene Gleichung mehrere verschiedene Potenzen von x enthält, so ist die Sonderung dieser Unbekannten oft mit sehr grofsen, ja mit unübersteiglichen Schwierigkeiten verbunden, und dann mufs man sich oft schon mit dem blossen Ordnen (§. 35, 1.) der Gleichung begnügen, um wenigstens den Grad derselben bestimmen zu können. Wir werden in der Folge wieder auf diese Untersuchungen zurückkommen.

Bemerken wir noch, zum Schlusse dieses Gegenstandes, dafs man den Ausdruck $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ öfter durch eine ähnliche Umformung auf die einfachere Gestalt $x + \sqrt{y}$ bringen kann. Setzt man nämlich beyde Ausdrücke einander gleich, so ist

$$a + \sqrt{b} - x^2 - 2x\sqrt{y} - y = 0.$$

Da aber ein Ausdruck zwischen rationalen und irrationalen Gröfsen nur dann für alle Werthe derselben gleich Null seyn

kann, wenn jene, so wie diese, jede für sich, gleich Null sind, so hat man statt der vorhergehenden Gleichung die zwey folgenden:

$$a - x^2 - y = 0 \text{ und } b - 4x^2y = 0.$$

Wir werden aber in der Folge (§. 69.) sehen, und wir können uns auch schon jetzt durch Nachrechnung überzeugen, daß aus den beyden letzten Gleichungen für die Werthe von x und y die Ausdrücke folgen:

$$x = \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \text{ und } y = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}.$$

Auf diese Weise erhält man z. B.

$$\sqrt{6} + 2\sqrt{5} = 1 + \sqrt{5},$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{8} = 1 + \sqrt{2},$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \text{ u. f.}$$