

Fünftes Capitel.

Rechnung mit Potenzen.

§. 24. (Erklärung.) Ein Product von mehreren gleichen Factoren heist eine *Potenz* dieses Factors. So ist

aa	oder	a^2	die zweyte,
aaa	»	a^3	» dritte,
$aaaa$	»	a^4	» vierte

Potenz der Gröfse a , und die Zahl oben rechts, welche die Anzahl der Factoren in jeder Potenz anzeigt, heist der *Exponent* dieser Potenz.

Die zweyte und dritte Potenz, die am häufigsten vorkommt, wird auch der Kürze wegen das *Quadrat* und der *Cubus* (Würfel) genannt. So ist $3^2 = 9$ und $4^2 = 16$ das Quadrat von 3 und 4, und $2^3 = 8$, so wie $3^3 = 27$ ist der Würfel von 2 und 3.

I. Eben so wird diejenige Zahl a , welche auf die 2^{te} , 3^{te} , 4^{te} , ... Potenz erhoben, die Zahl b gibt, die 2^{te} , 3^{te} , 4^{te} , ... *Wurzel* von der Zahl b genannt. So ist a die 2^{te} Wurzel von a^2 , und zugleich die dritte Wurzel von a^3 u. f. So ist 3 die 2^{te} Wurzel von 9, und 2 die dritte Wurzel von 8, und wieder 3 die 4^{te} Wurzel von 81 u. f.

Die zweyte und dritte Wurzel einer Gröfse wird auch abkürzend die *Quadrat-* und *Kubikwurzel* dieser Gröfse genannt.

Um anzuzeigen, dafs die 2^{te} , 3^{te} , 4^{te} , ... Wurzel aus einer Zahl gezogen werden soll, setzt man dieser Zahl die Zeichen

$$\sqrt{}, \sqrt[3]{}, \sqrt[4]{}, \dots$$

vor. So hat man z. B.:

$$\sqrt[2]{9} = 3, \sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[4]{16} = 2, \dots$$

Bey der Quadratwurzel läfst man der Kürze wegen auch wohl die Ziffer 2 in den Wurzelzeichen weg, so dafs $\sqrt{a}$ gleichbedeutend mit $\sqrt[2]{a}$ ist.

Will man endlich mehrere durch $+$ oder $-$ verbundene Gröſſen *zugleich* auf eine Potenz erheben, oder aus ihnen die Wurzel ziehen, so schließt man diese Gröſſen in Klammern ein (§. 6, II.). So ist das Quadrat von $a + b$ gleich

$$(a + b)^2,$$

und die Kubikwurzel von $a - b$ ist

$$\sqrt[3]{(a - b)} \text{ oder auch } \sqrt[3]{a - b}.$$

§. 25. (Multiplication.) Sucht man das Product von a^2 in a^3 , so hat man

$$a^2 \cdot a^3 = aa \cdot aaa = a^5,$$

und eben so für jeden anderen, ganzen, positiven Exponenten, also auch allgemein

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

wenn m und n ganze positive Zahlen bezeichnen.

Um daher Potenzen derselben Gröſſe a zu multipliciren, addirt man ihre Exponenten.

§. 26. (Division.) Um a^5 durch a^3 zu dividiren, hat man

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2,$$

und eben so für jeden anderen Exponenten: also auch allgemein

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Um daher Potenzen derselben Gröſſe a zu dividiren, subtrahirt man ihre Exponenten.

§. 27. (Erhebung auf Potenz.) Um eine gegebene Potenz, z. B. a^3 wieder auf eine Potenz, z. B. auf die zweyte Potenz zu erheben, oder um die Gröſſe

$$(a^3)^2$$

zu finden, so hat man

$$a^3 = aaa,$$

und von diesem Ausdrücke ist die zweyte Potenz

$$aaa \cdot aaa = a^6,$$

also ist auch

$$(a^3)^2 = a^6,$$

und eben so ist

$(a^2)^3 = a^6$, $(a^4)^2 = a^8$ u. f.,
also auch überhaupt für jeden ganzen, positiven Exponenten

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Um also Potenzen auf Potenzen zu erheben, multiplicirt man ihre Exponenten.

I. Um aber Producte oder Brüche auf Potenzen zu erheben, muß man dieß bey jedem einzelnen Factor des Products, und bey Zähler und Nenner des Bruches thun.

Will man z. B. das Product ab auf die zweyte Potenz erheben, so hat man

$$ab \cdot ab = aa \cdot bb, \text{ also auch}$$

$$(ab)^2 = a^2 \cdot b^2,$$

und daher überhaupt

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m.$$

Eben so erhält man für die zweyte Potenz des Bruches $\frac{a}{b}$ den Ausdruck

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2},$$

so daß demnach ist:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2},$$

und überhaupt

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},$$

wie dieß alles gleichsam für sich klar ist, wenn m und n ganze positive Zahlen sind.

§. 28. (Potenzen, deren Exponenten Null oder negative ganze Zahlen sind.) Nach dem Vorhergehenden (§. 26.) hat man, wenn m und n ganze positive Zahlen bezeichnen,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Sind aber die beyden Exponenten m und n einander gleich, so hat man $m - n = 0$, also ist auch

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1,$$

d. h. jede Gröfse mit dem Exponenten Null ist gleich der Einheit.

I. Ist aber in demselben vorhergehenden Ausdrucke

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

der Exponent m des Zählers gleich Null, so ist

$$\frac{a^0}{a^n} = a^{0-n},$$

oder da, nach dem Vorhergehenden, $a^0 = 1$ und a^{0-n} offenbar gleich a^{-n} ist, so hat man

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n},$$

d. h. jede Potenz mit einem negativen Exponenten ist gleich der Einheit, dividirt durch dieselbe Potenz mit demselben positiven Exponenten.

Nach der vorhergehenden Erklärung einer Potenz ist a^m , wenn m eine ganze positive Zahl bezeichnet, ein Product von m Factoren, deren jeder gleich a ist. Soll demnach die Gröfse a^0 ein Product von Null Factoren seyn? — Diefs würde keinen Sinn haben. Und noch weniger läfst sich, nach jener Erklärung, der Ausdruck a^{-m} auslegen.

Wir werden daher die Gröfse a^0 nur als eine blofse Bezeichnung für die Einheit ansehen können, deren es noch viele andere geben kann, z. B. $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ u. dgl. Diese Bezeichnung ist aber dadurch entstanden, dafs man irgend eine Potenz einer Zahl durch sich selbst dividirt, und dabey die Vorschrift des §. 26. angewendet hat.

Eben so werden wir die Gröfse a^{-m} als eine andere Bezeichnung für die Einheit, dividirt durch die m^{te} Potenz von a , gelten lassen, und diese zweyte Annahme ist eine unmittelbare Folge der ersten, dafs nämlich $a^0 = 1$ ist. Denn wenn man in dem Ausdrucke

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

des §. 26, wo m und n ganze positive Gröfsen sind, die Gröfse $m = 0$, also auch, der ersten Annahme gemäfs, $a^0 = 1$ setzt, so erhält man sofort

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n},$$

§. 29. (Potenzen mit gebrochenen Exponenten.)

Nach der oben (§. 24, I.) gegebenen Erklärung einer Wurzel, ist der Ausdruck

$$\sqrt[n]{a}$$

diejenige Zahl, welche auf die n^{te} Potenz erhoben, gleich a wird, also ist auch

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Ist aber n eine ganze Zahl, so hat man, nach §. 27,

$$a = (a^{\frac{1}{n}})^n.$$

Setzt man daher diese beyden Ausdrücke von a einander gleich, so hat man

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = (\sqrt[n]{a})^n,$$

woraus sofort folgt:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a};$$

d. h. Potenzen mit gebrochenen Exponenten sind mit den analogen Wurzelgrößen identisch.

I. Auch diesen Ausdruck

$$a^{\frac{1}{n}}$$

wird man also nur als eine andere Bezeichnung von $\sqrt[n]{a}$ betrachten können, der so wie die beyden vorhergehenden

$$a^0 \text{ und } a^{-n}$$

durch Analogie aus der Rechnung mit solchen Potenzen entstanden ist, deren Exponenten ganze positive Zahlen sind.

Diese Erweiterung der eingeführten Bezeichnungen, oder der aufgestellten Begriffe durch Analogie oder Induction, ist auf dem Gebiete der Mathematik von der äußersten Wichtigkeit, und sie ist oft schon die Quelle der interessantesten Entdeckungen geworden.

II. Stellen wir die vorhergehenden Vorschriften der Rechnung mit Potenzen zur bequemen Übersicht zusammen, so hat man, welche Zahlen auch die Größen m und n bezeichnen,

$$\text{für die Multiplication.} \quad \dots \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

für die Division $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$

für die Erhebung auf Potenz . . . $(a^m)^n = a^{mn},$

für die Ausziehung der Wurzel . $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}},$

und überdies

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{und} \quad a^0 = 1.$$

III. Nach diesen Vorschriften kann man sich an folgenden Beyspielen üben:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256, \quad 16^{\frac{2}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{5}{12}} = 8,$$

$$\frac{81^{\frac{1}{2}}}{81^{\frac{1}{4}}} = 81^{\frac{1}{4}} = 3, \quad (4^{\frac{1}{2}})^3 = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{64} = 8,$$

$$a^{-5} : a^2 = a^{-7}, \quad a^3 \cdot a^{-2} = a^1,$$

$$(\sqrt[6]{a^5})^3 = \sqrt[2]{a^5}, \quad \sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = (a^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[15]{a},$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \sqrt[12]{a^{13}},$$

$$(3 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 1 - \sqrt{5},$$

$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3},$$

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2}{3 - \sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$