

Drittes Capitel.

Gewöhnliche Brüche.

§. 9. (Erklärung.) In den bisher betrachteten Decimalbrüchen wird die Einheit, wie wir gesehen haben, immer nur in 10 oder 100 oder 1000 . . . gleiche Theile getheilt. Sie kann aber auch in jede andere Anzahl, z. B. in 4 gleiche Theile, d. h. in Viertel, getheilt werden. Wird dann von diesen 4 Theilen eine bestimmte Anzahl, z. B. 3 genommen, so erhält man *drey Viertel* oder *drey Viertel* der Einheit.

In diesem Beyspiele wird also die Einheit in 4 gleiche Theile getheilt, d. h. sie wird durch 4 dividirt, und von diesen Theilen werden 3 genommen, so daß daher »*drey Viertel der Einheit nehmen*« so viel heißt, als »*die Zahl 3 durch 4 dividiren*«.

Aus diesem Grunde drückt man auch diesen Bruch, analog mit der oben (§. 6.) eingeführten Bezeichnung der Division, durch die Gröfse

$$\frac{3}{4}$$

aus, und nennt überdies die Zahl 4, *unter* dem Striche, den *Nenner*, und die Zahl 3, *über* dem Striche, den *Zähler* dieses Bruches $\frac{3}{4}$, so daß daher der Nenner eines Bruches anzeigt, in wie viel Theile man das Ganze oder die Einheit getheilt hat, und der Zähler, wie viel dieser Theile man genommen hat.

I. Ist der Zähler eines Bruches größer als sein Nenner, so ist der Werth des Bruches auch größer als die Einheit, und er wird dann ein *uneigentlicher Bruch* genannt. Ein solcher ist z. B.

$$\frac{7}{5}$$

oder sieben Fünftheile der Einheit, die also gleich der Einheit und noch zwey Fünftheilen derselben sind, so daß man hat

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5},$$

wofür man auch der Kürze wegen $1\frac{2}{5}$ zu schreiben pflegt.

II. Man kömmt auf diese uneigentlichen Brüche durch die Division zweyer ganzen Zahlen (nach §. 5.), wenn der Rest der

Division nicht Null wird, d. h. wenn der Dividend kein ganzes Vielfaches des Divisors ist.

Soll z. B. die Zahl 50 durch 3 dividirt werden, so hat man (nach §. 5.)

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 50} \mid 16 \\ \underline{48} \\ 20 \end{array}$$

$$\underline{18}$$

Rest . . 2,

so daß daher diese Division den Rest 2 läßt, oder daß der vollständige Quotient dieser Division gleich 16 und $\frac{2}{3}$ Einheiten oder gleich dem uneigentlichen Bruche

$$\frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

ist.

§. 10. (Reduction der Brüche auf einerley Nenner.)

Wird Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt, so wird dadurch der Werth desselben nicht geändert.

So ist z. B.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}.$$

In der That, bey dem Bruche $\frac{6}{8}$ hat man das Ganze in 8, also in doppelt so viel Einheiten getheilt, als bey dem Bruche $\frac{3}{4}$, aber dafür hat man auch dort 6, das heißt, doppelt so viel dieser Theile genommen, als hier.

Eben so ist

$$\frac{6}{10} = \frac{6:2}{10:2} = \frac{3}{5},$$

wo man wieder in $\frac{3}{5}$ nur halb so viel Theile, als in $\frac{6}{10}$, aber auch zwey Mal größere Theile genommen hat.

I. Will man daher zwey Brüche, ohne ihren Werth zu ändern, auf einerley Nenner bringen, so wird man Zähler und Nenner eines jeden dieser Brüche durch den Nenner des anderen multipliciren. Sind z. B. die Brüche gegeben

$$\frac{2}{3} \text{ und } \frac{3}{4},$$

so hat man auch

$$\frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12} \text{ und } \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12},$$

so daß man also statt den beyden gegebenen Brüchen auch die zwey folgenden mit gleichen Nennern setzen kann:

$$\frac{8}{12} \text{ und } \frac{9}{12}.$$

II. Dasselbe läßt sich auch auf drey und mehr Brüche fortsetzen. Sind z. B. die Brüche gegeben

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \text{ und } \frac{3}{4},$$

so wird man, um sie auf gleiche Nenner zu bringen, nur Zähler und Nenner eines jeden dieser Brüche durch alle übrigen Nenner multipliciren, also

$$\frac{1}{2} \text{ durch } 3 \times 4 \text{ oder } 12,$$

$$\frac{2}{3} \text{ » } 2 \times 4 \text{ » } 8, \text{ und}$$

$$\frac{3}{4} \text{ » } 2 \times 3 \text{ » } 6,$$

wodurch man statt den gegebenen Brüchen die drey gleichgeltenden erhält:

$$\frac{6}{12}, \frac{16}{12} \text{ und } \frac{18}{12}.$$

Ganz eben so erhält man für die Brüche

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \text{ und } \frac{1}{5}$$

die vier folgenden:

$$\frac{60}{120}, \frac{40}{120}, \frac{30}{120} \text{ und } \frac{24}{120}.$$

§. 11. (Addition und Subtraction der Brüche.)

Um gegebene Brüche zu addiren oder zu subtrahiren, bringe man sie auf einerley Nenner (nach §. 10.), und addire oder subtrahire dann ihre Zähler.

Um z. B. die beyden Brüche

$$\frac{3}{4} \text{ und } \frac{2}{3}$$

zu addiren, hat man, nach §. 10., wenn man sie auf einerley Nenner bringt:

$$\frac{9}{12} \text{ und } \frac{8}{12}.$$

Man hat daher die Einheit in 12 gleiche Theile getheilt, und von diesen Theilen zuerst 9, und dann noch 8, also in allen 17 genommen, so daß daher

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12} \text{ oder gleich } 1 \frac{5}{12} \text{ ist.}$$

Eben so hat man nach dem letzten Beyspiele in §. 10. für die Summe der vier Brüche

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\text{oder } \frac{60 + 40 + 30 + 24}{120} = \frac{154}{120},$$

oder endlich gleich $\frac{77}{60}$, wenn man (nach §. 10.) Zähler und Nenner durch 2 dividirt.

Auf dieselbe Weise erhält man auch für die Differenz der beyden Brüche

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{15 - 12}{18} = \frac{3}{18},$$

oder endlich $\frac{1}{6}$.

§. 12. (Multiplication der Brüche.) Man multiplicirt Zähler durch Zähler, und Nenner durch Nenner.

So hat man z. B.

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}.$$

In der That, man soll $\frac{4}{5}$ nicht zwey Mal, also nicht $\frac{8}{5}$, sondern man soll nur den dritten Theil dieses Productes, also nur $\frac{8}{15}$ nehmen; oder man soll $\frac{4}{5}$ nicht mit 2 Ganzen, sondern nur mit dem dritten Theile von 2 Ganzen multipliciren.

I. Um eben so einen gegebenen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, multiplicire man bloß den Zähler des Bruches mit dieser ganzen Zahl. So hat man

$$\frac{3}{8} \times 2 = \frac{6}{8} \text{ oder } \frac{3}{4},$$

denn die ganze Zahl 2 ist gleich dem uneigentlichen Bruche $\frac{2}{1}$, also hat man, nach dem eben Gesagten:

$$\frac{3}{8} \times \frac{2}{1} = \frac{3 \times 2}{8 \times 1} = \frac{6}{8}, \text{ wie zuvor.}$$

I. Man sieht zugleich aus diesem, und eben so aus jedem anderen Beispiele, daß, den Zähler eines Bruches mit einer ganzen Zahl multipliciren, so viel ist, als, den Nenner des Bruches durch dieselbe ganze Zahl zu dividiren. So war

$$\frac{3}{8} \times 2 = \frac{6}{8} \text{ oder } \frac{3}{4},$$

und eben so ist auch $\frac{3}{8:2} = \frac{3}{4}$.

§. 13. (Division der Brüche.) Man kehre den Bruch, durch den dividirt werden soll, um, und multiplicire dann beyde Brüche nach der Vorschrift des §. 12.

So ist

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} \text{ oder } \frac{5}{6}.$$

In der That, bringt man die beyden gegebenen Brüche

$$\frac{2}{3} \text{ und } \frac{4}{5}$$

nach §. 10. auf einerley Nenner, so hat man

$$\frac{10}{15} \text{ und } \frac{12}{15},$$

oder man hat, wenn man die einzelnen Factoren stehen läßt:

$$\frac{2 \times 5}{3 \times 5} \text{ und } \frac{4 \times 3}{5 \times 3}.$$

Da aber von zwey Brüchen, die denselben Nenner haben, der Quotient offenbar gleich seyn muß dem Quotienten ihrer Zähler, so hat man auch für den gesuchten Quotienten

$$\frac{2 \times 5}{4 \times 3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

wie zuvor, und eben so in jedem anderen Beyspiele.

I. Auf dieselbe Weise werden auch diejenigen Brüche behandelt, deren Zähler und Nenner selbst wieder Brüche sind. So ist z. B. der Bruch

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}}$$

gleichbedeutend mit

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{7},$$

also auch, nach dem Vorhergehenden, gleichbedeutend mit

$$\frac{2}{5} \times \frac{7}{3}, \text{ das heißt, mit } \frac{14}{15}.$$

Eben so findet man

$$\frac{1\frac{2}{3}}{2\frac{3}{4}} = \frac{5}{3} : \frac{11}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{11} = \frac{20}{33} \text{ u. s. f.}$$

§. 14. (Reduction der gewöhnlichen Brüche auf zehntheilige.) Man sieht, daß die Rechnung mit Decimalbrüchen viel bequemer ist, als die mit gewöhnlichen Brüchen. Wir wollen daher ein Mittel suchen, jeden gewöhnlichen Bruch auf einen zehntheiligen zu bringen.

Zu diesem Zwecke hängt man an den Zähler des gegebenen Bruches, nach einem Punkte, mehrere Nullen zur rechten Seite an, wodurch (nach §. 8, II.) der Werth desselben nicht geändert

wird, und dividire dann den so blofs in seiner Form veränderten Zähler (nach §. 5.) durch den Nenner.

Soll man z. B. den Bruch $\frac{3}{4}$ in einen Decimalbruch verwandeln, so hat man

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 3.00} \mid 0.75 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{also ist } \frac{3}{4} = 0.75,$$

und eben so ist

$$\frac{1}{8} = \frac{1.000}{8} = 0.125 \text{ u. f.}$$

I. Wenn bey dieser Division kein Rest gleich Null wird, so setzt man sie so lange fort, als man will oder als man, für eine bestimmte Absicht, nöthig hat. So ist z. B., wenn man bis zu der sechsten Decimalstelle oder bis zu den Milliontheilen fortgehen will:

$$\frac{1}{3} = \frac{1.000000}{3} = 0.333333 \dots,$$

und eben so

$$\frac{1}{9} = 0.111111 \dots,$$

$$\frac{1}{11} = 0.090909 \dots, \quad \frac{8}{27} = 0.296296296 \dots,$$

$$\frac{4115}{33333} = 0.123451234512 \dots,$$

wo man von selbst die immer wiederkehrenden Perioden derselben Ziffern bemerkt.

§. 15. (Größter gemeinschaftlicher Factor zweyer Zahlen.) Wir haben bereits öfter einen gewöhnlichen Bruch, durch Division des Zählers und Nenners mit derselben Zahl, auf einen einfacheren Ausdruck zurückzubringen gesucht. Um aber mit Sicherheit den *einfachsten* Ausdruck eines solchen Bruches zu finden, wird man auf folgende Weise verfahren.

Man dividire die größere der beyden Zahlen durch die kleinere; den so erhaltenen Divisor dividire man wieder durch den Rest der ersten Division; dann wieder den letzten Divisor durch den Rest der zweyten Division, und so fort, bis man zu einer Division ohne Rest kömmt, wo dann der Divisor dieser letzten Division zugleich der gesuchte *größte Factor* ist, durch welchen

der gegebene Bruch auf seinen einfachsten Ausdruck zurückgebracht werden kann.

Ist z. B. der Bruch gegeben

$$\frac{182}{420}$$

so hat man

$$\begin{array}{r} 182 \overline{) 420} \mid 2 \\ \underline{364} \\ 56 \mid 182 \mid 3 \\ \underline{168} \\ 14 \mid 56 \mid 4 \\ \underline{56} \\ 0 \end{array}$$

also ist 14 die Zahl, durch welche der gegebene Bruch $\frac{182}{420}$ im Zähler und Nenner dividirt werden soll, um ihn auf seinen einfachsten Ausdruck, d. i. auf $\frac{13}{30}$ zu bringen.

Eben so erhält man

für den Bruch den größten Factor und die einfachste Form

$$\frac{176}{4388}$$

$$\frac{11}{34}$$

$$\frac{16}{188}$$

§. 16. (Rechnung mit genannten Zahlen.) Genannte Zahlen heißen diejenigen, welche sich auf verschiedene Einheiten, z. B. Fufse und Zolle, Pfunde und Lothe, Thaler und Groschen u. f. beziehen.

Wenn wir unseré Mafse, Gewichte und Münzen nach dem sogenannten zehntheiligen Fufs eingetheilt hätten, so würde die Rechnung mit ihnen sehr einfach und ganz dieselbe mit denen des zweyten Capitels seyn.

Theilt man z. B. mit den neueren Geometern den Fufs in 10 Zolle, und den Zoll wieder in 10 Linien, und ist die genannte Zahl gegeben

8 Fufs, 7 Zoll, 3 Lin.,

so ist dieselbe auch sofort gleich

8.73 Fufs.

Wird also z. B. gefordert, daß man diese Zahl fünf Mal nehmen soll, so hat man

$$5(8.73) = 43.65 \text{ Fufs}$$

oder auch

43 Fufs, 6 Zoll, 5 Lin.

Wird aber umgekehrt der fünfte Theil der gegebenen Zahl von 8.73 Fufs gefordert, so hat man

$$\frac{8.73}{5} = 1.746 \text{ Fufs}$$

oder 1 Fufs, 7 Zoll, 4.6 Lin.,

äußerst einfache Rechnungen, weil hier die Reductionen der Fufse auf Zolle, oder der Zolle auf Linien, und umgekehrt, nur in der bloßen Versetzung des Punctes der Decimalstellen bestehen (§. 7, I.).

Allein wenn auch diese Größen, wie es im bürgerlichen Verkehr noch immer der Fall ist, auf eine andere Weise eingetheilt sind, so ist es im Allgemeinen doch am besten und einfachsten, diese genannten Zahlen auf ein gemeinschaftliches Mafs, am bequemsten auf das größere, zurückzuführen, um Zahlen mit zu viel Ziffern zu vermeiden, und dann mit ihnen wie im zweyten Capitel zu verfahren.

Sind z. B. die drey folgenden Größen zu addiren, wo die Klafter in 6 Fufs, der Fufs in 12 Zolle, und der Zoll in 12 Linien getheilt vorausgesetzt wird:

7 Klafter, 3 Fufs, 5 Zoll, 2.4 Linien,

15 » 4 » 3 » 7.2 »

2 » 2 » 8 » 4.8 »

so hat man für die erste dieser Zahlen

$$2.4 \text{ Lin.} = \frac{2.4}{12} = 0.2 \text{ Zolle, also auch } 5.2 \text{ Zolle,}$$

ferner

$$\frac{5.2}{12} = 0.43333 \text{ Fufs, also auch } 3.43333 \text{ Fufs,}$$

und endlich

$$\frac{3.43333}{6} = 0.57222 \text{ Klafter, also auch } 7.57222 \text{ Klafter,}$$

so dafs man demnach erhält für die erste der oben angeführten genannten Zahlen

7.57222 Klafter, und eben so

für die zweyte 15.716666, und

für die dritte 2.45

gesuchte Summe . . 25.738888 Klafter.

Wollte man diese Summe wieder auf die alte unbequeme Art ausdrücken, so würde man den Decimalbruch derselben durch 6 multipliciren, um Fulse zu erhalten:

25 Klafter und 4.433338 Fuls.

Ganz eben so gibt wieder der letzte Decimalbruch, durch 12 multiplicirt:

25 Klafter, 4 Fuls, 5.199936 Zoll,

und wenn man endlich auch diesen Decimalbruch durch 12 multiplicirt:

25 Klafter, 4 Fuls, 5 Zoll, 2.399 Lin.

Sollen eben so die beyden folgenden Zahlen von einander subtrahirt werden:

15 Klafter, 4 Fuls, 3 Zoll, 7.2 Lin.,

6 " 3 " 2 " 10.56 "

so wird man, nach demselben Verfahren, für sie setzen:

15.716666 Klafter,

6.54

gesuchte Differenz . . 9.176666 Klafter,

oder, nach der alten Art ausgedrückt:

9 Klafter, 1 Fuls, 0 Zoll, 8.64 Lin.

Ganz eben so wird man auch für die Multiplication und Division verfahren.

Soll z. B. die Summe von

6 Gulden, 18 Kreuzer, 3 Pfennige

durch 24 multiplicirt werden, so kann man, da der Gulden 60 Kreuzer, und der Kreuzer 4 Pfennige hat, statt der angeführten Zahl

6.3125 Gulden

setzen, und diese, durch 24 multiplicirt, gibt

6.3125

24

252500

126250

gesuchtes Product . . 151.5000 = 151.5 Gulden,

oder 151 Gulden, 30 Kreuzer.

Hätte man eben so die Summe von

8 Guld., 16 Kr., 2 Pf.

in fünf gleiche Theile zu theilen, oder durch 5 zu dividiren, so hat man, da diese Gröfse gleich 8.275 Gulden ist:

$$\frac{8.275}{5} = 1.655 \text{ Gulden,}$$

oder 1 Guld., 39 Kr., 1.2 Pf.

I. Noch deutlicher wird der Vortheil dieser Reductionen auf die höchsten Theile einer genannten Zahl bey der Berechnung des Inhaltes der Flächen und Körper.

Wir werden weiter unten sehen, daß die Oberfläche eines Rechteckes gleich dem Producte seiner zwey Dimensionen, der Länge und Breite, und daß der körperliche Inhalt eines von solchen Rechtecken begrenzten Körpers gleich dem Producte seiner drey Dimensionen, der Länge, Breite und Höhe ist.

Es sey ein solches rechteckiges Feld gegeben, dessen Länge man 4 Fufs, 5 Zoll, 3 Linien, und die Breite 3 Fufs, 7 Zoll, 5 Lin. gefunden hat. Man suche den Flächeninhalt dieses Feldes in Quadratfufs. Wenn hier wieder das zwölftheilige oder das Duodecimalmafs vorausgesetzt wird, so ist, wie man durch Division mit 12 erhält:

3 Fufs, 7 Zoll, 5 Lin. . . . gleich 3.6180505 Fufs,

4 » 5 » 3 » . . . gleich 4.4375 »

und das Product der beyden letzten Zahlen, wenn man bis zur sechsten Decimalstelle geht, gibt für den gesuchten Flächeninhalt des Feldes

16.055099 Quadratfufs.

Da aber der Quadratfufs 12 Mal 12 oder 144 Quadratzoll, und eben so der Quadratzoll 144 Quadratlinien hat, so erhält man aus der letzten Zahl, durch wiederholte Multiplication ihres Decimalbruches durch 144, für den gesuchten Flächeninhalt

16 Q. Fufs, 7 Q. Zoll, 134.533 Q. Linien.

Hätte man eben so den sogenannten Kubikinhalt oder das Volum eines von sechs Rechtecken begrenzten Wassergefäßes zu suchen, dessen

Länge 3 Fufs, 8 Zoll,

Breite 2 „ 5 „

Höhe 4 „ 6 „

ist, so hat man durch Division mit 12 für die

Länge 3.666666,

Breite 2.416666,

Höhe 4.5.

Das Product der zwey ersten dieser Zahlen ist, wenn man bis zur sechsten Decimalstelle geht:

8.861107,

und diese Zahl mit 4.5 multiplicirt, gibt für den gesuchten Inhalt des Gefäßes

39.8749815 Kubikfufs.

Wollte man auch dieses Resultat wieder nach der unbequemen alten Weise durch Fufs, Zoll und Linie ausdrücken, so wird man, da der Kubikfufs 144 Mal 12 oder 1728 Kubikzoll, und eben so der Kubikzoll 1728 Kubiklinien hat, wenn man die letzte Zahl in ihrem Decimalbruche

0.8749815

zwey Mal durch 1728 multiplicirt, für den gesuchten Inhalt des Gefäßes haben

39 Kubikfufs, 1511 Kubikzoll, 1672.7593 Kubiklinien.

II. Bemerken wir noch, zum Schlusse dieses Gegenstandes, die hohe Einfachheit und zugleich die grofse Fruchtbarkeit der, allen vorhergehenden Rechnungen zu Grunde liegenden Idee, durch welche wir alle, auch die gröfsten Zahlen und die mannigfaltigsten Combinationen derselben, blofs mit zehn Zeichen, deren jedes einen doppelten Werth hat, ausdrücken können. Diese Erfindung erscheint uns, die wir bereits daran gewohnt sind, so leicht, dafs wir ihren wahren Werth kaum mehr zu schätzen im Stande sind. Doch mufs sie als eine der schönsten Entdeckungen des menschlichen Geistes angesehen werden, da sie dem Scharfsinne der Alten so lange entgangen ist. Um sich davon durch die That zu überzeugen, würde schon der Versuch genügen, die oben angeführten Rechnungen mit den uns ebenfalls allgemein bekannten römischen Zahlzeichen *M*, *D*, *C*, *L*, . . . auszuführen.