

Viertes Capitel.

Einfache Rechnungen mit allgemeinen Zahlzeichen.

§. 17. (Erklärung.) Wir haben uns bisher nur mit solchen Gröſſen beſchäftiget, die durch Ziffer ausgedrückt werden, deren jede einen bestimmten, unabänderlichen Werth hat. Allein man kann ſich auch von dieſer Beſchränkung befreyen und die Gröſſen allgemein, ohne ihnen einen speciellen Werth beyzulegen, betrachten. Dann wird man ſie aber auch durch ſolche allgemeine Zeichen ausdrücken müſſen, und zu dieſen Zeichen wollen wir die Buchſtaben unſerer Alphabete wählen.

Die Rechnung mit ſolchen allgemeinen Zahlzeichen heiſt *Algebra*.

Um von einer ſolchen Rechnung ſchon jetzt einen beſtimmten Begriff zu geben, wollen wir uns folgende Aufgabe ſtellen.

Man ſuche zwey Zahlen, welche die Eigenschaft haben, daſs ihre Summe gleich einer gegebenen Zahl a , und daſs ihre Differenz gleich einer anderen gegebenen Zahl b iſt. Wir wollen dieſe zwey geſuchten oder unbekannten Zahlen, dem algebraiſchen Gebrauche gemäß, durch die letzten Buchſtaben x und y des Alphabets bezeichnen, während wir für die bekannten oder gegebenen Gröſſen jedes Problems die erſten Buchſtaben a , b , c , ... beybehalten.

Hätte man z. B. dieſe Frage ſo geſtellt, daſs die Summe der zwey unbekannten Zahlen gleich 27, und die Differenz derſelben gleich 15 ſeyn ſoll, ſo würde man wohl, nach einigen Verſuchen, bald finden, daſs die zwey geſuchten Zahlen $x = 21$ und $y = 6$ ſind, und ſo fort in ähnlichen Fällen, ſo oft die zwey gegebenen Zahlen a und b bekannte oder feſtbeſtimmte Gröſſen ſind, und daher, als ſolche, durch Ziffer ausgedrückt werden können.

Allein unſere Aufgabe, ſo fern ſie der Algebra zugehört, ſetzt über die beyden gegebenen Zahlen a und b nichts Beſtimm-

tes fest, sie will sich nicht durch particuläre Werthe dieser Zahlen beschränken lassen, sondern sie fordert, daß man die zwey unbekannten Gröſſen x und y ganz *allgemein* durch die für die beyden gegebenen Gröſſen gewählten Zeichen a und b ausdrücke, unabhängig von allen besonderen Werthen, die man diesen zwey Zeichen a und b für irgend einen speciellen, einzelnen Fall etwa geben könnte.

Und in dieser Allgemeinheit der Auffassung der Frage gibt die Algebra die Antwort, daß von den beyden gesuchten oder unbekannten Zahlen die eine x immer gleich der *halben Summe*, und die andere y gleich der halben *Differenz* der beyden gegebenen Gröſſen a und b seyn müsse, wenn diese Werthe von x und y der Bedingung der Aufgabe in *allen* Fällen genügen sollen.

Diese Antwort, in der Sprache der Algebra oder mit den oben (§. 6.) angeführten Symbolen dieser Sprache ausgedrückt, wird daher durch die zwey folgenden Ausdrücke gegeben seyn:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a+b}{2} \\ y &= \frac{a-b}{2} \end{aligned} \right\};$$

und dadurch ist das gegebene Problem ganz *allgemein aufgelöst* worden, indem alle nur immer mögliche *besondere* oder *specielle* Fälle schon in ihr enthalten sind.

Wären z. B. wie in dem vorhergehenden besonderen Fall, die beyden gegebenen Gröſſen

$$a = 27 \quad \text{und} \quad b = 15,$$

so wird man nur in den beyden vorhergehenden algebraischen Ausdrücken statt dem allgemeinen Zeichen a die Zahl 27, und statt b die Zahl 15 setzen, d. h. man wird in jenen Ausdrücken diese besonderen Werthe von a und b substituiren, und dadurch für die beyden unbekannten Gröſſen sofort erhalten:

$$\begin{aligned} x &= \frac{27+15}{2} = \frac{42}{2} = 21 \quad \text{und} \\ y &= \frac{27-15}{2} = \frac{12}{2} = 6, \quad \text{wie zuvor.} \end{aligned}$$

Ganz eben so leicht wird man aber auch, ohne alle weiteren vorhergehenden Versuche, dieselbe Frage für jede andere gegebene Werthe der Gröſſe a und b , beantworten können.

Sollte z. B. die Summe der zwey unbekannten Gröſſen 1404, und die Differenz derselben 548 seyn, so würde man nur, in jenen zwey algebraischen Ausdrücken, statt a die Gröſſe 1404, und statt b die Gröſſe 548 substituiren, wodurch man sofort erhält:

$$x = \frac{a + b}{2} = 976 \quad \text{und}$$

$$y = \frac{a - b}{2} = 428.$$

Sollte endlich, um auch Brüche zu wählen, die Summe der beyden Unbekannten $a = \frac{3}{4}$ und ihre Differenz $b = \frac{7}{12}$ seyn, so geben für diesen besonderen Fall jene zwey Ausdrücke

$$x = \frac{a + b}{2} = \frac{2}{3} \quad \text{und}$$

$$y = \frac{a - b}{2} = \frac{1}{12},$$

und so fort in allen anderen besonderen Fällen, die daher keiner eigenen Auflösung und keiner weiteren Versuche mehr bedürfen, da sie, wie man sieht, alle schon in der allgemeinen Auflösung enthalten sind.

Nehmen wir in einem zweyten allgemeinen Probleme an, daß von drey Personen die beyden ersten zusammen a , die erste und dritte zusammen b , und endlich die beyden letzten zusammen c Gulden besitzen, und suchen wir, wie viel jede dieser Personen für sich besitzen müsse, damit diesen Bedingungen der Aufgabe genüge geschehe.

Ohne etwas über die besonderen Werthe der drey gegebenen Gröſſen festzusetzen, findet die Algebra, durch einige sehr einfache Schlüsse, folgende allgemeine Auflösung des Problems.

Man nehme die halbe Summe der drey Gröſſen a , b und c , und ziehe von dieser halben Summe ab, zuerst c , dann b , und endlich a , so sind die drey Differenzen, die man auf diese Weise erhält, in derselben Ordnung das gesuchte Vermögen der ersten, der zweyten und der dritten der angeführten Personen.

Nennt man also, um dieß wieder in der Sprache der Algebra auszudrücken,

x das gesuchte Vermögen der ersten Person,

y » » » » zweyten »

z » » » » dritten »

und bezeichnet man die halbe Summe der drey gegebenen Grö-
sen durch S , so ist

$$S = \frac{a + b + c}{2},$$

und die gesuchten Zahlen sind:

$$\left. \begin{aligned} x &= S - c \\ y &= S - b \\ z &= S - a \end{aligned} \right\}.$$

Wäre z. B., um auf die letzten allgemeinen Ausdrücke einen
besonderen Fall anzuwenden, die Summe des Vermögens

der beyden ersten $a = 3$ Gulden,

der beyden äußersten $b = 4$ »

und der beyden letzten $c = 5$ »

so hat man

$$S = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6,$$

und daher das gesuchte Vermögen

des ersten $x = S - c = 6 - 5 = 1$ Gulden,

» zweyten $y = S - b = 6 - 4 = 2$ »

» dritten $z = S - a = 6 - 3 = 3$ »

und man sieht, daß diese Zahlen $x=1$, $y=2$ und $z=3$ den
Forderungen der Aufgabe vollkommen entsprechen.

Wäre für einen zweyten besonderen Fall das Vermögen der
zwey ersten $a=36$, der äußersten $b=84$ und der beyden letz-
ten $c=100$ Gulden, so hätte man

$$S = 110,$$

und daher für das gesuchte Vermögen

des ersten $x = 10$,

» zweyten $y = 26$,

» dritten $z = 74$ Gulden.

Wäre endlich das Gesamtvermögen der beyden ersten
 $a=100$, der äußersten $b=500$ und der zwey letzten $c=1000$
Gulden, so ist

$$S = 800,$$

und daher

$x = -200$,

$y = 300$,

$z = 700$ Gulden;

oder da hier das Vermögen des ersten mit dem Zeichen — der Subtraction (§. 6.) erscheint, so wird dieß nicht als ein wirkliches *Vermögen*, sondern als das Gegentheil desselben, also als *Schuld* zu betrachten seyn, wie wir sogleich näher sehen werden. Es besitzt daher, in dem letzten besonderen Falle unserer Aufgabe, der dritte 700, der zweyte nur 300 Gulden, und der erste hat 200 Gulden Schulden.

Das Vorhergehende wird genügen, von diesen Gegenständen jetzt schon einen allgemeinen Begriff zu geben.

§. 18. (Entgegengesetzte Gröfsen.) Jede Gröfse, wenn sie allgemein betrachtet werden soll, kann immer unter zwey, einander wesentlich entgegengesetzten Bedingungen betrachtet werden, ohne dabey ihren absoluten Werth zu ändern. Die Gröfse a z.B. oder irgend ein specieller Werth derselben, etwa $a = 3$ Gulden, kann eben so gut 3 Gulden Vermögen, als auch 3 Gulden Schulden bedeuten. Eben so kann, in einem anderen besonderen Fall, die Gröfse $a = 5$ Fufs ein Vorwärts- oder auch ein Rückwärtsgehen von 5 Fufs, ein Auf- oder ein Absteigen von 5 Fufs u. f. bezeichnen.

Da es aber nicht gleichgültig seyn kann, ob man eine solche Gröfse in dieser oder in der entgegengesetzten Bedeutung nimmt, da es vielmehr nothwendig ist, auf diese doppelte Beziehung einer jeden Gröfse Rücksicht zu nehmen, so wollen wir künftig eine jede Gröfse, wenn sie unter der einen dieser beyden Bedingungen, z. B. in Beziehung auf Vermögen, genommen wird, *positiv* heißen, und ihr das Zeichen $+$ vorsetzen, während sie unter der anderen, jener entgegengesetzten Bedingung, also hier in Beziehung auf Schuld, *negativ* heißen, und das Zeichen — erhalten soll.

Diese beyden Zeichen $+$ und —, die man durch die Worte *plus* und *minus* auszudrücken pflegt, stimmen mit den im §. 6. aufgestellten Zeichen der Addition und der Subtraction überein, weil in der That die dort und hier zu Grunde liegenden Begriffe einander ganz analog sind. So machen z. B. 7 Gulden Vermögen und 4 Gulden Schulden zusammen

$$+ 7 - 4, \text{ das heifst } + 3,$$

oder 3 Gulden Vermögen, und eben so machen 5 Gulden Ver-

mögen und 8 Gulden Schulden

$$+ 5 - 8, \text{ das heisst } - 3,$$

oder 3 Gulden Schulden.

I. Bemerken wir noch, daß, wenn das erste Glied eines Ausdrucks positiv ist, das Zeichen $+$ der Kürze wegen weggelassen wird, so daß also in den vorigen Beyspielen

$$+ 7 - 4 \text{ und } + 5 - 8$$

identisch ist mit

$$7 - 4 \text{ und } 5 - 8.$$

II. Werden endlich Ziffer mit allgemeinen Zahlzeichen verbunden, wie z. B.

$$3a, 5(a + b),$$

so heist dieß, nach §. 6, II., daß die Gröfse a mit 3, und daß die Gröfse $(a + b)$ mit 5 multiplicirt werden soll, wo dann diese Zifferfactoren 3 oder 5 auch die *Coefficienten* der allgemeinen Zahlzeichen a oder $(a + b)$ genannt werden.

§. 19. (Addition.) Aus dem Vorhergehenden folgt sofort, daß man bey der Addition gleichartiger, d. h. durch einerley Buchstaben ausgedrückten Gröfsen, wenn sie einerley Vorzeichen haben, bloß die *Coefficienten* addirt, wenn sie aber verschiedene Zeichen haben, die *Coefficienten* subtrahirt, und dem so erhaltenen Resultate das Zeichen des größeren Gliedes vorsetzt.

So hat man, wie schon für sich klar ist,

$$\begin{array}{r} 5a + 4b - \frac{1}{2}c - 4d \\ 3a - 7b - \frac{1}{3}c + 9d \\ \hline \text{Summe } 8a - 3b - \frac{5}{6}c + 5d \text{ u. s. f.} \end{array}$$

Im Gegentheile kann der Ausdruck

$$7a + 3b$$

nicht weiter durch Addition verändert werden, da man hier zwey Zeichen a und b gewählt hat, um zwey verschiedene heterogene Gröfsen auszudrücken, so daß z. B. $7a$ sieben Pfunde, und $3b$ drey Thaler, oder jenes 7 Arbeiter und dieses 3 Füsse u. f. bezeichnet.

§. 20. (Subtraction.) Um eine GröÙe von der anderen zu subtrahiren, ändere man das Zeichen der zu subtrahirenden GröÙe in das entgegengesetzte, und verfähre dann nach der im §. 19. gegebenen Vorschrift der Addition.

Denn soll man z. B. von der Zahl $+7$, oder was dasselbe ist, von der Zahl $(+7 + 4 - 4)$ die Zahl $+4$ subtrahiren oder wegnehmen, so bleibt der Rest

$$+7 - 4 = +3.$$

Soll man aber von derselben Zahl $(+7 + 4 - 4)$ die Zahl -4 wegnehmen, so bleibt der Rest

$$+7 + 4 = +11.$$

Soll man ferner von der Zahl -7 , oder was dasselbe ist, von der Zahl $(-7 + 4 - 4)$ die Zahl $+4$ wegnehmen, so bleibt der Rest

$$-7 - 4 = -11.$$

Soll man endlich von derselben Zahl $(-7 + 4 - 4)$ die Zahl -4 wegnehmen, so bleibt der Rest

$$-7 + 4 = -3.$$

Wir haben demnach, wenn folgende GröÙen zu subtrahiren sind, indem man die Zeichen der unteren Reihe ändert und dann addirt, folgendes Schema:

$$\begin{array}{r}
 5a + 7b + \frac{1}{3}c - \frac{1}{2}d - e \\
 3a - 7b - \frac{1}{4}c - \frac{1}{3}d + f \\
 \hline
 - \quad + \quad + \quad + \quad - \\
 \hline
 \text{gesuchte Differenz } 2a + 14b + \frac{7}{12}c - \frac{1}{6}d - e - f.
 \end{array}$$

I. Eben so hat man, wenn mehrere GröÙen in Klammern eingeschlossen sind, wo die Bedeutung dieser Klammern schon oben (§. 6, I.) gegeben ist:

$$8a - 2b - (5a + 4b) = 8a - 2b - 5a - 4b = 3a - 6b \text{ und}$$

$$8a - 2b - (5a - 4b) = 8a - 2b - 5a + 4b = 3a + 2b.$$

§. 21. (Multiplication.) Da das Product zweyer Factoren (nach §. 4) den Factor so oft enthalten muß, als der andere die Einheit enthält, so werden, wenn die Einheit, wie hier immer, positiv vorausgesetzt wird, zwey positive Factoren auch ein positives Product geben.

Ist aber der eine dieser Factoren negativ, so wird das Product den *negativen* Factor so oft enthalten, als der andere, *positive* Factor die Einheit enthält, d. h. das Product einer *positiven* Gröſſe in eine *negative*, und umgekehrt, ist negativ.

Sind endlich beyde Factoren negativ, so muß auch hier, der allgemeinen Regel des §. 6. zu Folge, das Product den einen Factor so oft enthalten, als der andere die Einheit enthält. Allein dieser andere Factor enthält nicht die Einheit (nicht die Gröſſe $+1$), sondern ihr Gegentheil (-1), also wird auch das Product nicht den ersten *negativen* Factor selbst, sondern sein Gegentheil enthalten, d. h. das Product zweyer *negativer* Factoren ist positiv.

In der Multiplication geben also gleiche Zeichen ein positives, und ungleiche ein negatives Product. In diesem Producte werden die numerischen Coefficienten in der That multiplicirt, die allgemeinen Zahlzeichen aber, als Anzeige ihrer Multiplication (nach §. 6, II.), einfach neben einander gestellt. Sonach erhält man

$$(+3a) \cdot (+4b) = +12ab,$$

$$(+3a) \cdot (-4b) = -12ab,$$

$$(-3a) \cdot (+4b) = -12ab,$$

$$(-3a) \cdot (-4b) = +12ab.$$

I. Bemerken wir noch, daß man der Kürze wegen das Product mehrerer gleichartiger Gröſſen, wie

$$a.a \quad \text{oder} \quad aa \quad \text{auch durch} \quad a^2,$$

$$a.a.a \quad \text{oder} \quad aaa \quad \text{durch} \quad a^3 \quad \text{u. f.}$$

auszudrücken pflegt, so daß man daher hat:

$$2a \cdot 3ab = 6a^2b,$$

$$3ab \cdot (-5a^2bc) = -15a^3b^2c,$$

$$2ab \cdot (3a + 5ab - b^2) = 6a^2b + 10a^2b^2 - 2ab^3 \quad \text{u. f.}$$

Um aber das Product der beyden Gröſſen $(a + b)$ und $(a - b)$ zu finden, hat man

$$a + b$$

$$a - b$$

$$\hline a^2 + ab$$

$$- ab - b^2$$

$$\hline \text{Product} \dots a^2 - b^2.$$

Ganz eben so erhält man

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline \text{Product} \dots a^2 + 2ab + b^2. \end{array}$$

Eben so wird man für das dreyfache Product

$(1 - a)(1 - a)(1 - a)$ oder für $(1 - a)^3$ erhalten:

$$(1 - a)^3 = 1 - 3a + 3a^2 - a^3;$$

und eben so ist endlich

$$\begin{aligned} (2a - 3b)^4 &= 16a^4 - 96a^3b \\ &+ 216a^2b^2 \\ &- 216ab^3 \\ &+ 81b^4. \end{aligned}$$

§. 22. (Division.) Da der Divisor, durch den Quotienten multiplicirt, den Dividend wieder geben muß, oder da (nach §. 5, II) die Multiplication die Probe der Division ist, und umgekehrt, so gilt für die Division, in Beziehung auf die Zeichen, dieselbe Vorschrift, wie oben für die Multiplication, daß nämlich gleiche Zeichen einen positiven, und ungleiche Zeichen einen negativen Quotienten geben.

Auf diese Weise erhält man z. B.:

$$\begin{array}{r} 12a^2b = 3a \\ 4ab \\ \hline 4a^3b^2 - 8a^2bc = ab - 2c \text{ u. f.} \\ 4a^2b. \end{array}$$

I. Ein Bruch wird durch einen Bruch multiplicirt, wenn man, wie in §. 12, Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplicirt. Eben so wird ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt, wenn man den ersten Bruch durch den umgekehrten zweyten multiplicirt (§. 13.). Demnach ist also

$$\frac{2a}{b} \cdot \frac{3b}{c} = \frac{6a}{c} \quad \text{und} \quad \frac{3a^2b}{5c} \cdot \left(\frac{10c}{a} - \frac{5a}{bc} \right) = 6ab - \frac{3a^3}{c^2},$$

und eben so

$$\frac{a^2}{3b} : \frac{5b}{a} = \frac{a^2}{3b} \cdot \frac{a}{5b} = \frac{a^3}{15b^2},$$

$$\left(\frac{2a}{b} - \frac{3b^2}{a}\right) : \frac{b}{2a} = \left(\frac{2a}{b} - \frac{3b^2}{a}\right) \cdot \frac{2a}{b} = \frac{4a^2}{b^2} - 6b.$$

II. Enthält der Divisor mehrere Glieder, so ist das Verfahren ganz dem in §. 5. ähnlich, wenn man zuerst die beyden zu dividirenden Gröſſen nach einem ihnen gemeinschaftlichen Buchstaben, z. B. nach a so ordnet, daß die Gröſſen $a, a^2, a^3 \dots$ in ihrer natürlichen Folge fortgehen.

Soll z. B. die Gröſſe

$$2a^2 - 3ab + b^2 - a^2b + a^3$$

durch $a - b$ dividirt werden, so hat man

$$\begin{array}{r} a-b \overline{) a^3 + 2a^2 - a^2b - 3ab + b^2} \quad \text{Quotient,} \\ + a^3 \quad - a^2b \\ - \quad + \\ \hline 2a^2 - 3ab + b^2 \\ + 2a^2 - 2ab \\ - \quad + \\ \hline -ab + b^2 \\ -ab + b^2 \\ + \quad - \\ \hline \text{Rest} \dots 0. \end{array}$$

Oder auch, wenn man nach der Gröſſe b ordnet:

$$\begin{array}{r} -b+a \overline{) b^2 - 3ab - a^2b + 2a^2 + a^3} \quad \text{wie zuvor,} \\ + b^2 - ab \\ - \quad + \\ \hline -2ab - a^2b + 2a^2 + a^3 \\ - 2ab \quad + 2a^2 \\ + \quad - \\ \hline -a^2b + a^3 \\ -a^2b + a^3 \\ + \quad - \\ \hline \text{Rest} \dots 0. \end{array}$$

Ganz eben so findet man auch

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b,$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2, -$$

$$\frac{1 + a^2 + a^3}{1 - a + a^2} = 1 + a + a^2 \text{ u. s. w.}$$

§. 23. (Division ohne Ende.) Wenn der Dividend durch den Divisor nicht ohne Rest theilbar ist, so kann man, wie oben §. 14, I., diesen Rest als einen neuen Dividend betrachten, und so die Division ohne Ende fortsetzen, wie folgendes Beyspiel zeigt:

$$\begin{array}{r} 1-b \overline{) a} \quad | a + ab + ab^2 + ab^3 + \dots \\ \underline{a - ab} \\ ab \\ \underline{ab - ab^2} \\ ab^2 \\ \underline{ab^2 - ab^3} \\ ab^3 \\ \underline{ab^3 - ab^4} \\ ab^4 \text{ etc.} \end{array}$$

Es ist daher der Bruch

$$\frac{a}{1-b}$$

gleich der ohne Ende fortgehenden Reihe

$$a + ab + ab^2 + ab^3 + \dots$$

von welcher das Gesetz des Fortgangs der Glieder deutlich ist.

I. Nimmt man die Gröfse b negativ, oder setzt man in dem Vorhergehenden $-b$ statt b , so erhält man

$$\frac{a}{1+b} = a - ab + ab^2 - ab^3 + \dots$$

dieselbe Reihe, wie zuvor, aber mit abwechselnden Zeichen.

Ist z. B. für einen besonderen Fall in dem vorhergehenden Ausdrücke von

$$\frac{a}{1-b} = a + ab + ab^2 + \dots$$

die Gröfse $a=1$ und $b=\frac{1}{10}$, so hat man

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots$$

übereinstimmend mit §. 14, I., wo der mit dem vorhergehenden identische Ausdruck

$$\frac{1}{9} = 0.1111 \dots$$

gefunden wurde.

II. Eben so gibt $a = b = 1$ den folgenden Quotienten:

$$\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

ein Ausdruck, der, ohne Ende fortgesetzt, offenbar größer als jede andere noch angebbare Zahl, oder der, wie man sich auszudrücken pflegt, *unendlich groß* wird. Dieß stimmt mit der oben (§. 9.) gegebenen Erklärung eines Bruches überein, dessen Werth immer größer wird, je kleiner, bey unverändertem Zähler, der Nenner desselben ist. Nimmt daher, wie hier bey dem Bruche $\frac{1}{0}$, der Nenner über alle Grenzen ab, oder wird der Nenner, wie man zu sagen pflegt, *unendlich klein*, so nimmt auch der Werth des Bruches über alle Grenzen zu, oder dieser Werth ist dann *unendlich groß*, welchen Zustand einer GröÙe man auch durch das Zeichen ∞ auszudrücken pflegt, so daß daher

$$\frac{1}{0} \text{ mit } \infty$$

gleichbedeutend ist.

Wir werden später noch oft Gelegenheit haben, auf diese sogenannten unendlich kleinen GröÙen, d. h. auf solche GröÙen zurück zu kommen, die kleiner angenommen werden, als jede andere noch angebliche GröÙe. Hier bemerken wir nur, daß jede nach einem bestimmten Gesetze fortgehende Folge von GröÙen eine *Reihe* heißt. — Diese Reihen spielen in der mathematischen Analysis eine sehr wichtige Rolle, obschon sie zur eigentlichen Berechnung offenbar nur dann brauchbar sind, wenn sie *convergiren*, d. h. wenn ihre mit der Folge stets kleiner werdenden Glieder sich einer gegebenen endlichen GröÙe immer mehr nähern, ohne sie je zu erreichen. So ist die vorhergehende Reihe

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

convergent, weil die Summe ihrer Glieder, je weiter man sie fortsetzt, der endlichen GröÙe $\frac{1}{9}$ immer näher kommt. Die andere Reihe aber

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

ist divergent, weil die Summe ihrer Glieder ohne Grenze bis in das Unendliche wachsen kann.

Eben so ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

oder die Reihe der sogenannten reciproquen natürlichen Zahlen (1, 2, 3, 4, ...), wie wir später (§. 65.) sehen werden, ebenfalls divergent, oder die Summe dieser Reihe wächst ins Unendliche fort, obschon ihre Glieder immer kleiner werden, je weiter sie fortgeht. Nicht so ist es mit der convergenten Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

welche dieselben Glieder, wie die vorhergehende hat, deren Zeichen aber stets abwechseln. Diese Reihe gibt, so weit man sie auch fortsetzen mag, immer eine Summe, die kleiner als die Einheit ist, so wie wieder die Reihe der reciproquen ungeraden Zahlen, oder die Reihe

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

divergent ist, da die Summe ihrer Glieder, ohne sich einer bestimmten Grenze zu nähern, ins Unendliche wächst, wie wir in der Folge sehen werden.