

Erste Abtheilung.

A l g e b r a,

oder

Rechnung mit unbestimmten Gröfsen.

Erste Abtheilung.

Algebra.

Rechnung mit unbestimmten Größen.

Viertes Capitel.

Einfache Rechnungen mit allgemeinen Zahlzeichen.

§. 17. (Erklärung.) Wir haben uns bisher nur mit solchen Gröſſen beſchäftiget, die durch Ziffer ausgedrückt werden, deren jede einen bestimmten, unabänderlichen Werth hat. Allein man kann ſich auch von dieſer Beſchränkung befreyen und die Gröſſen allgemein, ohne ihnen einen speciellen Werth beyzulegen, betrachten. Dann wird man ſie aber auch durch ſolche allgemeine Zeichen ausdrücken müſſen, und zu dieſen Zeichen wollen wir die Buchſtaben unſerer Alphabete wählen.

Die Rechnung mit ſolchen allgemeinen Zahlzeichen heiſt *Algebra*.

Um von einer ſolchen Rechnung ſchon jetzt einen beſtimmten Begriff zu geben, wollen wir uns folgende Aufgabe ſtellen.

Man ſuche zwey Zahlen, welche die Eigenschaft haben, daſs ihre Summe gleich einer gegebenen Zahl a , und daſs ihre Differenz gleich einer anderen gegebenen Zahl b iſt. Wir wollen dieſe zwey geſuchten oder unbekannten Zahlen, dem algebraiſchen Gebrauche gemäß, durch die letzten Buchſtaben x und y des Alphabets bezeichnen, während wir für die bekannten oder gegebenen Gröſſen jedes Problems die erſten Buchſtaben $a, b, c, \dots$ beybehalten.

Hätte man z. B. dieſe Frage ſo geſtellt, daſs die Summe der zwey unbekannten Zahlen gleich 27, und die Differenz derſelben gleich 15 ſeyn ſoll, ſo würde man wohl, nach einigen Verſuchen, bald finden, daſs die zwey geſuchten Zahlen $x = 21$ und $y = 6$ ſind, und ſo fort in ähnlichen Fällen, ſo oft die zwey gegebenen Zahlen a und b bekannte oder feſtbeſtimmte Gröſſen ſind, und daher, als ſolche, durch Ziffer ausgedrückt werden können.

Allein unſere Aufgabe, ſo fern ſie der Algebra zugehört, ſetzt über die beyden gegebenen Zahlen a und b nichts Beſtimm-

tes fest, sie will sich nicht durch particuläre Werthe dieser Zahlen beschränken lassen, sondern sie fordert, daß man die zwey unbekannten Größen x und y ganz *allgemein* durch die für die beyden gegebenen Größen gewählten Zeichen a und b ausdrücke, unabhängig von allen besonderen Werthen, die man diesen zwey Zeichen a und b für irgend einen speciellen, einzelnen Fall etwa geben könnte.

Und in dieser Allgemeinheit der Auffassung der Frage gibt die Algebra die Antwort, daß von den beyden gesuchten oder unbekannten Zahlen die eine x immer gleich der *halben Summe*, und die andere y gleich der halben *Differenz* der beyden gegebenen Größen a und b seyn müsse, wenn diese Werthe von x und y der Bedingung der Aufgabe in *allen* Fällen genügen sollen.

Diese Antwort, in der Sprache der Algebra oder mit den oben (§. 6.) angeführten Symbolen dieser Sprache ausgedrückt, wird daher durch die zwey folgenden Ausdrücke gegeben seyn:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a+b}{2} \\ y &= \frac{a-b}{2} \end{aligned} \right\};$$

und dadurch ist das gegebene Problem ganz *allgemein aufgelöst* worden, indem alle nur immer mögliche *besondere* oder *specielle* Fälle schon in ihr enthalten sind.

Wären z. B. wie in dem vorhergehenden besonderen Fall, die beyden gegebenen Größen

$$a = 27 \quad \text{und} \quad b = 15,$$

so wird man nur in den beyden vorhergehenden algebraischen Ausdrücken statt dem allgemeinen Zeichen a die Zahl 27, und statt b die Zahl 15 setzen, d. h. man wird in jenen Ausdrücken diese besonderen Werthe von a und b substituiren, und dadurch für die beyden unbekannten Größen sofort erhalten:

$$\begin{aligned} x &= \frac{27+15}{2} = \frac{42}{2} = 21 \quad \text{und} \\ y &= \frac{27-15}{2} = \frac{12}{2} = 6, \quad \text{wie zuvor.} \end{aligned}$$

Ganz eben so leicht wird man aber auch, ohne alle weiteren vorhergehenden Versuche, dieselbe Frage für jede andere gegebene Werthe der Größe a und b , beantworten können.

Sollte z. B. die Summe der zwey unbekannten Gröſſen 1404, und die Differenz derselben 548 seyn, so würde man nur, in jenen zwey algebraischen Ausdrücken, statt a die Gröſſe 1404, und statt b die Gröſſe 548 substituiren, wodurch man sofort erhält:

$$x = \frac{a + b}{2} = 976 \quad \text{und}$$

$$y = \frac{a - b}{2} = 428.$$

Sollte endlich, um auch Brüche zu wählen, die Summe der beyden Unbekannten $a = \frac{3}{4}$ und ihre Differenz $b = \frac{7}{12}$ seyn, so geben für diesen besonderen Fall jene zwey Ausdrücke

$$x = \frac{a + b}{2} = \frac{2}{3} \quad \text{und}$$

$$y = \frac{a - b}{2} = \frac{1}{12},$$

und so fort in allen anderen besonderen Fällen, die daher keiner eigenen Auflösung und keiner weiteren Versuche mehr bedürfen, da sie, wie man sieht, alle schon in der allgemeinen Auflösung enthalten sind.

Nehmen wir in einem zweyten allgemeinen Probleme an, daß von drey Personen die beyden ersten zusammen a , die erste und dritte zusammen b , und endlich die beyden letzten zusammen c Gulden besitzen, und suchen wir, wie viel jede dieser Personen für sich besitzen müsse, damit diesen Bedingungen der Aufgabe genüge geschehe.

Ohne etwas über die besonderen Werthe der drey gegebenen Gröſſen festzusetzen, findet die Algebra, durch einige sehr einfache Schlüsse, folgende allgemeine Auflösung des Problems.

Man nehme die halbe Summe der drey Gröſſen a , b und c , und ziehe von dieser halben Summe ab, zuerst c , dann b , und endlich a , so sind die drey Differenzen, die man auf diese Weise erhält, in derselben Ordnung das gesuchte Vermögen der ersten, der zweyten und der dritten der angeführten Personen.

Nennt man also, um dieß wieder in der Sprache der Algebra auszudrücken,

x das gesuchte Vermögen der ersten Person,

y » » » » zweyten »

z » » » » dritten »

und bezeichnet man die halbe Summe der drey gegebenen Grö-
sen durch S , so ist

$$S = \frac{a + b + c}{2},$$

und die gesuchten Zahlen sind:

$$\left. \begin{aligned} x &= S - c \\ y &= S - b \\ z &= S - a \end{aligned} \right\}.$$

Wäre z. B., um auf die letzten allgemeinen Ausdrücke einen
besonderen Fall anzuwenden, die Summe des Vermögens

der beyden ersten $a = 3$ Gulden,

der beyden äußersten $b = 4$ »

und der beyden letzten $c = 5$ »

so hat man

$$S = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6,$$

und daher das gesuchte Vermögen

des ersten $x = S - c = 6 - 5 = 1$ Gulden,

» zweyten $y = S - b = 6 - 4 = 2$ »

» dritten $z = S - a = 6 - 3 = 3$ »

und man sieht, daß diese Zahlen $x=1$, $y=2$ und $z=3$ den
Forderungen der Aufgabe vollkommen entsprechen.

Wäre für einen zweyten besonderen Fall das Vermögen der
zwey ersten $a=36$, der äußersten $b=84$ und der beyden letz-
ten $c=100$ Gulden, so hätte man

$$S = 110,$$

und daher für das gesuchte Vermögen

des ersten $x = 10$,

» zweyten $y = 26$,

» dritten $z = 74$ Gulden.

Wäre endlich das Gesamtvermögen der beyden ersten
 $a=100$, der äußersten $b=500$ und der zwey letzten $c=1000$
Gulden, so ist

$$S = 800,$$

und daher

$x = -200$,

$y = 300$,

$z = 700$ Gulden;

oder da hier das Vermögen des ersten mit dem Zeichen — der Subtraction (§. 6.) erscheint, so wird dieß nicht als ein wirkliches *Vermögen*, sondern als das Gegentheil desselben, also als *Schuld* zu betrachten seyn, wie wir sogleich näher sehen werden. Es besitzt daher, in dem letzten besonderen Falle unserer Aufgabe, der dritte 700, der zweyte nur 300 Gulden, und der erste hat 200 Gulden Schulden.

Das Vorhergehende wird genügen, von diesen Gegenständen jetzt schon einen allgemeinen Begriff zu geben.

§. 18. (Entgegengesetzte Gröfsen.) Jede Gröfse, wenn sie allgemein betrachtet werden soll, kann immer unter zwey, einander wesentlich entgegengesetzten Bedingungen betrachtet werden, ohne dabey ihren absoluten Werth zu ändern. Die Gröfse a z.B. oder irgend ein specieller Werth derselben, etwa $a = 3$ Gulden, kann eben so gut 3 Gulden Vermögen, als auch 3 Gulden Schulden bedeuten. Eben so kann, in einem anderen besonderen Fall, die Gröfse $a = 5$ Fufs ein Vorwärts- oder auch ein Rückwärtsgehen von 5 Fufs, ein Auf- oder ein Absteigen von 5 Fufs u. f. bezeichnen.

Da es aber nicht gleichgültig seyn kann, ob man eine solche Gröfse in dieser oder in der entgegengesetzten Bedeutung nimmt, da es vielmehr nothwendig ist, auf diese doppelte Beziehung einer jeden Gröfse Rücksicht zu nehmen, so wollen wir künftig eine jede Gröfse, wenn sie unter der einen dieser beyden Bedingungen, z. B. in Beziehung auf Vermögen, genommen wird, *positiv* heißen, und ihr das Zeichen $+$ vorsetzen, während sie unter der anderen, jener entgegengesetzten Bedingung, also hier in Beziehung auf Schuld, *negativ* heißen, und das Zeichen — erhalten soll.

Diese beyden Zeichen $+$ und —, die man durch die Worte *plus* und *minus* auszudrücken pflegt, stimmen mit den im §. 6. aufgestellten Zeichen der Addition und der Subtraction überein, weil in der That die dort und hier zu Grunde liegenden Begriffe einander ganz analog sind. So machen z. B. 7 Gulden Vermögen und 4 Gulden Schulden zusammen

$$+ 7 - 4, \text{ das heifst } + 3,$$

oder 3 Gulden Vermögen, und eben so machen 5 Gulden Ver-

mögen und 8 Gulden Schulden

$$+ 5 - 8, \text{ das heisst } - 3,$$

oder 3 Gulden Schulden.

I. Bemerken wir noch, daß, wenn das erste Glied eines Ausdrucks positiv ist, das Zeichen $+$ der Kürze wegen weggelassen wird, so daß also in den vorigen Beyspielen

$$+ 7 - 4 \text{ und } + 5 - 8$$

identisch ist mit

$$7 - 4 \text{ und } 5 - 8.$$

II. Werden endlich Ziffer mit allgemeinen Zahlzeichen verbunden, wie z. B.

$$3a, 5(a + b),$$

so heist dieß, nach §. 6, II., daß die Gröfse a mit 3, und daß die Gröfse $(a + b)$ mit 5 multiplicirt werden soll, wo dann diese Zifferfactoren 3 oder 5 auch die *Coefficienten* der allgemeinen Zahlzeichen a oder $(a + b)$ genannt werden.

§. 19. (Addition.) Aus dem Vorhergehenden folgt sofort, daß man bey der Addition gleichartiger, d. h. durch einerley Buchstaben ausgedrückten Gröfsen, wenn sie einerley Vorzeichen haben, bloß die *Coefficienten* addirt, wenn sie aber verschiedene Zeichen haben, die *Coefficienten* subtrahirt, und dem so erhaltenen Resultate das Zeichen des größeren Gliedes vorsetzt.

So hat man, wie schon für sich klar ist,

$$\begin{array}{r} 5a + 4b - \frac{1}{2}c - 4d \\ 3a - 7b - \frac{1}{3}c + 9d \\ \hline \text{Summe } 8a - 3b - \frac{5}{6}c + 5d \text{ u. s. f.} \end{array}$$

Im Gegentheile kann der Ausdruck

$$7a + 3b$$

nicht weiter durch Addition verändert werden, da man hier zwey Zeichen a und b gewählt hat, um zwey verschiedene heterogene Gröfsen auszudrücken, so daß z. B. $7a$ sieben Pfunde, und $3b$ drey Thaler, oder jenes 7 Arbeiter und dieses 3 Füsse u. f. bezeichnet.

§. 20. (Subtraction.) Um eine GröÙe von der anderen zu subtrahiren, ändere man das Zeichen der zu subtrahirenden GröÙe in das entgegengesetzte, und verfähre dann nach der im §. 19. gegebenen Vorschrift der Addition.

Denn soll man z. B. von der Zahl $+7$, oder was dasselbe ist, von der Zahl $(+7 + 4 - 4)$ die Zahl $+4$ subtrahiren oder wegnehmen, so bleibt der Rest

$$+7 - 4 = +3.$$

Soll man aber von derselben Zahl $(+7 + 4 - 4)$ die Zahl -4 wegnehmen, so bleibt der Rest

$$+7 + 4 = +11.$$

Soll man ferner von der Zahl -7 , oder was dasselbe ist, von der Zahl $(-7 + 4 - 4)$ die Zahl $+4$ wegnehmen, so bleibt der Rest

$$-7 - 4 = -11.$$

Soll man endlich von derselben Zahl $(-7 + 4 - 4)$ die Zahl -4 wegnehmen, so bleibt der Rest

$$-7 + 4 = -3.$$

Wir haben demnach, wenn folgende GröÙen zu subtrahiren sind, indem man die Zeichen der unteren Reihe ändert und dann addirt, folgendes Schema:

$$\begin{array}{r}
 5a + 7b + \frac{1}{3}c - \frac{1}{2}d - e \\
 3a - 7b - \frac{1}{4}c - \frac{1}{3}d + f \\
 \hline
 - \quad + \quad + \quad + \quad - \\
 \hline
 \text{gesuchte Differenz } 2a + 14b + \frac{7}{12}c - \frac{1}{6}d - e - f.
 \end{array}$$

I. Eben so hat man, wenn mehrere GröÙen in Klammern eingeschlossen sind, wo die Bedeutung dieser Klammern schon oben (§. 6, I.) gegeben ist:

$$8a - 2b - (5a + 4b) = 8a - 2b - 5a - 4b = 3a - 6b \text{ und}$$

$$8a - 2b - (5a - 4b) = 8a - 2b - 5a + 4b = 3a + 2b.$$

§. 21. (Multiplication.) Da das Product zweyer Factoren (nach §. 4) den Factor so oft enthalten muß, als der andere die Einheit enthält, so werden, wenn die Einheit, wie hier immer, positiv vorausgesetzt wird, zwey positive Factoren auch ein positives Product geben.

Ist aber der eine dieser Factoren negativ, so wird das Product den *negativen* Factor so oft enthalten, als der andere, *positive* Factor die Einheit enthält, d. h. das Product einer *positiven* Gröſſe in eine *negative*, und umgekehrt, ist negativ.

Sind endlich beyde Factoren negativ, so muß auch hier, der allgemeinen Regel des §. 6. zu Folge, das Product den einen Factor so oft enthalten, als der andere die Einheit enthält. Allein dieser andere Factor enthält nicht die Einheit (nicht die Gröſſe $+1$), sondern ihr Gegentheil (-1), also wird auch das Product nicht den ersten *negativen* Factor selbst, sondern sein Gegentheil enthalten, d. h. das Product zweyer *negativer* Factoren ist positiv.

In der Multiplication geben also gleiche Zeichen ein positives, und ungleiche ein negatives Product. In diesem Producte werden die numerischen Coefficienten in der That multiplicirt, die allgemeinen Zahlzeichen aber, als Anzeige ihrer Multiplication (nach §. 6, II.), einfach neben einander gestellt. Sonach erhält man

$$(+3a) \cdot (+4b) = +12ab,$$

$$(+3a) \cdot (-4b) = -12ab,$$

$$(-3a) \cdot (+4b) = -12ab,$$

$$(-3a) \cdot (-4b) = +12ab.$$

I. Bemerken wir noch, daß man der Kürze wegen das Product mehrerer gleichartiger Gröſſen, wie

$$a \cdot a \quad \text{oder} \quad aa \quad \text{auch durch} \quad a^2,$$

$$a \cdot a \cdot a \quad \text{oder} \quad aaa \quad \text{durch} \quad a^3 \quad \text{u. f.}$$

auszudrücken pflegt, so daß man daher hat:

$$2a \cdot 3ab = 6a^2b,$$

$$3ab \cdot (-5a^2bc) = -15a^3b^2c,$$

$$2ab \cdot (3a + 5ab - b^2) = 6a^2b + 10a^2b^2 - 2ab^3 \quad \text{u. f.}$$

Um aber das Product der beyden Gröſſen $(a + b)$ und $(a - b)$ zu finden, hat man

$$a + b$$

$$a - b$$

$$\hline a^2 + ab$$

$$- ab - b^2$$

$$\hline \text{Product} \dots a^2 - b^2.$$

Ganz eben so erhält man

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline \text{Product} \dots a^2 + 2ab + b^2. \end{array}$$

Eben so wird man für das dreyfache Product

$(1 - a)(1 - a)(1 - a)$ oder für $(1 - a)^3$ erhalten:

$$(1 - a)^3 = 1 - 3a + 3a^2 - a^3;$$

und eben so ist endlich

$$\begin{aligned} (2a - 3b)^4 &= 16a^4 - 96a^3b \\ &+ 216a^2b^2 \\ &- 216ab^3 \\ &+ 81b^4. \end{aligned}$$

§. 22. (Division.) Da der Divisor, durch den Quotienten multiplicirt, den Dividend wieder geben muß, oder da (nach §. 5, II) die Multiplication die Probe der Division ist, und umgekehrt, so gilt für die Division, in Beziehung auf die Zeichen, dieselbe Vorschrift, wie oben für die Multiplication, daß nämlich gleiche Zeichen einen positiven, und ungleiche Zeichen einen negativen Quotienten geben.

Auf diese Weise erhält man z. B.:

$$\begin{array}{r} 12a^2b = 3a \\ 4ab \\ \hline 4a^3b^2 - 8a^2bc = ab - 2c \text{ u. f.} \\ 4a^2b. \end{array}$$

I. Ein Bruch wird durch einen Bruch multiplicirt, wenn man, wie in §. 12, Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplicirt. Eben so wird ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt, wenn man den ersten Bruch durch den umgekehrten zweyten multiplicirt (§. 13.). Demnach ist also

$$\frac{2a}{b} \cdot \frac{3b}{c} = \frac{6a}{c} \quad \text{und} \quad \frac{3a^2b}{5c} \cdot \left(\frac{10c}{a} - \frac{5a}{bc} \right) = 6ab - \frac{3a^3}{c^2},$$

und eben so

$$\frac{a^2}{3b} : \frac{5b}{a} = \frac{a^2}{3b} \cdot \frac{a}{5b} = \frac{a^3}{15b^2},$$

$$\left(\frac{2a}{b} - \frac{3b^2}{a}\right) : \frac{b}{2a} = \left(\frac{2a}{b} - \frac{3b^2}{a}\right) \cdot \frac{2a}{b} = \frac{4a^2}{b^2} - 6b.$$

II. Enthält der Divisor mehrere Glieder, so ist das Verfahren ganz dem in §. 5. ähnlich, wenn man zuerst die beyden zu dividirenden Gröſſen nach einem ihnen gemeinschaftlichen Buchstaben, z. B. nach a so ordnet, daß die Gröſſen a , a^2 , a^3 . . . in ihrer natürlichen Folge fortgehen.

Soll z. B. die Gröſſe

$$2a^2 - 3ab + b^2 - a^2b + a^3$$

durch $a - b$ dividirt werden, so hat man

$$\begin{array}{r} a-b \overline{) a^3 + 2a^2 - a^2b - 3ab + b^2} \quad \text{Quotient,} \\ \quad + a^3 \quad \quad - a^2b \\ \quad - \quad \quad + \\ \hline \quad \quad 2a^2 - 3ab + b^2 \\ \quad + 2a^2 - 2ab \\ \quad - \quad + \\ \hline \quad \quad \quad - ab + b^2 \\ \quad \quad \quad - ab + b^2 \\ \quad \quad \quad + - \\ \hline \text{Rest . . . o.} \end{array}$$

Oder auch, wenn man nach der Gröſſe b ordnet:

$$\begin{array}{r} -b+a \overline{) b^2 - 3ab - a^2b + 2a^2 + a^3} \quad \text{wie zuvor,} \\ \quad + b^2 - ab \\ \quad - \quad + \\ \hline \quad \quad - 2ab - a^2b + 2a^2 + a^3 \\ \quad \quad - 2ab \quad \quad + 2a^2 \\ \quad \quad + \quad - \\ \hline \quad \quad \quad - a^2b + a^3 \\ \quad \quad \quad - a^2b + a^3 \\ \quad \quad \quad + - \\ \hline \text{Rest . . . o.} \end{array}$$

Ganz eben so findet man auch

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b,$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2, -$$

$$\frac{1 + a^2 + a^4}{1 - a + a^2} = 1 + a + a^2 \text{ u. s. w.}$$

§. 23. (Division ohne Ende.) Wenn der Dividend durch den Divisor nicht ohne Rest theilbar ist, so kann man, wie oben §. 14, I., diesen Rest als einen neuen Dividend betrachten, und so die Division ohne Ende fortsetzen, wie folgendes Beyspiel zeigt:

$$\begin{array}{r} 1-b \overline{) a} \quad | a + ab + ab^2 + ab^3 + \dots \\ \underline{a - ab} \\ ab \\ \underline{ab - ab^2} \\ ab^2 \\ \underline{ab^2 - ab^3} \\ ab^3 \\ \underline{ab^3 - ab^4} \\ ab^4 \text{ etc.} \end{array}$$

Es ist daher der Bruch

$$\frac{a}{1-b}$$

gleich der ohne Ende fortgehenden Reihe

$$a + ab + ab^2 + ab^3 + \dots$$

von welcher das Gesetz des Fortgangs der Glieder deutlich ist.

I. Nimmt man die Gröfse b negativ, oder setzt man in dem Vorhergehenden $-b$ statt b , so erhält man

$$\frac{a}{1+b} = a - ab + ab^2 - ab^3 + \dots$$

dieselbe Reihe, wie zuvor, aber mit abwechselnden Zeichen.

Ist z. B. für einen besonderen Fall in dem vorhergehenden Ausdrucke von

$$\frac{a}{1-b} = a + ab + ab^2 + \dots$$

die Gröfse $a=1$ und $b=\frac{1}{10}$, so hat man

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots$$

übereinstimmend mit §. 14, I., wo der mit dem vorhergehenden identische Ausdruck

$$\frac{1}{9} = 0.1111 \dots$$

gefunden wurde.

II. Eben so gibt $a = b = 1$ den folgenden Quotienten:

$$\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

ein Ausdruck, der, ohne Ende fortgesetzt, offenbar größer als jede andere noch angebbare Zahl, oder der, wie man sich auszudrücken pflegt, *unendlich groß* wird. Dieß stimmt mit der oben (§. 9.) gegebenen Erklärung eines Bruches überein, dessen Werth immer größer wird, je kleiner, bey unverändertem Zähler, der Nenner desselben ist. Nimmt daher, wie hier bey dem Bruche $\frac{1}{0}$, der Nenner über alle Grenzen ab, oder wird der Nenner, wie man zu sagen pflegt, *unendlich klein*, so nimmt auch der Werth des Bruches über alle Grenzen zu, oder dieser Werth ist dann *unendlich groß*, welchen Zustand einer GröÙe man auch durch das Zeichen ∞ auszudrücken pflegt, so daß daher

$$\frac{1}{0} \text{ mit } \infty$$

gleichbedeutend ist.

Wir werden später noch oft Gelegenheit haben, auf diese sogenannten unendlich kleinen GröÙen, d. h. auf solche GröÙen zurück zu kommen, die kleiner angenommen werden, als jede andere noch angebliche GröÙe. Hier bemerken wir nur, daß jede nach einem bestimmten Gesetze fortgehende Folge von GröÙen eine *Reihe* heißt. — Diese Reihen spielen in der mathematischen Analysis eine sehr wichtige Rolle, obschon sie zur eigentlichen Berechnung offenbar nur dann brauchbar sind, wenn sie *convergiren*, d. h. wenn ihre mit der Folge stets kleiner werdenden Glieder sich einer gegebenen endlichen GröÙe immer mehr nähern, ohne sie je zu erreichen. So ist die vorhergehende Reihe

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

convergent, weil die Summe ihrer Glieder, je weiter man sie fortsetzt, der endlichen GröÙe $\frac{1}{9}$ immer näher kommt. Die andere Reihe aber

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

ist divergent, weil die Summe ihrer Glieder ohne Grenze bis in das Unendliche wachsen kann.

Eben so ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

oder die Reihe der sogenannten reciproquen natürlichen Zahlen (1, 2, 3, 4, ...), wie wir später (§. 65.) sehen werden, ebenfalls divergent, oder die Summe dieser Reihe wächst ins Unendliche fort, obschon ihre Glieder immer kleiner werden, je weiter sie fortgeht. Nicht so ist es mit der convergenten Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

welche dieselben Glieder, wie die vorhergehende hat, deren Zeichen aber stets abwechseln. Diese Reihe gibt, so weit man sie auch fortsetzen mag, immer eine Summe, die kleiner als die Einheit ist, so wie wieder die Reihe der reciproquen ungeraden Zahlen, oder die Reihe

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

divergent ist, da die Summe ihrer Glieder, ohne sich einer bestimmten Grenze zu nähern, ins Unendliche wächst, wie wir in der Folge sehen werden.

Fünftes Capitel.

Rechnung mit Potenzen.

§. 24. (Erklärung.) Ein Product von mehreren gleichen Factoren heist eine *Potenz* dieses Factors. So ist

aa	oder	a^2	die zweyte,
aaa	»	a^3	» dritte,
$aaaa$	»	a^4	» vierte

Potenz der Gröfse a , und die Zahl oben rechts, welche die Anzahl der Factoren in jeder Potenz anzeigt, heist der *Exponent* dieser Potenz.

Die zweyte und dritte Potenz, die am häufigsten vorkommt, wird auch der Kürze wegen das *Quadrat* und der *Cubus* (Würfel) genannt. So ist $3^2 = 9$ und $4^2 = 16$ das Quadrat von 3 und 4, und $2^3 = 8$, so wie $3^3 = 27$ ist der Würfel von 2 und 3.

I. Eben so wird diejenige Zahl a , welche auf die 2^{te} , 3^{te} , 4^{te} , ... Potenz erhoben, die Zahl b gibt, die 2^{te} , 3^{te} , 4^{te} , ... *Wurzel* von der Zahl b genannt. So ist a die 2^{te} Wurzel von a^2 , und zugleich die dritte Wurzel von a^3 u. f. So ist 3 die 2^{te} Wurzel von 9, und 2 die dritte Wurzel von 8, und wieder 3 die 4^{te} Wurzel von 81 u. f.

Die zweyte und dritte Wurzel einer Gröfse wird auch abkürzend die Quadrat- und Kubikwurzel dieser Gröfse genannt.

Um anzuzeigen, dafs die 2^{te} , 3^{te} , 4^{te} , ... Wurzel aus einer Zahl gezogen werden soll, setzt man dieser Zahl die Zeichen

$$\sqrt{}, \sqrt[3]{}, \sqrt[4]{}, \dots$$

vor. So hat man z. B.:

$$\sqrt[2]{9} = 3, \sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[4]{16} = 2, \dots$$

Bey der Quadratwurzel läfst man der Kürze wegen auch wohl die Ziffer 2 in den Wurzelzeichen weg, so dafs $\sqrt{a}$ gleichbedeutend mit $\sqrt[2]{a}$ ist.

Will man endlich mehrere durch $+$ oder $-$ verbundene Gröſſen *zugleich* auf eine Potenz erheben, oder aus ihnen die Wurzel ziehen, so schließt man diese Gröſſen in Klammern ein (§. 6, II.). So ist das Quadrat von $a + b$ gleich

$$(a + b)^2,$$

und die Kubikwurzel von $a - b$ ist

$$\sqrt[3]{(a - b)} \text{ oder auch } \sqrt[3]{a - b}.$$

§. 25. (Multiplication.) Sucht man das Product von a^2 in a^3 , so hat man

$$a^2 \cdot a^3 = aa \cdot aaa = a^5,$$

und eben so für jeden anderen, ganzen, positiven Exponenten, also auch allgemein

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

wenn m und n ganze positive Zahlen bezeichnen.

Um daher Potenzen derselben Gröſſe a zu multipliciren, addirt man ihre Exponenten.

§. 26. (Division.) Um a^5 durch a^3 zu dividiren, hat man

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2,$$

und eben so für jeden anderen Exponenten: also auch allgemein

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Um daher Potenzen derselben Gröſſe a zu dividiren, subtrahirt man ihre Exponenten.

§. 27. (Erhebung auf Potenz.) Um eine gegebene Potenz, z. B. a^3 wieder auf eine Potenz, z. B. auf die zweyte Potenz zu erheben, oder um die Gröſſe

$$(a^3)^2$$

zu finden, so hat man

$$a^3 = aaa,$$

und von diesem Ausdrücke ist die zweyte Potenz

$$aaa \cdot aaa = a^6,$$

also ist auch

$$(a^3)^2 = a^6,$$

und eben so ist

$(a^2)^3 = a^6$, $(a^4)^2 = a^8$ u. f.,
also auch überhaupt für jeden ganzen, positiven Exponenten

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Um also Potenzen auf Potenzen zu erheben, multiplicirt man ihre Exponenten.

I. Um aber Producte oder Brüche auf Potenzen zu erheben, muß man dieß bey jedem einzelnen Factor des Products, und bey Zähler und Nenner des Bruches thun.

Will man z. B. das Product ab auf die zweyte Potenz erheben, so hat man

$$ab \cdot ab = aa \cdot bb, \text{ also auch}$$

$$(ab)^2 = a^2 \cdot b^2,$$

und daher überhaupt

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m.$$

Eben so erhält man für die zweyte Potenz des Bruches $\frac{a}{b}$ den Ausdruck

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2},$$

so daß demnach ist:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2},$$

und überhaupt

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},$$

wie dieß alles gleichsam für sich klar ist, wenn m und n ganze positive Zahlen sind.

§. 28. (Potenzen, deren Exponenten Null oder negative ganze Zahlen sind.) Nach dem Vorhergehenden (§. 26.) hat man, wenn m und n ganze positive Zahlen bezeichnen,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Sind aber die beyden Exponenten m und n einander gleich, so hat man $m - n = 0$, also ist auch

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1,$$

d. h. jede Gröfse mit dem Exponenten Null ist gleich der Einheit.

I. Ist aber in demselben vorhergehenden Ausdrucke

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

der Exponent m des Zählers gleich Null, so ist

$$\frac{a^0}{a^n} = a^{0-n},$$

oder da, nach dem Vorhergehenden, $a^0 = 1$ und a^{0-n} offenbar gleich a^{-n} ist, so hat man

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n},$$

d. h. jede Potenz mit einem negativen Exponenten ist gleich der Einheit, dividirt durch dieselbe Potenz mit demselben positiven Exponenten.

Nach der vorhergehenden Erklärung einer Potenz ist a^m , wenn m eine ganze positive Zahl bezeichnet, ein Product von m Factoren, deren jeder gleich a ist. Soll demnach die Gröfse a^0 ein Product von Null Factoren seyn? — Diefs würde keinen Sinn haben. Und noch weniger läfst sich, nach jener Erklärung, der Ausdruck a^{-m} auslegen.

Wir werden daher die Gröfse a^0 nur als eine blofse Bezeichnung für die Einheit ansehen können, deren es noch viele andere geben kann, z. B. $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ u. dgl. Diese Bezeichnung ist aber dadurch entstanden, dafs man irgend eine Potenz einer Zahl durch sich selbst dividirt, und dabey die Vorschrift des §. 26. angewendet hat.

Eben so werden wir die Gröfse a^{-m} als eine andere Bezeichnung für die Einheit, dividirt durch die m^{te} Potenz von a , gelten lassen, und diese zweyte Annahme ist eine unmittelbare Folge der ersten, dafs nämlich $a^0 = 1$ ist. Denn wenn man in dem Ausdrucke

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

des §. 26, wo m und n ganze positive Gröfsen sind, die Gröfse $m = 0$, also auch, der ersten Annahme gemäfs, $a^0 = 1$ setzt, so erhält man sofort

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n},$$

§. 29. (Potenzen mit gebrochenen Exponenten.)

Nach der oben (§. 24, I.) gegebenen Erklärung einer Wurzel, ist der Ausdruck

$$\sqrt[n]{a}$$

diejenige Zahl, welche auf die n^{te} Potenz erhoben, gleich a wird, also ist auch

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Ist aber n eine ganze Zahl, so hat man, nach §. 27,

$$a = (a^{\frac{1}{n}})^n.$$

Setzt man daher diese beyden Ausdrücke von a einander gleich, so hat man

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = (\sqrt[n]{a})^n,$$

woraus sofort folgt:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a};$$

d. h. Potenzen mit gebrochenen Exponenten sind mit den analogen Wurzelgrößen identisch.

I. Auch diesen Ausdruck

$$a^{\frac{1}{n}}$$

wird man also nur als eine andere Bezeichnung von $\sqrt[n]{a}$ betrachten können, der so wie die beyden vorhergehenden

$$a^0 \text{ und } a^{-n}$$

durch Analogie aus der Rechnung mit solchen Potenzen entstanden ist, deren Exponenten ganze positive Zahlen sind.

Diese Erweiterung der eingeführten Bezeichnungen, oder der aufgestellten Begriffe durch Analogie oder Induction, ist auf dem Gebiete der Mathematik von der äußersten Wichtigkeit, und sie ist oft schon die Quelle der interessantesten Entdeckungen geworden.

II. Stellen wir die vorhergehenden Vorschriften der Rechnung mit Potenzen zur bequemen Übersicht zusammen, so hat man, welche Zahlen auch die Größen m und n bezeichnen,

$$\text{für die Multiplication.} \quad \dots \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

für die Division $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$

für die Erhebung auf Potenz . . . $(a^m)^n = a^{mn},$

für die Ausziehung der Wurzel . $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}},$

und überdies

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{und} \quad a^0 = 1.$$

III. Nach diesen Vorschriften kann man sich an folgenden Beyspielen üben:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256, \quad 16^{\frac{2}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{5}{12}} = 8,$$

$$\frac{81^{\frac{1}{2}}}{81^{\frac{1}{4}}} = 81^{\frac{1}{4}} = 3, \quad (4^{\frac{1}{2}})^3 = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{64} = 8,$$

$$a^{-5} : a^2 = a^{-7}, \quad a^3 \cdot a^{-2} = a^1,$$

$$(\sqrt[6]{a^5})^3 = \sqrt[2]{a^5}, \quad \sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = (a^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[15]{a},$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \sqrt[12]{a^{13}},$$

$$(3 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 1 - \sqrt{5},$$

$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3},$$

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2}{3 - \sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Sechstes Capitel.

Irrationale und imaginäre Gröfsen.

§. 30. (Irrationale Gröfsen.) Betrachtet man die ersten natürlichen Zahlen 1, 2, 3, . . . und ihre zweyten, dritten, . . . Potenzen, so hat man

I. natürliche Zahlen	1,	2,	3,	4, . . .
II. Quadrate derselben	1,	4,	9,	16, . . .
III. Würfel derselben	1,	8,	27,	64, . . .

woraus sofort folgt, daß z. B. die Quadratwurzel von 4 gleich 2, die Quadratwurzel von 9 gleich 3, die Kubikwurzel von 8 gleich 2 ist, u. f.

Allein welches sind die Quadrat- und Kubikwurzeln derjenigen natürlichen Zahlen, die *zwischen* die Zahlen der Reihe II. und III. fallen, welches sind z. B. die Quadrat- oder Kubikwurzeln von 2, 3, 5, 6 u. f.?

Obschon wir die vollständige Antwort auf diese Frage erst weiter unten geben werden, so kann man doch hier schon sehen, daß z. B. die Quadratwurzel aus 2 oder daß die Gröfse $\sqrt{2}$ keine *ganze Zahl* seyn wird, da sie, wie man aus der Vergleichung der Reihen I. und II. findet, zwischen die Gröfsen 1 und 2 fallen muß, zwischen welchen keine ganze Zahl fallen kann.

Allein eben so leicht wird man auch sehen, daß dieselbe Gröfse $\sqrt{2}$ auch *kein Bruch* seyn kann. Welches nämlich auch dieser Bruch seyn möchte, so müßte er, auf die zweyte Potenz erhoben, die ganze Zahl 2 wieder geben. Allein um einen Bruch auf die zweyte Potenz zu erheben, muß man (nach §. 27, I.) den Zähler desselben sowohl, als auch den Nenner mit sich selbst multipliciren. Wenn man aber einen Bruch, der nach §. 15. schon auf seinen einfachsten Ausdruck gebracht worden ist, wie

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$$

mit sich selbst multiplicirt, d. h. wenn man das Quadrat dieses Bruches sucht, so muß man offenbar *wieder einen Bruch* erhal-

ten, da man doch, der Voraussetzung gemäß, eine ganze Zahl, nämlich die Zahl 2 erhalten sollte, indem $\sqrt{2}$ oder $2^{\frac{1}{2}}$, mit sich selbst multiplicirt, die Zahl 2 wieder geben muß.

I. Die GröÙe $\sqrt{2}$, und eben so auch die GröÙen $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, . . . so wie $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, . . . sind demnach, weder ganze Zahlen, noch auch Brüche. Sie sind daher GröÙen ganz eigener Art.

Wenn wir z. B. von der Zahl 2 sagen, daß sie die Einheit zwey Mal, oder daß sie eine zehn Mal kleinere Einheit, d. h. die GröÙe $\frac{1}{10}$ zwanzig Mal, daß sie die GröÙe $\frac{1}{100}$ zweyhundert Mal genau in sich enthalte, und so von jeder anderen ganzen Zahl, und selbst von jedem gegebenen Bruche, so läßt sich dagegen von der GröÙe $\sqrt{2}$ nicht mehr sagen, wie oft sie irgend eine, auch noch so kleine Einheit, genau in sich enthalte. Aus diesem Grunde nennt man alle diese mit irgend einer Einheit unmeßbaren GröÙen *incommensurable* oder auch *irrationale* Zahlen, weil das Verhältniß (*ratio*) dieser Zahlen zur Einheit nicht mehr angeglich ist.

II. Obschon wir aber die irrationalen GröÙen, ihrer Natur nach, nicht ganz genau angeben können, so werden wir doch Mittel finden, uns dem wahren Werthe derselben immer mehr, und so viel wir wollen, zu nähern, ohne sie jedoch je völlig zu erreichen. So werden wir z. B. finden, daß der Werth der Quadratwurzel aus 2 oder daß $\sqrt{2}$ ist

$$\sqrt{2} = 1.414213\ 562373 \dots$$

Dieß wird uns demnach auch nicht hindern, mit diesen GröÙen selbst, wie mit allen anderen, zu rechnen, wenn wir uns nur dabey erinnern, daß die Resultate dieser Rechnungen bloße Annäherungen zur Wahrheit sind, mit denen wir uns ja auch sonst oft genug begnügen müssen. Wir werden bald sehen, daß beynahe alle unsere Berechnungen des Himmels und der Erde auf diesen irrationalen Zahlen beruhen, und daß die Natur selbst, in der Construction ihrer bewunderungswürdigen Werke, eine Art von Vorliebe für diese Zahlen gehegt zu haben scheint.

§. 31. (Imaginäre GröÙen.) Da (nach §. 21.) zwey positive, so wie auch zwey negative Factoren, immer nur ein

positives Product geben, so müssen auch die Quadrate aller positiven oder negativen Gröſſen *immer positiv* seyn. Dasselbe gilt, aus demselben Grunde, nicht bloß für die 2^{ten}, sondern auch für alle 4^{ten}, 6^{ten}, 8^{ten}, . . . und überhaupt für alle Potenzen mit geraden Exponenten.

Daraus folgt sofort, daß die zweyte, und überhaupt jede gerade Wurzel aus einer negativen Gröſſe etwas Undenkbares, etwas Unmögliches ist.

Obschon aber diesen Gröſſen an sich keine Realität zukommt, so hat man es doch versucht dieselben, wenigstens als bloße symbolische Zeichen, unter der Benennung von *imaginären* (im Gegensatze mit den *reellen*) Gröſſen bezubehalten, und auch auf sie die Vorschriften (§. 25. bis 29.) der Rechnung mit Potenzen anzuwenden. Und auch diesem scheinbar gewagten Versuche verdankt die mathematische Analyse eine sehr wesentliche Erweiterung ihrer Grenzen, wie wir später bey mehr als einer Gelegenheit bemerken werden.

Die einfachste dieser imaginären Gröſſen ist

$$\sqrt{-1} \text{ oder } (-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Nimmt man davon nach der Vorschrift des §. 27. die ersten Potenzen, so hat man

Potenz I.		$\sqrt{-1}$,
» II.		-1 ,
» III.		$-\sqrt{-1}$,
» IV.		$+1$,
» V.		$\sqrt{-1}$ u. f.,

so daß die Potenz VI. wieder gleich der II., die Potenz VII. gleich der III. u. f. ist.

I. Auf diese einfachsten Ausdrücke lassen sich auch alle übrigen imaginären Gröſſen zurückführen. So ist z. B.

$$\sqrt{-3} = \sqrt{(+3) \cdot (-1)} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1},$$

wovon daher wieder

Potenz I.		$\sqrt{-3}$,
» II.		-3 ,
» III.		$-3^{\frac{3}{2}} \sqrt{-1}$,
» IV.		$+9$ u. f. ist.

§. 32. (Vielfache Werthe der reellen Wurzeln.)

Jede positive Gröfse hat *zwey*, in ihrer Gröfse gleiche, in ihren Zeichen aber entgegengesetzte Quadratwurzeln. Denn da z. B. von der Zahl $+2$ sowohl, als auch von der Zahl -2 , das Quadrat gleich $+4$ ist, so ist auch die Quadratwurzel von $+4$ sowohl $+2$, als auch -2 , oder man hat

$$\sqrt{4} = \pm 2.$$

Dasselbe gilt auch von jeder 2^{ten}, 4^{ten}, 6^{ten}, . . . überhaupt von jeder *geraden* Wurzel aus irgend einer positiven Zahl. So ist z. B.

$$\sqrt[4]{+81} = \pm 3,$$

weil $(+3)^4$ sowohl als auch $(-3)^4$ wieder gleich der gegebenen Zahl $+81$ ist.

I. Nicht so scheint es sich mit der 3^{ten}, 5^{ten}, 7^{ten}, . . . und überhaupt mit den *ungeraden* Wurzeln einer gegebenen Zahl zu verhalten, die immer nur eine, wenigstens nur eine *reelle* Wurzel haben, und zwar von demselben Zeichen mit der gegebenen Zahl selbst. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{+27} = +3,$$

aber nicht auch zugleich -3 , da nur $(+3)^3$, nicht aber auch $(-3)^3$ die gegebene Zahl $+27$ wieder gibt. Und eben so ist auch

$$\sqrt[3]{-27} = -3,$$

weil nur $(-3)^3$, aber nicht $(+3)^3$ gleich -27 ist.

II. Allein die Anzahl der Wurzeln einer gegebenen Zahl wird oft viel gröfser, wenn man auch auf die imaginären Wurzeln derselben Rücksicht nimmt.

Zuerst ist, nach dem Vorhergehenden,

$$\sqrt{+1} = \pm 1,$$

oder überhaupt (nach §. 31, I.)

$$\sqrt{+a^2} = \pm a.$$

Und eben so ist auch

$$\sqrt{-a^2} = \pm a\sqrt{-1},$$

da sowohl $+a\sqrt{-1}$, als auch $-a\sqrt{-1}$, mit sich selbst mul-

tiplicirt, die Gröfse $-a^2$ wieder gibt. Daraus folgt daher, dafs jede gegebene Gröfse zwey Quadratwurzeln hat, die nur durch ihre Zeichen verschieden sind, und zwar zwey reelle, wenn die gegebene Gröfse positiv, und zwey imaginäre, wenn die gegebene Gröfse negativ ist.

III. Wenn man aber die Gröfse

$$-1 \pm \sqrt{-3}$$

zwey Mal mit sich selbst multiplicirt (nach den Vorschriften des §. 21. u. 30.), so erhält man, wenn das obere Zeichen genommen wird:

$$\begin{array}{r} -1 + \sqrt{-3} \\ -1 + \sqrt{-3} \\ \hline 1 - \sqrt{-3} - 3 \\ -\sqrt{-3}, \end{array}$$

oder dieses Product ist gleich

$$-2 - 2\sqrt{-3};$$

und wenn man dasselbe noch einmal durch die ursprüngliche Gröfse multiplicirt, so hat man

$$\begin{array}{r} -2 - 2\sqrt{-3} \\ -1 + \sqrt{-3} \\ \hline 2 + 2\sqrt{-3} + 6 \\ -2\sqrt{-3}, \end{array}$$

oder die dritte Potenz der gegebenen Gröfse $(-1 + \sqrt{-3})$ ist gleich der reellen Gröfse $+8$. Ganz eben so findet man auch, wenn blofs das untere Zeichen genommen wird:

$$(-1 - \sqrt{-3})^3 = +8,$$

woraus daher, da $2^3 = 8$ ist, sofort folgt, dafs

$$\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1$$

ist. Ganz eben so findet man auch, dafs

$$\left(\frac{+1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1$$

ist, so dafs man also auch umgekehrt die beyden Ausdrücke haben wird:

$$\sqrt[3]{+1} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3}) \text{ und}$$

$$\sqrt[3]{-1} = \frac{1}{2}(+1 \pm \sqrt{-3}).$$

Allein aus dem Vorhergehenden ist bereits bekannt, daß auch

$$\sqrt[3]{+1} = +1 \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{-1} = -1$$

ist, so daß wir demnach für die Kubikwurzel aus $(+1)$ und aus (-1) folgende drey Ausdrücke haben:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{+1} &= +1 & \sqrt[3]{-1} &= -1 \\ &= +\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}) & &= +\frac{1}{2}(+1 + \sqrt{-3}) \\ &= +\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}), & &= +\frac{1}{2}(+1 - \sqrt{-3}). \end{aligned}$$

Was aber hier von der Kubikwurzel aus $+1$ oder -1 gesagt wird, gilt nach dem Vorhergehenden auch für die Kubikwurzel aus jeder anderen Zahl, z. B. ± 27 , da

$$\sqrt[3]{+27} = 3\sqrt[3]{+1} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{-27} = 3\sqrt[3]{-1} \quad \text{ist.}$$

Aus dem Vorhergehenden folgt daher, daß jede positive oder negative GröÙe drey Kubikwurzeln hat, von welchen aber nur eine reell ist, während die beyden anderen imaginär sind.

II. Eben so überzeugt man sich leicht durch Nachrechnung von der Richtigkeit der drey folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} (\pm \sqrt{-1})^4 &= +1, \\ \left(\frac{1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^4 &= -1, \\ \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^4 &= -1, \end{aligned}$$

woraus sofort folgt, da nach dem Vorhergehenden auch

$\sqrt[4]{+1} = \pm 1$ ist, daß man für die vierte Wurzel aus $(+1)$ und aus (-1) folgende vier Ausdrücke hat:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{+1} &= +1, & \text{und} & \sqrt[4]{-1} = \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \\ &= -1, & &= \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \\ &= +\sqrt{-1}, & &= \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \\ &= -\sqrt{-1}, & &= \frac{-1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt wieder, daß jede positive GröÙe vier vierte Wurzeln hat, von welchen aber nur zwey reell sind, und daß jede negative GröÙe ebenfalls vier vierte Wurzeln hat, die jedoch alle imaginär sind.

Man bemerkt leicht, daß dies durch Analogie zur Aufstellung des Satzes führen wird: »Jede gegebene Zahl hat immer »2 Quadratwurzeln, 3 Kubikwurzeln, 4 Wurzeln der vierten, »5 Wurzeln der fünften Ordnung u. s. w., allein von den geraden Wurzeln (der 2^{ten}, 4^{ten}, 6^{ten}, . . . Ordnung) sind immer »nur zwey reell, wenn die gegebene Zahl positiv ist, und alle »imaginär, wenn sie negativ ist; von den ungeraden Wurzeln »aber (der 3^{ten}, 5^{ten}, 7^{ten} Ordnung) ist immer eine reell und alle »anderen imaginär, die gegebene Zahl mag positiv oder negativ seyn.« — Wir werden in der Folge wieder auf diesen wichtigen Gegenstand zurückkommen.

Es ist nun zu untersuchen, wie sich die Wurzeln einer Gleichung verhalten, wenn die Gleichung eine bestimmte Form hat. Wir betrachten hier die Gleichung $x^2 + px + q = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$. Wenn $p^2 - 4q > 0$, so sind die Wurzeln reell; wenn $p^2 - 4q < 0$, so sind die Wurzeln imaginär. Wenn $p^2 - 4q = 0$, so haben die Wurzeln eine doppelte Form.

Wir betrachten nun die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ für verschiedene Werte von p und q . Wenn $p = 0$ und $q > 0$, so sind die Wurzeln reell und entgegengesetzt. Wenn $p = 0$ und $q < 0$, so sind die Wurzeln imaginär. Wenn $p > 0$ und $q > 0$, so sind die Wurzeln reell und beide negativ. Wenn $p > 0$ und $q < 0$, so sind die Wurzeln reell und von entgegengesetztem Vorzeichen. Wenn $p < 0$ und $q > 0$, so sind die Wurzeln reell und beide positiv. Wenn $p < 0$ und $q < 0$, so sind die Wurzeln reell und von entgegengesetztem Vorzeichen.

Wir betrachten nun die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ für verschiedene Werte von p und q . Wenn $p = 0$ und $q > 0$, so sind die Wurzeln reell und entgegengesetzt. Wenn $p = 0$ und $q < 0$, so sind die Wurzeln imaginär. Wenn $p > 0$ und $q > 0$, so sind die Wurzeln reell und beide negativ. Wenn $p > 0$ und $q < 0$, so sind die Wurzeln reell und von entgegengesetztem Vorzeichen. Wenn $p < 0$ und $q > 0$, so sind die Wurzeln reell und beide positiv. Wenn $p < 0$ und $q < 0$, so sind die Wurzeln reell und von entgegengesetztem Vorzeichen.

Siebentes Capitel.

Umformung der Gleichungen.

§. 33. (Erklärungen.) Wenn ein Ausdruck eine oder auch mehrere veränderliche Gröfsen, die wir (nach §. 17.) durch $x, y, z, \dots$ bezeichnen wollen, und überdieß auch eine oder mehrere gegebene oder unveränderliche Gröfsen $a, b, c, \dots$ enthält, so wird jener Ausdruck seinen Werth ändern, wenn diese Gröfsen $x, y, z, \dots$ geändert werden, er wird von diesen Gröfsen abhängig, oder er wird, wie man zu sagen pflegt, eine *Function* dieser veränderlichen Gröfsen seyn.

So ist z. B. der Ausdruck

$$\frac{a + bx}{a - bx},$$

oder wenn man für einen besondern Fall $a = 10$ und $b = 1$ setzt, der Ausdruck

$$\frac{10 + x}{10 - x}$$

eine Function der veränderlichen Gröfse x , und diese Function ist gleich 1 für $x = 0$,

$$\frac{11}{9} \gg x = 1, \\ \frac{3}{5} \gg x = 2 \text{ u. f.}$$

Eben so sind

$$\frac{a + bx}{c - dy} \quad \text{oder} \quad ax^2 + bxy + cy^2$$

Functionen von den beyden veränderlichen Gröfsen x und y u. f.

Wenn die veränderlichen Gröfsen $x, y, z, \dots$ oder wenn die *Stammgröfsen* der Function bloß ganze Exponenten enthalten, so heist die Function *rational*, wie die der vorhergehenden Beyspiele; wenn aber diese Stammgröfsen gebrochene Exponenten mit sich führen, so ist die Function *irrational*, wie

$$a + b\sqrt{x} \quad \text{oder} \quad \sqrt{a + bx},$$

und endlich eine *gebrochene* Function, wenn die Stammgröfsen

zugleich im Zähler und Nenner erscheinen, wie der vorhergehende Ausdruck

$$\frac{a + bx}{a - bx} \quad \text{oder auch} \quad \frac{x}{\sqrt{a + bx}},$$

welcher letzte Ausdruck eine gebrochene irrationale Function bezeichnet.

I. Ein aus zwey durch die Zeichen $+$ oder $-$ verbundenen Gliedern bestehender Ausdruck heist ein *Binom*, wie

$$a + bx^2 \quad \text{oder} \quad \sqrt{1 - x}.$$

Ein solcher aus drey Gliedern bestehender Ausdruck

$$a + bx + cx^2$$

wird ein *Trinom*, und wenn er noch mehr als drey Glieder hat, ein *Polynom* genannt.

II. Ein aus 2, 3, 4, . . . Factoren bestehender Ausdruck wird eine Gröfse von 2, 3, 4, . . . *Dimensionen* genannt, wo, bey gebrochenen Functionen, die Nenner als Gröfßen mit negativen Exponenten (§. 28, I.) genommen werden. So sind

$$a, \quad \frac{ax}{b}, \quad \frac{ax^2 + by^2}{ab}, \quad \sqrt{a^2 + bx}$$

sämmtlich Gröfßen von einer Dimension;

$$ax \quad \text{oder} \quad \frac{ax^2}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

sind Gröfßen von zwey Dimensionen; die Gröfßen

$$\frac{a+x}{a-x} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}}$$

gehören zu der Dimension Null;

$$\frac{a}{bx} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{a^2 + bx}$$

zu der Dimension -1 , und endlich

$$\sqrt{x} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{ax}{a-x}}$$

zu der Dimension $\frac{1}{2}$ u. s. f. Wir werden in der zweyten Abtheilung dieser Schrift sehen, daß die *Linien* Gröfßen der ersten, die *Flächen* der zweyten, und daß die *Körper* Gröfßen von drey Dimensionen (Länge, Breite und Höhe) sind.

§. 34. (Gleichung.) Wenn zwey Functionen derselben Stammgrößen, wie z. B.

$$x^2 - ax \quad \text{und} \quad bx - c,$$

einander gleich sind, so bilden sie eine *Gleichung*, die auf folgende Art geschrieben wird:

$$x^2 - ax = bx - c.$$

Da die Gleichheit zweyer Ausdrücke nicht gestört wird, wenn man zu jedem derselben dieselbe GröÙe addirt oder von ihr subtrahirt, so hat man, wenn man in der letzten Gleichung zu beyden Seiten des Gleichheitszeichens die GröÙe c addirt, da $c - c = 0$ ist:

$$x^2 - ax + c = bx;$$

und endlich, wenn man auch hier zu beyden Seiten die GröÙe bx subtrahirt:

$$x^2 - ax - bx + c = 0;$$

oder da die veränderliche GröÙe x als Factor von a und zugleich von b erscheint:

$$x^2 - (a+b)x + c = 0,$$

welcher Ausdruck also ebenfalls eine *Gleichung* für die Variable oder unbekannte GröÙe x darstellt.

Man sieht daraus, daß jede Gleichung so ausgedrückt werden kann, daß auf der einen Seite des Gleichheitszeichens bloß die Null steht, was man eine Gleichung *auf Null bringen* heißt. So ist demnach auch

$$x^2 + Ax + B = 0$$

eine Gleichung für x , und

$$x^2 + Axy + By^2 + C = 0$$

eine Gleichung zwischen den beyden veränderlichen GröÙen x und y , u. f.

1. Wir betrachten hier zuvörderst nur diejenigen Gleichungen, die bloß Functionen einer einzigen veränderlichen GröÙe x sind. Eine solche Gleichung heißt *geordnet*, wenn die veränderliche oder unbekannte GröÙe x in allen Gliedern der Gleichung bloß im Zähler und bloß mit ganzen positiven Exponenten erscheint, und eine solche geordnete Gleichung gehört zum 1^{sten}, 2^{ten}, 3^{ten}, . . . *Grade*, wenn der höchste Exponent von x

gleich 1, 2, 3, . . . ist. So ist

$$x^2 + ax + b = 0$$

eine geordnete Gleichung des zweyten Grades, und

$$x^3 + ax^2 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{oder auch}$$

$$x^3 + ax + b = 0 \quad \text{oder}$$

$$x^3 + a = 0$$

sind geordnete Gleichungen des dritten Grades. Im Gegentheile sind

$$\frac{a}{1+x} = bx,$$

$$a + b\sqrt{x} = ex,$$

$$\frac{x}{a} + b = a\sqrt{x} \text{ u. f.}$$

noch ungeordnete Gleichungen.

II. Bemerken wir noch, daß eine jede Gleichung, zwischen der veränderlichen x und anderen constanten Größen, *nicht für jeden willkürlichen Werth von x , sondern nur für gewisse besondere Werthe dieser Gröfse gleich Null seyn kann.* So hat man z. B. in der Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0,$$

oder wenn man, für ein specielles Beyspiel, $a=3$ und $b=2$ setzt, in der Gleichung

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

nur *zwey* Werthe von x , welche dieser Gleichung entsprechen, oder welche den Ausdruck $x^2 + 3x + 2 = 0$ geben. Diese Werthe sind nämlich

$$x = -1 \quad \text{und} \quad x = -2,$$

und aufer ihnen gibt es keinen anderen Werth von x mehr, welcher der gegebenen Gleichung genügt.

Eben so hat die geordnete Gleichung des dritten Grades

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

nur drey Werthe von x , welche diese Function von x gleich Null geben, nämlich, wie man sofort sieht:

$$x = 1, \quad x = 2 \quad \text{und} \quad x = 3.$$

Man nennt aber diese Werthe von x , welche der gegebenen Gleichung entsprechen, die *Wurzeln* dieser Gleichung, und wir

werden weiter unten (§. 67.) sehen, daß jede geordnete Gleichung des m^{ten} Grades auch m Wurzeln hat, wie dieß in den beyden vorhergehenden Beyspielen der Fall ist.

III. Würde aber der Fall eintreten, daß ein Ausdruck der Art

$$0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$

für alle Werthe, die man der GröÙe x geben kann, gleich Null werden sollte, so würde auch daraus unmittelbar folgen, daß die constanten Coefficienten (§. 18, II.) von x^0 , x' , x^2 , ... oder daß die GröÙen a , b , c , d , ... jede für sich gleich Null seyn müssen. Denn setzt man in der gegebenen Gleichung die GröÙe x , da man ihr alle möglichen Werthe geben kann, gleich Null, so erhält man

$$a = 0,$$

so daß man also jenen Ausdruck auch so schreiben kann:

$$0 = bx + cx^2 + dx^3 + \dots,$$

oder, da man, ohne die Gleichung zu stören, alle Glieder derselben durch x dividiren kann:

$$0 = b + cx + dx^2 + \dots,$$

also wieder, wenn man neuerdings $x=0$ setzt:

$$b = 0,$$

und eben so erhält man

$$c = 0, \quad d = 0 \quad \text{u. f.}$$

§. 35. (Sonderung der Unbekannten.) Die Bestimmung der Wurzeln einer gegebenen Gleichung zwischen x und constanten GröÙen ist eine der wichtigsten Aufgaben der mathematischen Analysis. Man nennt diese Bestimmung der Wurzeln die *Auflösung der Gleichung*. Wir werden unten wieder auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Hier wollen wir nur bemerken, daß diese Auflösung der Gleichungen, so lange sie für x des ersten Grades sind, keine Schwierigkeit habe, da sie offenbar nur darin besteht, diese unbekannte GröÙe aus der Gleichung zu sondern, d. h. sie so zu stellen, daß sie ganz allein auf der einen Seite des Gleichheitszeichens steht, während die andere Seite bloß von den constanten oder gegebenen GröÙen a , b , c , ... der Gleichung ein-

genommen wird. Dadurch ist nämlich der Werth der unbekannten Gröſſe x durch die bekannten $a, b, c, \dots$ sofort gegeben, oder die Gleichung ist aufgelöst.

Um aber zu dieser Sonderung der Unbekannten zu gelangen, muß man mit den gegebenen Gleichungen verschiedene Modificationen vornehmen, durch welche man diesen Zweck erreichen kann.

I. Diese Modificationen gründen sich alle darauf, daß die Gleichheit zweyer Ausdrücke nicht gestört werden kann, wenn man, wie auch zum Theil schon oben geschehen ist, zu jedem dieser Ausdrücke dieselbe Gröſſe addirt, oder von ihnen dieselbe Gröſſe subtrahirt, oder auch, wenn man beyde Ausdrücke durch dieselbe Gröſſe multiplicirt oder dividirt, oder endlich, wenn man jeden dieser Ausdrücke auf dieselbe ganze oder gebrochene Potenz erhebt.

§. 36. (Nähere Erläuterung dieses Verfahrens.)

Die in §. 35, I. angeführten Reductionen lassen sich am einfachsten dadurch ausführen, daß man alles, was auf der einen Seite des Gleichheitszeichens mit der unbekannten Gröſſe

verbunden ist	auf die andere Seite bringt
durch Addition,	durch Subtraction, u. umgekehrt.
» Multiplication,	» Division, und umgekehrt.
» Erhebung auf ganze Potenzen,	» Ausziehung der Wurzeln, und umgekehrt.

Diese Vorschriften werden am besten durch Beyspiele erläutert werden.

I. Ist die Gleichung gegeben

$$\frac{x+2}{5} = 1,$$

so wird man zuerst die Gröſſe 5, da durch sie die ganze linke Seite afficirt wird, durch Multiplication auf die rechte Seite schaffen, wodurch man erhält

$$x + 2 = 5;$$

und wenn man dann noch die Gröſſe $+2$, durch Subtraction, auf die andere Seite bringt:

$$x = 3,$$

wodurch demnach die unbekannte Gröſſe x gegeben wird.

II. Ist die Gleichung gegeben

$$2(3+x) - 3 = 7,$$

so wird man zuerst die Gröfse -3 , durch Addition, auf die andere Seite bringen, so dafs man hat

$$2(3+x) = 10.$$

In dieser Gleichung mufs wieder zuerst der allgemeine Factor 2 der linken Seite weggebracht werden, wodurch man hat

$$3+x = 5,$$

und wenn man endlich noch die Gröfse 3 auf die andere Seite bringt:

$$x = 2.$$

Eben so wird man auch mit solchen Gleichungen verfahren, die statt den Ziffern allgemeine Zahlzeichen haben.

III. Ist z. B. die Gleichung gegeben:

$$\frac{ax+b}{c} = d,$$

so gibt die Entfernung von c , die hier wieder zuerst vorgenommen werden mufs:

$$ax+b = cd,$$

und dann die von b :

$$ax = cd - b,$$

und endlich die von a :

$$x = \frac{cd - b}{a}.$$

Dieselbe gegebene Gleichung hätte man aber auch so schreiben können:

$$\frac{ax}{c} + \frac{b}{c} = d,$$

und hier gibt die Entfernung von $\frac{b}{c}$ sogleich

$$\frac{ax}{c} = d - \frac{b}{c},$$

und dann die Entfernung von $\frac{a}{c}$

$$x = \frac{c}{a} \left(d - \frac{b}{c} \right),$$

oder wenn man die Klammern auflöst:

$$x = \frac{cd - b}{a}, \text{ wie zuvor.}$$

IV. Erscheint die Gröfse x mehrmal in den Zählern von Brüchen, so kann man sie als gemeinschaftlichen Factor herausnehmen, und dann wie zuvor verfahren.

Ist z. B.

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - c = d$$

gegeben, so hat man auch

$$x \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - c = d,$$

oder wenn man die beyden Brüche auf einerley Nenner bringt, und die Gröfse c auf die andere Seite schafft:

$$x \left(\frac{a+b}{ab} \right) = c + d,$$

also auch, wenn man den Factor $\frac{a+b}{ab}$ durch Division wegbringt:

$$x = \frac{ab(c+d)}{a+b}.$$

Ganz eben so wird

$$\frac{a+x}{b} = \frac{c-x}{d} \quad \text{geben} \quad x = \frac{bc - ad}{b+d},$$

und

$$\frac{b + c(d + ax)}{a} = d \quad \text{geben} \quad x = \frac{(a-c)d - b}{ac}.$$

Alle vorhergehenden Gleichungen sind blofs des ersten Grades. Wenn aber die gegebene Gleichung mehrere verschiedene Potenzen von x enthält, so ist die Sonderung dieser Unbekannten oft mit sehr grofsen, ja mit unübersteiglichen Schwierigkeiten verbunden, und dann mufs man sich oft schon mit dem blossen Ordnen (§. 35, 1.) der Gleichung begnügen, um wenigstens den Grad derselben bestimmen zu können. Wir werden in der Folge wieder auf diese Untersuchungen zurückkommen.

Bemerken wir noch, zum Schlusse dieses Gegenstandes, dafs man den Ausdruck $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ öfter durch eine ähnliche Umformung auf die einfachere Gestalt $x + \sqrt{y}$ bringen kann. Setzt man nämlich beyde Ausdrücke einander gleich, so ist

$$a + \sqrt{b} - x^2 - 2x\sqrt{y} - y = 0.$$

Da aber ein Ausdruck zwischen rationalen und irrationalen Gröfsen nur dann für alle Werthe derselben gleich Null seyn

kann, wenn jene, so wie diese, jede für sich, gleich Null sind, so hat man statt der vorhergehenden Gleichung die zwey folgenden:

$$a - x^2 - y = 0 \text{ und } b - 4x^2y = 0.$$

Wir werden aber in der Folge (§. 69.) sehen, und wir können uns auch schon jetzt durch Nachrechnung überzeugen, daß aus den beyden letzten Gleichungen für die Werthe von x und y die Ausdrücke folgen:

$$x = \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \text{ und } y = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}.$$

Auf diese Weise erhält man z. B.

$$\sqrt{6} + 2\sqrt{5} = 1 + \sqrt{5},$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{8} = 1 + \sqrt{2},$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \text{ u. f.}$$

Achtes Capitel.

Proportionen.

§. 37. (Erklärung.) Wenn man bey zwey Gröſſen durch Division untersucht, wie oft eine derselben in der anderen enthalten ist, so sucht man dadurch das *Verhältniß* dieser zwey Gröſſen.

So haben die zwey Zahlen 3 und 12 das Verhältniß 4, da die erste in der zweyten 4^{mal} enthalten ist.

Zwey Zahlenpaare, deren Verhältniß gleich ist, bilden eine *Proportion*. So hat 3 zu 12 dasselbe Verhältniß, wie 5 zu 20; also bilden auch diese zwey Zahlenpaare eine Proportion, die man auf folgende Weise zu schreiben pflegt:

$$\begin{aligned} 3 : 12 &= 5 : 20, \text{ oder auch} \\ 12 : 3 &= 20 : 5. \end{aligned}$$

§. 38. (Eigenschaft der Proportionen.) In jeder Proportion ist das Product der beyden äußeren Glieder gleich dem Producte der beyden inneren.

Denn ist überhaupt

$$a : b = c : d,$$

so ist auch, nach der gegebenen Erklärung einer Proportion, wenn man sie mit dem oben (§. 6, II.) angeführten Zeichen der Division in der Gestalt von zwey Brüchen ausdrückt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Bringt man aber diese beyden Brüche auf einerley Nenner, so hat man

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd};$$

also auch, wenn man beyde Glieder dieser Gleichung durch bd multiplicirt:

$$ad = bc;$$

d. h. in der gegebenen Proportion

$$a : b = c : d$$

ist das Product der zwey äußeren gleich dem Product der zwey inneren Glieder.

I. Sind die beyden inneren Glieder einander gleich, oder hat man die Proportion

$$A : B = B : C,$$

so ist, nach dem Vorhergehenden,

$$AC = B^2,$$

oder auch

$$B = \sqrt{AC},$$

und man nennt dieses mittlere Glied $B = \sqrt{AC}$ die *mittlere Proportionale* zwischen den beyden anderen Gliedern A und C .

II. Daraus folgt sofort, daß sich aus je zwey einander gleichen Producten

$$ad = bc$$

immer eine Proportion bilden lasse. Denn dividirt man die letzte Gleichung zu beyden Seiten durch bd , so hat man

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

das heißt, man hat:

$$a : b = c : d.$$

§. 39. (Bestimmung eines Gliedes der Proportion aus den drey anderen.) Wenn drey Glieder einer Proportion gegeben sind, so läßt sich dadurch auch das vierte bestimmen. Denn ist die Proportion gegeben

$$a : b = c : d, \quad \text{so ist auch}$$

$$ad = bc.$$

Ist daher z. B. das letzte Glied d unbekannt, so hat man, wenn man beyde Glieder dieser Gleichung durch a dividirt,

$$d = \frac{bc}{a},$$

und eben so für jedes der übrigen drey Glieder. — Überhaupt ist jedes äußere Glied gleich dem Producte der zwey inneren, dividirt durch das andere äußere — und jedes innere Glied ist gleich dem Producte der zwey äußeren, dividirt durch das andere innere.

Dieser einfache, aber sehr nützliche Satz ist unter der Benennung der *Regeldetri* bekannt.

§. 40. (Veränderungen der Proportionen.) Eine Proportion kann mannigfaltige Veränderungen erleiden, ohne daß dadurch die Gleichheit ihrer Verhältnisse gestört wird. Wir führen nur die vorzüglichsten derselben kurz an.

I. *Umkehrung der Verhältnisse.*

Ist

$$a : b = c : d,$$

so ist auch sofort

$$b : a = d : c,$$

wie schon für sich klar ist.

II. *Verwechslung der inneren Glieder.*

Ist

$$a : b = c : d,$$

so ist auch

$$a : c = b : d,$$

da beyde Proportionen auf die ihnen gemeinsame Gleichung

$$ad = bc$$

zurückgeführt werden können.

III. *Addition und Subtraction der einzelnen Glieder.*

Ist die Proportion gegeben

$$a : b = c : d,$$

so ist auch

$$a \pm b : c \pm d = b : d,$$

und eben so

$$a \pm c : b \pm d = a : b,$$

weil auch die beyden letzten Proportionen sich wieder auf die Gleichung

$$bc = ad,$$

das heißt, auf die gegebene Proportion

$$a : b = c : d$$

zurückführen lassen.

IV. *Multiplication der beyden ersten, oder der beyden letzten Glieder durch dieselbe Gröfse.*

Ist die Proportion gegeben

$$a : b = c : d,$$

so ist auch, für jeden Werth der Gröfse m ,

$$am : bm = c : d,$$

und eben so

$$a : b = cm : dm,$$

da jede der zwey letzten Proportionen wieder die Gleichung gibt

$$ad = bc.$$

§. 41. (Verbindung mehrerer Proportionen unter einander.) Die Producte gleichliegender Glieder von zwey oder mehreren Proportionen sind ebenfalls proportionirt.

Sind nämlich die zwey Proportionen gegeben

$$a : b = c : d \text{ und}$$

$$e : f = g : h,$$

so ist auch sofort

$$ae : bf = cg : dh.$$

Denn die erste Proportion gibt $ad = bc$, und die zweyte gibt eben so $eh = fg$, also ist auch

$$ad \cdot eh = bc \cdot fg,$$

oder, was dasselbe ist,

$$ae \cdot dh = cg \cdot bf,$$

also auch

$$ae : bf = cg : dh.$$

I. Daraus folgt sofort:

Sind die zwey Proportionen gegeben

$$\left. \begin{array}{l} a : b = c : d \\ \text{und } b : e = d : f \end{array} \right\},$$

so hat man auch

$$a : e = c : f.$$

II. Sind eben so die zwey Proportionen gegeben

$$\left. \begin{array}{l} a : b = c : d \\ \text{und } b : e = f : c \end{array} \right\},$$

so hat man auch

$$a : e = f : d.$$

III. Sind endlich die zwey Proportionen gegeben

$$\left. \begin{array}{l} a : b = c : d \\ \text{und } e : f = d : g \end{array} \right\},$$

so hat man auch

$$ae : bf = c : g,$$

und dieser Satz III. ist unter dem Namen der *Regelquinque* bekannt.

IV. Das Verfahren in III. gibt, wenn man es auf mehrere Proportionen fortsetzt, die sogenannte *Kettenregel* oder den folgenden Satz:

Sind die Proportionen gegeben:

$$a : b = A : B,$$

$$c : d = B : C,$$

$$e : f = C : D,$$

$$g : h = D : E \text{ u. f.},$$

so besteht zwischen diesen Gröſsen auch die Proportion

$$aceg : bdfh = A : E.$$

Neuntes Capitel.

L o g a r i t h m e n.

§. 42. (Exponentialgrößen.) Wenn in dem Ausdrücke

$$y = a^x,$$

wo a eine constante, x und y aber eine veränderliche Gröfse bezeichnet, der Exponent x bekannt oder gegeben ist, so wird man, nach dem Vorhergehenden, immer den entsprechenden Werth von y finden können. So hat man z. B. wenn $a = 2$ ist,

für $x = 2$ den Werth von $y = 4$,

» $x = 3$ » » » $y = 8$ u. f.,

und selbst wenn x irgend ein Bruch, z. B. gleich $\frac{1}{2}$ ist, so wird

$y = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ seyn, eine irrationale Gröfse, deren Werth man aber nach §. 29, II. der Wahrheit so nahe, als man nur will, finden kann, wie wir weiter unten sehen werden.

Wenn aber umgekehrt in dem gegebenen Ausdrücke

$$y = a^x$$

die Gröfse y die bekannte Zahl ist, oder wenn man z. B. die Gleichung hat:

$$2^x = 3,$$

so bietet alles Vorhergehende kein Mittel dar, denjenigen Werth von x zu finden, welcher der Gleichung $2^x = 3$ entspricht.

Man nennt aber solche Ausdrücke, wie a^x , wo der Exponent die unbekannte oder veränderliche Gröfse ist, *Exponentialgrößen*, zum Unterschiede mit den gewöhnlichen *Potenzen*

$$x^a \text{ oder } (1 + x)^a,$$

in welcher der Exponent a constant ist.

Diese Exponentialgrößen bilden, so wie die irrationalen Zahlen, ein eigenes, weitverbreitetes Geschlecht von Gröfßen, das sich von allen anderen wesentlich unterscheidet, und das in der Mathematik eine sehr wichtige Rolle spielt. Man heift sie,

und die mit ihr verwandten, *transcendente* Gröſſen, zum Unterschiede mit den bisher betrachteten, die man *algebraische* Gröſſen zu nennen pflegt.

Um diesen Unterschied besser zu übersehen, wollen wir z. B. in der *Potenz*

$$y = x^a$$

für a die constante Gröſſe 2, und dann für x die auf einander folgenden Werthe $x = 1, 2, 3, 4, \dots$ setzen, wodurch man für die entsprechenden Werthe von $y = 1, 4, 8, 16, \dots$ erhält. Eben so gibt $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ die Werthe $y = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$, wo immer die Werthe von y nach einem constanten und sehr einfachen Gesetze auf einander folgen.

Ähnliche Resultate erhält man auch, wenn man für x dieselben Gröſſen 1, 2, 3, ... aber negativ annimmt u. s. f.

Anders aber verhalten sich die auf einander folgenden Werthe der *Exponentialgröſſe* a^x . Nimmt man in derselben für die constante Gröſſe a z. B. die Zahl -2 , so erhält man

$$\begin{array}{l} \text{für } x = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \dots \\ a^x = -2, \quad +4, \quad -8, \quad +16, \dots \\ \text{und für } x = -1, \quad -2, \quad -3, \quad -4, \dots \\ a^x = -\frac{1}{2}, \quad +\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{8}, \quad +\frac{1}{16}, \dots \end{array}$$

so daſs also hier die positiven Gröſſen mit den negativen abwechseln.

Setzt man aber für x die reciproquen natürlichen Zahlen, oder ist

$$x = 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \dots,$$

so hat man $a^x = -2, \sqrt{-2}, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{-2}, -\sqrt[5]{2}, \dots$

wo sogar die reellen Werthe mit den imaginären wechseln.

Setzt man ferner die Gröſſe a gleich Null, so hat man, so lange x positiv bleibt, wie groſs dasselbe auch werden mag, immer

$$a^x = 0^x = 0.$$

Wird aber x ebenfalls Null, so erhält man

$$a^x = a^0 = 1,$$

und erhält endlich x irgend einen negativen Werth, z. B. $x = -1$, so hat man

$$a^x = \frac{1}{a} = \frac{1}{0} \text{ für } a = 0,$$

oder a^x wird dann unendlich groß (§. 23, II.).

Noch auffallendere Sprünge erhält man, wenn x irgend eine irrationale Gröfse, z. B. wenn $x = \sqrt{2}$ wird. Nach dem oben (§. 30, II.) Erwähnten ist annähernd:

$$\sqrt{2} = 1.41421 \dots$$

Setzt man also wieder die Gröfse $a = +2$, und nimmt man von der vorhergehenden Wurzelgröfse nach und nach immer mehr genäherte Werthe, und bemerkt man, dafs (nach §. 32, II.)

jede Gröfse $a^{\frac{1}{m}}$ immer eine Anzahl von m reeller oder imaginärer Werthe hat, so erhält

$$\begin{array}{llll} \text{für } \sqrt{2} = \frac{14}{10} & \text{die Gröfse } a^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}} & \dots & \text{zehn,} \\ \text{„ } \sqrt{2} = \frac{141}{100} & \text{„ } & \text{„ } & \text{„ } \dots \text{ hundert,} \\ \text{„ } \sqrt{2} = \frac{1414}{1000} & \text{„ } & \text{„ } & \text{„ } \dots \text{ tausend u. f.} \end{array}$$

verschiedene Werthe, ja die wahre Anzahl dieser Werthe wird in der That unendlich groß seyn, da der wahre Werth von $\sqrt{2}$ selbst nur durch einen ohne Ende fortgehenden Bruch angegeben werden kann.

Wäre endlich noch die Gröfse a negativ, und z. B. $a = -2$, und wie zuvor $x = \sqrt{2}$ eine irrationale Gröfse, so hätte man

$$(-2)^{\sqrt{2}},$$

und von diesem Ausdrucke läfst sich nicht einmal angeben, ob er zu den reellen oder zu den imaginären Gröfsen gehört, da man nicht sagen kann, ob $\sqrt{2}$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Diels wird genügen, die Verschiedenheit der transcendenten und algebraischen Gröfsen zu erkennen.

§. 43. (Logarithmen.) Gehen wir wieder zu unserer Gleichung

$$y = a^x$$

zurück. Obschon wir, wie gesagt, den Werth des Exponenten x für jeden gegebenen Werth von y jetzt noch nicht bestimmen können, so ist doch klar, dafs dieser Werth von x , für dasselbe y , seinen Werth mit der constanten Gröfse a ändern werde, dafs er

z. B. ein anderer für $3=2^x$, als für $3=4^x$ oder $3=5^x \dots$ seyn werde. Die gesuchte Gröfse x wird also nicht blofs von y , sondern auch von demjenigen Werthe abhängen, den man der constanten Gröfse a gegeben hat. — Wir wollen im Folgenden annehmen, dafs diese Gröfse a positiv und gröfser, als die Einheit ist, ohne weiter etwas Näheres über ihren absoluten Werth festzusetzen.

Da wir noch sehr oft auf das Problem zurückkommen werden, aus dem Ausdrücke

$$a^x = y$$

die Gröfse x für jedes gegebene a und y zu finden, so wollen wir dieser Gröfse x eine eigene Bezeichnung geben, und sie den *Logarithmus* von y nennen, was wir abkürzend auf folgende Art ausdrücken:

$$x = \text{Log } y.$$

Die constante Zahl a aber, die, als solche, immer denselben, übrigens willkürlichen Werth beybehält, während die beyden Gröfsen x und y sich ändern, wollen wir die *Basis* dieser Logarithmen nennen.

Wäre also z. B. die Basis $a=10$, so hätte man die Gleichung

$$10^x = y,$$

und da $10^0=1$, $10^1=10$, $10^2=100$ u. f. ist, so würde man auch, für diese Basis, haben:

$$\text{Log } 1 = 0,$$

$$\text{Log } 10 = 1,$$

$$\text{Log } 100 = 2,$$

$$\text{Log } 1000 = 3 \text{ u. f.}$$

Wie man aber die Logarithmen der zwischen diesen Zahlen 1, 10, 100, ... fallenden Gröfsen, wie man also $\text{Log } 2$, $\text{Log } 3$, $\text{Log } 4$, ... finden soll, ist jetzt noch nicht bekannt.

Da übrigens die Logarithmen aus der Exponentialgröfse a^x unmittelbar entspringen, so gehören auch sie, nach §. 42, zu den *transcendenten* Gröfsen.

§. 44. (Eigenschaften der Logarithmen.) Wie es sich aber auch mit dieser Bestimmung der Logarithmen einer jeden gegebenen Zahl verhalten mag, so lassen sich doch hier

schon einige sehr merkwürdige Eigenschaften derselben aus den zwey für sie aufgestellten Gleichungen

$a^x = y$ und $x = \text{Log } y$
ableiten.

I. Da nämlich zuerst, für jeden Werth der Basis a , die positiv und > 1 ist, wenn man $x = 0$ setzt, der Werth von $y = 1$ wird, so hat man auch für jede Basis

$$\text{Log } 1 = 0.$$

Und da eben so $y = a$ für $x = 1$ wird, so hat man auch

$$\text{Log } a = 1.$$

Das heist also: »Für jeden Werth der Basis a , oder für jedes logarithmische System, ist der Logarithmus dieser Basis immer gleich der Einheit, und der Logarithmus der Einheit ist immer gleich Null.«

II. Da $a^x = y$ ist, wo x und y willkürliche Zahlen bezeichnen, so ist auch, wenn u und z ähnliche Zahlen ausdrücken,

$$a^u = z.$$

Man hat daher, nach der in §. 43. gegebenen Erklärung eines Logarithmus

$$x = \text{Log } y, \text{ und eben so } u = \text{Log } z.$$

Allein nach §. 29, II. ist

$$a^x \cdot a^u = a^{x+u} \text{ oder}$$

$$a^{x+u} = y \cdot z,$$

also ist auch, nach derselben Erklärung des Logarithmus,

$$x + u = \text{Log } (y \cdot z),$$

das heist, es ist

$$\text{Log } (y \cdot z) = \text{Log } y + \text{Log } z,$$

oder »der Logarithmus eines Products zweyer Zahlen ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Factoren.«

So war in dem vorhergehenden Beyspiele für $a = 10$

$$\text{Log } 10 = 1 \text{ und } \text{Log } 100 = 2,$$

also ist auch

$$\text{Log } 10 \times 100 \text{ oder } \text{Log } 1000 = \text{Log } 10 + \text{Log } 100,$$

das heist, es ist

$$\text{Log } 1000 = 1 + 2 = 3, \text{ wie zuvor.}$$

Es ist für sich klar, daß sich dasselbe auch auf Producte von mehr als zwey Factoren fortsetzen läßt. Denn setzt man statt y die Gröfse $x.y$, was man kann, da x und y ganz willkürliche Gröfsen sind, so gibt die letzte Gleichung

$$\text{Log}(x.y.z) = \text{Log}(x.y) + \text{Log} z,$$

und da bereits $\text{Log}(x.y) = \text{Log} x + \text{Log} y$ ist, so hat man auch

$$\text{Log}(x.y.z) = \text{Log} x + \text{Log} y + \text{Log} z \quad \text{u. s. f.}$$

III. Ganz auf dieselbe Weise ist auch

$$\frac{a^x}{a^u} = a^{x-u} \quad \text{oder} \quad a^{x-u} = \frac{a^x}{a^u},$$

und daher

$$x - u = \text{Log} \frac{a^x}{a^u},$$

oder, was dasselbe ist,

$$\text{Log} \frac{a^x}{a^u} = \text{Log} a^x - \text{Log} a^u,$$

d. h.: »der Logarithmus eines Quotienten ist gleich dem Logarithmus des Dividends, weniger dem des Divisors.«

IV. Endlich ist noch (nach §. 29, II.)

$$(y^x)^u = y^{xu},$$

also auch, nach derselben Erklärung des Logarithmus,

$$u \text{ Log} y^x = xu \text{ Log} y,$$

oder, wenn man beyde Glieder dieses Ausdrucks durch u dividirt,

$$\text{Log} y^x = x \text{ Log} y,$$

d. h.: »der Logarithmus einer Potenz y^x ist gleich dem Producte des Exponenten x in dem Logarithmus der Gröfse y .«

Da in dem letzten Ausdrucke die willkürliche Gröfse x auch ein Bruch seyn kann, so hat man, wenn man $\frac{1}{x}$ statt x setzt,

$$\text{Log} y^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \text{ Log} y,$$

oder, was dasselbe ist (§. 29.),

$$\text{Log} \sqrt[x]{y} = \frac{1}{x} \text{ Log} y,$$

d. h.: »der Logarithmus der x^{ten} Wurzel aus einer jeden Zahl y ist gleich dem x^{ten} Theile des Logarithmus dieser Zahl y selbst.«

Aus dem Vorhergehenden folgt demnach, daß durch die Logarithmen verwandelt wird:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------|
| die Multiplication | in Addition, |
| » Division | » Subtraction, |
| » Erhebung auf ganze Potenzen . . . | » Multiplication, |
| » Ausziehung der Wurzeln | » Division. |

Wenn daher, für irgend eine Basis a , die Logarithmen aller natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, . . . bereits berechnet und in eine Tafel gebracht wären, so würden dadurch alle größeren und oft sehr zeitraubenden Rechnungen ungemein erleichtert werden, so zwar, daß die Arbeit mehrerer Monate auf die einiger Stunden herabgebracht, und dadurch das Leben des Geometers gleichsam vielfach verlängert werden könnte.

Die Logarithmen sind daher eine der nützlichsten und wichtigsten Entdeckungen, und der menschliche Geist darf sich dieser Eroberung auf dem Gebiete der Wissenschaft um so mehr erfreuen, da er sie nicht dem Zufalle oder einer äußeren Einwirkung, sondern da er sie ganz sich selbst verdankt, während ihm bey den meisten anderen seiner Erfindungen, besonders in den Künsten und Manufacturen, die Veranlassung sowohl, als auch selbst den Stoff zu seiner Entdeckung erst von aussen entgegengeführt werden muß.

§. 45. (Vergleichung der Logarithmen verschiedener Systeme.) Das Vorhergehende bezieht sich auf solche Logarithmen, deren Basis eine bestimmte Zahl a ist, und wir haben für die Logarithmen dieses Systems die Gleichungen aufgestellt:

$$y = a^x, \quad x = \text{Log } y \quad \text{und} \quad \text{Log } a = 1.$$

Betrachten wir nun irgend ein anderes System, dessen Basis wir durch e bezeichnen wollen, und bezeichnen wir die Logarithmen dieses zweyten Systems, zum Unterschiede mit jenen, durch das analoge Symbol $\log$, so daß man, wenn y dieselben Zahlen wie vorher bedeutet, für dieses zweyte System die Gleichungen hat:

$$y = e^u, \quad u = \log y \quad \text{und} \quad \log e = 1,$$

wo demnach u eine solche Zahl ist, die für e^u denselben Werth, nämlich y gibt, wie x für a^x gegeben hat.

Wenn man die beyden vorhergehenden Gleichungen

$$x = \text{Log } y \quad \text{und} \quad u = \log y$$

durch einander dividirt, so erhält man

$$\frac{\text{Log } y}{\log y} = \frac{x}{u}$$

für das Verhältniß der Logarithmen derselben Zahl y in den beyden Systemen, deren Basis a und e ist.

Allein dieses Verhältniß der beyden Logarithmen $\text{Log } y$ und $\log y$ kann, wenn es sonst ein veränderliches Verhältniß ist, nur von der Gröfse y selbst abhängig, oder es kann blofs eine Function (§. 34.) von y seyn, die wir, da wir sie noch nicht kennen, allgemein durch $f(y)$ bezeichnen wollen, so dafs man demnach hat:

$$\text{Log } y = f(y) \cdot \log y.$$

Da aber in diesen Ausdrücken die Gröfse y ganz willkürlich ist, so wird man auch statt ihr irgend eine Potenz derselben, z. B. y^n setzen können, so dafs man also auch die Gleichung haben wird:

$$\text{Log } (y^n) = f(y^n) \cdot \log (y^n).$$

Allein nach §. 44, IV. hat man für den Logarithmus eines jeden Systems

$$\text{Log } (y^n) = n \text{Log } y, \quad \text{und eben so}$$

$$\log (y^n) = n \log y,$$

so dafs demnach die vorhergehende Gleichung in die folgende übergeht:

$$\text{Log } y = f(y^n) \cdot \log y,$$

und diese, mit der ersten Gleichung

$$\text{Log } y = f(y) \cdot \log y$$

verglichen, zeigt, dafs

$$f(y^n) = f(y),$$

das heifst, dafs die gesuchte Function $f(y)$ der Art ist, dafs sie ihren Werth nicht ändert, wenn man auch in ihr statt y irgend eine Potenz y^n setzt, wo n eine ganz willkürliche Gröfse bezeichnet. Daraus folgt aber sofort, dafs $f(y)$ von y selbst ganz und gar nicht abhängig seyn kann, dafs also $f(y)$ irgend eine constante Gröfse seyn mufs, die wir gleich m setzen wollen, so dafs man daher hat:

$$\text{Log } \gamma = m \cdot \log \gamma,$$

d. h. also, das Verhältniß der Logarithmen *derselben* Zahlen γ in zwey verschiedenen Systemen ist für alle Zahlen dasselbe, oder ist eine constante Gröfse.

I. Um diese Constante m näher zu bestimmen, so hat man, wenn man die beyden obigen Werthe von γ , nämlich

$$\gamma = a^x \quad \text{und} \quad \gamma = e^u$$

einander gleich setzt:

$$a^x = e^u.$$

Nimmt man von den beyden Gliedern dieser Gleichung die Logarithmen des einen sowohl, als auch des anderen Systems, so hat man

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ Log } a = u \text{ Log } e \\ \text{und } x \log a = u \log e \end{array} \right\}.$$

Da aber, nach dem Vorhergehenden,

$$\frac{x}{u} = m \quad \text{und} \quad \text{Log } a = \log e = 1$$

ist, so gehen die beyden letzten Gleichungen in folgende einfachere über:

$$\left. \begin{array}{l} m = \text{Log } e \\ \text{und } m = \frac{1}{\log a} \end{array} \right\}.$$

wodurch demnach die gesuchte constante Gröfse m auf doppelte Weise bestimmt ist.

Kennt man also bereits den Logarithmus einer Zahl γ in dem einen der beyden Systeme, z. B. in dem ersten, dessen Basis a ist, oder kennt man bereits die Gröfse $\text{Log } \gamma$, so hat man auch sofort den Logarithmus derselben Gröfse γ in dem zweyten Systeme durch die Gleichung

$$\log \gamma = \log a \cdot \text{Log } \gamma = \frac{1}{m} \cdot \text{Log } \gamma,$$

und eben so hat man auch umgekehrt

$$\text{Log } \gamma = \text{Log } e \cdot \log \gamma = m \cdot \log \gamma,$$

und endlich, wie aus diesen beyden Gleichungen unmittelbar folgt:

$$\log a \cdot \text{Log } e = 1.$$

Zehntes Capitel.

Änderungen der Functionen oder Principien der Differentialrechnung.

§. 46. (Erklärung.) Wenn in irgend einem analytischen Ausdruck u , der eine veränderliche Gröſſe x , und überdieß vielleicht noch mehrere constante Gröſſen $a, b, c, \dots$ enthält, oder wenn in irgend einer Function (§. 34.) von x , welche Function wir allgemein durch

$$u = f(x)$$

bezeichnen wollen, diese Stammgröſſe x sich ändert und z. B. in $x + h$ übergeht, so wird auch die Function $f(x)$ sich ändern, oder einen anderen Werth annehmen, und in

$$u' = f(x + h)$$

übergehen, und man wird die auf diese Weise erfolgte Änderung ($u' - u$) der Function erhalten, wenn man diese beyden Werthe u' und u , welche die Function für jene beyden Werthe von x hat, von einander abzieht.

Eben so wird also auch das *Verhältniß* der Änderung ($u' - u$) der Function, zu der Änderung h ihrer Stammgröſſe x gleich seyn

$$\frac{u' - u}{h} \quad \text{oder} \quad \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Hat man z. B., um dieß sogleich durch einen besonderen Fall zu erläutern, die Function

$$u = f(x) = ax^2$$

gegeben, und geht x über in $x + h$, so erhält man

$$u' = f(x + h) = a(x + h)^2,$$

und wenn man die Potenz $(x + h)^2$ (nach §. 21, 1.) entwickelt:

$$u' = a(x^2 + 2hx + h^2).$$

Zieht man von diesem Ausdrücke den früheren Werth des-

selben, oder $u = ax^2$ ab, und dividirt den Rest durch h , so hat man:

$$\frac{u' - u}{h} = 2ax + ah.$$

Dieses Verhältniß $\frac{u' - u}{h}$ der beyden Änderungen, der Function und ihrer Stammgröße, besteht also, wie man sieht, aus zwey Theilen $2ax$ und ah , die wesentlich von einander verschieden sind. Der erste Theil $2ax$ ist nämlich, da er die Größe h nicht mehr enthält, von dieser Änderung der Stammgröße ganz unabhängig, oder er behält immer denselben Werth jener Änderung, h mag groß oder klein gewesen seyn. Nicht so der zweyte Theil oder die Größe ah , die allerdings von h abhängt und die offenbar immer kleiner ist, je kleiner diese erste Änderung h der Stammgröße x selbst genommen wird.

Je kleiner also diese Änderung h wird, desto mehr nähert sich das Verhältniß

$$\frac{u' - u}{h}$$

dem ersten Gliede seines vorhergehenden Ausdrucks, oder desto mehr nähert sich dieses Verhältniß dem Werthe $2ax$, als einer Grenze, welcher dieses Verhältniß, bey immer abnehmendem Werthe von h , immer näher tritt, und welche es offenbar nur dann als in der That erreichend betrachtet werden kann, wenn die Größe h selbst so klein geworden ist, daß sie schon ganz außer unserer Betrachtung fallend angenommen werden kann, oder wenn diese Größe h kleiner noch geworden ist, als jede andere uns noch angebbare Größe, in welchem Zustande dann die Größe h (nach §. 23, II.) eine *unendlich kleine* Größe genannt zu werden pflegt.

Da wir uns mit diesem letzten Zustande von stets abnehmenden Größen fortan öfter beschäftigen werden, so wird es, zur größseren Kürze und Deutlichkeit des Vortrags, angemessen seyn, für diese äußersten Grenzwerte der Größen eine eigene Bezeichnung einzuführen. Wir wollen demnach diese Änderung h der Stammgröße x , wenn sie in jenem Zustand der letzten Abnahme übergegangen, oder wenn sie, in dem so eben aufgestellten Sinne des Wortes, unendlich klein geworden ist, durch das Symbol dx bezeichnen, so daß demnach die durch sie er-

zeugte, im Allgemeinen ebenfalls unendlich kleine Änderung $u' - u$ der Function, auch durch das Zeichen du angezeigt werden wird.

Demnach wird also die vorhergehende Gleichung

$$\frac{u' - u}{h} = 2ax + ah,$$

für den Zustand der letzten Abnahme von h , oder für den Fall, wo diese Änderung h der Stammgröße x kleiner, als jede andere noch angebliche Größe geworden ist, durch den folgenden Ausdruck dargestellt werden:

$$\frac{du}{dx} = 2ax.$$

I. Man pflegt die Größen dx und du das *Differential* der Stammgröße x und ihrer Function u , so wie das Verhältniß $\frac{du}{dx}$ den *Differentialcoefficienten* der Function u zu nennen. Der Differentialcoefficient einer Function ist daher als die äußerste Grenze des Verhältnisses, der Änderung der Function zu der Änderung ihrer Stammgröße, zu betrachten, oder als diejenige Grenze, welcher sich dieses Verhältniß immer mehr nähert, je kleiner die Änderung der Stammgröße x wird, bis es endlich, für eine unendlich kleine Änderung dx dieser Stammgröße, jene Grenze selbst erreicht.

Ganz eben so hat man in einem zweyten Beyspiele, wenn die Function

$$u = ax^3$$

gegeben ist, und wenn in ihr die Größe x wieder in $x + h$ übergeht:

$$u' = a(x + h)^3,$$

oder wenn man entwickelt, wie zuvor:

$$\frac{u' - u}{h} = a(3x^2 + 3hx + h^2).$$

Auch hier ist, wie man sieht, bloß das erste Glied $3ax^2$ des Verhältnisses $\frac{u' - u}{h}$ von der Größe h unabhängig, so daß demnach hier ebenfalls dieses Glied wieder die Grenze seyn wird, welcher sich jenes Verhältniß immer mehr nähert, je kleiner h angenommen wird, und daß daher dieses letzte Grenzverhält-

nifs, wenn h gleich dx oder unendlich klein geworden ist, durch die einfache Gleichung

$$\frac{du}{dx} = 3ax^2$$

ausgedrückt wird, und so fort in allen anderen Fällen.

Man sieht daraus, dafs, wenn auch die beyden Änderungen du und dx , der Function und ihrer Stammgröfse, jede für sich, unendlich klein geworden sind, dafs doch das *Verhältnifs dieser Änderungen* demungeachtet noch eine endliche Gröfse seyn kann, d. h. dafs, wenn auch die Gröfsen du und dx , wegen ihrer Kleinheit, von uns nicht mehr angegeben werden können, da sie in der That, der aufgestellten Erklärung zu Folge, noch unter jeder angebbaren Gröfse stehen sollen, dafs demungeachtet das *Verhältnifs* dieser an sich selbst nicht mehr angebbaren Gröfsen, noch immer sehr wohl angegeben werden kann, oder endlich, dafs, wenn auch die *Differentialien* zweyer Gröfsen, du und dx , unendlich klein sind, doch das *Verhältnifs* derselben oder der *Differentialcoefficient* $\frac{du}{dx}$ noch immer eine endliche Gröfse, deren Werth von uns vollkommen bestimmbar ist, seyn kann.

Diefs vorausgesetzt, wird es nun unsere Aufgabe seyn, diesen Differentialcoefficienten, oder dieses Grenzverhältnifs der Änderung der Function und ihrer Stammgröfse, für jede angegebene Function, z. B. für die Potenz x^a , oder für die Exponentialgröfse a^x , oder für den Logarithmus $\log x$ u. f. zu bestimmen. Diese Bestimmungen machen den Gegenstand der sogenannten *Differentialrechnung* aus. — Ehe wir aber zu diesem Geschäfte übergehen, wird es angemessen seyn, einige Bemerkungen über dasselbe vorzuschicken.

§. 47. (Einfachere Darstellung und Erweiterung des Vorhergehenden.) Das in unserem vorhergehenden ersten Beyspiele erhaltene Grenzverhältnifs

$$\frac{du}{dx} = 2ax$$

läfst sich auch, in Gestalt einer gewöhnlichen Gleichung, auf folgende Art ausdrücken:

$$du = 2ax \cdot dx,$$

in welcher Gleichung a und x endliche, du und dx aber unendlich kleine Gröſſen bezeichnen.

Um aber zu dieser Gleichung zu gelangen, kann man annehmen, daſs sie aus der analogen, früher (in §. 46.) erhaltenen Gleichung:

$$\frac{du}{dx} = (2ax + adx) \quad \text{oder}$$

$$du = (2ax + adx) dx,$$

und zwar dadurch entstanden ist, daſs man, in diesem letzten Ausdrucke, die unendlich kleine Gröſſe adx gegen die endliche $2ax$ weggelassen hat, wie man wohl, der oben aufgestellten Erklärung einer unendlich kleinen Gröſſe zu Folge, berechtigt zu seyn annehmen darf, da die unendlich kleine Gröſſe adx , die kleiner als jede von uns noch angebbare Gröſſe ist, auf die allerdings noch angebliche, endliche Gröſſe $2ax$, keinen für uns mehr bemerkbaren Einfluss äufsern kann, oder da diese beyden Gröſſen

$$2ax \quad \text{und} \quad 2ax + adx,$$

in Beziehung auf die Angabe ihres absoluten Werthes, von uns, der aufgestellten Definition zu Folge, nicht mehr unterschieden werden können.

Auf gleiche Weise haben wir in unserem zweyten Beyspiele des §. 46. aus dem gegebenen Ausdrucke

$$u = ax^3$$

für die Differenz $u' - u$ oder für du erhalten:

$$du = a(3x^2 + 3xdx + dx^2) \cdot dx,$$

einen Ausdruck, den man auch so darstellen kann:

$$du = [3ax^2 + a(3x + dx) \cdot dx] \cdot dx.$$

Läſst man hier wieder die unendlich kleine Gröſſe dx gegen die endliche $3x$ in dem Gliede $(3x + dx)$ weg, so erhält man

$$du = [3ax^2 + 3axdx] \cdot dx,$$

oder, was dasselbe ist:

$$du = 3ax(x + dx) \cdot dx,$$

und daher, wenn man auch hier wieder, analog dasselbe Verfahren anwendend, statt $x + dx$ die Gröſſe x setzt,

$$du = 3ax^2 dx,$$

oder auch

$$\frac{du}{dx} = 3ax^2, \text{ wie zuvor.}$$

Man kömmt daher zu demselben Zwecke, wenn man, wie in §. 46, das Grenzverhältniß der Änderung einer Function zur Änderung ihrer Stammgröße sucht, oder wenn man, wie hier, die Veränderung du einer Function u , die aus einer Änderung dx ihrer Stammgröße x folgt, unter der Voraussetzung sucht, daß man, bey diesem zweyten Verfahren, diese Änderung dx so klein annimmt, daß sie gegen jede andere, endliche, noch angebbare Größe als völlig verschwindend betrachtet, und daher, jener Größe gegenüber, ganz weggelassen werden kann.

Beide Verfahren führen zu demselben Resultate, aber das letzte ist offenbar einfacher und zur Anwendung bequemer, ob schon es übrigens nur als ein, wegen dieser Einfachheit eingeführter, abgekürzter Ausdruck des ersten, gleichsam als eine Redens- oder Schreibart zu betrachten ist, deren man sich, als eines bequemen Mittels zu demselben Zwecke, bedienen kann, wenn man ihr die oben (§. 46.) gegebene Bedeutung zu Grunde legt.

I. Demnach besteht, dieser zweyten Darstellungsweise zu Folge, das *Princip* der Differentialrechnung darin, »daß man »zwey endliche Größen, welche unter sich nur durch eine unendlich kleine Größe verschieden sind, als völlig gleiche Größen betrachtet,« weil man, nach der vorhergehenden Erklärung des Wortes *unendlich klein*, zwischen jenen zwey Größen keinen Unterschied, keine weiter noch angebliche Ungleichheit auffinden kann.

II. Wenn man aber diesen Begriff der unendlich kleinen Größen einmal eingeführt hat, so folgt daraus unmittelbar, daß die Verhältnisse dieser, so wie die der endlichen Größen, unter einander sehr verschieden, und selbst wieder unendlich klein seyn können. Ist z. B. dx eine unendlich kleine Größe, so ist das Verhältniß des Quadrats derselben zu ihr selbst gleich

$$\frac{dx^2}{dx}, \text{ also gleich } dx;$$

d. h. dieses Verhältniß ist selbst wieder unendlich klein, so daß man daher, nach demselben oben aufgestellten Princip, die

Gröfse dx^2 gegen dx weglassen, oder dafs man die beyden Ausdrücke

$$dx + dx^2 \text{ und } dx$$

als nicht mehr unter sich verschieden, sondern als vollkommen identisch betrachten mufs, wie diefs auch schon oben, bey unserem zweyten Beyspiele, geschehen ist, wo man in der Gleichung

$$du = a(3x^2 + 3xdx + dx^2) \cdot dx$$

die Gröfse $3xdx + dx^2$ gleich $3xdx$ angenommen hat. In der That ist auch

$$dx + dx^2 = dx(1 + dx),$$

und da, nach dem erwähnten Princip, $1 + dx = 1$ ist, so mufs auch

$$dx + dx^2 = dx$$

seyn.

Man pflegt aber solche Gröfsen, wie dx^2 , *unendlich kleine Gröfsen der zweyten Ordnung* zu nennen, und diese überhaupt durch d^2x anzudeuten, so dafs demnach Ausdrücke der Form

$$d^2u, \quad dx^2, \quad du \cdot dx \text{ u. f.}$$

als unendlich kleine Gröfsen der zweyten Ordnung anzusehen sind, weil ihr Verhältnifs zu den unendlich kleinen Gröfsen du , dx , dy , . . . der ersten Ordnung selbst wieder unendlich klein ist.

Ganz eben so wird man auch Ausdrücke der Art,

$$d^3u, \quad dx^3, \quad d^2u \cdot dx, \quad du \cdot dx \cdot dy \text{ u. f.}$$

zu den unendlich kleinen Gröfsen der dritten Ordnung zählen u. s. f.

III. Übrigens wird man auf diesen Begriff der unendlich kleinen Gröfsen durch die uns von allen Seiten umgebenden Erscheinungen der Natur gleichsam von selbst geführt, und man kann sie daher keineswegs, wie manche glauben, als blofse Einbildungen betrachten, welche sich die Geometer zu ihren Speculationen ausgedacht haben, und von denen sich, aufser dieser Einbildung, kein reeller Grund nachweisen läfst. So wächst die Zeit durch die Aufeinanderfolge von Momenten, deren Intervalle kleiner sind, als jede andere, noch angebbare, wenn auch noch so kleine Zeit. So wächst die von einem bewegten Körper beschriebene gerade oder krumme Linie auf eine Weise, dafs der

zwischen je zwey nächsten Puncten dieser Linie enthaltene Raum kleiner ist, als jede andere noch angebliche Linie u. f. Aus diesem Grunde wird man auch jene krummen Linien in der Geometrie, unserem aufgestellten Princip gemäß, als Vielecke von unendlich vielen, aber unendlich kleinen, *geradlinigen* Seiten betrachten können, und die auf diese Betrachtungen gegründeten Resultate werden mit denjenigen als identisch zusammenfallen, die unmittelbar aus dem Begriffe der *stetigen* Aufeinanderfolge der Puncte hervorgehen, die ein in Bewegung begriffener, und dadurch diese Linie beschreibender Punct nach und nach einnimmt. — Ein in einem Kreise eingeschriebenes, oder ihm umschriebenes Vieleck wird diesem Kreise desto näher kommen, je kleiner die Seiten dieses Vieleckes sind, und beyde, Kreis und Vieleck, werden als ganz identische Größen zusammenfallen, oder der Unterschied zwischen ihnen wird nicht weiter angegeben werden können, wenn einmal diese Seiten des Vieleckes selbst kleiner, als jede noch angebliche gerade Linie, d. h. wenn diese Seiten unendlich klein seyn werden. — Die Geometrie, die uns auf diese Weise gleichsam von selbst auf die Betrachtung der unendlich kleinen Größen geführt hat, leitet uns auch noch auf den Unterschied, der zwischen diesen unendlich kleinen Größen, in Beziehung auf die oben erwähnten Ordnungen derselben, Statt hat. So muß z. B. der Flächeninhalt einer in allen ihren Dimensionen unendlich kleinen Oberfläche irgend eines Körpers immer wenigstens eine unendlich kleine Größe der *zweyten* Ordnung seyn, weil dieser Flächeninhalt kleiner ist, als das Quadrat der längsten geraden Linie, die man von einem Puncte des Umfanges dieser Oberfläche zu einem anderen ziehen kann. Und eben so muß auch das Volum eines in allen seinen Dimensionen unendlich kleinen Körpers wenigstens eine unendlich kleine Größe der dritten Ordnung seyn, weil dieses Volum kleiner ist, als der Würfel der längsten geraden Linie, die man von einem Puncte des Umfanges dieses Körpers zu einem anderen Puncte dieses Umfanges ziehen kann.

§. 48. (Differential der einfachsten algebraischen Functionen.) Sey zuerst der Ausdruck gegeben

$$u = f(x) = a - bx,$$

6 *

wo a und b constante Größen sind, so hat man, nach dem Vorhergehenden, sofort

$$du = f(x + dx) - f(x) \quad \text{oder}$$

$$du = [a - b(x + dx)] - (a - bx),$$

das heist, man hat

$$du = -b dx,$$

und dieß ist das gesuchte Differential der Function $u = a - bx$, also ist auch ihr Differentialcoefficient

$$\frac{du}{dx} = -b,$$

oder eine constante Gröfse.

I. Ist eben so die Function gegeben

$$u = A - Bx + Cx^2 - Dx^3,$$

wo A , B , C und D constante Größen bezeichnen, so hat man auf dieselbe Weise

$$u + du = A - B(x + dx) + C(x + dx)^2 - D(x + dx)^3.$$

Wenn man diese Potenzen entwickelt, und dann von dem so entwickelten Ausdrücke die gegebene Gleichung

$$u = A - Bx + Cx^2 - Dx^3$$

subtrahirt, so erhält man

$$du = -B dx + C(2x + dx) \cdot dx - D[3x^2 + 3(1 + dx)x \cdot dx] dx.$$

Da aber, nach dem oben aufgestellten Princip der Differentialrechnung, die Größen

$$2x + dx, \quad 3x^2 + 3x dx \quad \text{und} \quad 1 + dx$$

in derselben Ordnung gleich

$$2x, \quad 3x^2 \quad \text{und} \quad 1$$

sind, so hat man auch sofort für das gesuchte Differential:

$$du = -B dx + 2C x dx - 3D x^2 dx,$$

oder für den gesuchten Differentialcoefficienten:

$$\frac{du}{dx} = -B + 2Cx - 3Dx^2.$$

II. Auf dieselbe Weise wird man für

$$u = ax^4, \quad u = bx^5, \dots$$

die Differentialien erhalten

$$du = 4ax^3 dx, \quad du = 5bx^4 dx,$$

so daß man daraus leicht durch Analogie für den Ausdruck

$$u = A + Bx^m$$

das Differential

$$du = mBx^{m-1} dx$$

finden wird, wenn m , wie in allen vorhergehenden Beyspielen, eine positive, ganze Zahl bezeichnet. Wir werden aber bald (§. 51.) sehen, daß dieser Ausdruck auch allgemein, für jede willkürliche Zahl m , geltend ist.

§. 49. (Differential eines Products.) Sey u das Product zweyer veränderlichen Größen x und y , oder sey die Function

$$u = x \cdot y$$

gegeben. Läßt man in ihr die Gröfse x in $x + dx$, und die Gröfse y in $y + dy$ übergehen, so hat man für den so veränderten Werth der gegebenen Function den Ausdruck

$$u + du = (x + dx) \cdot (y + dy),$$

oder wenn man entwickelt:

$$u + du = xy + xdy + ydx + dx \cdot dy.$$

Subtrahirt man von dem letzten Ausdrucke die gegebene Gleichung $u = xy$, und subtrahirt den Rest durch dx , so erhält man

$$\frac{du}{dx} = \frac{xdy}{dx} + y + dy.$$

Da aber, nach dem Vorhergehenden, der Differentialcoefficient $\frac{dy}{dx}$ eine endliche Gröfse ist, so ist auch

$$\frac{xdy}{dx} \text{ sowohl, als auch } y$$

eine endliche, dy aber ist eine unendlich kleine Gröfse, und daher, nach dem erwähnten Princip dieser Rechnungsart:

$$\frac{xdy}{dx} + y + dy = \frac{xdy}{dx} + y,$$

also auch

$$\frac{du}{dx} = \frac{xdy}{dx} + y,$$

so dafs man daher, wenn man alle Glieder dieses Ausdruckes wieder durch dx multiplicirt, für das gesuchte Differential eines Products $u = xy$ erhält:

$$d.(xy) = x.dy + y.dx;$$

es ist daher das Differential eines Products von zwey veränderlichen Factoren gleich der Summe der Producte eines jeden dieser Factoren in das Differential des anderen Factors.

Dieser Satz ist für die gesammte Analysis von der größten Wichtigkeit, und wir werden noch sehr oft Gelegenheit haben, auf ihn wieder zurück zu kommen.

I. Ganz eben so würde man, wenn das Product

$$u = axy$$

gegeben ist, wo a eine constante Gröfse bezeichnet, für das Differential dieses Products erhalten:

$$d.(axy) = a(xdy + ydx).$$

II. Wäre aber das Product

$$u = xyz$$

von drey Factoren gegeben, so kann man das Product von zweyen derselben, z. B. $yz = t$ setzen, wodurch man

$$u = xt,$$

also auch, nach dem Vorhergehenden,

$$du = xdt + tdx$$

erhält. Da aber $t = yz$ ist, so ist, nach derselben Vorschrift, das Differential dieses letzten Products

$$dt = ydz + zdy,$$

so dafs man daher, wenn man diesen Werth von dt in dem vorhergehenden Ausdrucke von du substituirt, für du oder für das Differential des Productes xyz erhält

$$d.(xyz) = xydz + xzdy + yzdx.$$

III. Wäre endlich das Product von mehreren veränderlichen Gröfsen $x, x', x'', x''', \dots$ gegeben, so würde man für das Differential dieses Productes haben:

$$\begin{aligned} d.(xx'x''x'''\dots) &= (x'x''x'''\dots)dx + (xx'x''\dots)dx' \\ &+ (xx'x''\dots)dx'' + (xx'x''x'''\dots)dx''' + \dots, \end{aligned}$$

welchen Ausdruck man auch auf folgende einfachere Weise schreiben kann, indem man alle Glieder desselben durch das gegebene Product $xx'x'' \dots$ dividirt:

$$\frac{d. xx'x''x''' \dots}{xx'x''x''' \dots} = \frac{dx}{x} + \frac{dx'}{x'} + \frac{dx''}{x''} + \frac{dx'''}{x'''} + \dots$$

§. 50. (Differential eines Quotienten.) Ist von dem Ausdrücke

$$u = \frac{x}{y}$$

das Differential zu suchen, so kann man denselben auch so darstellen:

$$x = uy,$$

und von diesem Producte uy ist, nach §. 49., das Differential

$$dx = udy + ydu,$$

woraus folgt

$$du = \frac{dx - udy}{y};$$

oder endlich, wenn man in dem letzten Ausdrücke den Werth von $u = \frac{x}{y}$ wieder herstellt, du oder

$$d. \frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Das Differential eines Bruches ist daher gleich dem Producte des Nenners in das Differential des Zählers, weniger dem Producte des Zählers in das Differential des Nenners, diese Differenz dividirt durch das Quadrat des Nenners.

§. 51. (Differential einer Potenz.) Man suche nun das Differential irgend einer Potenz x^m , wo x eine veränderliche, und m eine beständige, übrigens willkürliche (positive oder negative, ganze oder gebrochene) Zahl bezeichnet (vergl. §. 48, II.).

Obschon uns dieses Differential, seiner Form und seinem Werthe nach, noch ganz unbekannt ist, so werden wir doch annehmen können, daß es die Gestalt

$$d. (x^m) = f(m, x). dx$$

haben müsse, wo $f(m, x)$ irgend eine Function der beyden Grössen m und x bezeichnet, die wir nun näher zu bestimmen suchen wollen.

Da, der Voraussetzung gemäß, die Gröfse m ganz willkürlich ist, so werden wir dafür auch jede andere, z. B. n setzen können, so dafs man daher auch eben so die Gleichung haben wird:

$$d.(x^n) = f(n, x) \cdot dx.$$

Nimmt man von diesen beyden Ausdrücken x^m und x^n das Product, so hat man, nach §. 49.:

$$d.(x^m \cdot x^n) = x^m \cdot d(x^n) + x^n \cdot d(x^m);$$

oder da

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

ist, wenn man in der letzten Gleichung die vorhergehenden Werthe von $d.(x^m)$ und $d.(x^n)$ substituirt:

$$d.x^{m+n} = x^m \cdot f(n, x) dx + x^n \cdot f(m, x) dx \dots (a).$$

Substituirt man aber in der ersten der vorhergehenden Gleichungen, da in ihr m willkürlich ist, statt m die Gröfse $m+n$, so hat man auch, derselben obigen Annahme gemäß:

$$d.x^{m+n} = f(m+n, x) dx \dots (b).$$

Setzt man endlich die beyden Werthe von $d.x^{m+n}$ in den Ausdrücken (a) und (b) einander gleich, so erhält man

$$f(m+n, x) = x^m \cdot f(n, x) + x^n \cdot f(m, x) \dots (I),$$

und diese Gleichung ist es, die uns zu der gewünschten Kenntnifs der Function $f(m, x)$ führen wird.

Nimmt man in dieser Gleichung (I), da m und n ganz willkürliche Gröfsen bezeichnen, $n=m$ an, so erhält man

$$f(2m, x) = 2x^m \cdot f(m, x).$$

Ist aber $n=2m$, so gibt die Gleichung (I)

$$f(3m, x) = x^m \cdot f(2m, x) + x^{2m} \cdot f(m, x),$$

oder da wir bereits $f(2m, x)$ gefunden haben:

$$f(3m, x) = 3x^{2m} \cdot f(m, x).$$

Setzt man dieß fort, so erhält man

$$\text{für } n=m \dots f(2m, x) = 2x^m \cdot f(m, x),$$

$$» \quad n=2m \dots f(3m, x) = 3x^{2m} \cdot f(m, x),$$

$$» \quad n=3m \dots f(4m, x) = 4x^{3m} \cdot f(m, x),$$

$$» \quad n=4m \dots f(5m, x) = 5x^{4m} \cdot f(m, x) \text{ u. f.},$$

woraus sofort folgt, dafs man, wenn r irgend eine ganze, posi-

tive Zahl bezeichnet, den Ausdruck hat

$$f(r m, x) = r x^{(r-1)m} \cdot f(m, x),$$

oder, wenn man beyde Theile dieser Gleichung durch $r m \cdot x^{mr-1}$ dividirt:

$$\frac{f(r m, x)}{r m \cdot x^{mr-1}} = \frac{f(m, x)}{m x^{m-1}}.$$

Allein diese Gleichung zeigt offenbar, daß der Ausdruck

$$\frac{f(m, x)}{m x^{m-1}}$$

von m sowohl, als auch von x ganz unabhängig seyn muß, da der Werth dieses Ausdruckes, der letzten Gleichung zu Folge, ganz unverändert bleibt, wenn man auch in ihm statt m irgend ein Vielfaches $r m$ von m substituirt, obgleich diese Gröfse m in dem erwähnten Ausdrucke nicht blofs als Factor, sondern auch noch als Exponent von x erscheint. Wenn aber dieser Ausdruck

$$\frac{f(m, x)}{m x^{m-1}}$$

von den Gröfsen m und x unabhängig ist, so muß er, da doch nichts, als diese beyden Gröfsen, in ihm vorkommen, irgend einer mit x und m nicht weiter zusammenhängenden, in allen Fällen denselben Werth beybehaltenden, d. h. er muß einer *constanten Gröfse* gleich seyn. Nennen wir A diese Constante, so hat man

$$\frac{f(m, x)}{m x^{m-1}} = A,$$

und es ist nur noch übrig, den absoluten Werth dieser Constante zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke sey für einen speciellen Fall die Gröfse $m=1$, so gibt die erste der obigen Gleichungen

$$d \cdot x^m = f(m, x) \cdot dx,$$

wenn man in ihr $m=1$ setzt:

$$dx = f(1, x) dx \quad \text{oder} \quad f(1, x) = 1.$$

Und eben so gibt auch die letzte der vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{f(m, x)}{m x^{m-1}} = A,$$

wenn man in ihr ebenfalls $m=1$ setzt, da $x^0=1$ ist:

$$f(1, x) = A,$$

woraus daher folgt, daß $A=1$ und daß

$$f(m, x) = m x^{m-1}$$

seyn muß, welchen Werth auch die GröÙe m haben mag.

Substituirt man endlich diesen Werth von $f(m, x)$ in der allerersten der vorhergehenden Gleichungen, so erhält man

$$d.x^m = m x^{m-1} dx,$$

das heißt: *das Differential einer Potenz ist immer gleich dem Producte des Exponenten in die um die Einheit nächst niedere Potenz, und in das Differential der Wurzel dieser Potenz.* Damit stimmt das überein, was wir oben (§. 48, II.) bloß für diejenigen Potenzen gefunden haben, deren Exponenten ganze und positive Zahlen sind.

§. 52. (Differential eines Logarithmus.) Das Differential des Logarithmus irgend einer veränderlichen GröÙe x wird, welches auch sein näher bestimmter Ausdruck seyn mag, die folgende Form haben, wenn man die Logarithmen der Basis a nimmt (§. 43.):

$$d.\text{Log } x = f(x).dx.$$

Da in dieser Gleichung die GröÙe x ganz willkürlich ist, so wird man auch y dafür setzen können, wodurch man eine zweyte Gleichung

$$d.\text{Log } y = f(y).dy$$

erhält. Beyder Gleichungen Summe gibt

$$d. [\text{Log } x + \text{Log } y] = f x . dx + f y . dy.$$

Aber nach der oben (§. 44, II.) aufgestellten Eigenschaft der Logarithmen überhaupt hat man

$$\text{Log } x + \text{Log } y = \text{Log } (xy),$$

und dadurch geht die vorhergehende Gleichung in folgende über:

$$d.\text{Log } (xy) = f x . dx + f y . dy \dots (a).$$

Allein die erste der vorhergehenden Gleichungen gibt auch, wenn man in ihr statt der willkürlichen GröÙe x das eben so willkürliche Product xy setzt:

$$d.\text{Log } (xy) = f(xy) d.(xy);$$

und da (nach §. 49.) für das Differential eines Products

$$d.(xy) = xdy + ydx$$

ist, so kann die unmittelbar vorhergehende Gleichung auch so dargestellt werden:

$$d.\text{Log}(xy) = (xdy + ydx) \cdot f(xy) \dots (b).$$

Setzt man beyde Werthe von $d.\text{Log}(xy)$ aus den Gleichungen (a) und (b) einander gleich, so erhält man

$$[y.f(xy) - fx]dx + [x.f(xy) - fy]dy = 0 \dots (I),$$

und diese Gleichung ist es wieder, die uns die nähere Kenntniss der Function $f(x)$ verschaffen wird.

Setzt man nämlich in der Gleichung (I) die willkürliche Gröfse $y=x$, so erhält man sofort

$$x.f(x^2) = f(x).$$

Setzt man dann in derselben Gleichung (I) die Gröfse $y=x^2$, so gibt sie

$$3x^2.f(x^3) - 2x.f(x^2) - fx = 0,$$

oder da bereits der Werth von $x.f(x^2) = f(x)$ bekannt ist, so hat man auch

$$x^2.f(x^3) = f(x).$$

Setzt man dies fort, so findet man

$$\text{für } y=x \dots x.f(x^2) = f(x),$$

$$» \quad y=2x \dots x^2.f(x^3) = f(x),$$

$$» \quad y=3x \dots x^3.f(x^4) = f(x) \text{ u. s. f.},$$

und diese einfachen Gleichungen zeigen, daß man für jede ganze und positive Zahl r die Gleichung hat

$$x^{r-1}.f(x^r) = f(x),$$

oder auch, wenn man zu beyden Seiten durch x dividirt:

$$x^r.f(x^r) = x.f(x),$$

woraus sofort folgt, daß der Ausdruck

$$x.f(x)$$

sich nicht ändert, wenn man auch statt x irgend eine ganze positive Potenz x^r in ihm substituirt, das heist, daß der Ausdruck $x.f(x)$ ganz unabhängig von x , und daher, wie in §. 51., irgend eine constante Gröfse seyn muß.

Nennt man M diese Constante, so hat man

$$x \cdot f(x) = M \quad \text{oder}$$

$$f(x) = \frac{M}{x},$$

und daher auch für das gesuchte Differential eines Logarithmus den Ausdruck

$$d \cdot \text{Log } x = M \cdot \frac{dx}{x}.$$

Um diese Constante M zu bestimmen, bemerken wir, daß nach §. 45, I. die Größen $\text{Log } x$ und $\log x$, oder daß die Logarithmen derselben Zahl in den beyden Systemen, deren Basis a und e ist, das constante Verhältniß m haben, so daß

$$\text{Log } x = m \cdot \log x$$

ist. Dasselbe Verhältniß wird also auch zwischen den Differentialen dieser Logarithmen bestehen, woraus demnach folgt, daß in dem zweyten Systeme

$$d \cdot \log x = \frac{dx}{x},$$

und daß die vorhergehende Gröfse M mit der in §. 45, I. eingeführten Constante m gleichbedeutend ist, so daß man daher hat

$$m = \text{Log } e \quad \text{oder} \quad m = \frac{1}{\log a}$$

und

$$d \cdot \log x = \frac{dx}{x}, \quad \text{so wie} \quad d \cdot \text{Log } x = \frac{m dx}{x}.$$

§. 53. (Differential einer Exponentialgröfse.) Ist der Ausdruck gegeben

$$y = a^x,$$

so hat man, wenn man davon die Logarithmen in Beziehung auf das erste System nimmt:

$$x = \text{Log } y,$$

und von diesem Ausdrucke ist (nach §. 52.) das Differential

$$dx = \frac{m dy}{y},$$

so daß man daher hat

$$d \cdot y = \frac{y dx}{m};$$

oder, wenn man den Werth von $y = a^x$ wieder herstellt:

$$d \cdot a^x = \frac{a^x dx}{m} = a^x dx \cdot \log a.$$

I. Ist aber $a=e$ die Basis des zweyten Systems, so ist $\log e = 1$, und daher

$$d.e^x = e^x dx.$$

§. 54. (Anwendung des Vorhergehenden.) Wir haben nun die Differentialien eines Products, eines Quotienten, so wie die der Potenzen, der Logarithmen und der Exponentialgrößen, d. h. wir haben die Differentialien aller uns bisher bekannt gewordenen verschiedenen Gattungen von Größen entwickelt. Wenn wir dieselben der bequemern Übersicht wegen zusammenstellen, so hat man

$$\text{I.} \quad d.xy = x dy + y dx,$$

$$\text{II.} \quad d.\frac{x}{y} = \frac{y dx - x dy}{y^2},$$

$$\text{III.} \quad d.x^n = n x^{n-1} dx,$$

$$\text{IV.} \quad d.\log x = \frac{dx}{x} \quad \text{und} \quad d.\text{Log } x = \frac{m dx}{x},$$

$$\text{V.} \quad d.a^x = \frac{a^x dx}{m},$$

$$\text{VI.} \quad d.e^x = e^x dx,$$

$$\text{wo } m = \text{Log } e = \frac{1}{\log a} \text{ ist.}$$

I. Dieß sind die einfachsten Ausdrücke ihrer Art, auf welche sich alle anderen, aus ihnen zusammengesetzten, leicht zurückführen lassen, wie folgende Beyspiele zeigen.

Sey die Function gegeben

$$u = (a + b x^m)^n.$$

Um von ihr das Differential nach den vorhergehenden Vorschriften zu finden, kann man die Größe

$$a + b x^m = y$$

setzen, so daß man also den Ausdruck hat

$$u = y^n,$$

wovon das Differential (nach der Gleichung III) ist:

$$du = n y^{n-1} dy.$$

Da aber, nach derselben Gleichung III

$$dy = m b x^{m-1} dx$$

ist, so hat man, wenn man diesen Werth von dy in dem vorher-

gehenden Ausdruck von du substituirt, und den Werth von y wieder herstellt:

$$du = mn b (a + b x^m)^{n-1} \cdot x^{m-1} dx.$$

Dasselbe Resultat wird man auch, ohne Einführung der Hilfsgröße y , unmittelbar aus dem gegebenen Ausdrucke

$$u = (a + b x^m)^n$$

ableiten können. Man hat nämlich (nach Gl. III)

$$du = n(a + b x^m)^{n-1} \cdot d(a + b x^m),$$

also auch, da $d(a + b x^m) = m b x^{m-1} dx$ ist:

$$du = mn b (a + b x^m)^{n-1} \cdot x^{m-1} dx,$$

wie zuvor.

Auf dieselbe Weise wird man auch finden

$$d \cdot \frac{a+x}{a-x} = \frac{2a dx}{(a-x)^2},$$

$$d \cdot (a+x) \sqrt{a-x} = \frac{(a-3x) dx}{2 \sqrt{a-x}},$$

$$d \cdot \log(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$d \cdot \log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx}{x(1+x^2)},$$

$$d \cdot e^x(x-1) = e^x \cdot x dx,$$

$$d \cdot e^x = e^x \cdot e^x dx$$

Eilftes Capitel.

Entwicklung der Functionen.

§. 55. (Höhere Differentialien.) Da der Differentialcoefficient irgend einer Function von x im Allgemeinen wieder eine Function von x ist, so wird sich derselbe ebenfalls einer neuen Differentiation unterwerfen lassen. Ist z. B. der Ausdruck gegeben

$$u = x^4,$$

so hat man für den Differentialcoefficienten desselben, nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{du}{dx} = 4x^3.$$

Wenn man nun diese GröÙe $u' = 4x^3$ neuerdings differentiirt, so hat man eben so

$$\frac{du'}{dx} = 12x^2.$$

Da aber $u' = \frac{du}{dx}$ ist, so kann man, analog mit dem Vorhergehenden, für du' die Bezeichnung einführen:

$$du' = \frac{d^2u}{dx^2},$$

so dafs man also hat

$$\frac{du'}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2},$$

und daher auch

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 12x^2 \quad \text{oder} \quad d^2u = 12x^2 dx^2,$$

und man nennt, übereinstimmend mit §. 47, II., die GröÙe d^2u das *zweyte Differential* der gegebenen GröÙe u . — Eben so wird man für das dritte Differential d^3u derselben GröÙe erhalten

$$d^3u = 24x dx^3,$$

und für das vierte

$$d^4u = 24 dx^4,$$

während alle folgenden Differentialien $d^5u, d^6u, \dots$ verschwin-

den, wenn man nämlich, wie hier vorausgesetzt wird, das erste Differential dx der Stammgröße der aufgestellten Function als eine gegebene oder unveränderliche Größe betrachtet.

I. Diese Voraussetzung, daß bey dem Übergange zu den höheren Differentialien einer Function das erste Differential der Stammgröße, oder daß überhaupt irgend ein erstes Differential als constant angenommen werde, ist selbst nothwendig, weil sonst die Werthe von $d^2 u$, $d^3 u$, . . . keine bestimmte Bedeutung mehr haben könnten. Hätte man z. B. den Ausdruck

$$\frac{x^2 d^2 x}{d x^2},$$

worin kein erstes Differential als constant angenommen ist, so wird derselbe, wenn man $dx = \text{Const.}$, also $d^2 x = 0$ nimmt, den Werth 0 annehmen. Hätte man aber irgend ein anderes erstes Differential, z. B. $d.x^2 = \text{Const.}$ oder $2x dx = \text{Const.}$ angenommen, so wäre

$$2 dx^2 + 2x d^2 x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 x}{d x^2} = -\frac{1}{x},$$

und daher der Werth des oben gegebenen Ausdruckes gleich $-x$. Eben so würde man für diesen Werth $-2x$ finden, wenn man $d.x^3 = 3x^2 dx = \text{Const.}$ oder $6x dx^2 + 3x^2 d^2 x = 0$ angenommen hätte, u. s. w.

§. 56. (Taylor's Theorem.) Sey $u = f(x)$ als eine Function von x gegeben. Wenn in dieser Function die Stammgröße x in $x + y$ übergeht, welches wird dann der Ausdruck der so veränderten Function $u' = f(x + y)$ seyn?

Die Beantwortung dieser Frage enthält das hier in Rede stehende Theorem.

Um diese Antwort zu geben, bemerken wir zuerst, daß eine willkürliche Function von der Summe zweyer Größen $x + y$, daß z. B. die Function

$(x + y)^m$, oder $\log(x + y)$ oder a^{x+y} u. f. immer denselben Differentialcoefficienten geben wird, welche von den beyden Größen x oder y man auch als die einzige Veränderliche betrachten mag. Ist z. B.

$$u = (x + y)^m$$

gegeben, so hat man, wenn man blofs die Gröfse x als veränderlich sieht:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = m(x+y)^{m-1},$$

und wenn man nur die Gröfse y sich verändern läßt:

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = m(x+y)^{m-1}$$

wie zuvor, so dafs man daher erhält

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dy}\right),$$

wo die Klammern anzeigen, dafs man in $\left(\frac{du}{dx}\right)$ blofs x , so wie in $\left(\frac{du}{dy}\right)$ blofs die Gröfse y als veränderlich angesehen hat.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun annehmen, dafs der gesuchte Ausdruck von $u' = f(x+y)$ sich in eine Reihe entwickeln lasse, die nach Potenzen von y fortgeht. Nehmen wir für diese Reihe, da wir sie noch nicht näher kennen, folgende allgemeine Gestalt an:

$$f(x+y) = L + My^\alpha + Ny^\beta + Py^\gamma + \dots,$$

wo $L, M, N, \dots$ noch unbekannte Factoren von x sind, die kein y weiter enthalten, und wo $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ unbestimmte Exponenten vorstellen, die wir nun, sammt den Coefficienten $L, M, N, \dots$ zu bestimmen suchen wollen.

Man sieht zuerst von selbst, dafs keiner dieser Exponenten negativ seyn kann. Denn wenn z. B. das zweyte Glied jener Entwicklung die Form

$$My^{-\alpha} = \frac{M}{y^\alpha}$$

hätte, so würde für $y=0$ die zweyte Seite des für $f(x+y)$ aufgestellten Ausdruckes unendlich grofs werden, während doch die erste Seite, oder die Gröfse $f(x+y)$ selbst, nur in $f(x)$ übergeht, was unmöglich ist.

Wenn aber alle Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ positiv sind, so erhält man, wenn man $y=0$ setzt, was man darf, da y als eine ganz unbestimmte Gröfse alle Werthe haben, also auch gleich Null seyn kann, sofort

$$f(x) = L,$$

wodurch daher bereits der erste Coefficient L der oben aufgestellten Reihe bestimmt ist.

Bildet man dann den Differentialcoefficienten dieser Entwicklung der Gröfse $f(x+\gamma)$, und zwar so, daß man zuerst bloß x , und dann bloß γ als eine veränderliche Gröfse betrachtet, so erhält man

$$\left(\frac{dL}{dx}\right) + \left(\frac{dM}{d\gamma}\right)\gamma^\alpha + \left(\frac{dN}{d\gamma^2}\right)\gamma^\beta + \left(\frac{dP}{d\gamma^3}\right)\gamma^\gamma + \dots,$$

und eben so, nach §. 51.:

$$\alpha M\gamma^{\alpha-1} + \beta N\gamma^{\beta-1} + \gamma P\gamma^{\gamma-1} + \dots,$$

und diese beyden Ausdrücke müssen, der oben vorausgeschickten Bemerkung zu Folge, einander völlig gleich seyn, welches auch der Werth von γ seyn mag. Diese Gleichheit kann aber offenbar nur dann Statt finden, wenn in beyden Ausdrücken gleiche Exponenten von γ vorkommen. Allein wenn in dem ersten Ausdrücke diese Exponenten steigend geordnet sind, so daß β größer als α , γ größer als β u. f. ist, so sind sie auch in dem zweyten Ausdrücke steigend, und man hat daher

$$\alpha - 1 = 0, \alpha = \beta - 1, \beta = \gamma - 1, \gamma = \delta - 1 \text{ u. f.},$$

das heist, man hat

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, \delta = 4 \text{ u. f.}$$

Substituirt man diese Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ in den erwähnten beyden Ausdrücken, und setzt sie dann, da sie nach dem Vorhergehenden identisch sind, einander gleich, so erhält man die Gleichung

$$0 = \left[M - \left(\frac{dL}{d\gamma}\right)\right] + \left[2N - \left(\frac{dM}{d\gamma^2}\right)\right]\gamma + \left[3P - \left(\frac{dN}{d\gamma^3}\right)\right]\gamma^2 + \left[4Q - \left(\frac{dP}{d\gamma^4}\right)\right]\gamma^3 + \dots,$$

und dieser Ausdruck soll für *alle* Werthe von γ gleich Null seyn. Diefs kann aber nach §. 34, III. nur dann Statt haben, wenn die einzelnen Factoren der Potenzen

$$\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \dots$$

jeder für sich gleich Null sind, das heist, wenn man die Bedingungsgleichungen hat:

$$M = \left(\frac{dL}{dx} \right),$$

$$N = \frac{1}{2} \left(\frac{dM}{dx} \right),$$

$$P = \frac{1}{3} \left(\frac{dN}{dx} \right),$$

$$Q = \frac{1}{4} \left(\frac{dP}{dx} \right) \text{ u. f.}$$

Es wurde aber bereits zuvor

$$L = f(x)$$

gefunden, also ist auch, wenn man diesen Werth von L in der ersten der vorhergehenden Bedingungsgleichungen substituirt:

$$M = \left(\frac{d f x}{dx} \right),$$

und dadurch ist auch der zweyte der obigen Coefficienten $L, M, N, \dots$ bestimmt. Es ist nämlich dieser zweyte Coefficient M nichts anderes, als der erste Differentialcoefficient der gegebenen Function $f(x)$.

Substituirt man dann diesen Werth von M in der zweyten unserer Bedingungsgleichungen, so erhält man, vermöge der oben (§. 55.) eingeführten Bezeichnung der höheren Differentia-
lien, wenn das erste Differential dx der Stammgröße x constant ist:

$$N = \frac{1}{2} \left(\frac{dM}{dx} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d \left(\frac{d f x}{dx} \right)}{dx} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 f x}{dx^2} \right),$$

wodurch auch der dritte unserer Factoren N bestimmt ist.

Ganz eben so erhält man für die übrigen

$$P = \frac{1}{3} \left(\frac{dN}{dx} \right) = \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{d^3 f x}{dx^3} \right),$$

$$Q = \frac{1}{4} \left(\frac{dP}{dx} \right) = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{d^4 f x}{dx^4} \right) \text{ u. f.}$$

Substituirt man daher die gefundenen Werthe von $L, M, N, \dots$ in den oben für $f(x+y)$ aufgestellten Ausdruck, so erhält man

$$f(x+y) = f x + y \left(\frac{d f x}{dx} \right) + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{d^2 f x}{dx^2} \right) + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{d^3 f x}{dx^3} \right) + \dots (\Delta),$$

oder auch, wenn man wieder, der Kürze wegen,

$$fx = u \quad \text{und} \quad f(x+y) = u'$$

setzt:

$$u' = u + y \left(\frac{du}{dx} \right) + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{d^3 u}{dx^3} \right) + \dots \quad (\text{A}).$$

I. Von dieser Reihe, die nach ihrem Erfinder unter der Benennung des *Theorems von Taylor* bekannt ist, ist das einfache Gesetz des Fortganges der Glieder für sich klar, und sie zeigt uns die zwey sehr merkwürdigen Eigenschaften der Entwicklung einer jeden Function $f(x)$, wenn man in ihr die Stammgröße x in $x+y$ übergehen läßt: daß erstens diese Entwicklung durch eine Reihe dargestellt wird, die nach den natürlichen Potenzen $0, 1, 2, 3, \dots$ der Größe y fortgeht, und daß zweytens jedes einzelne Glied aus dem ihm unmittelbar vorhergehenden ganz auf dieselbe Art und durch dasselbe Verfahren abgeleitet wird, wie dieses vorhergehende Glied selbst wieder aus dem ihm vorhergehenden entstanden ist. Das zweyte Glied ist nämlich der Differentialcoefficient des ersten, multiplicirt in die Größe y ; das dritte ist eben so das Differential des zweyten, multiplicirt in $\frac{1}{2}y$; das vierte ist das Differential des dritten, multiplicirt in $\frac{1}{3}y$ u. s. f., so daß es daher schon genügt, von jeder gegebenen Function $f(x)$ das erste Differential zu kennen, um daraus auch sofort die Entwicklung von $f(x+y)$ abzuleiten, wo y jede willkürliche, constante oder veränderliche Größe bezeichnet. Aus dieser Ursache haben wir auch in dem vorhergehenden zehnten Capitel das erste Differential der verschiedenen Gattungen von Functionen

$$f(x) \dots x^m, \log x, a^x, \dots$$

die wir bisher kennen gelernt haben, aufgesucht, um sie, wie wir sogleich näher sehen werden, zur Entwicklung der Function $f(x+y)$ zu verwenden.

II. Bemerken wir noch, daß, wenn in der gegebenen Function $f(x)$ die Größe x , statt zu wachsen, wie wir bisher angenommen haben, um die Größe y abnimmt, daß dann diese Größe y in der Gleichung (A) negativ genommen wird, so daß man also für den so veränderten Zustand der Function $f(x)$ hat

$$f(x-y) = fx - y \left(\frac{d \cdot fx}{dx} \right) + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{d^2 \cdot fx}{dx^2} \right) - \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{d^3 \cdot fx}{dx^3} \right) + \dots$$

III. Ist endlich der Zuwachs der Stammgröße x , den wir bisher allgemein durch γ bezeichnet haben, gleich dem Differential dx dieser Stammgröße selbst, so wird man in der Gleichung (A) die Größe $\gamma = dx$ setzen, wodurch man erhält

$$f(x+dx) - fx = d.f x + \frac{1}{1.2} d^2.f x + \frac{1}{1.2.3} d^3.f x + \dots,$$

oder auch, nach dem zweyten Ausdrücke der Gleichung (A):

$$u' - u = du + \frac{1}{1.2} d^2 u + \frac{1}{1.2.3} d^3 u + \dots,$$

und *dies* ist demnach der *vollständige* Zuwachs der Function $u = fx$, wenn x in seinen nächstfolgenden Werth $x + dx$ übergeht. Da aber jedes Glied dieser Reihe gegen sein nächstvorhergehendes unendlich klein ist, so werden, dem oben (§. 47, I.) aufgestellten Princip der Differentialrechnung gemäß, alle Glieder dieser Reihe, bis auf das erste, verschwinden, wodurch man erhält

$$f(x+dx) - fx = d.f x$$

oder

$$u' - u = du, \text{ wie zuvor.}$$

§. 57. (Maclaurin's Lehrsatz.) Wenn man in der Reihe (A) des vorhergehenden §. 56. sowohl in dem Ausdrücke $f(x)$, als auch in den Differentialcoefficienten

$$\frac{d.f x}{d x}, \frac{d^2.f x}{d x^2}, \frac{d^3.f x}{d x^3}, \dots$$

nach vollbrachter Differentiation, die Stammgröße $x = 0$ setzt, und wenn man, der Kürze wegen, die dieser Annahme von $x = 0$ entsprechenden Werthe von

u	oder	$f x$	durch	$U,$
$\frac{d u}{d x}$	»	$\frac{d . f x}{d x}$	»	$U',$
$\frac{d^2 u}{d x^2}$	»	$\frac{d^2 f x}{d x^2}$	»	U'' u. f.

bezeichnet, so geht die Reihe (A), da jetzt in ihr die Größe $f(x+\gamma)$ gleich $f(\gamma)$ wird, in folgende über:

$$f(\gamma) = U + \gamma . U' + \frac{\gamma^2}{1.2} . U'' + \frac{\gamma^3}{1.2.3} . U''' + \dots$$

Da dieser Ausdruck für jeden willkürlichen Werth von γ

Statt hat, und da die Größen $U, U', U'', \dots$ kein y enthalten, so kann man in demselben auch x statt y setzen, so daß man demnach für jede gegebene Function $u = f(x)$ von x den Ausdruck hat

$$u = f(x) = U + x \cdot U' + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot U'' + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot U''' + \dots \quad (B),$$

wo wieder $U, U', U'', \dots$ die Werthe von $u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \dots$ für den Fall $x=0$ bezeichnen.

Dieser Ausdruck, der, wie man sieht, nur eine Modification des *Taylor'schen* Theorems ist, wird der Lehrsatz *Maclaurin's* genannt.

Beide Theoreme sind von dem wichtigsten Einflusse auf das ganze Gebiet der mathematischen Analysis, besonders aber auf die Entwicklung der verschiedenen Functionen, wie wir sogleich näher zeigen wollen.

§. 58. (Entwicklung des Binoms.) Sey die Function

$$u = f(x) = x^n$$

gegeben, wo x eine veränderliche, und n eine constante willkürliche Zahl bezeichnet. Man suche den Werth dieser Function, wenn die Stammgröße x derselben in $x+y$ übergeht, oder man suche

$$u = f(x+y) = (x+y)^n.$$

Nach §. 51. hat man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = nx^{n-1},$$

und wenn man von diesem Ausdrucke wiederholt das Differential nimmt, und dx constant voraussetzt:

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = n(n-1)x^{n-2},$$

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) = n(n-1)(n-2)x^{n-3} \text{ u. f.}$$

Substituirt man diese Werthe von $\left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \dots$ in der Gleichung (A) des §. 56., so erhält man

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3}y^3 + \dots \quad (I),$$

und diese Entwicklung der Function $(x + y)^n$ ist unter dem Namen von *Newton's Binom* bekannt.

Das Gesetz des Fortganges der Reihe ist auch hier für sich klar. So ist das nächstfolgende oder vierte Glied, wenn das erste das 0^{te} heisst:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4} y^4,$$

und so ist auch, wenn r irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet, das r^{te} Glied dieser Reihe

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-[r-1])}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)r} \cdot x^{n-r} y^r.$$

Man sieht, daß diese Reihe abbricht oder endlich ist, wenn n eine ganze, positive Zahl ist.

I. Setzt man in dem vorhergehenden Ausdrucke für n nach der Ordnung die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, . . . so hat man für $x = 1$

$$\begin{aligned} (1+y) &= 1+y, \\ (1+y)^2 &= 1+2y+y^2, \\ (1+y)^3 &= 1+3y+3y^2+y^3, \\ (1+y)^4 &= 1+4y+6y^2+4y^3+y^4, \\ (1+y)^5 &= 1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5, \\ (1+y)^6 &= 1+6y+15y^2+20y^3+15y^4+6y^5+y^6, \end{aligned}$$

welche Reihen, selbst wenn ihre allgemeine Form durch das Vorhergehende noch nicht gegeben wäre, sich leicht fortsetzen lassen, da jedes Glied gleich dem zunächst über ihm stehenden und dem diesem vorhergehenden Gliede ist. So ist

$$\begin{aligned} 6 &= 3 + 3, \\ 10 &= 6 + 4, \\ 15 &= 10 + 5 \text{ u. f.} \end{aligned}$$

II. Ist die GröÙe y negativ, so erhält man

$$(x-y)^n = x^n - nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}y^2 - + \dots$$

III. Setzt man in der gefundenen Entwicklung

$$y = \frac{ax}{1-a},$$

also auch

$$x+y = \frac{x}{1-a},$$

so hat man

$$(x+y)^n = x^n \cdot (1-a)^{-n}.$$

Es ist aber, wenn man in (I) die Gröfse $x=1$, $y=-a$ und $n=-n$ setzt:

$$(1-a)^{-n} = 1 + na + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \dots,$$

also ist auch, wenn man den Werth von $a = \frac{y}{x+y}$ wieder herstellt:

$$(x+y)^n = x^n \cdot \left[1 + nX + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} X^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} X^3 + \dots \right],$$

wo $X = \frac{y}{x+y}$ gesetzt worden ist. Diese Reihe bricht ab, wenn n eine ganze negative Zahl ist, und sie convergirt oft viel schneller, als die vorhergehende Reihe (I).

IV. Ist $x=y=1$, so gibt die Reihe (I)

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Die Summe der Coefficienten des *Newton'schen* Binoms ist also gleich 2^n .

Ist aber $x=y=1$, und setzt man statt n die Gröfse $-n$, so gibt dieselbe Reihe (I)

$$\frac{1}{2^n} = 1 - n + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Ist endlich $x=1$ und $y=-1$, so hat man für jeden Werth von n :

$$0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

§. 59. (Ausziehung der Wurzeln.) Mit Hülfe des vorhergehenden Satzes wird man von jeder gegebenen Zahl A irgend eine Potenz derselben, also auch, wenn der Exponent dieser Potenz eine gebrochene Zahl ist, die *Wurzel* der Zahl A , und somit den Werth aller irrationalen Zahlen (§. 30.) angeben können.

Es war nämlich die Gleichung (I)

$$(x+y)^n = x^n \cdot \left[1 + n\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \dots \right].$$

Man wird daher jede Zahl A , aus welcher man z. B. die zweyte oder die Quadratwurzel ziehen soll, in zwey Theile

$$a^2 + b$$

so zerlegen, dafs der erste Theil ein vollkommenes oder bekanntes Quadrat, und dafs der zweyte Theil gegen den ersten sehr klein ist. Denn setzt man

$$c = \frac{b}{a^2},$$

so geht der vorhergehende Ausdruck in folgenden über:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} = a \left[1 + \frac{1}{2}c - \frac{1}{8}c^2 + \frac{1}{16}c^3 - \frac{5}{128}c^4 + \frac{7}{256}c^5 - \frac{31}{1024}c^6 + \dots \right].$$

Eben so wird man, um aus einer gegebenen Zahl A die Kubikwurzel auszuziehen, diese Zahl in zwey Theile

$$a^3 + b$$

so theilen, dafs der erste Theil ein vollkommener Würfel, und dafs der zweyte gegen den ersten sehr klein ist. Setzt man dann

$$c = \frac{b}{a^3},$$

so hat man

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{a^3 + b} = a \left[1 + \frac{1}{3}c - \frac{1}{9}c^2 + \frac{5}{81}c^3 - \frac{10}{243}c^4 + \frac{22}{6561}c^5 - \frac{154}{531441}c^6 + \dots \right],$$

und so fort für alle anderen Wurzeln.

Um dies durch ein Beyspiel zu zeigen, wollen wir die Quadratwurzel von 2 suchen. Setzt man in einer ersten Näherung $a=1$ und $b=1$, also auch $c=1$, so hat man

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \text{ oder nahe } \sqrt{2} = 1.4.$$

Sey daher in einer zweyten Näherung $a=1.4$, also auch $a^2=1.96$, und sonach $b=0.04$ und $c = \frac{0.04}{1.96} = \frac{1}{49}$, so hat man

$$\sqrt{2} = 1.4 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{49}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{49}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{49}\right)^3 - \dots \right],$$

eine viel schneller convergirende Reihe, als zuvor.

Wenn man diese Brüche in Decimalbrüche verwandelt, so ist

$$\sqrt{2} = 1.4 \left\{ \begin{array}{l} + 0.010 \ 2041 \\ - 0.000 \ 0521 \\ + 0.000 \ 0005 \end{array} \right\} \quad \text{oder} \quad \sqrt{2} = 1.4 \{ 1.0101525 \},$$

so daß man daher hat

$$\sqrt{2} = 1.4142135,$$

und dieser Werth, wie man sieht, bis auf die sechste Decimalstelle inclus. genau.

Will man noch weiter gehen, so kann man $a = 1.414213$ setzen, woraus folgt

$$a^2 = 1.99999 \ 8409369, \text{ also auch}$$

$$b = 0.000001 \ 590631 \text{ und}$$

$$c = \frac{b}{a^2} = 0.000000 \ 795316 \ 132527,$$

so daß man daher die folgende sehr schnell convergirende Reihe erhält:

$$\sqrt{2} = 1.414213 \left\{ \begin{array}{l} + 0.000000 \ 397658 \ 0662636 \\ - 0.000000 \ 000000 \ 0790667 \\ + 0.000000 \ 000000 \ 0000003 \end{array} \right\}$$

oder

$$\sqrt{2} = 1.414213 \{ 1.000000 \ 397657 \ 9871972 \},$$

oder endlich

$$\sqrt{2} = 1.414213 \ 562373 \ 095048$$

noch in der letzten oder 18^{ten} Decimalstelle genau.

Eben so erhält man

$$\sqrt{3} = 1.732050 \ 807569,$$

woraus man dann durch einfache Rechnung auch findet

$$\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}, \quad \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \text{ so wie}$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ u. f.}$$

Eben so hat man endlich zur Übung in solchen Rechnungen:

$$\sqrt[10]{10} \text{ oder } 10^{\frac{1}{10}} = 1.25892 \ 54118 \dots$$

$$10^{\frac{1}{100}} = 1.02329 \ 29923 \dots$$

$$10^{\frac{1}{1000}} = 1.00230 \ 52381 \dots \text{ u. f.}$$

§. 60. (Entwicklung der Logarithmen.) Sey die Function gegeben

$$u = \text{Log}(1+x),$$

so hat man, nach §. 52.:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{m}{1+x},$$

also auch

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = -\frac{m}{(1+x)^2}, \quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) = \frac{2m}{(1+x)^3},$$

$$\left(\frac{d^4u}{dx^4}\right) = -\frac{2 \cdot 3m}{(1+x)^4} \text{ u. f.}$$

Setzt man in allen diesen Ausdrücken die Gröfse $x=0$, so erhält man, nach *Maclaurin's* Theorem, da $\text{Log } 1=0$ ist:

$$U=0, \quad U'=m, \quad U''=-m, \quad U'''=2m, \quad U''''=-2 \cdot 3m, \dots$$

also auch, wenn man diese Werthe von $U, U', U'', \dots$ in der Reihe (B) des §. 57., das heißt, in dem Ausdrucke

$$u = U + xU' + \frac{x^2}{1 \cdot 2}U'' + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}U''' + \dots$$

substituirt:

$$\text{Log}(1+x) = m\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) \dots (C),$$

und diefs ist die schöne und einfache Reihe, welche den Logarithmus jeder Zahl $(1+x)$ durch diese Zahl x selbst ausdrückt.

I. Man kann der gefundenen Reihe mehrere verschiedene Gestalten geben, die sie zur Berechnung der Logarithmen bequemer machen.

Setzt man z. B. in ihr statt der willkürlichen Gröfse x die Gröfse $-x$, so erhält man

$$\text{Log}(1-x) = -m\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right).$$

Subtrahirt man aber diese beyden Reihen von einander, und bemerkt man, dafs nach §. 44, III.

$$\log y - \log z = \log \frac{y}{z}$$

ist, so hat man

$$\text{Log} \frac{1+x}{1-x} = 2m\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right\}.$$

Setzt man endlich in dem letzten Ausdrucke statt x die

Gröfse $\frac{y}{2x+y}$, so erhält man

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{x+y}{x},$$

so dafs man daher hat:

$$\begin{aligned} & \text{Log}(x+y) \\ = & \text{Log } x + 2m \left\{ \left(\frac{y}{2x+y} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{2x+y} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{y}{2x+y} \right)^5 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

§. 61. (Entwicklung der Exponentialgröfßen.)

Ist endlich noch die dritte der oben erwähnten Functionen, oder ist die Exponentialgröfse

$$u = a^x$$

gegeben, so hat man (nach §. 53.)

$$\left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{1}{m} \cdot a^x, \text{ also auch}$$

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \frac{1}{m^2} \cdot a^x, \quad \left(\frac{d^3 u}{dx^3} \right) = \frac{1}{m^3} \cdot a^x \text{ u. f.}$$

und wenn man in diesen Ausdrücken die Gröfse $x=0$ setzt,

$$U = 1, \quad U' = \frac{1}{m}, \quad U'' = \frac{1}{m^2}, \quad U''' = \frac{1}{m^3} \text{ u. f.,}$$

so dafs man daher nach *Maclaurin's* Theorem (§. 57, Gleichung B) erhält:

$$a^x = 1 + \left(\frac{x}{m} \right) + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{m} \right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x}{m} \right)^3 + \dots \text{ (D),}$$

und diefs ist die gesuchte Entwicklung der Potenz a^x durch ihren veränderlichen Exponenten x .

§. 62. (Bestimmung der vorhergehenden Zahl m .)

Wir haben bereits oben (§. 45, I.) gesehen, dafs das Verhältnifs der Logarithmen derselben Zahl x , in zwey verschiedenen Systemen, ein *constant*es Verhältnifs zu einander haben, welches Verhältnifs wir a. a. O. durch die Zahl m bezeichnet haben, so dafs

$$\text{Log } x = m \cdot \log x$$

ist, wenn durch die beyden Symbole *Log* und *log* die Logarithmen von zwey Systemen bezeichnet werden, deren Basis a und e sind, für welche man also den Werth von $\text{Log } a$ in dem ersten, und von $\log e$ in dem zweyten Systeme, der Einheit gleich ist.

Da es unzählige Systeme von Logarithmen gibt, indem jede willkürliche Zahl als die Basis eines solchen Systems angenommen werden kann, so wird es von unserer Wahl abhängen, eines derselben gleichsam vorzugsweise zu betrachten, und auf dasselbe alle anderen zu beziehen.

Die Gleichung (C) des §. 60. gab für den allgemeinen Ausdruck des Logarithmus in jedem Systeme

$$\text{Log}(1+x) = m \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right).$$

Da die Gröfse m , dem Vorhergehenden zu Folge, eine beständige Zahl ist, deren Werth aber unserer Wahl überlassen bleibt, und da es am einfachsten und natürlichsten ist, diese Zahl m gleich der Einheit anzunehmen, so wollen wir auch die unter dieser Annahme entstehenden Logarithmen die *natürlichen* nennen, und sie durch das zweyte der oben erwähnten Symbole, oder durch *log* bezeichnen, so daß man daher für diese natürlichen Logarithmen, deren Basis wir, wie zuvor, durch e anzeigen wollen, nach §. 60. die Ausdrücke haben wird:

$$\begin{cases} \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ \log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right) \text{ u. f.} \end{cases}$$

während wir für jedes andere System, dessen Basis a ist, die zu diesem System gehörenden Logarithmen durch die in §. 60. gegebenen, unveränderten Ausdrücke bestimmen:

$$\begin{cases} \text{Log}(1+x) = m \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) \\ \text{Log} \frac{1+x}{1-x} = 2m \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) \text{ u. f.} \end{cases}$$

Wir wollen diese letzten, durch *Log* bezeichneten Logarithmen, zum Unterschiede von den natürlichen, die *gewöhnlichen Logarithmen* nennen.

Dies vorausgesetzt, werden wir nur noch anzugeben haben, wie die Gröfsen a und m von einander abhängen, oder welches der Factor m ist, durch welchen man alle natürlichen Logarithmen, deren Basis e ist, multipliciren muß, um dadurch die gewöhnlichen Logarithmen, deren Basis a ist, zu erhalten.

I. Zu diesem Zwecke wollen wir in der Reihe (D) des §. 61. die Gröfse $x=1$ setzen, wodurch man erhält:

$$a = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{1 \cdot 2 m^2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 m^3} + \dots,$$

und dieser Ausdruck gibt den Werth der Basis a des gewöhnlichen Logarithmensystems, wenn sein Factor, oder, wie man zu sagen pflegt, wenn sein *Model* m bekannt ist.

II. Setzt man eben so in der Gleichung (C) des §. 60. die Gröfse $x=a-1$ oder $1+x=a$, so erhält man, da für das gewöhnliche System $\text{Log } a=1$ ist:

$$\frac{1}{m} = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \dots,$$

und dieser Ausdruck gibt den *Model* m des Systems, wenn die Basis a desselben bekannt ist.

III. Wegen der bey uns eingeführten decadischen Art zu zählen (§. 16, II.), hat man die Zahl 10 für die Basis der gewöhnlichen Logarithmen, mit welchen wir zu rechnen pflegen, gewählt. Setzt man also $a=10$, so gibt die letzte Reihe

$$\frac{1}{m} = 9 - \frac{1}{2}9^2 + \frac{1}{3}9^3 - \frac{1}{4}9^4 + \dots$$

Diese Reihe convergirt erst in ihren höheren Gliedern, und auch da anfangs nur langsam. Wir werden aber bald ein anderes Mittel finden, den Werth der Gröfse m auf eine bequemere Weise zu bestimmen. Berechnet man indeß eine gröfsere Anzahl Glieder der letzten Reihe, so erhält man

$$\frac{1}{m} = 2.302585 \ 092994 \ 045684,$$

und daher auch

$$m = 0.434294 \ 481903 \ 251828.$$

Mit diesem Factor m wird man daher die natürlichen Logarithmen jeder Zahl multipliciren, um die gewöhnlichen Logarithmen derselben Zahl zu erhalten.

Bemerken wir noch, dafs dieser Werth von m zugleich der Werth des gewöhnlichen Logarithmus von e , und der reciproke Werth des natürlichen Logarithmus von a ist, da man, nach §. 45, I. hat:

$$m = \text{Log } e \quad \text{und} \quad \frac{1}{m} = \log a.$$

§. 63. (Bestimmung der vorhergehenden Zahl e .)

Noch ist die Bestimmung des Werthes von e oder von der Basis der natürlichen Logarithmen übrig.

Da aber, nach dem Vorhergehenden, die Gröfse a in e übergeht, wenn m gleich der Einheit ist, so gibt die Gleichung (D) des §. 61, wenn man in ihr $m=1$ und daher $a=e$ setzt,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots \quad (\text{E}),$$

also auch, wenn man in diesem Ausdrücke $x=1$ setzt,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

Berechnet man eine gröfsere Anzahl von Gliedern der letzten Reihe, so findet man

$$e = 2.718281\ 828459\ 045235 \dots$$

eine sehr wichtige Zahl, auf die wir in der Folge noch öfter zurückkommen werden.

§. 64. (Berechnung der Logarithmen und Gebrauch der logarithmischen Tafeln.) Nachdem wir in dem Vorhergehenden die Theorie der Logarithmen vollständig kennen gelernt haben, wollen wir nun auch zu dem Gebrauch derselben übergehen, wie er bey unseren Rechnungen erfordert wird. Dazu aber ist es vor allem nothwendig, die numerischen Werthe dieser Logarithmen für alle natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... in einer Tafel aufgestellt zu haben. Diese zu finden, werden uns die vorhergehenden Ausdrücke mehr als ein Mittel an die Hand geben.

Setzt man z. B. in der letzten Gleichung des §. 60, I. die Gröfse $x=y=1$, und nimmt man auch $m=1$, so hat man für die natürlichen Logarithmen

$$\log(x+y) = \log x + 2 \left\{ \left(\frac{y}{2x+y} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{2x+y} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{y}{2x+y} \right)^5 + \dots \right\}$$

oder

$$\log 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \dots \right),$$

das heifst, wenn man diese Brüche in Decimalbrüche auflöst:

$$\log 2 = 0.69314\ 71806.$$

Eben so gibt $x=2$ und $y=1$

$$\log 3 = \log 2 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \dots \right) \text{ oder}$$

$$\log 3 = 1.09861 \ 22887.$$

Auf dieselbe Weise findet man auch

$$\log 5 = 1.60943 \ 79124,$$

$$\log 7 = 1.94591 \ 01490.$$

Hat man aber so bereits die Logarithmen von 2, 3, 5 und 7, so findet man die übrigen bis zu 10 durch folgende einfache Gleichungen (§. 44.):

$$\log 4 = 2 \log 2, \quad \log 6 = \log 2 + \log 3,$$

$$\log 8 = 3 \log 2, \quad \log 9 = 2 \log 3 \quad \text{und}$$

$$\log 10 = \log 2 + \log 5 \quad \text{u. s. f.}$$

Auf diese Weise erhält man z. B. den letzten dieser Logarithmen, oder

$$\log 10 = 2.30258 \ 50930 \dots,$$

und dies ist zugleich der Werth von der Größe $\frac{1}{m}$, die wir oben (§. 62, III.) durch eine langsam convergirende Reihe bestimmt haben.

I. Bemerken wir noch, daß die zwey in §. 62. aufgestellten Ausdrücke für $\log(1+x)$ und für $\log \frac{1+x}{1-x}$ geben, wenn man in ihnen $x=1$ setzt:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\text{und } \log \infty = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots,$$

so wie zugleich die erste, für $x=-1$, gibt

$$-\log 0 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Da aber der Logarithmus einer unendlich großen Zahl ohne Zweifel ebenfalls unendlich groß ist, und da, wie aus den Gleichungen

$$e^{-u} = x \quad \text{oder} \quad u = -\log x$$

folgt, die Größe $-\log 0$ positiv und unendlich groß ist, so ist die erste der drey vorhergehenden Reihen convergent, während die bey den anderen divergent sind, übereinstimmend mit §. 23, II.

II. Man hat bereits mehrere Tafeln berechnet, welche die gewöhnlichen Logarithmen der natürlichen Zahlen enthalten.

Unter den neueren sind die vorzüglichsten die von *Vega* und *Callet*, und die bequemsten für kleinere Rechnungen die von *Lalande*.

Die allgemeinen Vorschriften für den Gebrauch dieser Tafeln sind ihnen gewöhnlich beygegeben, daher wir uns hier nicht dabey aufhalten, und nur einige Bemerkungen über diesen Gegenstand hinzufügen.

A. Da $\text{Log } 1 = 0$ ist, so sind die Logarithmen aller eigentlichen Brüche negativ. So findet man z. B. in diesen Tafeln, wo ich mich hier der Kürze wegen nur auf drey Decimalstellen beschränke:

$$\text{Log } 624 = 2.795,$$

$$\text{Log } 62.4 = 1.795,$$

$$\text{Log } 6.24 = 0.795.$$

Setzt man dieß weiter fort, so erhält man auf dieselbe Weise

$$\text{Log } 0.624 = 0.795 - 1,$$

$$\text{Log } 0.0624 = 0.795 - 1.$$

Es ist aber viel bequemer, die letzten Ausdrücke so darzustellen:

$$\text{Log } 0.624 = 9.795,$$

$$\text{Log } 0.0624 = 8.795 \text{ u. f.}$$

Man wird nämlich nie anstehen, in dem Endresultate einer jeden Rechnung zu entscheiden, ob der letzte Logarithmus, wie hier 8.795, zu einem sehr kleinen Bruch, wie hier 0.0624, oder zu einer ganzen Zahl mit 9 Ziffern gehören soll.

B Die Logarithmen der negativen Gröfsen sind imaginär, da in der Gleichung

$$y = 10^x \text{ oder } x = \text{Log } y$$

die Gröfse y nie negativ werden kann, welchen Werth man auch der Gröfse x geben mag. Dieß hindert aber nicht, während der Berechnung eines algebraischen Ausdrucks, die Zeichen vorerst wegzulassen, um sie dann in dem Endresultate wieder zu berücksichtigen. Um Irrungen zu vermeiden, kann man die Logarithmen der negativen Zahlen durch ein N bezeichnen. Wollte man z. B. von den beyden Zahlen 0.0036 und -0.048 das Product mit Hülfe der Logarithmen suchen, so hätte man

$$\text{Log } 0.0036 = 7.55630$$

$$\text{Log } (-0.048) = \frac{8.68124}{N}$$

$$\text{Summe} \dots 6.23754.$$

Von diesem Logarithmus geben die Tafeln die Zahl 1728, also ist auch das gesuchte Product gleich -0.0001728 .

C. Endlich bemerken wir noch, daß eine solche Tafel das bequemste Mittel darbietet, die Wurzeln aller Zahlen, wenigstens innerhalb den Grenzen, welche diese Tafeln gewähren, zu finden, da nach §. 44. die Ausziehung der Wurzeln durch die Logarithmen in eine einfache Division verwandelt wird. So findet man z. B. aus den erwähnten Tafeln *Vega's* ohne Anstand die zehnte Wurzel aus der Zahl 1000. Da nämlich

$$\text{Log } 1000 = 3.0000000$$

ist, so gibt der zehnte Theil dieser Zahl oder die Gröfse

$$0.3000000$$

in jener Tafel sofort 1.9952623 für den gesuchten Werth von $\sqrt[10]{1000}$.

§. 65. (Größte und kleinste Werthe, und unbestimmte Ausdrücke der Functionen.) Wenn in einer Function $u = f(x)$ von x die Stammgröfse x übergeht in $x + h$, so hat man, nach der Gleichung (A) des §. 56, für den so veränderten Werth dieser Function

$$u' - u = h \cdot \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + \dots,$$

und eben so erhält man, wenn x in $x - h$ übergeht:

$$u' - u = -h \cdot \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{h^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + \dots,$$

und man sieht leicht, daß man die Gröfse h so klein annehmen kann, daß, in diesen beyden Reihen, jedes einzelne Glied grösser wird, als die Summe aller ihm folgenden Glieder. Bleibt man bey dem ersten Gliede stehen, so ist also $u' - u$ im ersten Falle positiv, und im zweyten negativ, oder u' ist im ersten Falle gröfser, und im zweyten kleiner, als u . Es kann daher zwischen $x + h$ und $x - h$ kein gröfster oder kleinster Werth von u Statt haben, aufser in dem Falle, wo $\frac{du}{dx} = 0$ ist, wo nämlich

das erste Glied in beyden Reihen völlig verschwindet, und wo man daher, wenn man zu dem zweyten übergeht und bey demselben stehen bleibt, in beyden Reihen haben wird

$$u' - u = + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2};$$

ein Ausdruck, der, da das Quadrat von h immer positiv ist, mit der Gröfse $\frac{d^2 u}{dx^2}$ zugleich positiv oder zugleich negativ seyn wird.

Ist also du gleich Null, so wird für $x+h$ sowohl, als auch für $x-h$ die Gröfse u' gröfser oder kleiner als u seyn, je nachdem $d^2 u$ negativ oder positiv ist, d. h. u' wird in jenem Falle gröfser, und in diesem kleiner seyn, als alle ihm zunächst vorhergehenden oder zunächst nachfolgenden Werthe von u .

Die Function u kann also nur dann ein Größtes oder Kleinstes seyn, wenn $du=0$ ist. Sucht man dann aus dieser Bedingungsgleichung $du=0$ den Werth von x , und substituirt ihn in $d^2 u$, so wird u , für diesen Werth von x , ein Größtes oder Kleinstes seyn, wenn $d^2 u$ negativ oder positiv ist.

Ist aber $d^2 u$ ebenfalls, so wie du , gleich Null, so kann, wie zuvor, u nur dann ein Größtes oder Kleinstes seyn, wenn auch noch $d^3 u=0$ ist. Sucht man dann aus der letzten Gleichung den Werth von x , und substituirt ihn in $d^4 u$, so wird u , für diesen Werth von x , ein Größtes oder Kleinstes seyn, wenn $d^4 u$ negativ oder positiv ist u. s. w.

Beyspiele werden diefs sofort deutlich machen.

Ex. I. Sey $u=x^2+4x+2$ gegeben, so hat man

$$\frac{du}{dx} = 2x + 4 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 2.$$

Setzt man aber $2x+4$ gleich Null, so erhält man $x=-2$, und da überdiefs $d^2 u$, für alle Werthe von x , positiv bleibt, so ist die gegebene Function u für $x=-2$ ein Kleinstes, nämlich selbst gleich -2 .

Ex. II. Eben so gibt die Function $u=x^3+3x^2-9x+18$ für ihre beyden ersten Differentiale

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 6x - 9 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 6x + 6.$$

Aber die Gleichung $du=3x^2+6x-9=0$ hat die beyden Wurzeln $x=+1$ und $x=-3$;

$x = +1$ gibt $\frac{d^2 u}{dx^2} = +12$, also ein Kleinstes, und
 $x = -3$ gibt $\frac{d^2 u}{dx^2} = -12$, also ein Größtes.

Diese Function u ist demnach ein Kleinstes, und zwar
 $u = +13$ für $x = 1$, und ein Größtes, $u = +45$ für $x = -3$.

Eben so wird man finden, dafs man hat:

$u = \frac{x}{1+x^2}$ ein Größtes für $x = 1$, und
 ein Kleinstes für $x = -1$,
 $u = \frac{2-3x+x^2}{2+3x+x^2}$ ein Größtes für $x = -\sqrt{2}$, und
 ein Kleinstes für $x = \sqrt{2}$,

und $u = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ ein Kleinstes
 für $x = 1$, ein Größtes für $x = 2$, und wieder ein Kleinstes für
 $x = 3$.

I. Noch wollen wir, zum Schlusse dieses Gegenstandes,
 bemerken, dafs man öfter Ausdrücke findet, die für gewisse
 Werthe der in ihnen enthaltenen Gröfsen die Gestalt $\frac{X}{X'}$ annehmen.
 Sind X und X' solche Functionen, die z. B. für $x = a$, beyde ver-
 schwinden, und soll man den Werth von

$$u = \frac{X}{X'}$$

für $x = a$ bestimmen, so hat man, wenn x in $x+h$ übergeht,
 nach der Gleichung (A) des §. 56.

$$u' = \frac{X + h \cdot \frac{dX}{dx} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + \dots}{X' + h \cdot \frac{dX'}{dx} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 X'}{dx^2} + \dots}$$

Da nun, für $x = a$, X sowohl als X' verschwindet, so gibt
 der letzte Ausdruck

$$u' = \frac{\frac{dX}{dx} + \frac{h}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + \dots}{\frac{dX'}{dx} + \frac{h}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 X'}{dx^2} + \dots}$$

und daher, für $h = 0$, der gesuchte Werth

$$u' = \frac{dX}{dx} : \frac{dX'}{dx}$$

Zwölftes Capitel.

Auflösung der Gleichungen.

§. 66. (Anzahl der Wurzeln einer Gleichung.)
Jede geordnete algebraische Gleichung des m^{ten} Grades hat, nach §. 34, die Form

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + hx + k = 0,$$

wo m eine ganze, positive Zahl, und wo $a, b, c, \dots, h, k$ reelle und rationelle Größen bezeichnen. Statt diesem Ausdrucke wollen wir, der Kürze wegen, hier und im Folgenden

$$X = 0$$

setzen. — Man kann eine solche Gleichung im Allgemeinen als das Product von m Gleichungen der ersten Ordnung, oder als das Product der m Factoren

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots$$

ansehen, da dieses Product, wenn es entwickelt wird, die Gestalt der obigen Gleichung $X=0$ annimmt. Da aber dieses Product, so wie jener ihm gleichgeltende Ausdruck X , gleich Null wird, wenn man statt x die Größe α , oder β , oder $\gamma, \dots$ setzt, so werden $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ nach §. 34, II., die *Wurzeln* der Gleichung $X=0$ seyn, und man sieht, daß die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung des m^{ten} Grades gleich m seyn wird. Diese Wurzeln können übrigens gleich oder ungleich, rational oder irrational und selbst imaginär seyn.

I. Ist aber die gegebene Gleichung nicht algebraisch, sondern transcendent, so ist die Anzahl ihrer Wurzeln unendlich groß. So ist die Gleichung

$$0 = a - e^x,$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, nach §. 63. mit der folgenden Gleichung identisch,

$$0 = a - 1 - x - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} - \dots,$$

die nach dem Vorhergehenden unendlich viele Wurzeln hat, da sie einer ohne Ende fortgehenden Reihe gleichgeltend ist.

Die *Auflösung* einer gegebenen Gleichung besteht in der Bestimmung ihrer Wurzeln.

§. 67. (Auflösung der Gleichungen des ersten Grades.) Da die algebraischen Gleichungen des ersten Grades die unbekannte Gröfse x nur in der ersten Potenz enthalten, so besteht die Auflösung derselben in der Isolirung oder in der *Sonderung* dieser Unbekannten von den übrigen Gröfßen der Gleichung, wovon bereits oben §. 35. gehandelt worden ist, wenn man blofs *eine* Gleichung mit einer Unbekannten vorgelegt hat.

I. Sind aber zwey Unbekannte x und y in zwey Gleichungen gegeben, so wird man am einfachsten auch hier in jeder der zwey Gleichungen die eine der beyden Unbekannten sondern, und dann die so erhaltenen Werthe dieser Unbekannten einander gleich setzen. Dadurch erhält man eine Gleichung, die blofs die zweyte Unbekannte enthält, und die man daher wieder nach den Vorhergehenden behandeln wird.

Sind z. B. die beyden Gleichungen gegeben

$$\left. \begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned} \right\},$$

so erhält man durch Absonderung der Gröfse x aus der ersten

$$x = - (by + c) \frac{1}{a},$$

und aus der zweyten

$$x = - (b'y + c') \frac{1}{a'}.$$

Setzt man beyde Werthe von x einander gleich, so hat man die Gleichung

$$a(b'y + c') = a'(by + c),$$

und wenn man aus derselben die Gröfse y nach §. 35. sucht, so erhält man

$$y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Substituirt man dann diesen Werth von y in einem der zwey oben gegebenen Werthe von x , so erhält man

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b},$$

und dadurch sind demnach beyde unbekannten Gröſſen x und y gefunden. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$m = ab' - a'b,$$

so hat man

$$m \cdot x = bc' - b'c \quad \text{und}$$

$$m \cdot y = ac' - a'c.$$

Man sieht, wie sich dasselbe Verfahren auf drey und mehr Gleichungen der ersten Ordnung zwischen eben so viel Unbekannten fortsetzen läßt.

§. 68. (Auflösung der Gleichungen des zweyten Grades.) Die Gleichungen des zweyten Grades oder die quadratischen Gleichungen sind sämmtlich in der Form enthalten:

$$x^2 + ax + b = 0,$$

oder auch

$$x^2 + ax = -b.$$

Wäre nun der erste Theil $x^2 + ax$ dieser Gleichung ein vollkommenes Quadrat, von dem sich die Wurzel in einem geschlossenen Ausdrücke angeben läßt, so würde man den gesuchten Werth von x ohne Anstand bestimmen, wenn man aus diesem Theile die Wurzel zieht.

Es ist aber immer leicht, diesen ersten Theil zu einem solchen Quadrat zu machen. Zu diesem Zwecke darf man nämlich nur den Factor a von x durch 2 theilen, und dann das Quadrat dieses Quotienten oder die Gröſſe $\frac{1}{4}a^2$ zu beyden Seiten der gegebenen Gleichung addiren. Dadurch erhält man

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(x + \frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2 - b.$$

Zieht man dann auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens die Quadratwurzel aus, so hat man

$$x + \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$$

das doppelte Zeichen wegen §. 32, und daher auch

$$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{a^2 - 4b};$$

und diels ist die gesuchte doppelte Wurzel (§. 66.) der gegebenen quadratischen Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0.$$

I. Ist daher $a^2 = 4b$, oder ist $a = 2\sqrt{b}$, so sind die beyden Wurzeln der Gleichung gleich, und jede $= -\frac{1}{2}a = -\sqrt{b}$. Ist a^2 gröfser als $4b$, so sind beyde Wurzeln reell, und ist endlich a^2 kleiner als $4b$, so sind beyde Wurzeln imaginär. Ist die Gröfse $(a^2 - 4b)$ ein vollkommenes Quadrat, so sind die Wurzeln rational, im entgegengesetzten Falle aber sind sie irrational.

Ex. Ist die Gleichung gegeben

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

so hat man $a = 1$ und $b = -1$, also ist auch

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5},$$

oder die beyden Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 0.618034 \dots$$

$$\text{und } x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = -1.618034 \dots$$

Eben so wird man finden, dafs

zu der Gleichung

die Wurzeln gehören:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \dots \quad x = 1 \quad \text{und} \quad x = 2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \dots \quad x = 3 \quad \text{»} \quad x = -1$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \dots \quad x = 1 + \sqrt{-1} \quad \text{»} \quad x = 1 - \sqrt{-1}.$$

II. Auf dieselbe Weise lassen sich auch höhere Gleichungen der Form

$$x^{2m} + ax^m + b = 0$$

behandeln, da sie, wenn man $x^m = u$ setzt, die Gestalt

$$u^2 + au + b = 0$$

einer quadratischen Gleichung annehmen, für die man, nach dem Vorhergehenden, hat:

$$u = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b},$$

also auch, da $x = \sqrt[m]{u}$ ist:

$$x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}}.$$

Wäre z. B. die Gleichung gegeben:

$$x^6 - 3x^3 + 2 = 0,$$

so hätte man für $x^3 = u$ auch

$$u^2 - 3u + 2 = 0,$$

und da von der letzten Gleichung die Wurzeln

$$u = 1 \quad \text{und} \quad u = 2$$

sind, so hat man auch für die Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x = \sqrt[3]{1} \quad \text{und} \quad x = \sqrt[3]{2},$$

oder da jeder der zwey letzten Ausdrücke (nach §. 33, I.) einen dreyfachen Werth hat, so sind die sechs Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$\begin{aligned} x &= 1 & \text{und} \quad x &= \sqrt[3]{2} \\ &= \frac{1}{3}(-1 + \sqrt{-3}) & &= \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(-1 + \sqrt{-3}) \\ &= \frac{1}{3}(-1 - \sqrt{-3}) & &= \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(-1 - \sqrt{-3}). \end{aligned}$$

§. 69. (Eigenschaften der Wurzeln der höheren algebraischen Gleichungen.) Obschon die Theorie der algebraischen Gleichungen, mit welcher sich die vorzüglichsten Geometer beschäftigt haben, bereits sehr ausgebildet ist, so läßt sie doch noch vieles zu wünschen übrig, und besonders ist das Fundamentaltheorem, die Bestimmung der Wurzeln einer jeden Gleichung, welches wir so eben für die quadratischen Gleichungen betrachtet haben, nur noch auf die Gleichungen des dritten und vierten Grades fortgeführt worden, und selbst hier sind die Endresultate gewöhnlich sehr complicirt und für die Anwendung unbequem. Für Gleichungen des fünften und höheren Grades aber scheint die Auflösung dieser Aufgabe die Kräfte unserer Analysis ganz zu übersteigen.

I. Wenn jedoch die Coefficienten der Gröfse x in einer gegebenen Gleichung nicht mehr *allgemeine Zeichen* oder Buchstaben, die jeden Werth annehmen können, sondern wenn sie gegebene *Zahlen* von bestimmtem Werthe sind, wo dann die Gleichung eine *numerische* genannt wird, so hat man allerdings mehr als ein Mittel, die Wurzel einer solchen Gleichung, selbst wenn sie transcendent ist, zu bestimmen, wie wir bald sehen werden.

Hier wollen wir uns damit begnügen, die vorzüglichsten jener Sätze, die man über die Relationen der Wurzeln der *allgemeinen* algebraischen Gleichungen gefunden hat, kurz zusammen zu stellen.

II. Wenn, wie in §. 66, die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ die Wurzeln einer Gleichung $X=0$ bezeichnen, so ist, wie a. a. O. gesagt wurde,

$$X = 0 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \dots$$

Entwickelt man diese Producte, so hat man z. B. für jede Gleichung des vierten Grades

$$\begin{aligned} X = 0 = x^4 &- (\alpha + \beta + \gamma + \delta) x^3 \\ &+ (\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) x^2 \\ &- (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) x \\ &+ \alpha\beta\gamma\delta. \end{aligned}$$

Vergleicht man aber diesen Ausdruck mit der allgemeinen Form einer Gleichung des vierten Grades, die nach §. 66. ist:

$$X = 0 = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

so erhält man für die Coefficienten a, b, c, d folgende Werthe:

$$\begin{aligned} a &= -(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \\ b &= +(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) \\ c &= -(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) \\ d &= +\alpha\beta\gamma\delta. \end{aligned}$$

Ganz ähnliche Ausdrücke findet man auch für Gleichungen des 5^{ten}, 6^{ten}, . . . Grades u. f., und man hat daraus das Theorem abgeleitet:

»In jeder Gleichung der Form

$$X = 0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + hx + k$$

»ist der Factor a des zweyten Gliedes gleich der Summe aller
»Wurzeln der Gleichung, diese Wurzeln mit verkehrten Zeichen
»genommen; der Factor b des dritten Gliedes ist die Summe aller
»Paare oder aller Amben der so genommenen Wurzeln; der
»Factor c des vierten Gliedes ist die Summe aller Ternen u. s. f.,
»und der Factor k des letzten Gliedes ist das Product aller dieser
»Wurzeln, dieselben mögen reell oder imaginär seyn.«

III. Wenn in derselben Gleichung $X=0$ für $x=A$ der Werth von X positiv, und für $x=B$ negativ wird, so liegt zwischen den beyden Größen A und B immer wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung, vielleicht aber auch 3, 5, 7, . . . oder überhaupt eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln.

Wird aber für $x=A$ sowohl, als auch für $x=B$ der Werth

von X in beyden Fällen positiv, oder in beyden Fällen negativ, so liegt zwischen A und B entweder keine, oder 2, oder 4, oder überhaupt eine *gerade* Anzahl reeller Wurzeln.

IV. Jede Gleichung des 3^{ten}, 5^{ten}, 7^{ten}, . . . und überhaupt eines ungeraden Grades, hat wenigstens *eine* reelle Wurzel, und diese ist positiv, wenn das letzte constante Glied k negativ ist, und umgekehrt. So kann aber auch 3, 5, 7, . . . reelle Wurzeln haben. Jede Gleichung eines geraden Gliedes hat aber entweder keine, oder 2, 4, 6, . . . reelle Wurzeln.

V. Jede Gleichung des 2^{ten}, 4^{ten}, 6^{ten}, und überhaupt eines geraden Grades, deren letztes constantes Glied k negativ ist, hat wenigstens zwey reelle Wurzeln, von welchen immer die eine positiv und die andere negativ ist.

VI. Wenn in der obigen Gleichung $X=0$ das letzte Glied k negativ ist, und wenn die positiven Glieder, falls solche da sind, alle unmittelbar auf das erste folgen, so hat die Gleichung immer eine reelle positive Wurzel. So hat z. B. die Gleichung

$$x^2 + 7x^2 - 5x - 35 = 0$$

die Wurzeln $+ \sqrt{5}, - \sqrt{5}$ und $- 7$.

VII. Die irrationalen Wurzeln jeder Gleichung sind immer paarweise da, und wenn die eine die Form hat $\alpha + \sqrt{\beta}$, so hat die andere die Form $\alpha - \sqrt{\beta}$.

Dasselbe gilt auch von den imaginären Wurzeln, die ebenfalls immer paarweise von der Form

$$\alpha + \beta \sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \alpha - \beta \sqrt{-1}$$

vorkommen.

VIII. Um von einer Gleichung alle ihre positiven Wurzeln in negative, und alle ihre negativen Wurzeln in positive zu verwandeln, wird man bloß die Zeichen derjenigen Glieder ändern, in welchen der Exponent von x ungerade ist.

IX. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ die Wurzeln der obigen Gleichung

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + gx^2 + hx + k,$$

so sind auch $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \dots$ die Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^m + \frac{h}{k}x^{m-1} + \frac{g}{k}x^{m-2} + \dots + \frac{b}{k}x^2 + \frac{ax}{k} + \frac{1}{k},$$

und man nennt die letzte Gleichung die *reciproke* der ersten, so

wie auch die Gröſſen $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \dots$ die reciproken Gröſſen von $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ genannt werden.

X. Um die ſämmtlichen Wurzeln einer Gleichung um die Gröſſe A zu vermehren, darf man bloß in dieser Gleichung statt x die Gröſſe $x + A$ setzen.

XI. Um in der gegebenen Gleichung

$$X = 0 = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \dots + h x + k$$

das zweyte Glied $a x^{m-1}$ wegzubringen, darf man bloß in dieser Gleichung statt x die Gröſſe $x - \frac{a}{m}$ setzen, wodurch dann eine Gleichung der Form entsteht:

$$0 = x^m + A x^{m-2} + B x^{m-3} + \dots + H x + K.$$

In einer solchen Gleichung, der das zweyte Glied fehlt, ist die Summe aller ihrer positiven Wurzeln gleich der Summe aller ihrer negativen Wurzeln, wenn diese Wurzeln ſämmtlich reell sind.

Fehlt endlich in einer Gleichung

$$0 = x^m + a x^{m-1} + \dots + g x^2 + h x$$

das letzte oder constante Glied k , so ist immer eine ihrer Wurzeln gleich Null.

XII. Wenn kein Glied der Gleichung fehlt, und wenn diese Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, so hat sie auch immer eben so viel positive Wurzeln, als sie Zeichenwechsel $[+ - \text{ oder } - +]$ ihrer Glieder hat, und eben so viele negative Wurzeln, als sie Zeichenfolgen $[++ \text{ oder } --]$ ihrer Glieder hat.

So hat die Gleichung

$$x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0$$

zwey Zeichenwechsel und nur eine Zeichenfolge, also hat sie auch, da alle ihre Wurzeln reell sind, zwey positive Wurzeln $+2$ und $+7$, und eine negative Wurzel -1 .

Wenn aber einige Glieder der Gleichung fehlen, so kann man sich dieselben durch Glieder mit dem Coefficienten Null ersetzt denken, deren Zeichen sich willkürlich annehmen lassen. Nimmt man nun diese Zeichen so an, daß die Anzahl N sämtlicher Wechsel ein Kleinstes ist, und nimmt man sie dann auch so an, daß die Anzahl N' sämtlicher Folgen der Zeichen ein

Kleinstes ist, so ist die Zahl der positiven Wurzeln der Gleichung nicht gröfser als N , und die Zahl der negativen Wurzeln nicht gröfser als N' , und zugleich ist die Anzahl der imaginären Wurzeln der Gleichung nicht gröfser als

$$m - (N + N'),$$

wenn die Gleichung des m^{ten} Grades ist.

So hat z. B. die Gleichung

$$x^m + 1 = 0$$

alle ihre Wurzeln imaginär, wenn m gerade, und sie hat nur eine reelle Wurzel, wenn m ungerade ist.

§. 70. (Genäherte Auflösung aller numerischen Gleichungen.) Wenn eine numerische Gleichung $X=0$, in welcher die Coefficienten von x gegebene Zahlen sind (§. 69, I.), zur Auflösung vorgelegt wird, so ist es beynahe immer sehr leicht, durch blofse Versuche einen ersten, wenn auch nur sehr wenig genäherten Werth einer ihrer Wurzeln zu finden. So wird man z. B. nach §. 69, II. sofort erfahren, dafs eine solche Wurzel zwischen $x=A$ und $x=B$ fällt, wenn die Summe aller Glieder der Gleichung für $x=A$ positiv, und für $x=B$ negativ ist.

Sey demnach $x=a$ ein solcher genäherter Werth von x . Substituirt man ihn in der gegebenen Gleichung, so wird er die gegebene Gröfse X nicht auf Null bringen, da nur der wahre Werth von x , nämlich nur die eigentliche Wurzel der Gleichung, also noch nicht der blofs genäherte Werth derselben, die Gröfse X gleich Null machen kann.

Nehmen wir also an, dafs wir durch diese Substitution von $x=a$ in der Gleichung, statt $X=0$, den Ausdruck erhalten

$$X = \omega,$$

wo ω eine von Null desto weniger verschiedene Gröfse seyn wird, je näher bereits a dem wahren Werthe von x genommen worden ist.

Sey eben so a' eine von a nur wenig verschiedene Gröfse, die also ebenfalls als ein zweyter genäherter Werth von x betrachtet werden kann. Substituirt man diesen Werth $x=a'$ in der gegebenen Gleichung, so gehe diese über in

$$X = \omega'.$$

Wir haben demnach zwey Hypothesen für den wahren Werth von x angenommen, nämlich $x=a$ und $x=a'$, und wir haben auch zugleich die Fehler der Endresultate, oder die Gröfsen ω und ω' erhalten, die aus jenen zwey Hypothesen entstanden sind.

Man hat nämlich

	Fehler der Hypothese,	Fehler des Resultats
in der ersten Voraussetzung . . .	$a - x$	ω
» » zweyten » . . .	$a' - x$	ω'

Je näher aber die beyden aufgestellten Hypothesen der gesuchten Wahrheit liegen, oder je kleiner die beyden Fehler $a-x$ $a'-x$ dieser Hypothesen sind, desto näher wird auch das Verhältniß derselben, oder desto näher wird die Gröfse

$$\frac{a-x}{a'-x} \text{ der Gröfse } \frac{\omega}{\omega'}$$

liegen, so daß man, da es sich hier doch nur um eine erste Näherung handelt,

$$\frac{a-x}{a'-x} = \frac{\omega}{\omega'} \dots (I)$$

setzen kann, woraus sofort folgt:

$$x = \frac{a'\omega - a\omega'}{\omega - \omega'}, \text{ oder auch } x = a - \frac{(a-a')\omega}{\omega - \omega'} = a' - \frac{(a-a')\omega'}{\omega - \omega'} \dots (II),$$

und dieser Ausdruck wird einen anderen Werth von x geben, welcher der Wahrheit näher liegt, als die beyden vorhergehenden $x=a$ und $x=a'$, so daß man daher, mit dieser neuen Hypothese, in Verbindung mit einer der vorhergehenden, dieselbe jetzt bereits mehr gesicherte Rechnung wiederholen, und so, durch Fortsetzung der Operation, der gesuchten Wahrheit immer näher kommen kann.

In der That, um zu zeigen, daß die Gleichung (I) der Wahrheit desto näher kömmt, je kleiner die Fehler der beyden Voraussetzungen sind, so kann man die gegebene Gleichung als eine Function von x ansehen, die für den gesuchten Werth von x gleich Null ist, so daß man daher hat

$$u = f(x) = 0.$$

Läßt man in diesem Ausdrücke die Gröfse x in $x + (a-x)$,

das heisst, in a übergehen, so hat man, nach dem *Taylor'schen* Lehrsatz (§. 56.)

$$u' = u + (a-x) \cdot \frac{du}{dx} + \frac{(a-x)^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \dots,$$

und eben so erhält man, wenn x in $x + (a'-x)$ oder in a' übergeht:

$$u'' = u + (a'-x) \cdot \frac{du}{dx} + \frac{(a'-x)^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \dots$$

Je kleiner aber die Gröfsen $(a-x)$ und $(a'-x)$ sind, das heisst, je näher die beyden Hypothesen $x=a$ und $x=a'$ der Wahrheit liegen, desto mehr wird man auch, in den beyden vorhergehenden Ausdrücken, die zweyten und höheren Potenzen dieser Gröfsen, gegen die erste, in einer blofsen Annäherung, weglassen können, so daß dann jene Ausdrücke sich blofs auf ihre ersten Glieder, oder da $u'-u=\omega$ und $u''-u=\omega'$ ist, auf die beyden einfachen Gleichungen reduzieren:

$$\omega = (a-x) \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{und}$$

$$\omega' = (a'-x) \cdot \frac{du}{dx},$$

deren Division die Gleichung (I) wieder gibt.

Ex. Um die Wurzel der Gleichung

$$X = x^3 - 2x + 1 = 0$$

zu finden, hat man, wenn $x=a=0.5$ gesetzt wird, $X=0.125$, und eben so wird $x=a'=0.7$ geben $X=-0.057$. Setzt man daher $a=0.5$ und $\omega=0.125$, so wie $a'=0.7$ und $\omega'=-0.057$, so gibt die Gleichung (II) für einen weiter genäherten Werth

$$x = a - \frac{(a-a')\omega}{\omega-\omega'} = 0.5 + 0.137 = 0.637.$$

Setzt man daher in einer zweyten Berechnung $a=0.637$, so findet man $X=\omega=-0.01552$, und da, wegen dem negativen Werth von ω dieses a noch etwas zu groß ist, so kann man $a'=0.620$ annehmen, wodurch $X=\omega'=-0.00176$ wird. Dieses zweyte Hypothesenpaar gibt, durch die Gleichung (II) den neuen genäherten Werth

$$x = 0.637 - 0.01905 = 0.61795.$$

Nimmt man in einer dritten Rechnung

$$a = 0.6180, \text{ also auch } X = \omega = 0.00002903 \text{ und}$$

$$a' = 0.6181, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad X = \omega' = -0.00005637,$$

so gibt die Gleichung (II)

$$x = 0.6180 + 0.0000340 = 0.6180340,$$

und dieser letzte Werth von x ist noch in der letzten Decimalstelle genau, da die wahren Wurzeln der gegebenen Gleichung sind:

$$\begin{array}{ll} 1 & \text{oder } 1 \\ \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) & \text{» } 0.6180340 \\ \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}) & \text{» } -1.6180340. \end{array}$$

Dafs sich aber dasselbe Verfahren auch auf transcendente Gleichungen anwenden lasse, ist für sich klar. — Zur Übung in diesen Entwicklungen mögen folgende Beyspiele dienen:

$$x^x = 10 \text{ gibt } x = 2.50618,$$

$$10^x = x^{10} \quad \text{»} \quad x = 1.37129,$$

$$4^x + 5^x = 20 \quad \text{»} \quad x = 1.52761.$$

§. 71. (Homogenität der Glieder einer Gleichung.)

Beschliessen wir diesen Gegenstand noch mit einer allen gegebenen Gleichungen zukommenden Bemerkung.

In jeder Gleichung müssen nämlich, wie es die Natur der Sache erfordert, die *Dimensionen* (§. 33, II.) eines jeden Gliedes eben so groß, als in jedem anderen Gliede seyn.

Demnach kann z. B. die folgende Gleichung

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 7 = 0$$

nicht bestehen, da 3 die Dimension des ersten, 2 die des zweiten, 1 die des dritten und 0 die Dimension des vierten Gliedes ist. In der That wird nach dem, was a. a. O. gesagt ist, x^3 einen Körper, x^2 eine Fläche und x eine Linie bezeichnen können, und es ist unmöglich, dafs dergleichen, ganz heterogene Dinge, unter sich eine Gleichung bilden.

Wenn daher solche Gleichungen, in welchen die Gleichheit der Dimensionen für die einzelnen Glieder nicht Statt hat, oder wenn solche nicht homogene Gleichungen doch öfter vorkommen, wie dieß auch in der That der Fall ist, so wird ihnen immer

die Voraussetzung zu Grunde liegen, daß man früher irgend eine GröÙe als die *Einheit* der GröÙen ihrer Art angenommen hat, wodurch dann diese GröÙe, eben weil sie durch die Einheit vorgestellt wird, aus der Gleichung gleichsam verschwunden oder doch in ihr unsichtbar gemacht worden ist.

Wenn z. B. in der Gleichung

$$x \cdot y = 12$$

die GröÙe x sowohl, als y Linien bezeichnet, und wenn man eine Linie von bestimmter Länge, z. B. die Toise, als die Einheit aller Linien annimmt, so werden dann die GröÙen x und y als bloÙe Vielfache der Toise, d. h. als bloÙe Zahlen zu betrachten seyn, und dann wird die gegebene Gleichung, obschon sie nicht homogen erscheint, z. B. für $x=3$ und $y=4$ bestehen können. — Wollte man aber dann, nicht die Toise, sondern den Fuß, deren 6 auf die Toise gehen, zur Einheit des Längenmaßes annehmen, so würde, für jeden speciellen Fall (wie vorhin für $x=3$ und $y=4$), die GröÙe x sowohl, als y sechsmal größer, als zuvor, werden, oder man würde haben

$$x' = 6x \quad \text{und} \quad y' = 6y,$$

$$\text{also auch} \quad x = \frac{1}{6}x' \quad \text{»} \quad y = \frac{1}{6}y'.$$

Substituirt man diese Werthe von x und y in der gegebenen Gleichung, so geht sie in folgende über:

$$\frac{x'}{6} \cdot \frac{y'}{6} = 12,$$

welche Gleichung demnach für denselben speciellen Fall $x=3$, $y=4$ Toisen, d. h. für $x'=18$, $y'=24$ Fuß ebenfalls Statt hat.

Man sieht daraus, daß, wenn sich die gegebene Gleichung $x \cdot y = 12$, die sich auf irgend eine Einheit bezieht, auf eine andere a Mal größere Einheit beziehen soll, daß man nur alle in der Gleichung enthaltenen Buchstaben durch diese GröÙe a dividiren darf, wodurch zugleich auch die äußere Homogenität der Gleichung hergestellt wird.

So geht die Gleichung $xy=1$, wenn in ihr die GröÙe a als Einheit angenommen wird, in folgende über:

$$\frac{xy}{a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad xy = a^2,$$

in welchem letzten Ausdrucke jedes Glied zwey Dimensionen hat.

Unter derselben Voraussetzung wird die oben aufgestellte Gleichung

$$y^3 - 2x^2 + 3x - 7 = 0.$$

in folgende übergehen:

$$\frac{y^3}{a^3} - \frac{2x^2}{a^2} + \frac{3x}{a} - 7 = 0,$$

oder

$$y^3 - 2ax^2 + 3a^2x - 7a^3 = 0,$$

wo jedes Glied drey Dimensionen hat.

Eben so wird endlich die Gleichung

$$b^2x^2 + y^2 = b^2$$

übergehen in

$$\frac{b^2x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

das heist in die Gleichung

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

von vier Dimensionen, oder in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo jedes Glied die Dimension Null hat.

I. Dasselbe wird man von denjenigen Gleichungen bemerken, in welchen mehrere unter sich heterogene Gröfsen vorkommen. Wenn man z. B. zwischen den Gröfsen k , l , t die Gleichung hätte:

$$k = l \cdot t^2,$$

wo k eine Kraft anzeigt, die einen Körper, auf den sie wirkt, in der Zeit t durch den Weg l bewegen soll, so ist die auf diese Weise ausgedrückte Gleichung unmöglich, da Kräfte, Wege und Zeiten unter sich nicht unmittelbar verglichen werden, also auch keine Gleichung bilden können. Eine solche Gleichung setzt also eine gewisse Einheit der Kräfte, eine der Wege und eben so eine Einheit der Zeiten, z. B. eine Secunde voraus. Nennt man aber z , λ und τ diejenige Kraft, den Weg und diejenige Zeit, die

man früher als Einheit angenommen hat, so wird die gegebene Gleichung in folgende homogene übergehen:

$$\frac{k}{x} = \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{t^2}{\tau^2},$$

und da die Gleichung, in der letzten Gestalt, nur mehr die *Verhältnisse* jener drey Gröfsen, nicht aber diese Gröfsen selbst, d. h. da sie nunmehr bloße *Zahlen* enthält, so ist dadurch ihre Realität hergestellt.

Dreyzehntes Capitel.

R e i h e n.

§. 72. (Geometrische Reihen.) Wenn von den Gliedern einer Reihe je zwey nächste immer *dasselbe Verhältniß* (§. 37.) haben, so wird die Reihe eine *geometrische* genannt. Ist a das erste Glied derselben, und ist b das Verhältniß je zwey nächster Glieder, so ist die allgemeine Form der geometrischen Reihe

$$a + ab + ab^2 + ab^3 + \dots$$

Diese Reihe ist aber schon oben (§. 23.) vorgekommen, und wir haben dort gesehen, daß sie aus der Division der Gröfse a durch $(1 - b)$ entsteht, so daß man demnach hat

$$\frac{a}{1-b} = a + ab + ab^2 + ab^3 + \dots$$

Das allgemeine oder n^{te} Glied U einer solchen Reihe ist offenbar

$$U = ab^{n-1},$$

da man das erste, zweyte, dritte Glied der Reihe erhält, wenn man in U die Gröfse $n=1, 2, 3, \dots$ setzt.

I. Welches ist aber das *summatorische Glied* S dieser Reihe, d. h. welches ist diejenige Function von dem *Index* n der Reihe, der die Summe der 2, 3, 4, $\dots$ ersten Glieder gibt, wenn man in ihm $n=2, 3, 4, \dots$ setzt.

Setzt man die Reihe bis zu ihrem n^{ten} Gliede fort, so hat man

$S = a + ab + ab^2 + ab^3 + \dots + ab^{n-3} + ab^{n-2} + ab^{n-1}$,
also auch, wenn man alle Glieder dieses Ausdruckes durch b multiplicirt:

$$Sb = ab + ab^2 + ab^3 + \dots + ab^{n-2} + ab^{n-1} + ab^n.$$

Subtrahirt man diese beyden Ausdrücke von einander, so heben sich von den zwey Reihen alle Glieder, bis auf das erste

und letzte, gegenseitig auf, und man erhält

$$Sb - S = ab^n - a,$$

so daß man daher für das gesuchte summatorische Glied hat

$$S = \frac{a(b^n - 1)}{b - 1},$$

oder auch, wenn man den vorigen Werth des allgemeinen Gliedes in S substituirt:

$$S = \frac{Ub - a}{b - 1}.$$

II. Ist also die Reihe convergent (§. 23, II.), so ist für ein unendlich großes n die Gröfse b^n oder auch $U = ab^{n-1}$ unendlich klein, da für eine convergente Reihe b ein eigentlicher Bruch ist, und dann ist die Summe *aller* Glieder dieser Reihe, ohne Ende fortgesetzt:

$$S = \frac{a}{1 - b},$$

oder dann ist das summatorische Glied S gleich dem erzeugenden Bruch $\frac{a}{1-b}$, aus dessen Entwicklung durch Division die Reihe entstanden ist.

Ex. I. Für die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

ist $a=1$ und $b=\frac{1}{2}$, also ist auch, für $n=10$, die Summe der ersten zehn Glieder:

$$S = \frac{a(b^n - 1)}{b - 1} = \frac{2^{10} - 1}{2^9} = \frac{1023}{512} = 1.998046875.$$

Die Summe der *ganzen* Reihe, ohne Ende fortgesetzt, aber ist

$$S = \frac{a}{1 - b} = 2.$$

Ex. II. Für die Reihe

$$1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - \dots$$

ist $a=1$ und $b=-2$, also auch die Summe der ersten zehn Glieder

$$S = \frac{1 - 2^{10}}{1 + 2} = -341;$$

die Summe *aller* Glieder aber ist unendlich groß, da diese Reihe divergirt.

§. 73. (Arithmetische Reihen.) Eine Folge von Grö-
ßen, deren je zwey nächste immer dieselbe Differenz haben, ist
eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung. Sind aber in ei-
ner Reihe erst die Unterschiede dieser Differenzen oder sind erst
die zweyten Differenzen constant, so heißt sie eine arithmeti-
sche Reihe der zweyten Ordnung, und eben so wird sie der drit-
ten Ordnung seyn, wenn die Unterschiede der zweyten Differen-
zen oder wenn erst die dritten Differenzen der Glieder constant
sind, u. s. w.

So ist die arithmetische Reihe

- I. . . . 1, 2, 3, 4, . . . der ersten Ordnung,
II. . . . 1, 2², 3², 4², . . . » zweyten »
III. . . . 1, 2³, 3³, 4³, . . . » dritten » u. f.,

weil alle ersten Differenzen von I. gleich 1, alle zweyten von II.
gleich 2, und alle dritten Differenzen von III. gleich 6 sind.

Sey die arithmetische Reihe irgend einer Ordnung

$$a + b + c + d + e + \dots,$$

so hat man für die Differenz von je zwey nächsten Gliedern

$$b - a, c - b, d - c, e - d, \dots$$

und davon sind wieder die Differenzen

$$c - 2b + a, d - 2c + b, e - 2d + c, \dots,$$

und von diesen neuerdings die Differenzen

$$d - 3c + 3b - a, e - 3d + 3c - b \text{ u. s. f.}$$

Nennen wir, der Kürze wegen, die ersten Glieder dieser
Differenzreihen $\Delta a, \Delta^2 a, \Delta^3 a, \dots$ so daß man hat

$$\Delta a = b - a,$$

$$\Delta^2 a = c - 2b + a,$$

$$\Delta^3 a = d - 3c + 3b - a,$$

$$\Delta^4 a = e - 4d + 6c - 4b + a \text{ u. f.},$$

so zeigt schon der Anblick dieser Reihen, daß die Coefficienten
der einzelnen Glieder derselben die des Binoms (§. 58, I.) sind,
so daß man demnach allgemein für die n^{te} Differenz $\Delta^n a$ den
Ausdruck hat

$$\Delta^n a = a + nb + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} c - \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \dots$$

I. Mit Hülfe der letzten Gleichung kann man auch die Glieder $b, c, d, \dots$ der ersten gegebenen Reihe bloß durch das erste Glied a und durch die auf einander folgenden Differenzen $\Delta a, \Delta^2 a, \Delta^3 a, \dots$ ausdrücken. Man erhält nämlich

$$b = a + \Delta a,$$

$$c = a + 2\Delta a + \Delta^2 a,$$

$$d = a + 3\Delta a + 3\Delta^2 a + \Delta^3 a,$$

$$e = a + 4\Delta a + 6\Delta^2 a + 4\Delta^3 a + \Delta^4 a \text{ u. f.},$$

so daß man also auch hier für das *allgemeine* oder für das n^{te} Glied U der oben aufgestellten Reihe, nach der Analogie mit dem Binom, haben wird

$$U = a + \frac{n-1}{1} \Delta a + \frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2} \Delta^2 a + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 a + \dots$$

II. Sucht man endlich noch auf ähnliche Weise auch die *Summe* der ersten Glieder der gegebenen Reihe, so hat man für die Summe

$$\text{der 2 ersten Glieder} \dots a + b = 2a + \Delta a,$$

$$» 3 » » a + b + c = 3a + 3\Delta a + \Delta^2 a,$$

$$» 4 » » a + b + c + d = 4a + 6\Delta a + 4\Delta^2 a + \Delta^3 a \text{ u. f.},$$

so daß also auch hier die Coefficienten des Binoms wieder sichtbar werden, und daß man daher für die Summe der ersten n Glieder, d. h. für das *summarische Glied* S einer jeden arithmetischen Reihe den Ausdruck haben wird

$$S = na + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \Delta a + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^2 a + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^3 a + \dots,$$

wo für eine Reihe der 1^{sten} , 2^{ten} , 3^{ten} , $\dots$ Ordnung die Differenz $\Delta a, \Delta^2 a, \Delta^3 a, \dots$ constant, und alle folgenden gleich Null sind.

In den beyden vorhergehenden Ausdrücken von U und S ist die ganze Theorie der arithmetischen Reihen irgend einer Ordnung enthalten. — Wir wollen uns hier mit der näheren Betrachtung der zwey ersten Ordnungen begnügen.

§. 74. (Arithmetische Reihen der ersten Ordnung.)

Für diese Reihen der ersten Ordnung ist, nach dem Vorhergehenden, die erste Differenz $\Delta a = d$ constant, also auch $\Delta a = \Delta^2 a \dots$ gleich Null.

Demnach geben die Ausdrücke für U und S (in §. 72, II.) sofort folgende einfache Gleichungen:

$$U = a + (n-1)d \quad \text{und}$$

$$S = na + \frac{1}{2}n(n-1)d = \frac{1}{2}n[a + (n-1)d],$$

wo man, statt der letzten, auch schreiben kann

$$S = \frac{1}{2}n(a + U).$$

Der erste Ausdruck für S zeigt, daß in diesen Reihen die Summe je zweyer, vom Anfang und Ende gleich weit entfernten Glieder, gleich $2a + (n-1)d$ ist.

Ex. I. In der Reihe der natürlichen Zahlen

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

ist $a = d = 1$, also auch das allgemeine Glied

$$U = n,$$

und das summatorische Glied, oder die Summe der n ersten Glieder

$$S = \frac{1}{2}n(n+1).$$

So ist z. B. die Summe der ersten Million Glieder dieser Reihe, da $n = 1000000$ ist, gleich

$$S = 500000 \cdot 500000.$$

Ex. II. Ebenso hat man für die Reihe der ungeraden Zahlen

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots$$

$a = 1$ und $d = 2$, also auch

$$U = 2n - 1 \quad \text{und} \quad S = n^2,$$

also auch die Summe der ersten 1000 Glieder

$$S = 1000^2 = 1000000.$$

Ex. III. Endlich gibt die Reihe

$$1 + 1.1 + 1.2 + 1.3 + 1.4 + \dots$$

$a = 1$ und $d = 0.1$, also auch

$$U = \frac{1}{10}(n+9) \quad \text{und} \quad S = \frac{n}{20}(n+19),$$

so daß man für die Summe der ersten 1000 Glieder dieser Reihe hat

$$S = 50950.$$

§. 75. (Arithmetische Reihen der zweyten Ordnung.) Für solche Reihen ist $\Delta^3 a = \Delta^4 a \dots$ gleich Null, also hat man (nach §. 72.) für das allgemeine Glied

$$U = a + (n-1)\Delta a + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\Delta^2 a,$$

und eben so für das summatorische Glied dieser Reihen

$$S = na + \frac{1}{2}n(n-1)\Delta a + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\Delta^2 a.$$

Ex. Die Reihen der sogenannten *Polygonalzahlen* sind:

Zahlen des Dreyecks . . . 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + . . .

» » Vierecks . . . 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + . . .

» » Fünfecks . . . 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + . . .

» » Sechsecks . . . 1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + . . .

Für die Dreyeckszahlen ist demnach $a = 1$, $\Delta a = 2$ und $\Delta^2 a = 1$, also auch

$$U = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ und } S = \frac{n}{6}n(n+1)(n+2),$$

und eben so hat man für die Viereckzahlen

$$U = n^2 \text{ und } S = \frac{n}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ u. f.}$$

§. 76. (Reversion der Reihen.) Oft wird eine Gröfse y durch irgend eine andere x mittelst einer Reihe der Form

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots$$

gegeben, und man sucht umgekehrt die Gröfse x durch eine ähnliche, nach den Potenzen von y fortschreitende Reihe auszudrücken. — Nehmen wir an, die gesuchte Reihe sey von der Gestalt

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \dots,$$

so daß also die unbekannten Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ durch die bekannten $a, b, c, \dots$ zu bestimmen sind.

Zu diesem Zwecke entwickeln wir zuerst die Potenzen von $x^2, x^3, x^4, \dots$ indem wir die zweyte unserer Reihen wiederholt mit ihr selbst multipliciren. Dadurch erhält man

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \dots$$

$$x^2 = \alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta y^3 + (2\alpha\gamma + \beta^2) y^4 + \dots$$

$$x^3 = \alpha^3 y^3 + 3\alpha^2\beta y^4 + \dots$$

$$x^4 = \alpha^4 y^4 + \dots$$

Substituirt man dann diese Werthe von $x, x^2, x^3, \dots$ in der ersten gegebenen Reihe, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha a - 1)\gamma \\ &+ (\beta a + a^2 b)\gamma^2 \\ &+ (\gamma a + 2\alpha\beta b + a^3 c)\gamma^3 \\ &+ (\delta a + (2\alpha\gamma + \beta^2)b + 3\alpha^2\beta c + a^4 d)\gamma^4 + \dots, \end{aligned}$$

und da diese Reihe für alle Werthe von γ gleich Null seyn soll, so hat man (§. 34, III.) die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha a - 1, \\ 0 &= \beta a + a^2 b, \\ 0 &= \gamma a + 2\alpha\beta b + a^3 c \text{ u. f.}, \end{aligned}$$

aus welchen man also die Werthe der gesuchten Größen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ bestimmen wird. Man findet nämlich $\alpha = \frac{1}{a}$ oder

$$\begin{aligned} \alpha \cdot a &= 1, \\ \beta \cdot a^3 &= -b, \\ \gamma \cdot a^5 &= 2b^2 - ac, \\ \delta \cdot a^7 &= 5abc - a^2d - 5b^3, \\ \epsilon \cdot a^9 &= 14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e \text{ u. f.} \end{aligned}$$

Ex. Wir haben oben (§. 60.) den Ausdruck erhalten

$$\gamma = \text{Log}(1+x) = m \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right).$$

Sucht man daraus die Größe x durch γ zu bestimmen, und nimmt man, wie zuvor, an

$$x = \alpha\gamma + \beta\gamma^2 + \gamma\gamma^3 + \dots,$$

so hat man $a = m$, also auch $\alpha = \frac{1}{m}$,

$$b = -\frac{m}{2}, \quad \text{»} \quad \beta = \frac{1}{2m^2},$$

$$c = -\frac{m}{3}, \quad \text{»} \quad \gamma = \frac{1}{2 \cdot 3 m^2},$$

$$\delta = -\frac{m}{4}, \quad \text{»} \quad \delta = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 m^3} \text{ u. f.},$$

so dafs man demnach erhält

$$x = \frac{1}{m} \text{Log}(1+x) + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{\text{Log}(1+x)}{m} \right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\text{Log}(1+x)}{m} \right)^3 + \dots$$

Da aber $\text{Log}(1+x) = \gamma$ ist, so ist auch $1+x = a^\gamma$, und

daher die letzte Reihe

$$a^y = 1 + \left(\frac{y}{m}\right) + \frac{1}{1.2} \left(\frac{y}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3} \left(\frac{y}{m}\right)^3 + \dots,$$

übereinstimmend mit der Reihe (D) des §. 61.

§. 77. (Entwicklung der Functionen in Reihen durch die Methode der unbestimmten Coefficienten.) Dasselbe Verfahren des §. 76. läßt sich auch auf die Entwicklung gegebener Functionen in Reihen anwenden.

Sey z. B. das ohne Ende fortgehende Polynom

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$

gegeben, und die n^{te} Potenz desselben durch eine, nach den Potenzen von x fortgehende Reihe darzustellen, oder sey

$$y = (a + bx + cx^2 + \dots)^n$$

in eine Reihe der Form

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \dots,$$

zu entwickeln, also die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ durch die bekannten a, b, c , zu bestimmen.

Nimmt man von dem ersten Ausdrucke die logarithmischen Differentialien (nach §. 52.), so hat man

$$\frac{dy}{y} = \frac{n(b + 2cx + 3dx^2 + \dots)dx}{a + bx + cx^2 + \dots}.$$

Eben so hat man, wenn man auch den zweyten Ausdruck von y differentiirt:

$$\frac{dy}{dx} = \beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + \dots$$

Setzt man beyde Ausdrücke von $\frac{dy}{dx}$ einander gleich, so erhält man

$$n(b + 2cx + 3dx^2 + \dots)(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots) - (\alpha + bx + cx^2 + \dots)(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + \dots) = 0.$$

Führt man aber diese zwey Multiplicationen aus, und ordnet das Product nach den Potenzen von x , so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha\beta - nb\alpha) \\ &+ (2a\gamma + b\beta - nb\beta - 2nca)x \\ &+ (3a\delta + 2b\gamma + c\beta - nb\gamma - 2nc\beta - 3nda)x^2 + \dots, \end{aligned}$$

und wenn man auch hier wieder, nach §. 34, III., den Factor einer jeden Potenz von x für sich gleich Null setzt, so erhält man

$$\begin{aligned} a\beta &= n \cdot b\alpha, \\ 2a\gamma &= (n-1)b\beta + 2n \cdot c\alpha, \\ 3a\delta &= (n-2)b\gamma + (2n-1)c\beta + 3n \cdot d\alpha, \\ 4a\varepsilon &= (n-3)b\delta + (2n-2)c\gamma + (3n-1)d\beta + 4n \cdot e\alpha, \\ 5a\zeta &= (n-4)b\varepsilon + (2n-3)c\delta + (3n-2)d\gamma + (4n-1)e\beta \\ &\quad + 5n \cdot f\alpha, \\ 6a\eta &= (n-5)b\zeta + (2n-4)c\varepsilon + (3n-3)d\delta + (4n-2)e\gamma \\ &\quad + (5n-1)f\beta \\ &\quad + 6n \cdot g\alpha, \end{aligned}$$

u. s. w.,

wovon das Gesetz des Fortganges deutlich ist. Dabey bleibt die erste Gröfse a unbestimmt. Es ist aber $a = a^n$, wie man findet, wenn man in dem ersten Ausdrucke für γ die Gröfse $x = 0$ setzt.

Ist $c = d = e \dots$ gleich Null, so erhält man $\gamma = (a + bx)^n$, übereinstimmend mit §. 58.

Für das Trinom

$$\gamma = (1 + Ax + Bx^2)^n = a + \beta x + \gamma x^2 + \dots$$

endlich erhält man, wenn man in dem Vorhergehenden $a = 1$, $b = A$, $c = B$ und $d = e = f \dots$ gleich Null setzt, zur Bestimmung der Factoren α , β , $\gamma, \dots$ die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \\ \beta &= nA, \\ 2\gamma &= (n-1)A\beta + 2nB, \\ 3\delta &= (n-2)A\gamma + (2n-1)B\beta, \\ 4\varepsilon &= (n-3)A\delta + (2n-2)B\gamma, \\ 5\zeta &= (n-4)A\varepsilon + (2n-3)B\delta \text{ u. f.} \end{aligned}$$

§. 78. (Interpolation der Reihen.) Wenn man das allgemeine Glied U einer Reihe kennt, das immer eine Function des Index n (§. 72, I.) der Reihe ist, so erhält man daraus das 1^{ste}, 2^{te}, 3^{te}, $\dots$ Glied der Reihe, wenn man in U diese Gröfse n gleich 1, 2, 3, $\dots$ setzt. So war oben (§. 74.) für die Dreyeckszahlen

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15$$

das allgemeine Glied

$$U = \frac{1}{2}n(n+1),$$

also ist auch, wenn man z. B. $n = 100$ setzt, das hundertste Glied dieser Reihe

$$50(101) = 5050.$$

Allein nichts hindert uns, für diesen Index nicht blofs ganze, positive oder negative Zahlen, sondern auch Brüche zu setzen, wo man dann diejenigen Glieder erhalten wird, die zwischen die Glieder der gegebenen Reihe fallen. Man nennt diese neuen Glieder die eingeschalteten oder interpolirten Gröfsen.

So gibt unser Beyspiel, wenn man zwischen je zwey Glieder der Reihe ein mittenliegendes einschalten will,

$$\begin{array}{rcl} \text{für } n = \frac{3}{2} & . . . & U = \frac{15}{8}, \\ & & \frac{5}{2} . . . \frac{35}{8}, \\ & & \frac{7}{2} . . . \frac{63}{8} \text{ u. f. ,} \end{array}$$

so dafs daher die so interpolirte Reihe der Dreyeckzahlen seyn wird

$$\frac{8}{8} + \frac{15}{8} + \frac{24}{8} + \frac{35}{8} + \frac{48}{8} + \frac{63}{8} + \frac{80}{8} + \dots,$$

und auch dieß ist eine arithmetische Reihe der zweyten Ordnung, da ihre zweyten Differenzen constant und gleich $\frac{1}{4}$ sind.

Da es aber sehr viele Reihen gibt, die, ohne eben zu den arithmetischen zu gehören, wenn auch nicht auf genau constante, doch auf nahe beständige höhere Differenzen führen, so läßt sich dieses Verfahren oft mit Vortheil auch auf solche Reihen anwenden, ohne dafs man ihr allgemeines Glied zu kennen braucht.

Betrachtet man nämlich eine solche Reihe, deren Differenzen einmal nahe constant werden, als eine arithmetische Reihe höherer Ordnung, so erhält man für das allgemeine Glied derselben (nach §. 73, I.):

$$U = a + (n-1)\Delta a + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \Delta^2 a + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 a + \dots,$$

wo a das erste, dem Index 1 entsprechende Glied, und wo die übrigen auf einander folgenden Glieder sind

$$\overset{1}{a} + \overset{2}{b} + \overset{3}{c} + \overset{4}{d} + \dots,$$

so daß man für die 1^{sten}, 2^{ten}, 3^{ten}, . . . Differenzen (nach §. 73.) hat

$$\Delta a = b - a,$$

$$\Delta^2 a = c - 2b + a,$$

$$\Delta^3 a = d - 3c + 3b - a,$$

$$\Delta^4 a = e - 4d + 6c - 4b + a \text{ u. f.}$$

Ex. Um die Anwendung dieses Verfahrens durch ein Beispiel deutlich zu machen, wollen wir annehmen, man hätte bereits (nach §. 64.) die Logarithmen von den fünf folgenden Zahlen auf 6 Decimalstellen genau gefunden, und wollte nun die dazwischen liegenden Logarithmen der ganzen Zahlen durch Interpolation bis auf 5 Decimalstellen genau bestimmen.

Index.	Zahl.	Logarithmus.
1	1000	3.000000 = a,
2	1010	3.004321 = b,
3	1020	3.008600 = c,
4	1030	3.012837 = d,
5	1040	3.017033 = e.

Von diesen Logarithmen sind die Differenzen

$$\Delta a = 0.004321,$$

$$\Delta^2 a = -0.000042.$$

Ferner ist $\Delta^3 a$ schon sehr nahe gleich Null, und überdies $a=3$.

Es ist demnach das n^{te} Glied dieser Reihe

$$U = 3.000000 + 0.004321(n-1) - 0.000021(n-1)(n-2).$$

Mit diesem Ausdrücke von U erhält man für

$n=1.1$	$n=1.2$	$n=1.3$	$n=1.4$
3.000000	3.000000	3.000000	3.000000
432	864	1296	1728
<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>
3.00043	3.00087	3.00130	3.00173

so daß man daher für die ersten der gesuchten Einschaltungen erhält

$$\text{Log } 1001 = 3.00043,$$

$$\text{Log } 1002 = 3.00087,$$

$$\text{Log } 1003 = 3.00130,$$

$$\text{Log } 1004 = 3.00173,$$

übereinstimmend mit den gewöhnlichen Tafeln unserer Logarithmen. Übrigens wird in diesen, wie in allen ähnlichen Fällen, wo dieselben Rechnungen öfter wiederholt werden sollen, eine geringe Aufmerksamkeit schon hinreichen, mehrere Vortheile und Abkürzungen an die Hand zu geben, die keiner besonderen Erläuterung bedürfen, und daher besser der Umsicht und Selbsterfahrung des Rechners überlassen bleiben. So wird es z. B. hier bequemer, und doch gleich sicher seyn, nicht immer von dem ersten Gliede a , sondern für jedes neue Zwischenglied, das z. B. zwischen b und c fällt, von dem ihm zunächst vorstehenden Gliede b auszugehen, und dieses Zwischenglied durch eine einfache Proportion aus b und c abzuleiten. Dabey wird allerdings nur auf die erste Differenz Δa Rücksicht genommen, und die zweyte $\Delta^2 a$ vorläufig gleich Null gesetzt. Allein man sieht, daß die aus dieser vorläufigen Annahme entspringende Correction, so lange man immer nur von einem gegebenen Gliede b zu dem nächstfolgenden c , oder von c zu d übergeht, eine constante Gröfse, und zwar in unserem Falle gleich $+0.000004$ ist, daher man nur diese Constante zu dem aus der erwähnten Proportion erhaltenen Resultate für alle zwischen a und e enthaltenen Zahlen wieder hinzusetzen wird.

Sucht man z. B. den Logarithmus von 1015, so hat man, da $c - b = 0.004279$ ist, die Proportion

$$10 : 0.004279 = 5 : x \quad \text{oder} \quad x = 0.002140,$$

also auch und eben so

$$\text{Log } 1010 = 3.004321 \qquad \text{Log } 1020 = 3.008600$$

$$\text{Proportionaltheil} \quad 2140 \qquad 2118$$

$$\text{Constante} \quad . \quad . \quad . \quad 4 \qquad 4$$

$$\text{Log } 1015 = 3.00647, \qquad \text{Log } 1025 = 3.01072,$$

$$\text{Log } 1030 = 3.012837$$

$$2098$$

$$4$$

$$\text{Log } 1035 = 3.01494,$$

und alle diese Logarithmen sind, der aufgestellten Forderung gemäß, in der fünften Decimalstelle noch richtig.