

N e u e
und
ALLGEMEINE ART,
alle Aufgaben
Aus der Geometrie
vermittelst der geometrischen Lineen
leichte aufzulösen.

Insbesondere
Wie alle reguläre und irreguläre
Viel-Ecke, davon eine Verhältniß ihrer
Seiten gegeben, in den Circul geome-
trisch sollen eingeschrieben
werden, etc.

Samt einer kurzen hierzu nöthigen
Buchstaben - Rechenkunst
und
Geometrie.

Als Erstlinge an das Licht gestellet
von
Tobias Majern, Mathem. Cult.

Elslingen, Gedruckt bey Gottlieb Mäntlern. 1741.

Dem
Wohl-Gebohrnen
Herrn,
H e r r n
CHRISTIAN
WOLFFEN,

Ihro Königl. Majestät in Preussen
hochbetrauten Geheimden Rathe, der
Königlich-Preussischen Friedrichs-Univer-
sität zu Halle hochverordneten Vice-Canz-
lern, und weltberühmten Professoris Juris
Nat. et Mathem. Publ. Ordin. daselbst, auch
Professori honor. zu St. Petersburg, inglei-
chem der Königlich-Französischen Acade-
mie der Wissenschaften zu Paris, und der
Königlich Groß-Brittanischen, auch Königl.
Preussischen Societät der Wissenschaf-
ten hochberühmten Mitglieder,

Seinem
hohen Mecaenaten

und

Patronen

übergibet

diese,

aus

Deroselben

der

gelehrten Welt

zum

allgemeinen Besten

mitgetheilten

unschätzbaren Schriften

aufgegangene Blüthen, als geringe Erstlinge.

Und
unterwirft sie
Dero
hohen Censur,
in der
angenehmen Hoffnung
einer
hochgeneigten Aufnahm
und
einigen Beyfalls,
mit Versprechen,
in das künftige
mehrere
und
reifere Früchten zu sammeln.

Empfiehet
sich auch zugleich
hiemit
in aller unterthäniger Submission
zu

Deroselben
hohen Gunst
und
Wohlgewogenheit

Tobias Mejer,
Lycei Eßling. primanus.

V o r r e d e.

Da mir unter allen Wissenschaften keine besser gefallen, als die mathematischen, nicht allein wegen ihrer Schärfe und Deutlichkeit, sondern auch wegen ihrer Annehmlichkeit und ergötzlichen Abwechslung: So achte ich es auch für ein sonderbares Glück, wenn mir Gelegenheit gegeben wird, mich noch mehrers darinn zu üben.

Zu diesem meinem vorgesezten Zwek aber desto eher zu gelangen, habe ich diese meine *Erstlinge* als einen Versuch und Probe, und zwar nach Beschaffenheit der dermaligen Umständen, nur ganz enge eingeschränkt, bekannt machen wollen. Dabey habe ich nicht für undienlich erachtet, etwas wenigens von denselben hier zu melden, und zu zeigen, was in solchen enthalten seye.

In den beyden ersten Theilen findet man *eine kurze Buchstaben-Rechenkunst und gründliche Geometrie*. Davon aber habe ich nur so viel gesetzt, als zu meinem Vorhaben dienlich, und meine neue Auflösungen der geometrischen Aufgaben zu verstehen nöthig war.

Der dritte Theil hingegen ist die Ursache, weswegen die beyde erstere geschrieben worden. Es enthält derselbe die besagte *neue und allgemeine Art die Aufgaben aus der Geometrie vermittelst der geometrischen Lineen aufzulösen*, absonderlich aber die Viel-Eke in den Circul einzuschreiben, alles

Vorrede.

auf geometrische Weise, um so viel es sich thun lassen, in mathematischer Lehrart vorgetragen.

Die Gelegenheit zu dieser Erfindung gaben mir die so genannte geometrische Oerter. Denn da ich neben andern mathematischen Büchern, des seel. Herrn *Sturmens mathesis enucleatam* durchgegangen, und mir nun vorgenommen hatte, des Herrn Geheimden Rath *Wolffens* deutsche Anfangs-Gründe der mathematischen Wissenschaften zu lesen, auch darinnen ohne grofsen Anstos bis auf die Lehre von den geometrischen Oertern gekommen war; so erwägneten sich bey diesen viele Schwürigkeiten, zumal da ich niemand hatte, der mir daraus hülfe, daher mußte ich solche auf diesesmal überschlagen, und unterdessen die Differential und Integral-Rechnung vor mich nehmen. Da ich nun mit dieser, und zugleich mit der ganzen Mathematik fertig war, so machte ich mich noch einmal hinter jene, und nach langem Ringen überwand ich obgedachte Schwürigkeiten. Dabey aber liefs ich es nicht bewenden, sondern dachte auf etwas besseres, leichteres und vollkommneres; und also fand sichs, dafs meine Bemühung nicht vergeblich war, wie davon diese Blätter zeugen können.

Werden übrigens diese geringe Erstlinge einigen Beyfall finden, so dürfte bey nächster Gelegenheit eine weitläuftigere und deutlichere Ausführung davon in lateinischer Sprache folgen.

Elstingen, den 17. Febr. als meinem
19. Geburts-Tage, 1741.

Der erste Theil,

in sich haltend

eine kurze Buchstaben-Rechenkunst.

1. *Die 1. Erklärung.* Die Buchstaben - Rechenkunst ist eine Wissenschaft, welche an statt der Ziffern die Buchstaben a, b, c , u. s. w. als allgemeine Zeichen der Gröſſen brauchet, und damit die gewöhnliche Rechnungsarten verrichtet.

2.) *Die 2. Erkl.* Eine Gröſſe aber wird alles dasjenige genennet, was sich vermehren und vermindern läßt, in so weit es sich vermehren und vermindern läßt. Wenn aber in einer Aufgabe bekannte und unbekannte Gröſſen vorkommen, so zeichnet man die bekannte mit den ersten Buchstaben a, b, c , die unbekannte aber mit den letztern x, y, z .

3.) *Der 1. willkührliche Satz.* Damit man aber nicht nur dem Verstande alles deutlich vorstellen, sondern auch die Kürze, so viel möglich, beobachten könne, so gebrauchet man hierzu verschiedene Zeichen. Es ist aber das Zeichen der Addition $+$ (mehr), der Subtraction aber $-$ (weniger),

F.

2 Kurze Buchstaben-Rechenkunst.

doch wird im Anfang das $\dagger$ nicht gesetzt, wol aber das $-$.

4.) *Anmerkung.* Also schreibet ihr die Summe zweyer Gröſſen z. E. a und b also: $a \dagger b$ (a mehr b). Hingegen ihre Differenz also: $a - b$ (a weniger b).

5.) 2. *Wilk. Saz.* Die *Multiplication* hat gemeinlich gar kein Zeichen, bisweilen aber deutet man sie durch einen Punct (.) an.

6.) *Amerk.* Derowegen schreibet ihr das Product aus a in b also: ab , oder auch $a.b$ (a multiplicirt durch b).

7.) 3. *Wilk. Saz.* Wenn aber eine Gröſſe viele andere zugleich multiplicirt, oder viele eine oder auch mehrere, so schließet man die vielen in () ein, und sezet sie alsdenn nebeneinander (§. 5.).

8.) *Ann.* Z. E. das Product aus $a \dagger b$ in c schreibet ihr also: $(a \dagger b)c$, und $a \dagger b$ mit $c \dagger d$ multiplicirt also: $(a \dagger b)(c \dagger d)$.

9.) 4. *Wilk. Saz.* Eben so hat die *Division* zum Zeiehen zwey Puncte (:).

10.) *Ann.* Derowegen schreibet ihr den Quotienten aus b in a also: $a : b$ (a dividirt durch b).

11.) 5. *Wilk. Saz.* Und wenn eine oder mehrere Gröſſen viele auf einmal, oder viele andere eine oder auch mehrere dividiren, so werden die vielen, eben wie §. 7. in () eingeschlossen.

12.) *Ann.* Ihr schreibet demnach $a \dagger b$ dividirt durch c also: $(a \dagger b) : c$, und $a \dagger b$ durch $c \dagger d$ also: $(a \dagger b) : (c \dagger d)$.

13.) 3. *Erkl.* Die *Gleichheit* ist die Uebereinstimmung in der Gröſſe.

14.) 6. *Wilk. Saz.* Wenn eine Gröſſe einer andern gleich ist, so sezet zwischen dieselben das Zeichen $=$ (gleich).

15.) *Ann.* Z. E. Wenn a dem b gleich ist, so schreibet es also: $a=b$ (a gleich b).

16.) *Die 1. Aufgabe.* Etliche Gröſſen zu addiren

Auflösung. Sezet die Gröſſen die ihr addiren sollet alle in eine Reihe hindereinander, und wenn ihr in dieser Reihe einerley Gröſſen mit einerley Zeichen sehet, so sezet sie zusammen: haben sie aber verschiedene, so hebet sie gegen einander auf.

17.) *Ann.* Ihr sollet z. E. $a + 2b$ zu $2a - b$ addiren; sezet sie derowegen in eine Reihe, also; $a + 2b + 2a - b$; un sehet ihr dafs $+ a$ dreymal vorhanden, schreibet solches demnach also: $3a$ (§. 6.), weiter habt ihr $+ b$ zweymal, und $- b$ einmal, derowegen bleibet $+ b$ einmal, folglich ist die ganze Summa von obgesetzten Gröſſen $3a + b$ (§. 3.).

18.) *2. Aufg.* Gröſſen von einander zu subtrahiren.

Aufl. Verändert die Zeichen derjenigen Gröſſen die ihr von den andern abziehen sollet, also dafs ihr an statt $+$ $-$ und an statt $-$ $+$ sezet, und addiret sie alsdenn zusammen (§. 16.).

19.) *1. Ann.* Wenn ihr z. E. von $3a + b$ abziehen sollet $2a - b$ so sezet ihr für $2a - b$, $- 2a + b$ und addiret $3a + b$ und $- 2a + b$ zusammen (§. 16.); so ist $3a + b - 2a + b = a + 2b$.

20.) *2. Ann.* Der Beweis dieser und der vorhergehenden Aufgabe ist nicht nöthig, weil die Sache für sich selbst klar ist.

21.) *Die 3. Aufg.* Gröſſen mit einander zu multipliciren.

Aufl. Führet eine jede Gröſſe des Multiplicanten in alle Gröſſen des Multiplicandi durch, und sezet die

4. Kurze Buchstaben-Rechenkunst.

Producte wie §. 5. Doch merket, daß einerley Zeichen im Producte $+$, verschiedene aber $-$ geben.

Beweis. Wenn ihr $+$ mit $+$, oder $+$ mit $-$ multipliciret, so ist leichte zu begreifen, warum im ersten Falle das Producte $+$ und in andern $-$ habe; denn ihr nehmet das Vorhandene und das Mangelnde etliche mal. Hingegen wenn ihr $-$ mit $-$ multipliciret, und ihr wissen wollet, warum im Producte $+$ seye; so merket, wenn ihr $4 - 2$ durch $- 3$ multipliciren sollet, daß ihr den Mangel $- 3$ so oft nehmen sollet, als $4 - 2$ Einheiten hat, d. i. zweymal: Weil ihr nun anfangs 4 mit $- 3$ multipliciret, so nehmet ihr den Mangel $- 3$ viermal, und also zweymal zuviel: derowegen müsset ihr ihn noch zweymal addiren. Und demnach ist das ganze Producte $- 12 + 6$ folglich giebet $- 2$. $- 3$ im Product $+$ 6. w. z. b.

22.) *Ann.* Wenn ihr z. E. $a + b$ durch $b - d$ multipliciren sollet, so führet in den ersten Theil $+ b$ in die Größen $a + b$ durch, so ist das Producte $+ ab + bb$; und eben so verfaret ihr mit dem andern Theile $- d$ so ist dieses Producte $= - ad - bd$ folglich beyde Producte zusammen $= ab + bb - ad - bd$ (§. 16.)

23.) *Zusaz.* Wenn ihr $- a$ mit $+ b$ multipliciret, so kommt $- ab$ heraus (§. 21.). Derowegen wenn ihr $- ab$ durch $+ b$ dividiret, so muß $- a$ heraus komen: dividiret ihr aber mit $- a$, so ist der Quotiente $+ b$. Demnach gilt auch in der Division die Regel: Einerley Zeichen geben im Quotienten $+$; verschiedene aber $-$.

24.) 4. *Aufg.* Größen durch einander zu dividiren,

Aufl. Wenn eine Gröſſe durch die andere ſich wirklich dividiren läſſet, ſo verfähert ihr wie in Zahlen, nur müſſet ihr die Regel (§. 23.) wol in acht nehmen. Läſſet ſie ſich aber nicht dividiren, ſo ſezet ihr nur die Gröſſen wie oben (§. 9 - 12.)

24.) *Ann.* Ich will ein Exempel herſezen.

$$\begin{array}{r}
 ab + bb - ad - bd \quad (b - d) \\
 (a + b) \quad ab + bb \text{ subtr.} \\
 \hline
 - ad - bd \\
 - ad - bd \text{ subtr.} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

26.) 4. *Erkl.* Wenn man eine Gröſſe (a) durch ſich ſelbſt multipliciret, ſo heiſſet das Producte (aa) die zweyte Dignität deſſelben Gröſſe (a). Multipliciret ihr dieſe (aa) noch einmal in die erſte (a), ſo kommt die dritte Dignität (aaa) heraus u. ſ. w. Die erſte Gröſſe (a) heiſſet die erſte Dignität, und in Anſehung der zweyten, dritten, etc. Dignität, die Wurzel.

27.) 7. *Wilk. Satz.* Den Grad der Dignität deutet man durch eine kleine Ziffer an, welche man oben zur rechten an den Buchſtaben der Gröſſe ſezet. Welche Ziffern hernach die Exponenten der Dignitäten genennet werden.

28.) 1. *Zusaz.* Derowegen könnet ihr an ſtat aa ſezen a^2 , an ſtat aaa a^3 u. ſ. w.

29.) 2. *Zusaz.* Und wenn ihr etliche Dignitäten von einerley Wurzeln (§. 26.) mit einander multipliciren oder dividiren ſollet, ſo dürft ihr nur im erſten Fall ihre Exponenten addiren, im andern aber ſub-

6 Kurze Buchstaben-Rechenkunst.

trahiren; und demnach ist $a^2 \cdot a^3 = a^5$; hingegen $a^5 : a^3 = a^2$.

30.) 3. *Zusaz.* Desgleichen wenn ihr die Dignität einer Gröſſe zu einer andern Dignität erheben; oder aus einer Dignität eine Wurzel (§. 26.) ziehen ſollt; so dürft ihr nur im ersten Falle die Exponenten mit einander multipliciren: im zweyten aber den Exponenten der gegebenen Gröſſe durch den Exponenten der Wurzel dividiren. Also ist die dritte Dignität von $x^2 = x^6$, und die Wurzel der zweyten Dignität von $x^5 = x^3$.

31.) 8. *Wilk. Satz.* Wenn man aus einer Gröſſe eine Wurzel, welche in ihr nicht anzutreffen, ausziehen ſol, so ſetzt man das Wurzelzeichen ($\sqrt{}$) vor sie, und über dasselbige den Exponenten der Wurzel. Z. E. die Wurzel der fünften Dignität aus x ; ſchreibet ihr also: $\sqrt[5]{x}$.

32.) *Anm.* Bey der Quadratwurzel, d. i. der Wurzel von der zweyten Dignität könnet ihr den Exponenten weglassen.

33.) *Zusaz.* Derowegen ist $x^{5:2} = \sqrt{x^5}$ (§. 30. 31.).

34.) 5. *Erkl.* Wenn die Wurzel einer Dignität aus zweyen Theilen ($a + b$) bestehet, so heisset sie eine *binomische*, wenn sie aus dreyen ($a + b + c$), eine *trinomische* Wurzel, etc.

35.) 5. *Aufg.* Znfinden aus was für Theilen der binomischen Wurzel das Quadrat derselben bestehe.

Aufl. Quadriret, d. i. multipliciret mit sich selber, die binomische Wurzel $a + b$, und betrachtet

das Product, so werdet ihr finden was man verlangete,

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 a + b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 ab + b^2 \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2
 \end{array}
 \quad \text{Das Quadrat der binomischen Wurzel.}$$

Also sehet ihr, dafs das Quadrat der binomischen Wurzel bestehe aus den Quadranten (a^2 und b^2) der beyden Theile der Wurzel (a und b) samt einem Product ($2ab$) aus dem einen Theile doppelt ($2a$) in den andern (b).

36.) *Ann.* Gleichergestalt könnet ihr die Eigenschaft der dritten, vierten, etc. Dignität finden, wenn ihr sie nöthig habt.

37.) *Der 1. Grundsatz.* Eine jede Gröfse ist ihr selbst gleich.

38.) *2. Grundsatz.* Wenn man gleiches zu gleichen addiret, oder von gleichem subtrahiret, so ist im ersten Falle die Summe, und in andern der Rest wieder gleich.

39.) *3. Grdsatz.* Wenn man gleiches mit gleichen multipliciret, oder dividiret, so sind die Producte und Quotienten wieder gleich.

40.) *4. Grdsatz.* Wenn man gleiches zu gleichen Dignitäten erhebet, oder aus gleichem gleiche Wurzeln ziehet, sind die Dignitäten im ersten, und die Wurzeln im zweyten Falle wieder gleich.

41.) *5. Grdsatz.* Das Ganze ist so grofs als alle seine Theile zusammen.

8. Kurze Buchstaben-Rechenkunst.

42.) 6. *Erkl.* Wenn man einigen Gröſſen mit dem Zeichen der Gleichheit ($\equiv$) (§. 14.) zusammen ſezet, ſo heiſſet mans *eine Gleichung*. Inſondere heiſſet ſie *eine einfache*, wenn die Glieder nur eine Abmeſſung, *eine quadratiſche*, wenn ſie zwey, *eine cubiſche*, wenn ſie drey Abmeſſungen haben, etc.

43.) 7. *Erkl.* Drey oder vier Gröſſen ſind *arithmetiſch-proportional*, wenn im erſten Falle der Unterſchied zwiſchen der erſten und zweyten, dem Unterſchied zwiſchen der zweyten und dritten Gröſſe gleich iſt. Im zweyten Falle wenn der Unterſchied zwiſchen der erſten und zweyten, dem Unterſchied zwiſchen der dritten und vierten gleich iſt.

44.) *Anm.* Z. E. wenn a, b und c in arithmetiſcher Proportion ſind, ſo iſt $a - b \equiv b - c$; in-gleichem wenn a, b, c und d arithmetiſch proportional ſind, ſo muß $a - b \equiv c - d$ ſeyn.

45.) *Zusaz.* Derowegen wenn ihr in der Gleichung $a - b \equiv b - d$ auf beyden Seiten $b + d$ addiret, ſo iſt $a - b + b + d \equiv c - d + b + d \equiv a + d \equiv c + b$ (§. 58.) d. i. in einer arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der beyden äußerſten Glieder ($a + d$) der Summe von beyden mittlern ($a + c$) gleich.

46.) 8. *Erkl.* Gleichergestalt nennet man *geometriſche proportional-Gröſſen*, wenn der Quotiente aus dem erſten und zweyten, dem Quotienten aus dem zweyten und dritten, oder auch aus dem dritten und vierten Gliede gleich iſt.

47.) *Anm.* Z. E. wenn a, b, c und d geometriſch-proportional ſind, ſo muß $a : b \equiv c : d$ ſeyn.

48.) *Zusaz.* Wenn ihr also in der Gleichung $a : b = c : d$ auf beyden Seiten mit bd multipliciret, so ist $abd : b = cbd : d = ad = bc$ (§. 39.), d. i. in einer geometrischen Proportion ist das Product aus den beyden äußersten Gliedern (ad) dem Product von beyden mittlern (bc) gleich.

49.) 9. *Erkl.* Wenn in einer Gleichung diejenige Gröſſe so mit x oder y bezeichnet, d. i. die unbekannte (§. 2) auf eine Seite soll gebracht werden, so nennet man sie die *Wurzel*.

50.) 10. *Erkl.* Diese ist entweder eine reine oder unreine. Eine *reine Wurzel* ist, wenn in der Gleichung nur einerley Dignität der Wurzel anzutreffen; hingegen ist eine *unreine*, wenn verschiedene Dignitäten von ihr vorhanden.

51.) 6. *Aufg.* Eine *reine Gleichung* aufzulösen.

Aufl. Eine Gleichung aufzulösen, heißet so viel als die Wurzel auf eine Seite zu bringen. Wenn ihr nun dieses verrichten wollet, so müsset ihr hier die Gröſſen so addirt sind durch subtrahiren, die subtrahirte durch addiren, die multiplicirte durch dividiren, etc. wegbringen (§. 38. 39. 40.), bis ihr endlich die Wurzel auf einer Seite allein habt.

52.) *Anm.* Z. E. ihr sollet in der Gleichung $ab - x^2 = x^2 + d^2$ die Wurzel x auf eine Seite bringen, addiret derowegen auf beyden Seiten x^2 , so ist $ab = x^2 + d^2 + x^2$, subtrahiret ferner $c^2 + d^2$, so ist $ab - c^2 - d^2 = x^2$, endlich ziehet auf beyden Seiten die Quadratwurzel aus, so ist $\sqrt{ab - c^2 - d^2} = x$ (§. 38. 40.).

10 Kurze Buchstaben-Rechenkunst.

53.) 7. Aufg. Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl. In einer unreinen quadratischen Gleichung ist $\dfrac{1}{2}b^2 = x^2 + ax$, damit ihr nun ihre unreine Wurzel x finden möget, so müsset ihr sehen, daß ihr aus $x^2 + ax$ ein Quadrat einer binomischen Wurzel machet (§. 35.), dieses aber geschieht wenn ihr x für den ersten Theil der binomischen Wurzel annehmet, denn ist a der andere Theil doppelt, folglich $\dfrac{1}{2}a$ der andere Theil selbst; wenn ihr derowegen sein Quadrat $= \dfrac{1}{4}a^2$ auf beyden Seiten addiret, so ist $x^2 + ax + \dfrac{1}{4}a^2 = b^2 + \dfrac{1}{4}a^2$; und ihr könntet die Quadratwurzel ausziehen, folglich x auf eine Seite bringen,

$$x + \dfrac{1}{2}a = \sqrt{b^2 + \dfrac{1}{4}a^2}$$

$$\text{snbtr. } \dfrac{1}{2}a \text{ —————}$$

$$x = \sqrt{b^2 + \dfrac{1}{4}a^2} - \dfrac{1}{2}a$$

eben so findet ihr wenn $x^2 - ax = b^2$ daß $x = \dfrac{1}{2}a + \sqrt{\dfrac{1}{4}a^2 + b^2}$

und endlich wenn $x^2 - ax = -b^2$, daß entweder $x = \dfrac{1}{2}a + \sqrt{\dfrac{1}{4}a^2 - b^2}$ oder auch $x = \dfrac{1}{2}a - \sqrt{\dfrac{1}{4}a^2 - b^2}$.

54.) 8. Aufg. In einer gegebenen Gleichung die Wurzel um eine verlangte Gröfse zu vermehren oder zu vermindern.

Aufl. Ihr sollet z. E. in der Gleichung $y^3 - aay = b^3$ die Wurzel y um a vermehren. Richtet die Gleichung also ein, daß auf eine Seite alle Glieder derselben, auf der andern aber nichts oder 0 zu ste-

stehen komme, also: $y^3 - a^2y - b^3 = 0$. Setzet
alsdenn $y + a = x$ so ist $y = x - a$

$$\begin{aligned} \text{und } y^3 &= x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3 \\ - a^2y &= -a^2x + a^3 \\ - b^3 &= -b^3 \end{aligned}$$

$y^3 - a^2y - b^3 = x^3 - 3ax^2 + 2a^2x - b^3 = 0$
also habt ihr eine neue Gleichung in welcher
 $x = y + a$.

Ihr sollet ferner in der Gleichung $x^3 - 3ax^2$
 $+ 2a^2x - b^3 = 0$ die Wurzel x um a vermindern,
Sezet $x - a = y$ so ist $x = y + a$

und $x^2 = y^2 + 2ay + aa$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3 \\ - 3ax^2 &= -3ay^2 - 6a^2y - 3a^3 \\ + 2aax &= 2aay + 2a^3 \\ - b^3 &= -b^3 \end{aligned}$$

$x^3 - 3ax^2 + 2aax - b^3 = y^3 - aay - b^3 = 0$ eine
neue Gleichung in welcher $y = x - a$.

55.) 9. Aufg. Aus einer gegebenen Gleichung
das zweyte Glied wegzubringen.

Aufl. Wenn das zweyte Glied das Zeichen $+$ hat,
so vermehret ihr die Wurzel um diejenige Gröfse,
welche heraus kommt, wann ihr die bekannte
Gröfse des zweyten Gliedes durch den Exponen-
ten des ersten dividiret. Wenn aber das zweyte
Glied $-$ hat so vermindert ihr die Wurzel um be-
sagte Gröfse (§. 54.). Als wenn ihr der Gleichung
 $y^3 - 3ay^2 + 2aay - b^3 = 0$ das zweyte Glied
wegnehmen sollet, so ist $3a:3 = a$. Setzet dero-

12 Kurze Buchstaben-Rochensfunst.

wegen $y - a = x$ und verfähret wie oben, (§. 54.)
so findet ihr eine andere Gleichung $x^3 * - aay$
 $- b^3 = 0$ in welcher das zweyte Glied fehlet,
und $x = y - a$.

56) 10. Aufg. Eine unreine cubische Gleichung
aufzulösen.

Aufl. Wenn ihr aus einer unreinen cubischen
Gleichung das zweyte Glied wegnehmet (§. 55.), so
bekommet ihr entweder

$$\text{I. } y^3 = py + q$$

$$\text{oder II. } y^3 = py - q$$

$$\text{oder auch III. } y^3 = -py + q$$

Damit ihr nun im ersten Falle die Wurzel y auf
eine Seite bringet, so sezet

$$y = x + v$$

$$\text{so ist } y^3 = x^3 + 3xxv + 3xv^2 + v^3$$

$$py = px + pv$$

$$q = q$$

$$x^3 + 3xxv + 3xv^2 + v^3 = px + pv + p(n. 1.$$

Sezet ferner freywillig

$$3x^2v + 3xv^2 = px + pv (n. 2.$$

$$\text{so ist } 3xv = p$$

$$v = p : 3x (n. 3.$$

Und weil ihr aus der Gleichung $n. 1.$ die bey $n. 2.$
weggenommen habt, so bleibet

$$x^3 + v^3 = q (n. 4.$$

$$\text{das ist } (n. 3.) \quad x^3 + p^3 : 27x^3 = q$$

$$x^5 - qx^3 = -\frac{1}{27}p^3$$

$$x^3 - \frac{1}{4}q = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)} \text{ (S. 55.) (n. 5.)}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}q + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} \text{ (n. 6.)}$$

Endlich weil (n. 4.) $v^3 = q - x^3$

$$\text{so ist (n. 5.) } v^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}$$

$$v = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} \text{ (n. 7.)}$$

Derowegen ist $x + v$ (u. 6 und 7.) $= \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$.

Eben so findet ihr im zweyten Falle $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}}$.

Und endlich im dritten Fall $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}}$.

57.) *Anm.* Ihr könnet auf gleiche Art Regeln für die unreine Gleichungen von höhern Graden finden, wenn ihr sie nöthig habt.

Ende der Buchstaben-Rechenkunst.

Der zweyte Theil,

welcher begreift

Eine gründliche Geometrie.

58. *Die 1. Erkl.* Die gemeine Geometrie ist eine Wissenschaft, die ausgedehnte Grössen auszumessen.

59.) 2. *Erkl.* Es sind aber die Grössen mit welchen die Geometrie umgeheth, entweder nach der Länge, oder nach der Länge und Breite, oder auch nach der Länge, Breite und Dicke ausgedehnet. Die erste Art der ausgedehnten Grössen nennet man *Lineen*, die zweyte *Flächen*, und die dritte *Cörper*.

60.) 3. *Erkl.* Das äusserse einer Linee wird ein *Punct* gennet.

61.) 4. *Zusaz.* Derowegen hat ein Punct keine Länge, Breite noch Dicke.

62.) *Erkl.* Eine *gerade Linee* ist diejenige deren äusserste Puncte alle zwischenligende verdecken. Hingegen heisset eine *krumme Linee*, wenn ihre äusserse Puncte die mittlere nicht verdecken.

63.) *Ann.* Man hat ein besondres Instrument, mit welchen man die geraden Lineen zieht, welches man ein *Lineal* nenet; wenn ihr also wissen wollet ob es accurat sey, so dürft ihr nur das Auge an das eine Ende desselbigen sezen, und gegen dem andern Ende hinsehen, so werdet ihr finden können ob es gut sey oder nicht (§. 62.).

64.) 5. *Erklär.* Wenn eine gerade Linie AC (Fig. 1.) sich um einen festen Punct C bewege, so beschreibt der andere Punct A eine krumme Linie $ABDE$, welche man die *Circul-Linie* nennet.

65.) *Zusaz.* Derowegen sind alle gerade Lineen, die aus dem festen Punct C an die Circul-Linie gezogen werden einander gleich (§. 37.)

66.) 6. *Erkl.* Den festen Punct C nennet man den *Mittelpunct*. Die Linie AC den *halben Diameter*, gleichwie die gerade AD den *ganzen*. Eine andere gerade Linie BE die nicht durch den Mittelpunct C gehet, eine *Sehne*. Die Circul - Linie heisset auch der *Umkreis*; und ein Stück von dieser ein *Bogen*. Endlich die Fläche so diese Circul-Linie einschlieset wird die *Circul-Fläche*, insgemein aber der *Circul* genennet.

67.) 7. *Erkl.* Wenn zwey Lineen BC und AC (Fig. 2.) in einem Punct C zusammen stoßen, so machen sie einen *Winkel* BCA . Seine Gröſe wird durch einen aus C beschriebenen Bogen AB gemessen.

68.) *Zusaz.* Derowegen liegt die Gröſe eines Winkels nicht an denen ihn einschließenden Linen.

69.) 8. *Erkl.* Wenn eine grade Linie CD (Fig. 3.) auf eine andern AB also steht, daß der Winkel ACD dem Winkel BCD gleich ist, so steht sie auf AB *perpendicular*. Die beyde Winkel ACD und BCD werden *rechte Winkel* genennet.

70.) 9. *Erkl.* Eine in drey Lineen eingeschlossene Fläche nennet man *ein Drey-Eck*. Eine in vier *ein Vier-Eck*. Eine in fünf *ein Fünf-Eck*. u. s. w. Ueberhaupt aber nennet man sie *Viel-Ecke*; oder auch *Figuren*.

71.) 10. *Erkl.* Es sind aber dieselbe entweder regulär oder irregulär. *Reguläre Viel-Ecke* sind, an denen alle Seiten und Winkel unter sich gleich. *Irreguläre* aber an denen sie ungleich sind.

72.) 11. *Erkl.* Insbesondere nennet man ein reguläres Vier-Eck *ein Quadrat*.

72.) 12. *Erkl.* *Parallel-Lineen* sind, die immer einerley Weite von einander behalten.

74.) *Wilk. Saz.* Der Umkreis eines jeden Circuls wird in 360 gleiche Theile eingetheilet, die man Grade nennet, und mit o bezeichnet.

75.) 1. *Grundsaz.* Ein jeder Diameter theilet den Circul in zwey gleiche Theile (§. 66.).

76.) *Zusaz.* Derowegen ist das Mas einer geraden Linee eine halbe Circul-Linee, d. i. 180 Grade (§. 74.).

77.) 2. *Grdsaz.* Das Maf eines rechten Winkels ist der vierte Theil einer Circul-Linee (§. 69.), d. i. 90 Grade.

78.) 3. *Grdsaz* Alle Lineen, Winkel und Figuren die einander decken, sind einander gleich.

79.) 4. *Grdsaz.* Eine jede Figur hat so viel Winkel als sie Seiten hat (§. 70.), und noch so viel Theile, aus welchen sie bestehet.

80.) *Der 1. Lehrsaz.* Wenn in einem Drey-Ecke drey Theile dreyen gleichnamigen Theilen

eines andern Drey-Ecks gleich sind, so sind die übrige drey Theile des ersten, denen drey übrigen des andern Drey-Eckes unter sich, auch die Drey-Ecke selbst gleich.

Bew. Wenn ihr die drey Theile des ersten auf die drey Theile des andern leget, so werden sie einander decken, weil sie gleich sind (§. 78.), und ihr werdet ferner sehen, dafs die übrige Theile des Drey-Eckes auf die Theile des andern passen; derowegen sind diese Theile unter sich, auch die beyde Drey-Ecke einander selbst gleich (§. 78.) w. z. b.

81.) *Anm.* Es wird dieses in allen Fällen angehen, aufer wenn die drey Winkel des einen denen dreyen des andern gleich gegeben sind, da nicht allezeit die Drey-Ecke gleich seyn werden (§. 68.)

82.) 1. *Aufg.* Aus einem Punct D (Fig. 3.) auf eine gerade Linee AB eine Perpendicularlinee DC zu fällen,

Aufl. Machet aus D mit einer beliebigen Weite zwey Durchschnitte auf die gegebene Linee AB in A und B, und aus eben diesen A und B einen Durchschnitt in E, ziehet DE, so ist DC die verlangte perpendicular-Linee.

Bew. Weil $AD = BD$, $AE = BE$, so ist der Winkel $ADE = BDE$, wenn ihr nemlich beyde Drey-Ecke ADE und BDE aufeinander leget; ihr findet eben so dafs in den Drey-Ecken ADC und BDC der Winkel $ACD = BCD$ (§. 80.); derow-

G.

wegen ist CD und AB perpendicular (§. 69.),
w. z. b.

85.) 2. *Aufg.* Mit einer gegebenen Linee AB (Fig. 4.) eine andere CD in einer bekannten Weite parallel zu ziehen.

Aufl. Machet mit der gegebenen Weite aus A in C und aus B in D zwey Bögen, und ziehet über solche die Linee CD s. i. g. (§. 73.)

84.) *Anm.* Wollet ihr ein bequemes Instrument haben, womit ihr nicht allein die perpendicular, sondern auch die parallel-Linien ziehen könnet, so lasset euch zwey Drey-Ecke ABC und DEF (Fig. 5.) von Holz, Elfenbein etc. machen, welche beyde in C und E rechte Winkel haben. Wenn ihr nun damit auf eine Linee ein andere perpendicular setzen wollet, so leget eine Seite des einen Drey-Eckes AB auf die gegebene Linee an, das andere setzet mit der Seite EF auf das erste, so könnet ihr an der Seite DE die verlangte perpendicular-Linee ziehen. Und wenn ihr mit einer Linee eine parallele ziehen wollet, so leget des einen Seite AB (Fig. 6.) an die gegebene Linee, das andere Drey Eck FBE unter das erste, halte dieses mit der Hand fest, das obere aber rückt auf der Seite des untern FB , so könnet ihr ebenfalls die parallel-Linee CD ziehen.

85.) 2. *Lehrsatz.* Ein Vier-Eck $ABCD$ (Fig. 7.) daran die gegenüber stehende Lineen AB und DC , ingleichen AD und BC gleich sind, wird durch die Linee BD in zwey gleiche Drey-Ecke ABD und CDB , getheilet.

Bew. Weil BD eine Seite von beyden Drey-Ecken ist, und $AB = CD$, $AD = BC$, so ist das Drey-Eck $ABD = BCD$ (§. 80.)

86.) *Zusatz.* Und weil $AB = DC$, so ist AD mit BC , ingleichen weil $AD = BC$, so ist DC mit AB pa-

parallel, Und daher pflegt man diese Art von Vierecken Parallelogramma zu nennen,

87.) 3. *Lehrsatz.* Zwey Parallelogramma ACDB und AEFB (Fig. 8.), die einerley Grundlinie und Höhe haben, sind einander gleich.

Bem. Weil $AC=BD$, $AE=BF$ und $CE=DF$, so ist das Drey-Eck $ACE=BDF$ (§. 80); folglich $AEDB + BDF = AEFB = AEDB + ACE = ACDB$ (§. 38.) w. z. b.

88.) 1. *Zusatz.* Derowegen ist ein Drey-Eck die Hälfte eines Parallelogrammi, so mit ihm gleiche Höhe und Grundlinee hat (§. 85.)

89.) 2. *Zusatz.* Und wenn etliche Drey-Ecke zwischen zweyen parallel-Lineen stehen, oder gleiche Höhe haben, so sind sie einander gleich.

90.) 3. *Zusatz.* Gleichergestalt wenn etliche Drey-Ecke gleiche Höhe haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundlineen, haben sie gleiche Grundlineen, so verhalten sie sich wie ihre Höhen.

91.) 13. *Erkl.* Den *Inhalt einer Fläche zu finden* ist so viel als auszumachen, wie oft ein gegebenes Quadrat in einer Fläche enthalten seye.

92.) 3. *Aufg.* Den *Inhalt eines rechtwinklichten Vier-Eckes zu finden.*

Aufl. Messet wie oft die Seite des Quadrats E. (Fig. 9.) in den beyden Seiten des rechtwinklichten Vier-Eckes AB und AD enthalten seye, es begreife solches z. E. AB dreymal und AD viermal, multipliciret alsdenn diese drey und vier mit ein-

der, so zeigt das Product 12. an, wie oft das Quadrat E in dem rechtwinklichten Vier-Eck ABCD stecke; folglich habt ihr den Inhalt gefunden (§. 91.)

Bew. So oft die Seite des kleinen Quadrats E in einer Seite des Vier-Ecks AB enthalten ist, so viel können dergleichen kleine Quadrate auf der Linee AB stehen. Nun nehmt eine solche Reihe ABGF auf der andern Seite AD, mit ihrer Breite AF eine Seite des Quadrats E ein; derowegen können so viele Reihen Quadrate ABGF auf der Seite AD stehen, so vielmal solche die Seite des Quadrats E in sich hält. Folglich muß der Inhalt heraus kommen, wenn man die Seiten AB und AD nach dem Quadrat E gemessen in einander multiplicirt, w. z. b.

93.) 1. *Zusaz.* Derowegen findet ihr den Inhalt eines jeden Parallelogrammi, wenn ihr seine perpendicular-Höhe in seine Grundlinee, beyde nach der Seite des gegebenen Quadrats gemessen, multipliciret (§. 87.)

94.) 2. *Zusaz.* Und wenn ihr die Höhe eines Drey-Eckes durch seine Grundlinee multipliciret, so giebt das halbe Product seinen Inhalt (§. 88.)

95.) *Zusaz.* Sezet ihr ferner die Seiten eines Vier-Eckes $= a$ und b , so ist der Inhalt desselben $= ab$ (§. 1. und 5.)

96.) 4. *Lehrsaz.* In einem rechtwinklichten Drey-Eck ABC (Fig. 10.) ist das Quadrat BCHI der größten Seite BC denen Quadraten ABDE und

ACFG der übrigen Seiten AB und AC zusammen genommen gleich.

Bew. Zieheth AH und BF, ingleichem mit CH die parallele AK (§. 83.). Weil $CFB = \frac{1}{2} ACFG$, und $AHC = \frac{1}{2} CLKH$ (§. 88.), ingleichem weil $AHC = CFB$ (§. 89.), so ist $ACFG = LCHK$. Auf gleiche Weise wird erwiesen, daß $ABDE = BLKI$; derowegen ist $ACFG + ABDE = LCHK + BLKI = BCHI$ (§. 41.). w. z. b.

97.) *Anm.* Dieser Lehrsatz wird insgemein wegen seines großen Nutzens in der Mathematik *Magister matheseos* genannt. Pythagoras ein Grieche soll ihn zuerst erfunden haben.

98.) 5. *Lehrsatz.* Wenn zwey gerade Lineen AB und DE (Fig. 11.) einander in C durchschneiden, so sind die Gegenwinkel o und x . ingleichem u und y einander gleich.

Bew. Es ist $u + o = 180^\circ$, und ebenfalls $x + u = 180^\circ$ (§. 76.); derowegen ist $u + o = x + u$ folglich $o = x$ (§. 38.). Weil nun auch $o + y = 180^\circ$, so ist $o + y = u + o$, und $y = u$. w. z. b.

99.) 6. *Lehrsatz.* Wenn zwey parallel-Lineen AB und CD (Fig. 12.) von einer andern FG in E und H durchschnitten werden, so sind die Wechselwinkel x und u einander gleich.

Bew. Zieheth die perpendicular-Lineen KH und EI (§. 82.). Weil nun in denen Drey-Ecken KEH und IHE die Seite $KH = EI$ und $HI = KE$ (§. 73.), auch HE beyden gemein ist, so ist $u = x$ (§. 80.) w. z. b.

100.) *Zusaz.* Weil ferner $x = z$ (§. 98.), und $y + z = 180^\circ$, so ist auch $y + x = 180^\circ$.

101.) 7. *Lehrsaz.* In einem jeden Drey-Eck ABC (Fig. 15.) sind alle drey Winkel $x + u + z = 180^\circ$.

Bew. Ziehet über die Spitze des Drey-Eckes C mit AB die parallele DE (§. 85.); alsdenn ist $m = x$ und $y = z$ (§. 99.). Nun ist $m + u + y = 180^\circ$ (§. 41. und 76.); derowegen ist auch $x + u + z = 180^\circ$, w. z. b.

102.) *Zusaz.* Und demnach ist der Winkel $n = x + z$.

103.) 8. *Lehrs.* In einem gleichschenkelichten Drey-Eck ABC [Fig. 14.], d. i. welches zwey gleiche Seiten AC und BC hat, sind die Winkel an der Grundlinee x und y einander gleich.

Bew. Ziehet die perpendicular-Linee CD. Weil nun $AC = BC$, $m = n$ [69.], und CD beyden Drey-Ecken ACD und BCD gemein ist, so ist auch $x = y$ (§. 80.). w. z. b.

104.) 9. *Lehrs.* Der Winkel so in den Mittelpunct eines Circuls gezogen, ist noch einmahl so groß, als der so in den Umkreis gezogen ist, wenn sie auf einem gleichen Bogen stehen.

Bew. Es können hier drey Fälle fürkommen.

1.) Weil [Fig. 15.] $x = y + u$ (§. 102.), und $u = y$ (§. 103.), so ist $x = y + y = 2y$. 2.) Weil [Fig. 16.] $x = 2y$ und $u = 2z$, so ist $x + u = 2y + 2z$ (§. 39.). 3.) Weil endlich [Fig. 17.] $x = 2z$, und $u + x = 2z + 2y$; so ist $u = 2y$. w. z. b.

105.] 1. *Zusatz.* Derowegen wenn etliche Winkel auf einem gleichen Bogen stehen, und in den Umkreis gezogen sind, so sind sie einander gleich.

106. 2. *Zusatz,* Und wenn ein Winkel an dem Umkreis in einem halben Circul stehet, so ist er ein rechter. [§. 76 und 77.]

107.] 14. *Erklärung.* *Ähnliche Drey-Ecke* sind, an denen die gleichnamige Winkel gleich sind.

108.] 10. *Lehrs.* An ähnlichen Drey-Ecken sind die gleichnamige Lineen einander proportional.

Bew. Sezet die beyde ähnliche Drey-Ecke GHF [Fig 18.] = DEA und ABC mit einem Winkel A in einander, so fallen die Lineen AD und AB, ingleichem AE und AC aufeinander [§. 78.]; und es werden die Lineen DE und BC parallel seyn [§. 73.]. Ziehet nun DC und BE; so ist $DCE = BED$ [§. 89.], und $ADE: DBE = AD: DB$, desgleichen $ADE: DEC = AE: EC$ [§. 90.]. Derowegen ist $AD: DB = AE: EC$; folglich $AD: AB = AE: EC$ [§. 58.]. Eben so wird auch erwiesen, daß $DE: BC = AD: AB$.

109.) 4. *Aufg.* Zu dreyen gegebenen Lineen MN, OP und QR [Fig. 18.] die vierle proportionale zu finden.

Aufl. Machet einen beliebigen Winkel BAC [§. 67.], und ferner $AB = MN$, $AC = OP$ und $AD = QR$, ziehet BC, und mit dieser die parallele DE, so ist AE die verlangte vierte proportionale [§. 108.]

110.) 1. *Zus.* Wenn ihr zu zweyen Lineen die dritte finden sollet, so nehmet ihr nur an statt der dritten im vorigen Falle, die zweyte in diesem, und verfähret wie erst gesagt worden.

111.) 2. *Zus.* Gleichergestalt wenn ihr eine gegebene Linee AD [Fig. 19.] nach eben der Proportion eintheilen sollet, wie eine andere AB in F und G getheilt ist, so ziehet ihr nur BD, und mit dieser die andere EG und CF parallel, so wird AD in C und E nach Begehren getheilt seyn.

112.) 3. *Zus.* Folglich wenn ihr eine Linee in zwey oder mehrere gleiche Theile eintheilen sollet, sezet ihr auf eine beliebige Linee zwey oder mehrere gleiche Theile, und nach dieser suchet ihr die Theile der gegebenen Linee.

113.) 5. *Aufg.* Zwischen zweyen gegebenen Lineen AB und BC [Fig. 20.] eine mittlere proportionale zu finden.

Aufl. Sezet die beyde Lineen aneinander, und beschreibet über ihrer Summe AC einen halben Circulkreis ADC, richtet aus B bis an den Umkreis in D die perpendicular-Linee BD auf [§. 81. 83.]; so ist solche die verlangte mittlere proportionale.

Bew. Weil $y \dagger z$ desgleichen $x \dagger y = 90^\circ$ [§. 106.], und u denen beyden Drey-Ecken ADC und ABD gemein ist, so muß auch $x = z$; folglich $u = y$ seyn. Derowegen sind die Drey-Ecke ADB und CBD einander ähnlich [§. 107.]; folglich $AB:BD = BD:BC$ [§. 108.], d. i. BB ist die mittlere proportionale zwischen AB und BC [§. 46. und 47.] w. z. b.

114.) 11. *Lehrs.* In einem jeden Vier-Eck ABCD [Fig. 21.], welches mit allen Ecken in dem Umkreis des Circuls anstehet, ist das rechtwinklichte Vier-Eck aus den Diagonal-Lineen AC und DB, denen beyden rechtwirklichten Vier-Ecken aus zweyen gegen einander überstehenden Seiten AB und DC, in gleichem AD und BC gleich.

Bew. Sezet CB aus A in G, und ziehet DG. Weil der Winkel CDB = ADE = CAB, und ACB = ADB [§. 105.], so ist das Drey-Ecke ADE dem Drey-Ecke BDC ähnlich [§. 107.]; folglich $DB:BC = AD:AE$ [§. 108.]: und $AE = AD \cdot BC:DB$ [§. 39.]. Ferner weil ABD dem CED ähnlich, so ist $CE:DC = AB:DB$, folglich $CE = AB \cdot DC:DB$; Nun ist $AC = AE + CE$ [§. 41.] $= AD \cdot BC:DB + AB \cdot DC:DB$; derowegen ist $AC \cdot DB = AD \cdot BC + AB \cdot DC$ [§. 39.] w. z. b.

Ende des Geometrie.

Der dritte Theil,

darinnen

die allgemeine Art von Auflösung
der geometrischen Aufgaben selbst
enthalten.

115.) *Die 1. Erklärung.*

Die höhere Geometrie ist eine Wissenschaft von den geometrischen und andern krummen Lineen, ihren Eigenschaften, und derselben Gebrauch in Auflösung der geometrischen Aufgaben.

116.) *Ann.* Man handelt insgemein in der höhern Geometrie so wol von den geometrischen, oder [wie man sie auch nennet] algebraischen, als auch von transcendentischen Lineen. Allein da ich hier nur zeigen will, wie man durch die erstere die Aufgaben in der Geometrie leicht auflösen könne, so werde ich auch nur solche allein hier anführen; zumal da die andere Art dazu nicht tauglich ist.

117.) *2. Erkl.* Diejenige Lineen durch welche wir die geometrische Aufgaben auflösen, nennen wir *geometrische Lineen*.

118.) *1. Zusaz.* Weil die geometrische Aufgaben durch diese Lineen können aufgelöst werden, so müssen sie die Eigenschaften der Aufgaben an sich haben, d. i. sie müssen nach denselbigen auf gewisse Art construirt seyn.

119.) *2. Zus.* Da man aber die Eigenschaften solcher Aufgaben manchmal am leichtesten durch die Buchstaben-Rechenkunst ausfinden kan, so werden

die geometrischen Lineen auch nach solchen Gleichungen, die durch die Buchstaben-Rechenkunst aus der Aufgabe gefunden worden, vermittelst der Geometrie, am füglichsten construirt.

120.) *Ann.* Und derowegen nenne ich diese Lineen mit allem Recht geometrische Lineen; und verstehe darunter nicht nur die Kegelschnitte, sondern auch alle Lineen die nach einer beständigen Eigenschaft einer geometrischen Aufgabe sind beschrieben worden.

121.) 2. *Ann.* Wenn ihr auf die Umstände der Aufgabe wol acht habt, so könnet ihr die geometrische Lineen auch ohne algebraische Gleichungen beschreiben, wie wir solches unten in etlichen Aufgaben mit großem Vortheil anbringen werden.

122.) 3. *Erkl.* Die Linee AX [Fig. 22.] welche mitten durch eine geometrische Linee OAO gehet, nennet man *den Diameter*. Insbesondere heißet sie *die Axe*, wenn die parallel-Lineen OO, welche die *Ordinaten* genennet werden, mit ihr einen rechten Winkel machen.

123.) 4. *Erkl.* Die Hälften der Ordinaten OS werden die *Semiordinaten* genennet. Und die *Abscissen* sind so viel als die Theile des Diameters oder der Axe, welche die Ordinaten abschneiden.

124.) 5. *Erkl.* Der Punct A, wo der Diameter oder die Axe AX anfängt, wird *der Scheitelpunct* genennet.

125.) 1. *Aufg.* Eine geometrische Linee zu beschreiben.

Aufl. Nehmet eine gerade Linee AX (Fig. 22.) für die Axe oder den Diameter an, ziehet durch die Puncte SS, der darinnen angenommenen Abscis-

28 die geometr. Aufgaben aufzulösen.

sen AS, AS, etc. die parallel-Lineen OO, sezet auf dieselbe aus S in O ihre behörige Länge, wie in folgendem solle gesagt werden, und ziehet die Punkte A, O, O, etc. zusammen (§. 122-124.).

126.) 1. *Anm.* Ditjenige Lineen, welche bey einer geometrischen Linee unverändert, das ist, immer in einer Gröfse bleiben, zeichnet man mit den ersten Buchstaben des Alphabets, *a, b, c*, etc. die veränderliche aber, nemlich die Abscissen und Semiordinaten mit den leztern, und zwar die erstere mit *x*, und die leztere mit *y*.

127.) 2. *Anm.* Damit ihr aber aus der Gleichung für eine geometrische Linee (§. 119.) den Wehrt von *y* oder der Semiordinate, wenn ihr *x*, d. i. die Abscisse so groß annehmet als ihr wöllet (§. 125.), finden könntet, so muß ich etliche Aufgaben, die dazu dienen, hieher sezen.

128.) 2. *Aufg.* Aus einer einfachen Gleichung die Gröfse von *y* zu finden.

Aufl. Es können hier unendliche Fälle vorkommen, allein es wird genug seyn, wenn wir nur die fürnehmste anzeigen, denn die andern werden hernach von selbst können aufgelöst werden. In allen aber müßt ihr vorher *y* auf eine Seite bringen (§. 51.).

Der 1. Fall. Wenn $y = ab : x$. so suchet ihr zu *x*, *a* und *b* die vierte proportionale (§. 109.), so ist solche $= y$ (§. 46, 47. 48.).

Der 2. Fall. Wenn $y = [ab \pm ac] : (g \pm x)$, so suchet ebenfalls zu $g \pm x$, $b \pm c$ und *a* die vierte, so habt ihr ihr *y*.

Der 3. Fall. Wenn $y = (ab \pm cx) : d$, so machet ein rechtwinklichtes Drey-Eck ABC (Fig. 23.)

daran AB die mittlere proportionale zwischen a und b , und AC die mittlere zwischen c und x , so ist $BC = \sqrt{ab + cx}$ (§. 96.), weil nemlich das Quadrat von $AB = ab$, und das von $AC = cx$ (§. 48.). Endlich suchet zu d und BC die dritte (§. 110.); so ist solche $= y$.

Der 4. Fall. Wenn $y = (ab - cx) : d$, so machet wie im dritten Falle AC (Fig 20.) $= \sqrt{ab}$, beschreibet darüber eine halbe Circul-Linee ADC, machet darinnen AD $= \sqrt{cx}$, und suchet zu d und BC die dritte proportionale, so habt ihr y (§. 48. 106. 110.).

Der 5. Fall. Wenn $y = abcx : dfg$; so machet wie d zu a also b zu vierten, welche ihr z. E. m nennet, und es ist $dm = ab$ (§. 48.); folglich $y = dmcx : dfg$ d. i. $mcx : fg$; suchet ferner zu f, m und c die vierte, welche sey z. E. $= n$, so ist $fn = mc$, und $y = fnx : fg$, d. i. $nx : g$; endlich suchet zu g, n und x die vierte proportionale, so ist solche $= y$.

129.) *Anm.* Es ist nicht durchaus nöthig, daß alle einfache Gleichungen eben in allen Buchstaben mit denen in einem jedem Falle gesetzten übereinkommen müssen; denn es kann auch z. E. an statt $ab : x$ kommen $ax : b$ oder auch $bx : a$, welches ihr doch auf einerley Art auflösen könnet.

130.) 3. *Aufg.* Aus einer quadratischen Gleichung die Gröfse von y zu finden.

Aufl. Wenn ihr die Wurzel y auf eine Seite gebracht habt (§. 51. 52.), so können gleichfalls unendliche Fälle vorkommen, ich seze aber nur die fürnehmste wie zuvor:

30 die geometr. Aufgaben aufzulösen.

Der 1. Fall. Wenn $y^2 = ax$, so ist $y = \sqrt{ax}$, das ist, der mittlern proportionale zwischen a und x (§. 113.)

Der 2. Fall. Wenn $y = \sqrt{aa + xx}$, so machet ein rechtwinklichtes Drey-Ecke ABC (Fig. 23.), daran $AB = a$, und $AC = x$, so ist $BC = \sqrt{aa + xx}$ (§. 96.)

Der 3. Fall. Eben so wenn $y = \sqrt{aa - xx}$, so beschreibet ihr über AC (Fig. 20.) $= a$ eine halbe Circul-Linee ADC, und sezet darein $AD = x$, so ist $DC = y$ (§. 106.)

Der 4. Fall. Wenn $y = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + xx}$ (§. 55.), so suchet erstlich die Grösse von $\sqrt{\frac{1}{4}aa + xx}$, wie erst gesagt worden (2. Fall), und sezet zu demselben $\frac{1}{2}a$, so ist solche Summe $= y$.

Der 5. Fall. Und wenn $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + xx}$, so nehmet ihr nur von $\sqrt{\frac{1}{4}aa + xx}$ die Grösse von $\frac{1}{2}a$ weg, so ist das übrige $= y$.

Der 6. Fall. Endlich wenn $y = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - xx}$, so suchet ihr die Grösse von $\sqrt{\frac{1}{4}aa - xx}$ (3. Fall), und sezet solche zu $\frac{1}{2}a$, so habt ihr die erste Wurzel, nehmet ihr aber solche von $\frac{1}{2}a$ weg, so habt ihr die andere Wurzel.

131.) 1. *Anm.* Was bey der vorhergehenden Aufgabe (§. 129.) erinnert worden, das könnt ihr hier ebenfalls in acht nehmen.

132.) 2. *Anm.* Nun sollte ich auch zeigen, wie ihr in denen cubischen und andern noch höhern Gleichungen die Wehrte von y finden solltet; allein ich will die erstbeschriebene Regeln vorher bey etlichen Aufgaben anwenden, damit ich von denen höhern desto besseren Grund geben kann. Ihr könntet aber jetzt durch die geometrische Lineen, wenn ihr sie nach vorher beschriebenen Lehren aufreisset, und wie in

folgender Aufgabe soll gesagt werden, zusammensezet, alle Aufgaben vom ersten, zweyten, dritten und vierten Grade; ja wenn ihr den Vortheil den ich nach der folgenden Aufgabe anzeigen werde; in acht nehmet, etliche von höhern Graden auflösen.

253.) 4. Aufg. *Eine geometrische Aufgabe durch geometrische Lineen aufzulösen.*

Aufl. I. Benennet die bekannte Lineen mit den ersten Buchsaben des Alphabets a, b, c , etc. zwey unbekannte aber, die ihr suchen wollet mit den leztern x und y . *II.* Sehet zu, daß ihr zum wenigsten zwey Gleichungen aus der Aufgabe und ihren Umständen bekommet, in welchen beyden x und y zufinden. *III.* Nehmet alsdenn x für die Abscissen und y für die Semiordinaten einer geometrischen Linee an (§. 126.), und beschreibet nach denen gefundenen Gleichungen zwey geometrische Lineen auf eine einige Axe und Scheitel (§. 125.), so werden sie einander durchschneiden. *IV.* Endlich ziehet aus diesem Durchschnitt eine Semiordinate, so ist solche die verlangte Linee die ihr y ; ihre Abscisse aber die, so ihr x genennet habt.

Bew. Weil eine jede von den gefundenen Gleichungen eine besondere Eigenschaft der Aufgabe an sich hat, so muß auch eine jede von denen nach den gefundenen Gleichungen beschriebene Linee diese Eigenschaft an sich haben (§. 119.), d. i. es muß eine jede den Wehrt von x und y geben, wenn sie für sich, ohne die andere angenommen wird. Es erfordert aber die Aufgabe zwey besondere Eigenschaften, vermöge derer aus derselben gefundenen Gleichungen; derowegen muß der Punct in welchem sich die heyde Eigenschaf-

32 die geometr. Aufgaben aufzulösen.

ten vereinigen, d. i. der Durchschnitt der auf eine Axe beschriebenen Lineen, die Gröſſe von x und y geben, welche die beyde Eigenschaften der Aufgabe annehmen kann, d. i. er muß die verlangte Lineen geben. w. z. b.

134.) 1. *Anm.* Es ist nicht nöthig, daß ihr die geometrische Lineen auf beyden Seiten der Axe beschreibet, wenn ihr sie zur Auflösung der geometrischen Aufgaben gebrauchen wollet. Und wenn euch eine Aufgabe fürkäme, aus welcher ihr nicht weiter als nur eine Gleichung allein bekommen könntet, so ist dieses eine undeterminirte Aufgabe, darinnen ihr eine von denen unbekannten so groß annehmen könntet, als ihr wollet. Wenn ihr demnach den Wehrt von y finden wollet, nachdem ihr x nach Belieben annehmet, so beschreibet nach der gefundenen Gleichung eine geometrische Linee, setzet darein die angenommene Abscisse, so ist ihre zugehörige Semiordinate die verlangte Gröſſe von y .

135.) 2. *Anm.* Ihr habt euch zwar nicht jederzeit daran zubinden, daß ihr durch die Abscissen die Semiordinaten suchet. Denn wenn in einer Gleichung y gar verwirrt ist, daß es schwer auf eine Seite zu bringen wäre, so dürft ihr nur x heraus suchen, und y für die Abscissen, x aber für die Semiordinaten einer geometrischen Linee annehmen, die ihr aber hernach auf eine Axe, die auf der Axe der andern Linee perpendicular ist, beschreiben müsset, also daß beyde Scheitelpuncten aufeinander fallen; und ihr werdet alsdenn, wie sonst aus ihrem Durchschnitt die verlangte Lineen finden können.

136.) 3. *Anm.* Eben dieses Vortheils könnt ihr euch bedienen, in solchen Gleichungen, darinnen y^3 hingegen nur xx oder x allein zu finden, wie z. E., $ay^3 = bcxx$ ist, denn so wäre $y = \sqrt[3]{bcxx/a}$, welches ihr noch nicht aufzulösen vermögend seyd (§. 132.); hingegen ist $x = \sqrt[3]{ay^3/bc}$, welche ihr nach §. 130. construiren könntet.

137.) 4. *Anm.* Der Beweis dieser Aufgabe wird in der folgenden durch ein Exempel deutlicher werden.

138.) 3. *Aufg.* In ein Drey-Eck ABC (Fig. 24.) davon die Grundlinie AB, und die perpendicular CD bekannt, das größte Quadrat EFHG einzuschreiben.

Aufl. Sézet $AB = a$, $CD = b$, $CI = x$ und $DI = EG = EF = FH = GH = y$, so ist $x + y = b$ (§. 41.), und wegen Aehnlichkeit der Drey-Ecke CFE und CBA $b : a = x : y$ (§. 108.), folglich I. $y = b - x$, und $ax = by$ (§. 48.), d. i. II. $y = ax : b$. Weil ihr nun zwey Gleichungen aus der Aufgabe finden könnet, so hat auch die Aufgabe selbst zwey Eigenschaften, nemlich dafs I. die Differenz zwischen b und x dem y gleich, und II dafs y die vierte proportionale zu b , a und x ist. Beschreibet ihr nun ihre geometrische Lineen (§. 125.), so ist beständig in der ersten $y = b - x$, und in der andern $y = ax : b$. Nun sollet ihr eine Abscisse und Semiordinate finden, die solche beyde Eigenschaften annehmen kan; damit ihr nun dieses ausrichtet, so sezet die Axe und Scheitel der ersten geometrischen Linee BX (Fig. 25.) und der zweyten AOL zuseinander, und sie werden sich in O durchschneiden. Nun sage ich die aus diesem Durchschnitt O gezogene Semiordinate SO seye der verlangte Wehrt von y , und ihre Abscisse der von x . Denn sezet z. E. es seye SO nicht die verlangte Länge von y , sondern RM; nun ist diese mit der Abscisse AR, so groß als b oder $AB = AX$; und derowegen hätte sie eine Eigenschaft der Aufgabe. So soll aber ferner auch die vierte proportionale zu $AX = b$

II.

XL a und AR $= x$ seyn. Nun ist diese $=$ RN (§. 108.); derowegen sollte RN $=$ RM seyn: welches aber augenscheinlich falsch ist. Weil nun diese Lineen RN und RM einander immer gleicher werden, d. i. weil ihr Unterschied NM immer kleiner wird, je näher sie zu dem Punct O kommen, auch endlich in demselben gar zu nichts wird (§. 61.), so müssen die Lineen RN und RM daselbst gleich werden, und die verlangte Gröſe von y und die Abscisse AS die von x geben, die mit beyden Eigenschaften der Aufgabe bestehen kann.

139.) 1. *Zusatz.* Weil ihr so wol aus den Gleichungen als auch aus der Construction dieser beyden geometrischen Lineen sehet, daß sie gerade Lineen sind, so könnet ihr eine besondere Auflösung dieser Aufgabe also finden, setzet in der I. Gleichung $x = 0$, so ist $y = b$; und wenn $y = 0$, so ist $x = b$. Wenn ferner in der II. Gleichung $x = b$ so ist $y = a$, und wenn $x = 0$, so ist y auch $= 0$. Machet derowegen (Fig. 24.) CK mit AB parallel (§. 83.), und setzet aus C in K die perpendicular-Linee $CD = b$, mächet $DL = AB = a$, ziehet KD und CL, so durchschneiden sie einander in M, und es ist $IM = y$, d. i. der Seite des verlangten Quadrats.

140.) 2. *Zusatz.* Noch kürzer könnet ihr dieses Quadrat also finden: bildet euch ein, daß die geometrische Linee CL mit ihrer Axe CD zurück gezogen würde, also daß CL auf CB, CD aber auf CA käme, dann so ist das Drey-Eck selbst eine von den geometrischen Lineen, die andere KD müsset ihr auch von ihrer Axe CD auf den Dia-

meter der vorigen CA rücken, so kommt sie auf KA: und also habt ihr weiter nichts zu thun, als daß ihr aus C auf die parallele CK die perpendicular CD sezet, und AK ziehet, so gibt solche alsobald den Durchschnitt F auf der Linee CB, wo die Ecke des Quadrats anstofset, woraus es vollend leichte ganz zubeschreiben.

141.) 3. *Zusaz.* Ihr könnet auch aus fernerer Betrachtung dieser Auflösung, eine allgemeine Regel finden, dadurch ihr in ein jedes Drey-Ecke ein rechtwinklichtes Vier-Eck davon die Verhältniß seiner Seiten gegeben, einschreiben könnet. Denn sezet es soll sich die Seite EF (Fig. 26.) zu FH verhalten, wie LM zu NO, so machet ihr nur $PD = NO$ und $PQ = LM$, ziehet DQ bis in K und aus K die Linee KA, so ist in dem Durchschnitt F der Punct, wo das Vier-Eck mit seiner Ecke anstofset.

142.) *Ann.* Also sehet ihr, daß ihr meine neue Regel nicht ohne Vortheil in den allersimplesten Aufgaben angebracht habet. Wie solches die zwey nachfolgende Exempel noch mehrerers bekräftigen werden.

143.) 6. *Auf.* Ein rechtwinklichtes Drey-Eck zumachen, davon gegeben die größte Seite $AC = EF$ (Fig. 27.), welche die Hypotenuse genenne wird, und die Summe von $AD + BD = GH$.

Aufl. Sezet $EF = a$, $GH = b$, $AD = x$ und $BD = y$, so ist

$$I. y = b - x, \text{ und } x : y = y : a - x \text{ (§. 108.)}$$

$$yy = ax - xx \text{ (§. 48.)}$$

$$II. y = \sqrt{ax - xx}$$

Hieraus sehet ihr, daß die geometrische Linee der ersten Gleichung eine gerade ist, wie die bey der vorigen Aufgabe; die zweyte aber ist die Gleichung eines Circuls; dessen Diameter $= a$ ist. Beschreibet demnach auf AX (Fig. 28.) $= FE = a$ einen halben Circul-Kreis AOGX, welcher die geometrische Linee der II. Gleichung seyn wird; machet ferner $AB = AR = GH = b$, und ziehet BR, als welche die Eigenschaft der ersten Gleichung an sich hat, so ist in O ihr Durchschnitt, und ihr werdet nicht nur $AS = x$. und $OS = y$, sondern auch wenn ihr OA und OX ziehet, das verlangte Drey-Eck AOX haben.

144.) 1. *Ann.* Daß die II. Gleichung eines mit a beschriebenen Circuls seye, ist denen, die sich nur ein wenig in der höhern Geometrie umgesehen, bekannt genug. Wollet ihr aber dennoch diese geometrische Linee nach §. 125. u. 130. beschreiben, so könnet ihr zwar solches thun; ihr werdet aber unter währenden Beschreiben sehen, daß eine Circul-Linee heraus kommt. Wenn ihr aber ferner zu wissen verlanget, wie diese Gleichung aus dem Circul gefunden werde, so sezet AX als eine beständige Linee $= a$ (§. 126.), die Abscissen $AS = x$, ihre Semiordinaten $SO = y$, so ist jederzeit $x : y = y : a - x$ (§. 113.), folglich $ax - xx = yy$ die Gleichung eines Circuls.

145.) 2. *Ann.* Gleichwie aber $yy = ax - xx$ die Gleichung eines Circuls, dessen Abscissen von dem Umkreis ihren Anfang haben. also ist $yy = aa - xx$ eine Gleichung eines Circuls, dessen Abscissen im Mittelpunct anfangen. Denn es sey CB (Fig. 1.) $= AC = CD = a$, die Abscissen $CF = x$, ihre Semiordinaten $FB = y$, so ist beständig $aa = xx + yy$ (§. 96.), d. i. $aa - xx = yy$. Und dieses habe ich euch deswegen erinnern wollen, damit ihr im folgenden, wenn eine solche Gleichung fürkäme, nicht

mit Beschreibung dieser geometrischen Lineen aufhalten möchtet.

146.) 7. *Aufg.* Aus der gegebenen Hypotenuse AB (Fig. 29.) eines rechtwinklichten Drey-Eckes ABC, und der Summe der übrigen zweyen Seiten $AC + CB = DE$, das Drey-Eck selbst zu zeichnen.

Aufl. Es sey $AB = a$, $DE = b$, $AC = x$ und $BC = y$, so ist

I. $y = b - x$ und II. $yy = aa - xx$ (§. 96.). Nun sehet ihr, daß die geometrische Linee der ersten Gleichung abermals eine gerade, die II. aber ein Circul, dessen Abscissen aus dem Mittelpunct ihren Anfang haben (§. 145.). Wenn derowegen in der I. Gleichung $x = 0$, so ist $y = b$. und wenn $y = 0$, so ist $x = b$, und also wäre die Auflösung folgende: Machet AB (Fig. 30.) $= AX = DE = b$, und ziehet BX, beschreibet mit $AB = a$ aus dem Scheitelpunct der geometrischen Lineen A den Viertels-Circulbogen CONR, so durchschneiden diese beyde geometrische Lineen sich zweymal, in O und N, folglich habt ihr zwey Wehrte von x und y , und wenn ihr AO und AN ziehet, das verlangte Drey-Eck AOS und ANR zweymal.

147.) 1. *Ann.* Wenn sich die geometrische Lineen, zwey oder auch mehrere mal durchschneiden, wie in diesem Falle geschehen, so ist dieses ein Anzeigen, daß die unbekannte Lineen unterschiedliche Wehrte haben können, welche jedoch alle recht sind, und der Aufgabe auf gewisse Art ein Gnügen thun; wollet ihr aber diejenige Wehrte der unbekannten Lineen haben, auf die ihr in der Auflösung gesehen habet, so nehmet ihr diejenige an, welche der erste Durchschnit gibe. Indessen können doch die übrige nicht als falsche Wurzeln (wie man sie nennet) angesehen

werden, denn sie können doch jederzeit auf gewisse Art recht zeyn, wie ich erst gesagt habe.

148.) 2. *Ann.* Wenn ihr DE (Fig. 29.) kleiner annehmet als AB, so werden sich die geometrische Linéen gar nicht durchschneiden, denn es müssen jederzeit in einem geradlinichten Drey-Eck zwey Seiten zusammen genommen gröfser seyn als die dritte, sonst können sie keine Fläche einschließen (§. 63. 70.)

149.) 8. *Aufg.* Zwischen zweyen gegebenen Linéen AB und CD (Fig. 31.) zwey mittlere geometrische proportional-Linéen zu finden.

Aufl. Es sey $AB = a$ $CD = b$, die gröfsere von den gesuchten $= x$, die kleinere $= y$, so ist

$$\begin{array}{rcl} a : x = x : y & & x : y = y : b \\ \hline ax = x^2 & (\S. 48.) & bx = y^2 \\ \hline \text{I. } y = x^2 : a & & \text{II. } y = \sqrt{bx} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ay = xx \\ \text{add. } bx = yy \\ \hline \end{array}$$

$$\text{III. } ay + bx = xx + yy \quad (\S. 58.)$$

Nehmet also AX (Fig. 32.) für die Axe an, und beschreibet die geometrische Linée AON der I. Gleichung nach dem 1. Falle §. 128, die Linée AOM der II. Gleichung aber nach dem 1. Falle §. 130; so wird die aus dem Durchschnitt O gezogene Semiordinate SO die kleinere $= y$, ihre zugehörige Abscisse AS aber die gröfsere $= x$ von den begehrtten mittlern proportional-Linéen geben (§. 135.)

150.) *Zusaz.* Wollet ihr an statt einer von den ersten Gleichungen die III. hierzu gebrauchen, so

ist, wenn ihr sie reduciret (§. 53.). $y \equiv \frac{1}{2}a + V(bx + \frac{1}{4}aa - xx)$, und ihr könnet die Semiordinaten der geometrischen Linee nach dem 5. Falle §. 130. gar leicht finden, folglich auch die ganze Linee (§. 125.) beschreiben. Ich wil aber dieselbe auf eine andere Art aufzureissen lehren, also: Verringert in dieser III. Gleichung x um $\frac{1}{2}b$ und y um $\frac{1}{2}a$, so findet ihr (§. 54.), wenn ihr $x - \frac{1}{2}b \equiv v$, und $y - \frac{1}{2}a \equiv z$ sezet, $zz \equiv \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - vv$, und wenn ihr v für die Abscissen, und z für die Semiordinaten einer geometrischen Linee annehmet, daß diese Gleichung die Gleichung eines mit $V(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb)$ beschriebenen Circuls seye, dessen Abscissen v aus dem Mittelpunkt anfangen (§. 144.). Beschreibet derowegen mit $V(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb)$ (dessen Grösse ihr nach dem 2. Falle §. 130. suchet) $\equiv HI$ (Fig. 33.) den Viertelsbogen IK . so ist in demselben eine jede Abscisse $HL \equiv v$, und eine jede Semiordinate $LM \equiv z$; sezet nun ferner aus H in $V \frac{1}{2}a$, und ziehet VX mit HK parallel (§. 83.), so ist beständig $SM \equiv z + \frac{1}{2}a \equiv y$, d. i. der Semiordinate von der verlangten geometrischen Linee; machet nun auch AB in der Weite $\frac{1}{2}b \equiv HT$ mit HI parallel, so ist gleichfalls jedesmal $TL \equiv AS \equiv v + \frac{1}{2}b \equiv x$ d. i. der Abscisse in der besagten Linee. Also könnet ihr nun die 2. mittlere proportional-Lineen also finden: beschreibet mit einer von denen gegebenen Linee eine geometrische Linee AOM (Fig. 34.), in welcher die Abscisse, die Semiordinate und die besagte Linee in geometrischer Proportion sind, (weil nemlich in der II.

Gleichung $x: y = y: b$ ist (setzet eben dieser Linie halben Theil aus A in R, machet RN auf AX perpendicular = dem halben Theil der andern gegebenen Linie, beschreibt alsdenn aus N mit AN $= \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb}$) die Circul-Linie ALO, so durchschneidet sie die vorige geometrische Linie AOM in O, und es sind SO und AS die zwey gesuchte mittlere proportional-Linien.

151.) 1. *Anm.* Die geometrische Linie AOM in welcher $bx = yy$, wird eine Parallel genennet, und kann dieselbe kürzlich also beschrieben werden: machet $AB = AC$ (Fig. 35.) = dem vierten Theile der Linie b , (welche der Parameter heist) und ziehet auf die Axe AX etliche Linien SO, SO, etc. perpendicular, machet aus C mit SB, SB, etc. Durchschnitte auf die Linien SO, SO, etc. in O, O, etc. und ziehet diese Punkte zusammen, so ist AOO eine Parallel deren Parameter $= b$ ist. Denn weil $BS = x + \frac{1}{4}b$, $CS = x - \frac{1}{4}b$, so ist $SO^2 = x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}bb = x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{16}bb$ (§. 96.) $= bx$, d. i. $= yy$.

152.) 2. *Anm.* Die gegenwärtige Aufgabe habe ich deswegen so weitläufig ausgeführt, damit ihr unten in Beschreibung der geometrischen Linien vom dritten Grade desto besser fortkommen könnet.

153.) 9. *Aufg.* In einen halben Circul ADCB (Fig. 36.), dessen Diameter AB bekannt, ein Vier-Eck ABCD einzuschreiben, dessen Seiten AB, BC, CD und DA in einer geometrischen Proportion sind.

1. *Aufl.* Es sey $AB = a$, $BC = y$, $CD = x$, so ist $AD = xy: a$, $DB = \sqrt{a^4 - x^2 y^2}$; a^2 und $AC = \sqrt{aa - yy}$, ferner

die geometr. Aufgaben aufzulösen. 41

$$a: y = y: x \text{ und } V(a^2 - y^2) : V(a^4 - x^2 y^2) : a^2$$

$$\text{I. } ax = yy \quad \quad \quad = yy: a + ax \text{ (§. 114.)}$$

$$xyy + aax = V(aa - yy).$$

$$V(a^4 - x^2 yy)$$

$$xxy^4 + 2aaxxyy + a^4xx = a^6 -$$

$$a^4yy - aaxxyy + xxy^4$$

$$3aaxxyy + a^4xx = a^6 - a^4yy$$

$$3xxyy + a^4yy = a^4 - a^2x^2$$

$$\text{II. } y = a V(a^2 - xx) : (V(a^4 - 3x^2))$$

Also könnet ihr nun aus dem Durchschnitt O (Fig. 37.) der geometrische Linee der I. Gleichung AOM (die ihr construirt wie §. 150. gesagt worden, es ist nemlich a der Parameter), und der II. Gleichung BOL, (deren Semiordinaten ihr findet, wenn ihr zu $V(a^4 + 3x^2)$, $V(aa - xx)$ und a die vierte proportionale suchet (§. 109.),) die verlangte Lineen $AS = x$, und $SO = y$ finden, und wenn ihr sie gebührend in dem halben Circul herum traget (nemlich SO und B in C (Fig. 36.) und AS aus C in D, denn so ist AD die übrige Seite), das verlangte Vier-Eck beschreiben.

2. Aufl. Eben dieses könnet ihr noch leichter verrichten, ohne vorher gefundene Gleichungen (§. 121.), auf folgende Art: Nehmet AX (Fig. 38) für die Axe einer geometrischen Linee an, und setz in dem gegebenen halben Circul CGD die ange-

nommenen Abscisse AP aus D in E, suchet zu CD und DE die dritte (§. 110.), sezet sie aus E in F, endlich machet $FG \equiv$ der vierten proportionale zu CD, DE und EF (§. 109, so ist CG die Semiordinate PO der angenommenen Abscisse AP; dabey merket aber, daß, wenn ihr in Herumsetzen der dreyen Linen, z. E. der Abscisse $AR \equiv DH$ und denen daraus auf erstbesagte Art gefundenen FI und IK, unter C, wie hier in K kämet, ihr die Weite CK als die Semiordinate von AR aus R zurück in T tragen müsset. Wenn ihr nun solchergestalt mit mehrern Abscissen verfaret, so bekommet ihr eine geometrische Linee BOST, welche ihre Axe in S durchschneidet, und es wird AS die größste Seite BC (Fig. 36.) des verlangten Vier-Ecks seyn, woraus die übrigen leicht zu finden.

154.) *Anm.* Aus dieser zweyten Auflösung sehet ihr nun, wie man aus rechter Betrachtung einer Aufgabe die geometrischen Linen viel leichter und manchmal mit größerem Nutzen beschreiben kann: als wenn man erst ihre Gleichungen finden, und sie überall construiren wolte; zumal da es oft schwer fiele, auf alle Fälle eine Gleichung zu finden, welches ihr aus folgenden Aufgaben noch deutlicher abnehmen könnet.

155.) 10. Aufg. In einen Circul, dessen halber Diameter $AC \equiv CB$ (Fig. 39.) gegeben, ein reguläres Sieben-Eck ADEGHIK zu beschreiben.

Aufl. Sezet $AC \equiv a$, die Seite des Sieben-Ecks $AD \equiv x$, $AG \equiv y$; Zieheth DL mit EN parallel; so habt ihr drey ähnliche Drey-Ecke CAD, ADM und DML. Denn weil der Winkel DGG noch

die geometr. Aufgaben aufzulösen. 43

so groß ist, als der Winkel DCA, und weil DCG und DAG auf einem gleichen Bogen stehen, der erste aber in den Mittelpunkt C, der andere hingegen an den Umkreis gezogen ist, so ist DAG halb so groß als DCG (§. 104.) folglich dem Winkel DCA gleich, und weil ADC den beyden Drey-Ecken CAD und ADM gemein ist, auch AMD = DAC die Drey-Ecke selbst einander ähnlich (§. 107.). Ferner weil DL mit EN parallel, so ist der Winkel DLM = ENG = DMA, und daher LMD = DAM, folglich die ganze Drey-Ecke ADM und DML auch ähnlich. Wenn ihr nun zu AG hinzusetzet LM, so wird solche = 3AM, d. i. = 3AD seyn. Derowegen könnet ihr die Gleichung finden, wenn ihr vorher LM gefunden habt, welches ihr auf folgende Weise suchet,

$$AC:AD = AD:DM$$

$$a:x = x:x^2:a$$

$$AC:AD = DM:ML$$

$$a:x = x^2 a:x^3:a^2$$

und derowegen habt ihr

$$y + x^3 : a^2 = 3x$$

$$\text{I. } y = (3a^2x - x^3) : aa.$$

Es ist nun ferner $GO = \frac{1}{2}x$, daher $AO = V(yy - \frac{1}{4}xx)$ und $CO = V(aa - \frac{1}{4}xx)$ (§. 96.), folglich

$$V(aa = \frac{1}{4}xx) \dagger a = V(\gamma\gamma - \frac{1}{4}xx)$$

$$a^2 - \frac{1}{4}xx \dagger 2aV(aa - \frac{1}{4}xx) \dagger a^2 = \gamma\gamma = \frac{1}{4}xx$$

$$\text{II. } \gamma = V(2aa \dagger 2aV(aa - \frac{1}{4}xx)).$$

Nach der ersten Gleichung beschreibt ihr die geometrische Linee AONMX (Fig. 40.) also: suchet zu a , x und $V(3aa - xx)$ die vierte proportionale, so habt ihr $xV(3aa - xx)$: a , stellet ferner zu a , $V(3aa - xx)$ und $xV(3aa - xx)$: a ebenfalls die vierte (§. 109.), so ist solche $= \gamma$. In der zweyten aber suchet ihr zwischen $2a$ und $a \dagger V(aa - \frac{1}{4}xx)$ die mittlere (§. 113.), so habt ihr γ ; und ihr könnet aus dem Durchschnitt O, der geometrischen Lineen AONMX und BONMA, den Wehrt von $\gamma = SO$, und von $x = AS$ finden, auch wenn ihr eben dieses AS siebenmal in dem gegebenen Circul herumtraget, das verlangte Sieben-Eck beschreiben.

156-) 1. *Anm.* Ob ihr nun schon auf erstbesagte Art nach den gefundenen Gleichungen die geometrische Lineen beschreiben könnet, so wil ich doch noch eine andere hersezen, in welcher ich zeigen wil, wie dieses ohne Gleichungen, blos aus rechter Betrachtung der Aufgabe und ihren Umständen zu verrichten ist. Denn wenn ihr euere angenommene Abscisse auf der mit a beschriebenen halben Circul-Linee AEB (Fig. 40.) dreyimal herumsetzet, nemlich aus A in F, aus F in E und aus E in D; so ist die Sehne AD, welche diesen Bogen bespannet, die gehörige Semiordinate: Und solchergestalt könnet ihr durch mehrere Abscissen die geometrische Linee AONMX beschreiben, welche mit der nach der I. Gleichung construirten übereinkommen wird. Machet nun ferner BG auf AB perpendicular; sezet aus B in G die halbe Abscisse, und ziehet GH mit AB parallel, so sind

AH und BH die Semiordinaten der angenommenen Abscisse in der II. geometrischen Linee BONMA, denn in diesem Falle kann sie zwey Semiordinaten haben. Also könnet ihr die beyden geometrischen Lineen viel leichter beschreiben, als oben aus den Gleichnngen angewiesen worden; folglich auch das Sieben-Eck um so viel desto geschwinder finden.

157.) 2. *Ann.* Es durchschneiden sich hier die geometrische Lineen wiederum dreymal, nemlich in O, N und M nichts desto weniger ist allein AS, als die Abscisse des ersten Durchschnittes O, die verlangte Seite des Sieben-Eckes (§. 146.). Die Abscisse AT des zweyten Durchschnittes N hingegen ist die Seite des Fünf-Eckes, so sich in eben diesen Circul einschreiben lasset; ingleichen ist die Abscisse AV des dritten Durchschnittes M diejenige Linee, welche den Ueberrest des Circuls, darein eine Seite des Sieben-Eckes gesetzt worden, in drey gleiche Theile theilet, d. i. welche $\frac{2}{3}$ von des gegebenen Circuls-Umkreise bespannet. Wie solches vielleicht deutlicher solle gewiesen werden-

158.) 3. *Ann.* Ihr könntet zwar fast auf eben diese Weise die andern Viel-Ecke beschreiben, wenn ihr eines jeden besondere Eigenschaften untersucht. Durch die folgende Aufgabe werdet ihr euch dieser Mühe überheben können.

159.) 11. *Aufg.* In einen gegebenen Circul ein jedes reguläres Viel-Eck zu beschreiben.

Aufl. Ihr sollet z. E. ein Fünf Eck in den Circul ABCDE [Fig. 41.] beschreiben, Nehmet eine Axe AX [Fig. 42.] für eine geometrische Linee an, sezet die angenommene Abscissen AS etc. so oft in dem gegebenen Ciocul ABCDEF herum, so viel als das Viel-Eck Seiten bekommen sol, als hier fünfmal bis in F, nehmet die Weite AF, und sezet sie aus S in O, als die Semiord-

dinate der angenommenen Abscisse AS; kommet ihr mit der Abscisse wieder bis über A, zum Exempel mit AL in K, so müsset ihr AK, aus L in M zurück sezen. Wenn ihr nun solchergestalt die geometrische Linee AODM beschreibet, so wird sie ihre Axe in D durchschneiden, und es wird die Linee AD von diesem Durchschnitt bis an die Scheitel A die Seite des verlangten Viel-Eckes, nemlich in unserm Exempel des Fünf-Eckes geben.

Bew. Vermöge der Auflösung ist die Semiordinate die Sehne desjenigen Bogens, welchen die in dem gegebenen Circul fünfmal herumgesetzte Abscisse entweder übrig lässet, oder noch zu dem ganzen Umkreis mit brauchet; in dem Punct D aber wird dieselbe zu nichts. Derowegen muß die Abscisse AD sich in dem Circul fünfmal also herum tragen lassen, daß weder von A gegen F noch gegen K ein Bogen bleibe, d. i. sie muß die Seite eines regulären Fünf-Eckes seyn, so sich in den gegebenen Circul beschreiben lässet, w. z. b.

160.) 1. *Zrsaz.* Aus der Beschreibung dieser geometrischen Linee flüßet nun ferner. wie ein jeder Bogen in verlangte gleiche Theile sol getheilt werden. Ihr sollet z. E. den Bogen ADF [Fig. 42.] in fünf Theile theilen; beschreibet derowegen die Fünfecks-Linee AODM, machet AI auf AX perpendicular, sezet aus A in I die Sehne des gegebenen Bogens AF, und ziehet IO mit AX parallel, bis sie die Fünfecks-Linee in O durchschneidet, alsdenn ist IO = AS die Sehne welche $\frac{1}{5}$

von dem gegebenen Bogen bespannet, folglich kön-
net ihr damit denselben in fünf Theile in B, C, D
E theilen.

161.) 2. *Zusaz.* Wollet ihr in einen Circul GHI
[Fig. 43.] ein irrreguläres Vier-Eck, z. E, in Drey-
Eck GHI beschreiben, dessen Seite GI zu IH zu
verhalte wie AB zu CD und IH zu HG wie CD
zu EF; so nehmet eine Axe AX [Fig. 44.] an, und
machet ferner $AM = EF$, $AL = CD$ und $AK =$
 AB , theilet die Abscisse AS in Q und R nach eben
der Proportion ein, wie AK in L und M getheilet
ist [§. 111.], maches in dem gegebenen Circul
[Fig. 43.] $GT = AS$, $TV = AR$, und $VY = AQ$,
so ist GY die Semiordinate SO der Abscisse AS.
Wenn ihr nun solchergestalt die geometrische Linee
AODZ beschreibt, bis sie ihre Axe in D durch-
schneidet, so ist AD die größte Seite GI von dem
verlangten Drey-Ecke, woraus nach der gegebenen
Proportion die übrige zwey vollends leicht zu fin-
den; denn ihr theilet jene nur in q und r nach
AK ein [§. 111.], so ist $Ar = IH$, und $Aq =$
HG,

162.) *Anm.* Wenn ich weitläufig seyn wollte,
so könnte ich noch unterschiedliches von diesen
Viel-Ecken beybringen. Allein ein dieser Sachen
erfahrender wird von selbst diese Erfindungen sich
zu Nuze machen können. Und daher gehe ich nun
weiter.

163.) 12. Eine gerade Linee AB [Fig. 45.],
die nach Belieben in C getheilt worden, wie-
derum in D also zu theilen, daß $AC^3 : CD^3$
 $= CD^2 : DB^2$.

Aufl. Es sey $AC = a$, $BC = b$, $CD = y$
und $DB = x$, so ist

$$I. y = b - x$$

$$\text{und } a^3 : y^3 = y^2 : x^2$$

$$a^3 x^2 = y^5$$

$$x = \sqrt[5]{y^5 : a^3}$$

Die geometrische Linee BX [Fig. 46.] der I. Gleichung ist leichte zu beschreiben. In der II. aber könnet ihr euch des Vortheils bedienen, dessen §. 135 und 136. gedacht worden. Wenn also AX die Axe für die erste geometrische Linee BX so nehmet AB als die Axe von der zweyten an, suchet zu a und $AV = y$ die dritte proportionale, welche sey z. E. $= m$, alsdenn ist $am = y^2$ und $a^2 m^2 = y^4$. daher $x = \sqrt[5]{a^2 m^2 y : a^3}$, d. i. $\sqrt[5]{m^2 y : a}$, stellet ferner zu a , m und y die vierte $= n$, so ist $x = \sqrt[5]{mn}$, und endlich suchet zwischen m und n die mittlere proportionale, so habt ihr $x = VD$, und ihr könnet die geometrische Linee AOL beschreiben; folglich aus dem Durchschnitte O $x = AS$ und $y = SO$ finden, und damit die gegebene Linee nach Verlangen theilen.

164.) *Anm.* Wir haben nun bisher lauter Gleichungen gehabt, deren geometrische Lineen sich alle durch gerade und Circul-Lineen beschreiben lassen. Nunmehr wird es Zeit seyn, daß ich mich zu höhern Gleichungen wende, und zeige wie solche zu construiren sind. Ich wollte zwar wünschen, daß ich diese Materie so ausführen könnte, wie wir sichs gebührte; allein der Platz und die Zeit verbieten solches. Daher werde ich nur das beste und fürnehmste

die geometr. Aufgaben aufzulösen. 49

hier anführen, die weitere Aufführung dürfte vielleicht bey anderer Gelegenheit folgen.

165.) 13. *Aufg.* Eine cubische und biquadratische Gleichung für eine geometrische Linee auf zwey niedrigere zu reduciren.

Aufl. Es sey z. E. eine cubische Gleichung für eine geometrische Linee $x^3 - 2axy = y^3 - a^2y$

$$\text{so ist } x : y = (y^2 - a^2) : (x^2 - 2ax)$$

$$\text{setzet } x : y = y : v$$

$$\text{so ist I. } vx = y^2$$

$$\text{und } y : v = (y^2 - a^2) : (x^2 - 2ax)$$

$$\text{daher } xxy - 2axy = vyy - aav = vxv - aav$$

$$\text{und II. } y = (vx - aav) : (xx - 2ax)$$

Es sey ferner eine biquadratische Gleichung $x^4 - 2ax^2y = y^4$, so ist

$$x^2 : y^2 = y^2 : x^2 - 2ay$$

$$\text{Setzet } x^2 : y^2 = y : a$$

$$\text{so ist I. } axx = vyy$$

$$\text{und } v : a = y^2 : x^2 - aay$$

$$\text{II. } vxx - 2avy = ayy$$

166.) *Anm.* Wenn ihr diese Aufgabe zu den folgenden gebrauchen wollet, so ist nicht nöthig, daß v und z in ihren Dignitäten kleiner werden, sondern nur y , denn dieses allein muß bey Beschreibung der

I.

cubischen und biquadratischen Lineen auf eine Seite gebracht werden, jene aber nicht.

167.) 14. *Aufg. Eine Linee zu einer verlangten Dignität zu erheben.*

Aufl. Ihr sollet z. E. AB [Fig. 47.] zur dritten Dignität erheben. Nehmet derowegen eine beliebige Linee AD für Eins an, suchet zu solcher AD und AB die dritte proportionale AF, so ist solche die zweyte Dignität von AB. stellet ferner zu CD, AB und AF die vierte AG, welche die verlangte dritte Dignität von AB seyn wird.

Bew. Es sey $AB = a$ und $CD = 1$. so ist

$$AD : AB = AB : AF$$

$$1 : a = a : a^2$$

ferner $AD : AF = AB : AG$

$$1 : a^2 = a : a^3 \text{ w. z. b.}$$

168.) 15. *Aufg. Aus einer gegebenen Linee eine verlangte Wurzel auszuziehen.*

Aufl. Suchet zwischen der Einheit und der gegebene Linee so viel mittlere proportionale, als der um eins verringerte Exponente-Einheiten hat, so ist die nächste nach der Einheit die verlangte Wurzel.

169.) *Anm.* Der Beweis dieser Aufgabe gründet sich auf den vorhergehenden.

170.) 15. *Aufg. Eine gerade Linie AB (Fig. 48.), die nach Belieben in C getheilt worden,*

die geometr. Aufgaben aufzulösen. 51

wiederum in D also zu theilen, dafs AC^4 ;
 $CD^4 = CD^3$; DB^5 .

Aufl. Es sey $AC = a$, $BC = b$, $CD = x$ und
 $BD = y$, so ist

$$\text{I. } y = b - x$$

$$\text{und } a^4 : x^4 = x^5 : y^3$$

$$\hline a^4 y^3 = x^7$$

$$\hline y^3 = x^7 : a^4$$

$$\text{II. } y = \sqrt[3]{x^7 : a^4}.$$

Die erste geometrische Linee BOX (Fig. 49.) kann leichte beschrieben werden. In der zweyten aber AOL findet ihr die Semiordinaten, wenn ihr $a = 1$ sezet, und alsdenn nach solchem die Abscisse zu der siebenden Dignität erhebet (§. 166.), endlich aus solcher die cubische Wurzel ziehet, wozu ihr denn die zweyte Auflösung der 8. Aufgabe (§. 150.) bequem gebrauchen könnet. Wenn solches geschehen, so giebt der Durchschnitt O die verlangte Lineen, nemlich $SO = y$, und $AS = x$.

171.) *Ann.* Aus dieser Lineen-Theilung könnet ihr euch zur Uebung viele andere Aufgaben finden, wenn ihr sezet

$$AC^4 : CD^4 = CD^5 : DB^5$$

$$\text{ferner } AC^5 : CD^5 = CD^6 : DB^6 \text{ u. s. w.}$$

172.) 16. *Aufg.* Ein rechtwinklichtes Drey-Eck AB (Fig. 50.) zu machen, daran bekannt die perpendicular-Linee CD, samt einer andern

Linee EF, also dafs $BC^3 - AC^3 = EF \cdot BC^2 - CD \cdot AC^2$.

Aufl. Es sey $EF = a$, $CD = b$, $CB = x$ und $AC = y$, so ist $AD = \sqrt{y^2 - b^2}$ u. $BD = \sqrt{xx - bb}$ daher I. $\sqrt{x^2 - b^2} : b = b : \sqrt{y^2 - b^2}$ und II. $x^3 - y^3 = ax^2 - ay^2$

Die geometrische Linee der I. Gleichung BOC (Fig. 51.) ist nach der gemeinen Art etwas schwer zu beschreiben, daher will ich eine leichtere hersetzen. Machet nemlich CD (Fig. 52.) $= b$, auf AB perpendicular, setet aus C mit einem Durchschnitte in A die Abscisse $= x$, richtet auf AC die perpendicular CB auf, bis sie die Linee AB in B durchschneidet, so wird solche $CB = y$, d. i. der Semiordinate von der angenommenen Abscisse seyn. Wollet ihr nun auch die geometrische Linee der II. Gleichung beschreiben, so müsset ihr sie vorher in zwey niedrige zerfallen (§. 164.), setet nemlich

$$x : y = y : v$$

so ist 1.) $vx = yy$

und weil $x^2 : y^2 = (y - b) : (x - a)$

so ist $x^2 : vx = (y - b) : (x - a)$

$$2.) y = (xx - ax) : v + b$$

Also könnet ihr nun durch diese beyde Neberegleichungen die Semiordinaten der geometrischen Linee ROM von der II. Hauptgleichung auf fol-

gende Art finden. Nehmet eine neue Axe DM (Fig. 53.) an, sezet darauf die Abscissen $DV = v$, beschreibet auf derselben mit der angenommenen Abscisse $= x$ aus der geometrischen Linee die ihr construiren wollet, eine Parabel DNP (§. 151.), als die Linee der 1. Nebengleichung; gleichergestalt beschreibet die geometrische Linee SNT der 2. Nebengleichung, indeme ihr zu v , x und $x - a$ die vierte proportionale suchet, und hernach mit b vermehret, denn also habt ihr die Semiordinate y der Abscisse v . Wo nun diese beyde geometrische Lineen einander durchschneiden, als in N, daselbst ziehet die Semiordinate VN, und also habt ihr eine Semiordinate der geometrischen Linee von der II. Hauptgleichung gefunden. Verfahrret nun auch also mit allen andern Abscissen auf der Axe AX (Fig. 51.), so werdet ihr endlich die verlangte geometrische Linee ROM beschreiben, und aus dem Durchschnit mit der ersten O die Gröfse von $y = SO = AC$ (Fig. 50.) und von $x = AS = BC$ finden, auch das ganze Drey-Eck ABC aufheissen können.

173.) 1. *Anm.* Ihr könnet die geometrische Linee der II. Gleichung noch auf eine andere Art beschreiben, wenn ihr nemlich aus der erst besagten Gleichung das zweyte Glied wegnehmet (§. 55.), und sie hernach mit denen Regeln der unreinen cubischen Gleichungen (§. 56.) vergleichet, darauf ihr sie denn nach Anweisung derselbigen als eine reine vermitteltst des Circuls und der Parabel construiren könnet, wie davon schon eine ungefehr auf die Art in der vorhergehenden Aufgabe vorkommen (§. 169.). Ihr werdet aber finden, dafs eine schwere Arbeit, und die in der Auflösung dieser Aufgabe gesezte derselbigen weit

vorzuziehen seye. Derhalben ich euch solche auch desto eher anrathe; zumal da sich diese nicht allein auf die cubische und biquadratische, sondern auch auf alle unendliche Gleichungen erstrecket, ob es schon dabey, absonderlich in den hohen bisweilen etwas schwer hergehet.

174.) 2. *Anm.* Wenn ihr die beyde Gleichungen der gegenwärtigen Aufgabe auf eine bringet, so werdet ihr sehen, daß es nicht allein große Mühe brauchet, und dabey leicht ein Fehler vorgehen kann, sondern auch die Gleichung selbst bis auf den zwölften Grad kommet: Aus welchem ihr denn die Vollkommenheit dieser meiner neuen Regel einiger Massen ersehen könnet.

175.) 3. *Anm.* Zum Beschluß dieses Werkleins habe ich euch noch etliche Aufgaben ohne Auflösungen hersetzen wollen, damit ihr euch nach Gefallen in dieser Regel üben könnet.

176.) 17. *Zwischen zweyen gegebenen Lineen drey, vier, fünf, sechs, etc. mittlere proportionale zu finden.*

177.) *Anm.* Diese Aufgabe könnet ihr gebrauchen, wenn ihr eine geometrische Linie nach einer reinen Gleichung, sie seye gleich so hoch als sie wolle, beschreiben wollet, da euch denn dienen kann, was oben (§. 176.) gesagt worden.

178.) 18. *Aufg.* In einen halben Circul ein Fünf-Sechs-Sieben-Eck, etc. einzuschreiben, dessen Seiten, wovon der Diameter die größte, in arithmetischer oder auch geometrischer Proportion seyen.

179.) 19. *Ein rechtwinklichtes Drey-Eck zu machen, dessen Inhalt bekannt ist, also das seine Seiten in arithmetischer, geometrischer, etc. Proportion seyen.*

die geometr. Aufgaben aufzulösen. 55

180.) *Anm.* Den Inhalt giebt man durch eine gerade Linee, deren Quadrat demselben gleich ist.

181.) 20. *Aufg.* An einem Drey-Ecke ist bekannt die perpendicular-Linee so auf die größte Seite aus dem gegenüberstehenden Winkel gefällt werden, ingleichen der Unterschied zwischen denen Stücken dieser Seite, welche das Perpendicul abschneidet, und der Unterschied zwischen denen übrigen beyden kleinern Seiten, daraus sollet ihr das Drey-Eck selbst formiren.

182.) 21. *Aufg.* Ein recht winktliches Drey-Eck zu beschreiben, daran bekannt die größte Seite, und die mittlere proportionale zwischen den beyden übrigen Seiten.

183.) 22. *Aufg.* Ein rechtwinktliches Drey-Eck zu machen, davon gegeben die kleinste Seite, samt der kleinern von den zweyen mittlern proportionalen zwischen den beyden andern Seiten.

184.) 23. *Aufg.* Es sind gegeben drey Seiten eines Vier-Eckes, welches in den Circul solle eingeschrieben werden, ihr sollet die vierte finden, welche zugleich der Diameter solches Circuls seye.

185.) 24. In einen Circul ein Sieben-Eck einzuschreiben, dessen Seiten sich gegeneinander verhalten, wie die Zahlen 2300, 1660, 1290, 1000, 666, 1260, 1335.

186.) 25. *Aufg.* In eine Parabel, deren größte Semiordinate dem Parameter gleich ist, ein Drey, Vier, Fünf-Eck u. s. w. einzuschreiben, dessen Seiten (davon die besagte Semiordinate doppelt,

das ist, ihre Ordinate, die grösste seyn solle) in einer arithmetischen oder auch geometrischen Proportion seyen.

187.) *Anm.* Ihr könnet auch in eine andere Parabel, wie nicht weniger in eine jede krumme Linee, davon eine Semiordinate als beständig gegeben wird, die Viel-Ecke unter allerley möglichen Bedingungen einschreiben.

188.) 26. *Aufg.* Ein Sieben-Eck zu befestigen, dessen Bolwerke also angeleget seyen, daß die Capital-Linee so groß als die Kehl-Linee und Flanke (welche auf die Cortine perpendicular kommet) zusammen, ferner daß die Summe der Quadrate von denen beyden erstbesagten Lineen so groß als das Quadrat von $\frac{1}{4}$ des halben grossen Diameters, und endlich daß das Product aus dem Quadrate der Flanke in die Kehl-Linee der dritten Dignität von $\frac{1}{4}$ des kleinen Diameters gleich seye.

E n d e.

Düsseldorf
gedruckt bey Hofkammerrath Stahl. 1812.













