

## Ueber Schwankungen der Drehungsachse der Erde im Inneren des Erdkörpers.

Daß die Achse der täglichen Umdrehung der Erde im Weltenraume ihre Richtung periodisch verändert, ist eine Thatsache, deren Folgen in der sogenannten Präzession der Fixsterne schon den Astronomen des Altertums trotz der Unvollkommenheit ihrer Beobachtungen bemerkbar wurden. In der Neuzeit ist durch die Vervollkommenung der Beobachtungsmethoden wie durch theoretische Untersuchungen zur Evidenz erwiesen worden, daß der Grund dieser Erscheinung in der auf die Erdmasse ausgeübten Anziehung des Mondes und der Sonne zu suchen ist, wenn auch leider noch nicht über manches, was mit der Sache zusammenhängt, völlige Klarheit zu herrschen scheint. Ob die Drehungsachse, statt mit dem Erdkerne fest verbunden zu sein, auch im Inneren desselben von den Einwirkungen fremder Weltkörper unabhängige Schwankungen erleide, was aus den Lehren der Physik, da die Erde keinen völlig festen Körper bildet, mit Notwendigkeit hervorzugehen scheint, ist eine Frage, welche die Astronomie lange Zeit aus Mangel an zuverlässigen Beobachtungen nicht zu entscheiden vermochte. Erst die allerneueste Zeit hat hierüber einige Aufklärung gebracht und damit der physischen Astronomie die neue Aufgabe gestellt, den Einfluß der Attraction von Sonne und Mond auf die Lage der Drehungsachse der Erde auch für den Fall in Betracht zu ziehen, wenn dieselbe gemäß den eigentümlichen Bewegungen der Erdmasse oder einzelner ihrer Teile mit keiner der sogenannten freien oder Principal-Achsen des Erdkörpers zusammenfällt. Möge der im Folgenden enthaltene Versuch, der Lösung dieser Aufgabe näher zu treten, eine günstige Aufnahme finden; — hoffentlich verzeiht es der sachkundige Leser, wenn, um den Zusammenhang der Darstellung zu wahren, auch manches bekannte hier wieder vorgebracht werden mußte.

Man denke sich durch den Schwerpunkt  $O$  des Erdkörpers, welcher vorläufig als eine vollkommen starre Masse betrachtet werden soll, als Anfang ein festes\*) rechtwinkliges Coordinatensystem gelegt. Die Ekliptik einer bestimmten Epoche, für welche die Zeit  $t = 0$  sei, stelle die Ebene der  $(x, y)$  dar; der positive Zweig der  $x$ -Achse sei nach dem Frühlingspunkte dieser Epoche, d. h. nach dem absteigenden Knoten des Äquators gerichtet, und der positive Zweig der  $y$ -Achse habe eine solche Lage, daß die Bewegung der Erde um die Sonne im Sinne der Drehung von  $(+Ox)$  nach  $(+Oy)$  erfolge; der positive Zweig der  $z$ -Achse sei der nördlichen Seite des

\*) Unter einem „festen“ Systeme ist hier ein solches zu verstehen, in welchem jede Achse bei der Bewegung von  $O$  dieselbe Richtung behält oder sich parallel bleibt.

Weltenraumes zugewandt. Die Bewegung der Erde um ihren eigenen Schwerpunkt wird alsdann nach den Principien der Mechanik durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} \text{I. } S \left( y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) dm &= S (yZ - zY) dm = M'; \\ S \left( z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) dm &= S (zX - xZ) dm = M''; \\ S \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) dm &= S (xY - yX) dm = M''', \end{aligned}$$

wo  $dm$  ein Partikelchen der Erdmasse,  $x, y, z$  die Coordinaten seines Schwerpunktes, und  $X, Y, Z$  die den bezüglichen Coordinatenachsen parallel gerichteten Componenten der auf letzteren wirkenden beschleunigenden Kräfte bezeichnen mögen; die durch  $S$  angedeutete Summation erstreckt sich auf die ganze Erdmasse. Erleidet das Massenteilchen  $dm$  von einem zweiten gleichfalls dem Erdkörper angehörigen Partikelchen  $dm_1$  durch Anziehung oder Abstoßung eine Einwirkung, deren Intensität durch  $E dm_1$  bezeichnet werden mag, so übt nach einem physikalischen Grundsatz  $dm$  auf  $dm_1$  nach der entgegengesetzten Richtung hin eine ebenso große Gegenwirkung aus. Die der ersteren entsprechende beschleunigende Kraft ist also, wenn Anziehung stattfindet, gleich  $E dm_1$  mit den Componenten:  $\frac{(x_1 - x)}{s} E dm_1, \frac{(y_1 - y)}{s} E dm_1, \frac{(z_1 - z)}{s} E dm_1$ , wo  $s$  die Maßzahl der Entfernung der Schwerpunkte beider Massenteilchen von einander,  $x_1, y_1, z_1$  die Coordinaten des Schwerpunktes von  $dm_1$  bezeichnen; die von letzterer auf  $dm_1$  ausgeübte Beschleunigung hat die Componenten  $\frac{(x - x_1)}{s} E dm, \frac{(y - y_1)}{s} E dm, \frac{(z - z_1)}{s_1} E dm$ . Findet Abstoßung statt, so erhalten sämtliche Werte der Componenten die entgegengesetzten Vorzeichen. Für diese beiden Massenteile allein beträgt also der Wert von  $M'$ :

$$+ \frac{E dm \cdot dm_1}{s} \left( y (z_1 - z) - z (y_1 - y) + y_1 (z - z_1) - z_1 (y - y_1) \right) = 0.$$

In den Ausdrücken  $M', M'', M'''$  heben sich also die der gegenseitigen Einwirkung von Teilen der Erdmasse entsprechenden Addenden und Subtrahenden auf, und es sind in ihnen nur diejenigen Glieder in Betracht zu ziehen, welche von der Anziehung des Mondes und der Sonne auf Teile der Erdmasse abhängen, da die Einwirkung der übrigen Weltkörper auf die Drehung der Erde sehr unbedeutend ist, sodaß ihre Folgen bisher nur indirekt durch die Veränderungen der Bahnelemente der Erde und des Mondes haben nachgewiesen werden können.

Durch Integration werden aus den Gleichungen I die folgenden abgeleitet:

$$\begin{aligned} \text{II. } S \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) dm &= Co' + \int M' dt; \\ S \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) dm &= Co'' + \int M'' dt; \\ S \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dm &= Co''' + \int M''' dt, \end{aligned}$$

wo  $Co', Co'', Co'''$  drei von  $t$  unabhängige Constanten bezeichnen, deren Werte aus der Lage der bewegten Massenteile zur Zeit  $t = 0$  abzuleiten sind. Bei dieser Integration diene als Zeiteinheit nach astronomischem Brauche der mittlere Sonnentag.

Nimmt man nun die freien oder Principal-Achsen des starren Erdkörpers als Achsen eines zweiten (mit der Erde demnach fest verbundenen) Coordinatensystemes der  $(x', y', z')$  an, dessen Anfang gleichfalls in  $O$  liege, so ergeben die Beobachtungen, daß nach den Gesetzen der Mechanik die eine dieser Achsen nahezu mit der Drehungsachse der Erde zusammenfallen muß. Dies sei die Achse der  $z'$ ; ihr positiver Zweig bilde zur Zeit  $t$  mit dem positiven Zweige der  $z$ -Achse einen spitzen Winkel. Die positiven Zweige der beiden anderen Achsen mögen zu einander eine solche Lage haben, daß die Drehung von  $(+Ox')$  nach  $(+Oy')$  im Sinne der täglichen Rotation der Erde, also, wie die Beobachtung lehrt, auch in der Richtung der Bewegung der Erde um die Sonne erfolge. Sind im neuen Systeme  $x', y', z'$  die Schwerpunktscoordinaten des Massenteilchens  $dm$ , so hat man mit Benutzung folgender Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \cos xOx' &= a, & \cos yOx' &= a', & \cos zOx' &= a'', \\ \cos xOy' &= b, & \cos yOy' &= b', & \cos zOy' &= b'', \\ \cos xOz' &= c, & \cos yOz' &= c', & \cos zOz' &= c'', \end{aligned}$$

wo die linker Hand auftretenden Winkel, welche sämtlich concav anzunehmen sind, von den positiven Zweigen der betreffenden Coordinatenachsen gebildet werden sollen, folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{III. } x &= ax' + a'y + a''z; & x &= ax' + by' + cz'; \\ y &= bx' + b'y + b''z; & y &= a'x' + b'y' + c'z'; \\ z &= cx' + c'y + c''z; & z &= a''x' + b''y' + c''z', \end{aligned}$$

mit welchen die folgenden aus der analytischen Geometrie bekannten Gleichungen zu verbinden sind:

$$\begin{aligned} \text{IV. } a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1; & a^2 + b^2 + c^2 &= 1; \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1; & a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1; \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1; & a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1; \\ ab + a'b' + a''b'' &= 0; & aa' + bb' + cc' &= 0; \\ ac + a'c' + a''c'' &= 0; & aa'' + bb'' + cc'' &= 0; \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0; & a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0; \end{aligned}$$

Durch Vergleichung der aus III sich ergebenden doppelten Werte von  $x', y', z'$  erhält man, wenn

$$K = a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c) \text{ gesetzt wird, da alsdann}$$

$$Kx' = (b'c'' - b''c')x + (b''c - bc'')y + (bc' - b'c)z,$$

$$Ky' = (a''c' - a'c'')x + (ac'' - a''c)y + (a'c - ac')z,$$

$$Kz' = (a'b'' - a''b')x + (a''b - ab'')y + (ab' - a'b)z \text{ ist,}$$

die folgenden wichtigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{V. } aK &= (b'c'' - b''c'); & a'K &= (b''c - bc''); & a''K &= (bc' - b'c); \\ bK &= (a''c' - a'c''); & b'K &= (ac'' - a''c); & b''K &= (a'c - ac'); \\ cK &= (a'b'' - a''b'); & c'K &= (a''b - ab''); & c''K &= (ab' - a'b). \end{aligned}$$

Demnach ist nach IV:

$$\begin{aligned} K^2 &= (b'c'' - b''c')^2 + (b''c - bc'')^2 + (bc' - b'c)^2 \\ &= b^2(c'^2 + c''^2) + b'^2(c^2 + c''^2) + b''^2(c^2 + c'^2) - 2(b'c'' \cdot b''c' + b''c \cdot bc'' + bc' \cdot b'c) \\ &= b^2 + b'^2 + b''^2 - b^2c^2 - b'^2c'^2 - b''^2c''^2 - 2b'c'' \cdot b''c' - 2b''c \cdot bc'' - 2bc' \cdot b'c \\ &= 1 - (bc + b'c' + b''c'')^2 = 1, \text{ also } K = (\pm 1). \end{aligned}$$

Das Vorzeichen von  $K$  richtet sich nach der Lage der positiven Zweige der Achsen der  $x', y', z'$  zur Zeit  $t$ ; haben alsdann z. B.  $a$  und  $b'$  gleiche,  $a'$  und  $b$  ungleiche Vorzeichen, und ist  $c''$  ein spitzer Winkel, so ist  $K = 1$ .



Setzt man die aus III abgeleiteten Werte von  $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  in die Gleichungen II ein (wobei zu beachten, daß wegen der angenommenen Starrheit des Erdkörpers  $\frac{dx'}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dz'}{dt} = 0$  ist), so erhält beispielsweise die erste von diesen die Form:

$$\begin{aligned} Co' + \int M' dt &= S(a'x' + b'y' + c'z') \cdot \left(x' \frac{da''}{dt} + y' \frac{db''}{dt} + z' \frac{dc''}{dt}\right) dm \\ &\quad - S(a''x' + b''y' + c''z') \cdot \left(x' \frac{da'}{dt} + y' \frac{db'}{dt} + z' \frac{dc'}{dt}\right) dm \\ &= \left(a' \frac{da''}{dt} - a'' \frac{da'}{dt}\right) Sx'^2 dm + \left(b' \frac{db''}{dt} - b'' \frac{db'}{dt}\right) Sy'^2 dm + \left(c' \frac{dc''}{dt} - c'' \frac{dc'}{dt}\right) Sz'^2 dm, \end{aligned}$$

da die Achsen der  $x', y', z'$  die Principalachsen des Erdkörpers darstellen, so daß  $Sx'y' dm = Sx'z' dm = Sy'z' dm = 0$  ist, und in der letzten Gleichung die diese Factoren enthaltenden Producte verschwinden. Bestimmt man aus den Gleichungen V unter Einführung der Eulerschen Hilfsgrößen:

$$\begin{aligned} \text{VI. } p &= \left(c \frac{db}{dt} + c' \frac{db'}{dt} + c'' \frac{db''}{dt}\right) = - \left(b \frac{dc}{dt} + b' \frac{dc'}{dt} + b'' \frac{dc''}{dt}\right); \\ q &= \left(a \frac{dc}{dt} + a' \frac{dc'}{dt} + a'' \frac{dc''}{dt}\right) = - \left(c \frac{da}{dt} + c' \frac{da'}{dt} + c'' \frac{da''}{dt}\right); \\ r &= \left(b \frac{da}{dt} + b' \frac{da'}{dt} + b'' \frac{da''}{dt}\right) = - \left(a \frac{db}{dt} + a' \frac{db'}{dt} + a'' \frac{db''}{dt}\right); \end{aligned}$$

die Werte von  $\frac{da}{dt}, \frac{da'}{dt}, \frac{da''}{dt}$ , so ergibt sich bei Anwendung der Gleichungen IV, daß

$$\begin{aligned} K \left(a' \frac{da''}{dt} - a'' \frac{da'}{dt}\right) &= a' \left(b \frac{dc'}{dt} + c' \frac{db}{dt} - b' \frac{dc}{dt} - c' \frac{db'}{dt}\right) \\ &\quad - a'' \left(b'' \frac{dc}{dt} + c'' \frac{db''}{dt} - b \frac{dc''}{dt} - c'' \frac{db}{dt}\right) \\ &= -(a'b' + a''b'') \frac{dc}{dt} + (a'c' + a''c'') \frac{db}{dt} + b \left(a' \frac{dc'}{dt} + a'' \frac{dc''}{dt}\right) - c \left(a' \frac{db'}{dt} + a'' \frac{db''}{dt}\right) \\ &= \left(a'b \frac{dc}{dt} + a'b' \frac{dc'}{dt} + a''b'' \frac{dc''}{dt}\right) - \left(a'c \frac{db}{dt} + a'c' \frac{db'}{dt} + a''c'' \frac{db''}{dt}\right) \\ &= (bq + cr) \text{ ist. Auf dieselbe Weise findet man:} \\ K \left(b' \frac{db''}{dt} - b'' \frac{db'}{dt}\right) &= (ap + cr); \quad K \left(c' \frac{dc''}{dt} - c'' \frac{dc'}{dt}\right) = (ap + bq). \end{aligned}$$

Die erste der Gleichungen II kann demnach auch die Form erhalten:

$$\begin{aligned} K Co' + K \int M' dt &= (bq + cr) Sx'^2 dm + (ap + cr) Sy'^2 dm + (ap + bq) Sz'^2 dm \\ &= apS(y'^2 + z'^2) dm + bqS(x'^2 + z'^2) dm + cr(Sx'^2 + y'^2) dm. \end{aligned}$$

Führt man für die Trägheitsmomente des Erdkörpers ihre gewöhnlichen Bezeichnungen ein, indem man

$$S(x'^2 + y'^2) dm = C, \quad S(x'^2 + z'^2) dm = B, \quad S(y'^2 + z'^2) dm = A$$

setzt, so lautet jene Gleichung:

VII.  $Ap a + Bq b + Cr c = K Co' + K \int M' dt$ . Auf ähnliche Weise leitet man die Gleichungen ab:

$$\begin{aligned} Ap a' + Bq b' + Cr c' &= K Co'' + K \int M'' dt; \\ Ap a'' + Bq b'' + Cr c'' &= K Co''' + K \int M''' dt. \end{aligned}$$

Aus astronomischen Rechnungen und Beobachtungen geht ferner hervor, daß eines der drei Trägheitsmomente der Erde, nämlich C, größer als jedes der beiden anderen ist, was auch mit geodätischen Messungen übereinstimmt, nach welchen die Gestalt der Erde annähernd richtig als ein Rotations-Ellipsoid betrachtet werden kann. Die Trägheitsmomente A und B werden gewöhnlich einander gleich angenommen, was bei den in Wirklichkeit auf der Erde stattfindenden Massenverschiebungen nicht zutreffend ist. Wählt man die  $x'$ -Achse so, daß ihr das kleinste Trägheitsmoment entspricht, so ist also  $A < B$ ; aller Wahrscheinlichkeit nach ist der Wert der uns unbekannten positiven Größe  $(B - A)$  nur klein.

Differenziert man die drei Gleichungen VII und addiert sie darauf, nachdem man die erste mit a, die zweite mit a', die dritte mit a'' multipliziert hat, so erhält man die neue Gleichung:

$$A \frac{dp}{dt} - Brq + Crq = aKS(yZ - zY) dm + a'KS(zX - xZ) dm + a''KS(xY - yX) dm.$$

Die Resultierende aller auf den Schwerpunkt von dm wirkenden beschleunigenden Kräfte, welche auf die drehende Bewegung der Erde Einfluß haben, sei nun = T, so sind ihre Componenten in den beiden angenommenen Coordinatensystemen:

$$\begin{aligned} X &= T \cos \alpha; & Y &= T \cos \beta; & Z &= T \cos \gamma, \text{ und} \\ X' &= T \cos \alpha'; & Y' &= T \cos \beta'; & Z' &= T \cos \gamma', \end{aligned}$$

wo  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  die concaven Richtungswinkel der Resultierenden T gegen die positiven Zweige der betreffenden Achsen bezeichnen. Da bekanntlich

$$\begin{aligned} \cos \alpha' &= a \cos \alpha + a' \cos \beta + a'' \cos \gamma, \\ \cos \beta' &= b \cos \alpha + b' \cos \beta + b'' \cos \gamma, \\ \cos \gamma' &= c \cos \alpha + c' \cos \beta + c'' \cos \gamma \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich nach leichter Rechnung mit Berücksichtigung der Gleichungen V:

$$\begin{aligned} &aKS(yZ - zY) dm + a'KS(zX - xZ) dm + a''KS(xY - yX) dm \\ &= aKS[(a'x' + b'y' + c'z') \cos \gamma - (a''x'' + b''y'' + c''z'') \cos \beta] T dm \\ &+ a'KS[(a''x'' + b''y'' + c''z'') \cos \alpha - (ax' + by' + cz') \cos \gamma] T dm \\ &+ a''KS[(ax' + by' + cz') \cos \beta - (a'x' + b'y' + c'z') \cos \alpha] T dm \\ &= S[K(a'b' - a'b'')y' \cos \gamma + K(a''b'' - a'b'')y' \cos \beta + K(a'b'' - a''b')y' \cos \alpha] T dm \\ &+ S[K(a'c' - a'c'')z' \cos \gamma + K(a''c'' - a'c'')z' \cos \beta + K(a'c'' - a''c')z' \cos \alpha] T dm \\ &= S[y'(c'' \cos \gamma + c' \cos \beta + c \cos \alpha) - z'(b'' \cos \gamma + b' \cos \beta + b \cos \alpha)] T dm = S(y'Z' - z'Y') dm. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\text{VIII. } A \frac{dp}{dt} + (C - B)rq = S(y'Z' - z'Y') dm, \text{ und ebenso findet man}$$

$$B \frac{dq}{dt} - (C - A)rp = S(z'X' - x'Z') dm,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = S(x'Y' - y'X') dm,$$

welche von Euler zuerst entwickelten Gleichungen der folgenden Betrachtung zunächst zu Grunde liegen.

Untersucht man nur die drehende Bewegung, welche dem Erdkörper an und für sich ohne die Einwirkung anderer Weltkörper eigentümlich ist, so hat man in den Gleichungen VII die Integrale  $\int M' dt$ ,  $\int M'' dt$ ,  $\int M''' dt$  außer Acht zu lassen, also die rechte Seite einer jeden der Gleichungen VIII = 0 zu setzen. Aus letzteren ergibt sich alsdann, wenn man die erste mit p, die zweite mit q, die dritte mit r multipliziert, darauf alle drei addiert und integriert, die neue Gleichung:

IX.  $A p^2 + B q^2 + C r^2 = h$ , wo h eine von der Zeit t unabhängige Größe bezeichnet. Multipliziert man dagegen die erste mit Ap, die zweite mit Bq, die dritte mit Cr und verfährt wie vorhin, so ist

X.  $A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2$ , wo k gleichfalls eine von t unabhängige Größe bedeutet, welche wir positiv annehmen. Aus beiden Gleichungen erhält man durch Elimination von  $r^2$  die folgende:  $A(C-A)p^2 + B(C-B)q^2 = (Ch - k^2)$ , woraus folgt, daß  $\frac{(C-A)}{B}p^2 + \frac{(C-B)}{A}q^2 = \frac{(Ch - k^2)}{AB} = U$  ist, wo also auch U eine Constante bezeichnet.

Aus sehr sorgfältigen, auf zahlreiche vortreffliche Beobachtungen gestützten Berechnungen ergab sich um die Mitte des vorigen Jahrhunderts, daß damals, abgesehen von den Einwirkungen außerirdischer Körper, die Größe  $(p^2 + q^2) < \frac{6,4}{10^{12}}$  war, während man für die Summe der beiden positiven unbenannten Brüche  $\frac{(C-A)}{B}$  und  $\frac{(C-B)}{A}$  annähernd den Wert 0,00651 erhielt, so daß also der erstere und ansehnlichere von beiden Brüchen größer als 0,00325 zu setzen ist. Demnach war damals  $U < \frac{4,2}{10^{14}}$ . Wenn keine fremden Weltkörper auf die Erde einwirkten, würde also zu

allen Zeiten  $0,00325 p^2 < \frac{(C-A)}{B} p^2 < U$ , also  $p^2 < \frac{U}{0,00325}$ , d. i.  $p^2 < \frac{1,3}{10^{11}}$  sein. Aus den Gleichungen IX und X folgt ferner, daß  $C(C-A)r^2 = (k^2 - Ah) - B(B-A)q^2$ , demnach  $r^2 = \frac{(k^2 - Ah)}{C(C-A)} - \frac{B(B-A)}{C(C-A)} q^2 = (n^2 - \rho q^2)$  gesetzt werden kann, wo n also eine constante unbenannte Zahl und  $\rho$  einen echten positiven Bruch bezeichnet, welcher mutmaßlich wegen des in seinem Zähler enthaltenen Factors  $(B-A)$  einen sehr kleinen Wert hat, während  $n^2$  den Beobachtungen zufolge etwas größer als  $4\pi^2$ , etwa  $= 6,3^2$  anzunehmen ist. Zugleich ergeben die Beobachtungen, daß r und n positive Zahlen sind, was später näher erwiesen werden wird. Setzt man demnach  $r = \sqrt{n^2 - \rho q^2} = (n - z)$ , so ist also  $z = n - (\sqrt{n^2 - \rho q^2})$ .

Die beiden ersten der Gleichungen VIII lauten nun bei Einsetzung dieser Werte, wenn man die Einwirkung fremder Weltkörper auf die Erde unberücksichtigt läßt:

$$\text{XI. } \frac{dp}{dt} + \frac{(C-B)}{A} n q = \frac{(C-B)}{A} z q;$$

$$\frac{dq}{dt} - \frac{(C-A)}{B} n p = -\frac{(C-A)}{B} z p.$$

Die Zahl z ist bei früheren Untersuchungen stets verschwindend klein angenommen worden. Vernachlässigt man sie bei der ersten Integration dieser Gleichungen, so erhält man für p und q die Werte:

$$\text{XII. } p = \varepsilon \sqrt{\frac{C-B}{A}} \cdot \sin(n't + \gamma^*); \quad q = -\varepsilon \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cdot \cos(n't + \gamma),$$

\*) Es ist der Kreisbogen  $\gamma$  von dem oben durch  $\gamma$  bezeichneten Winkel wohl zu unterscheiden.



wenn man das Product  $n \cdot \sqrt{\frac{C-B}{A}} \cdot \sqrt{\frac{C-A}{B}} = nD = n'$  setzt. Die Größen  $\varepsilon$  und  $\gamma$  würden als Constanten zu betrachten sein, wenn  $z = 0$  wäre, sie könnten aber im entgegengesetzten Falle vielleicht veränderlich werden. Nach der Theorie der Variation der Constanten annähernd richtiger Integrale erhält man nun unter Berücksichtigung der auf der rechten Seite der Gleichungen XI vorkommenden Größen folgende Differentialgleichungen:

$$\text{XIII. } \sqrt{\frac{C-B}{A}} \cdot \sin(n't + \gamma) \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + \sqrt{\frac{C-B}{A}} \varepsilon \cos(n't + \gamma) \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \frac{(C-B)}{A} \cdot zq;$$

$$- \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cdot \cos(n't + \gamma) \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + \sqrt{\frac{C-A}{B}} \varepsilon \sin(n't + \gamma) \cdot \frac{d\gamma}{dt} = - \frac{(C-A)}{B} \cdot zp.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergibt sich, wie leicht erhellt, zunächst die folgende:  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ , sodaß also die Größe  $\varepsilon$ , abgesehen von der Einwirkung außerirdischer Kräfte, eine wirkliche Constante darstellt. Inwiefern dieselbe auch dann noch als solche zu betrachten ist, wenn die von Sonne und Mond auf die Erde ausgeübten Anziehungen oder die Verschiebungen der flüssigen Teile der Erdmasse in Berechnung gezogen werden, wird die folgende Untersuchung lehren.

Wie oben erwähnt wurde, war um die Mitte des vorigen Jahrhunderts die Größe

$$(p^2 + q^2) = \left( \frac{(C-B)}{A} \varepsilon^2 \sin^2(nt + \gamma) + \frac{(C-A)}{B} \varepsilon^2 \cos^2(nt + \gamma) \right) < \frac{6,4}{10^{12}};$$

für die Zeit  $t = \left(-\frac{\gamma}{n}\right)$  ist also  $\frac{(C-A)}{B} \cdot \varepsilon^2 < \frac{6,4}{10^{12}}$ ; demnach ist, da  $0,00325 < \frac{(C-A)}{B}$ ,

auch  $0,00325 \cdot \varepsilon^2 < \frac{6,4}{10^{12}}$ , woraus folgt, daß der absolute Wert von  $\varepsilon$  weniger als  $\frac{4,5}{10^5}$  be-

trägt, wenn von den Veränderungen, welche er etwa durch die sogenannten störenden Kräfte und die Verschiebungen der flüssigen Teile des Erdkörpers erleiden mag, abgesehen wird. Vernachlässigt man unter dieser Voraussetzung die Potenzen von  $\varepsilon$ , welche die dritte übersteigen, so erhält man

aus den Gleichungen XIII und XII, da alsdann  $z = (n - \sqrt{n^2 - \rho q^2}) = \frac{\rho \cdot \varepsilon^2}{2n} \cdot \frac{(C-A)}{B} \cdot \cos^2(nt + \gamma)$  zu setzen ist, den Ausdruck:

$$D \cdot \frac{d\gamma}{dt} = - \frac{D^2}{4n} \cdot \frac{(C-A)}{B} \cdot \rho \varepsilon^2 - \frac{D^2}{4n} \cdot \frac{(C-A)}{B} \cdot \rho \varepsilon^2 \cdot \cos 2(n't + \gamma).$$

In dem letzten Gliede rechter Hand ist die Größe  $\gamma$  unter dieser Voraussetzung bei der Integration als eine Constante zu behandeln, demnach wird

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{D}{4n} \cdot \frac{(C-A)}{B} \cdot \rho \varepsilon^2 \cdot t - \frac{1}{8n^2} \cdot \frac{(C-A)}{B} \rho \varepsilon^2 \cdot \sin 2(n't + \gamma_0)$$

gesetzt werden können, wo  $\gamma_0$  eine Constante bedeutet. Vernachlässigt man in den Ausdrücken für  $p$  und  $q$  auch die dritte Potenz von  $\varepsilon$ , so ist  $\gamma = \gamma_0$  zu setzen und also auch als eine Constante zu betrachten. Man kann den Wert derselben so bestimmen, daß zur Zeit  $t = 0$  die Größen  $p$  und  $\sin \gamma$  dasselbe Vorzeichen haben, so daß also  $\varepsilon$  eine positive Zahl darstellt oder, wie es auch sein kann,  $= 0$  ist.

Für die weitere Rechnung gewährt die Einführung gewisser neuer Winkel entschiedene Vorteile. Der spitze Winkel  $zOz'$  sei  $= \Theta$ . Die Ebene der  $(x', y')$  schneide die Ebene der  $(x, y)$  in der geraden Linie  $NN'$ , und der Zweig  $ON$  dieser Linie, mit welchem  $(+Ox)$  zur Zeit der Epoche, wo  $t = 0$  ist, zusammenfällt, bilde zur Zeit  $t$  mit  $(+Ox)$  den Winkel  $\phi^*$ , welcher von  $(+Ox)$

\*) Wir folgen der älteren Bezeichnungsweise; in neuerer Zeit hat man wohl diesen Winkel durch  $(-\phi)$  bezeichnet.

an in der Richtung nach  $(-Oy)$  von  $0$  bis  $360^\circ$  gezählt werden soll. Der Winkel  $NOx'$ , von  $ON$  an in der Richtung der Erddotation von  $0$  bis  $360^\circ$  gezählt, werde durch  $\varphi$  bezeichnet. Die Lage der Drehungsachse der Erde ist eine solche, daß, wenn  $\varphi < 90^\circ$ , der positive Zweig der  $y'$ -Achse südlich von der Ebene der  $(x, y)$  liegt, sodaß alsdann  $\angle zOy' > 90^\circ$  ist. Führen wir zwei neue rechtwinklige Koordinatensysteme der  $(x, y, z)$  und der  $(x', y', z')$  mit  $O$  als Anfang ein, in welchen die positiven Zweige der Achsen der  $x$  und  $x'$  mit  $ON$  zusammenfallen, die Drehung von  $ON$  nach  $(+Oy)$  und nach  $(+Oy')$  im Sinne der Bewegung von  $(+Ox)$  nach  $(+Oy)$  erfolgt, sodaß  $\angle yOy' = \angle zOz' = \Theta$ ,  $\angle yOz' = (90^\circ - \Theta)$  ist, so ergeben die Formeln der Koordinatenverwandlung die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \psi - y' \sin \psi; & y &= x' \sin \psi + y' \cos \psi; \\ x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi; & y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi; \\ x &= x'; & y &= y' \cos \Theta + z' \sin \Theta; & z &= -y' \sin \Theta + z' \cos \Theta. \end{aligned}$$

Nach Einsetzung der ersteren Werte von  $x, y, x', y'$  in die drei letzten Gleichungen erhält man, wenn man aus diesen die Koordinaten  $x, y, z$  bestimmt und ihre Werte mit den in den Gleichungen III gegebenen vergleicht, die Relationen:

$$\begin{aligned} \text{XIV. } a &= \cos \Theta \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi; \\ b &= \cos \Theta \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi; \\ c &= \sin \Theta \sin \psi; \\ a' &= \cos \Theta \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi; \\ b' &= \cos \Theta \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi; \\ c' &= \sin \Theta \cos \psi; \\ a'' &= -\sin \Theta \sin \varphi; \\ b'' &= -\sin \Theta \cos \varphi; \\ c'' &= \cos \Theta. \end{aligned}$$

Die Gleichungen VI nehmen nach Einführung dieser Werte folgende Form an:

$$\begin{aligned} \text{XV. } \sin \varphi \sin \Theta \frac{d\psi}{dt} - \cos \varphi \frac{d\Theta}{dt} &= p; \\ \cos \varphi \sin \Theta \frac{d\psi}{dt} + \sin \varphi \frac{d\Theta}{dt} &= q; \\ \frac{d\varphi}{dt} - \cos \Theta \frac{d\psi}{dt} &= r, \text{ und hieraus ergeben sich die Ausdrücke:} \\ \text{XVI. } \frac{d\Theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2} \left\{ \sqrt{\frac{C-A}{B}} + \sqrt{\frac{C-B}{A}} \right\} \sin(\varphi + n't + \gamma) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \sqrt{\frac{C-A}{B}} - \sqrt{\frac{C-B}{A}} \right\} \sin(\varphi - n't - \gamma); \\ \sin \Theta \cdot \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2} \left\{ \sqrt{\frac{C-A}{B}} + \sqrt{\frac{C-B}{A}} \right\} \cos(\varphi + n't + \gamma) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \sqrt{\frac{C-A}{B}} - \sqrt{\frac{C-B}{A}} \right\} \cos(\varphi - n't - \gamma); \\ \frac{d\varphi}{dt} &= (n - \alpha) - \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \sqrt{\frac{C-A}{B}} + \sqrt{\frac{C-B}{A}} \right\} \operatorname{ctg} \Theta \cdot \cos(\varphi + n't + \gamma) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \sqrt{\frac{C-A}{B}} - \sqrt{\frac{C-B}{A}} \right\} \operatorname{ctg} \Theta \cdot \cos(\varphi - n't - \gamma), \end{aligned}$$

welche jedoch nach dem Obigen nur unter der Bedingung richtig sind, daß von der Einwirkung äußerer Weltkörper auf die Erde abgesehen wird.



$$\text{Setzt man } \frac{\varepsilon}{2} \left( \sqrt{\frac{C-A}{B}} + \sqrt{\frac{C-B}{A}} \right) = \mu \text{ und } \frac{\varepsilon}{2} \left( \sqrt{\frac{C-A}{B}} - \sqrt{\frac{C-B}{A}} \right) = \nu$$

und berücksichtigt man nur die erste Potenz der kleinen positiven Zahl  $\varepsilon$ , so hat man in den mit  $\varepsilon$  multiplicierten Gliedern der letzten Gleichungen  $\varphi = (nt + l)$  zu setzen, wo  $l$  eine Constante bezeichnet, und  $\gamma$ ,  $\sin \Theta$ ,  $\text{ctg } \Theta$  gleichfalls als Constanten zu betrachten. Unter dieser Voraussetzung ergeben sich durch Integration der Gleichungen XVI die folgenden:

$$\begin{aligned} \text{XVII. } \Theta &= \Theta_0 + \frac{\mu \cos(\varphi + n't + \gamma)}{(n + n')} + \frac{\nu \cos(\varphi - n't - \gamma)}{(n - n')} \\ \psi &= g - \frac{\mu \sin(\varphi + n't + \gamma)}{(n + n') \sin \Theta} - \frac{\nu \sin(\varphi - n't - \gamma)}{(n - n') \sin \Theta} \\ \varphi &= (nt + l) - \frac{\mu \text{ctg } \Theta \sin(\varphi + n't + \gamma)}{(n + n')} - \frac{\nu \text{ctg } \Theta \sin(\varphi - n't - \gamma)}{(n - n')} \end{aligned}$$

wo  $g$  und  $\Theta_0$  neue Constanten bezeichnen. Da zur Zeit  $t = 0$  der Winkel  $\psi = 0$  ist, so ist  $g = \frac{\mu \sin(l + \gamma)}{(n + n')} + \frac{\nu \sin(l - \gamma)}{(n - n')}$  zu setzen. Der Winkel  $\varphi$  giebt, in Stunden, Minuten, Sekunden ausgedrückt, die Sternzeit für den Endpunkt des positiven Zweiges der  $x'$ -Achse auf der Erdoberfläche an; er wächst also beständig mit  $t$  zugleich, was bei der Kleinheit der GröÙe  $\frac{d\psi}{dt}$  nach XV nur möglich ist, wenn  $r = (n - z)$ , also auch  $n$  positiv ist, wie oben bereits erwähnt wurde.

Zugleich erhellt, daß bei Vernachlässigung der die erste übersteigenden Potenzen von  $\varepsilon$  folgende Gleichungen richtig sind:

$$\begin{aligned} \text{XVIII. } \sin \varphi &= \sin(nt + l) - \frac{\mu \text{ctg } \Theta \sin(n't + \gamma)}{2(n + n')} + \frac{\nu \text{ctg } \Theta \sin(n't + \gamma)}{2(n - n')} \\ &\quad - \frac{\mu \text{ctg } \Theta \sin(2nt + n't + 2l + \gamma)}{2(n - n')} - \frac{\nu \text{ctg } \Theta \sin(2nt - n't + 2l - \gamma)}{2(n - n')} \\ \cos \varphi &= \cos(nt + l) + \frac{\mu \text{ctg } \Theta \cos(n't + \gamma)}{2(n + n')} + \frac{\nu \text{ctg } \Theta \cos(n't + \gamma)}{2(n - n')} \\ &\quad - \frac{\mu \text{ctg } \Theta \cos(2nt + n't + 2l + \gamma)}{2(n + n')} - \frac{\nu \text{ctg } \Theta \cos(2nt - n't + 2l - \gamma)}{2(n - n')} \end{aligned}$$

Bei der Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt ist ein Massenteilchen derselben zur Zeit  $t$  in Ruhe, wenn alsdann seine Geschwindigkeit  $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = 0$ , also  $\frac{dx}{dt} = x' \frac{da}{dt} + y' \frac{db}{dt} + z' \frac{dc}{dt} = 0$ ;  $\frac{dy}{dt} = x' \frac{da'}{dt} + y' \frac{db'}{dt} + z' \frac{dc'}{dt} = 0$ ;  $x' \frac{da''}{dt} + y' \frac{db''}{dt} + z' \frac{dc''}{dt} = 0$  ist. Addiert man diese drei letzten Gleichungen, nachdem man die erste mit  $a$ , die zweite mit  $a'$ , die dritte mit  $a''$  multipliciert hat, so erhält man nach IV und VI die neue Gleichung  $qz' - ry' = 0$ , und ebenso, wenn man jene Multiplicatoren bzw. mit  $b$ ,  $b'$ ,  $b''$ , dann mit  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  vertauscht, die Gleichungen  $rx' - pz' = 0$ ;  $py' - qx' = 0$ . Diese Gleichungen charakterisieren die Gleichung einer durch den Schwerpunkt der Erde gehenden geraden Linien  $JJ'$ , in welcher sämtliche Punkte des Erdkörpers zur Zeit  $t$  in Ruhe sind, weshalb sie die augenblickliche oder instantane Drehungsachse der Erde zur Zeit  $t$  genannt wird. Bezeichnet man die concaven

Richtungswinkel des Zweiges OJ jener Linie, welcher mit Oz' einen spitzen Winkel bilde, durch JOx', JOy', JOz', so ist also für einen in OJ liegenden, von O um eine Strecke, deren Maßzahl = s sei, entfernten Punkt:

$$rs \cdot \cos JOx' = ps \cdot \cos JOz'; \quad rs \cdot \cos JOy' = qs \cdot \cos JOz',$$

und da zugleich  $\cos^2 JOx' + \cos^2 JOy' + \cos^2 JOz' = 1$  ist, so erhält man die Gleichungen:

$$\cos^2 JOz' = \frac{r^2}{(r^2 + p^2 + q^2)}; \quad \cos^2 JOy' = \frac{q^2}{(r^2 + p^2 + q^2)}; \quad \cos^2 JOx' = \frac{p^2}{(r^2 + p^2 + q^2)}.$$

Weil  $\cos JOz'$  und  $r = (n - z)$  positiv ist, so folgt aus den vorhergehenden Gleichungen, daß auch die Brüche  $\frac{\cos JOx'}{p}$  und  $\frac{\cos JOy'}{q}$  positiv sind; demnach ist  $\cos JOz' = \frac{r}{\sqrt{r^2 + p^2 + q^2}}$ ,

$$\cos JOy' = \frac{q}{\sqrt{r^2 + p^2 + q^2}}, \quad \cos JOx' = \frac{p}{\sqrt{r^2 + p^2 + q^2}}.$$

Aus den Werten von  $\cos JOx'$  und  $\cos JOy'$  erhellt gemäß den Gleichungen XII, daß die Linie OJ um (+ Oz'), wenn man von der Einwirkung außerirdischer Kräfte abieht, einen Kegelmantel mit elliptischer Grundfläche beschreibt, deren Achsen sich wie  $\sqrt{\frac{C-A}{B}}$  und  $\sqrt{\frac{C-B}{A}}$  zu einander verhalten. Ist  $\varepsilon = 0$ , so fällt unter derselben Voraussetzung die Linie JJ' mit der Achse der z' zusammen.

Um die Winkelgeschwindigkeit der zur Zeit t um JJ' sich drehenden Erdmasse zu bestimmen, betrachten wir einen im positiven Zweige der z'-Achse liegenden, um eine Strecke, deren Maßzahl = s sei, von O entfernten Punkt. Seine absolute Geschwindigkeit ist nach dem obigen zur Zeit t =  $s \sqrt{\left(\frac{dc}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc''}{dt}\right)^2}$ ; dieselbe, durch die Maßzahl der Entfernung jenes

Punktes von JJ', nämlich  $s \sin JOz' = \frac{s \sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{r^2 + p^2 + q^2}}$  dividiert, giebt die gesuchte Winkel-

geschwindigkeit =  $\sqrt{r^2 + p^2 + q^2}$ , weil nach IV und VI  $(p^2 + q^2) dt^2 = (adc + a'dc' + a''dc'')^2 + (bdc + b'dc' + b''dc'')^2 = (dc^2 + dc'^2 + dc''^2) - (cdc + c'dc' + c''dc'')^2 = (dc^2 + dc'^2 + dc''^2)$  ist. Vernachlässigt man die zweiten Potenzen der kleinen Größen p und q (die auch bei Berücksichtigung der störenden außerirdischen Kräfte keine erheblichen Werte erhalten), so ist die gesuchte Winkel-

geschwindigkeit = n. Weil n und n' =  $n \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cdot \sqrt{\frac{C-B}{A}}$  einerlei Vorzeichen haben, so geschieht die Drehung der Erde um die nahezu mit der z'-Achse zusammenfallende Linie JJ' in demselben Sinne wie die Drehung der letzteren um die z'-Achse.

Von Wichtigkeit für die vorliegende Aufgabe ist ferner die Betrachtung einer geraden Linie MOM', deren Lage im Coordinatensysteme der (x', y', z') durch folgende Gleichungen bestimmt werde.

$$\cos MOx' = \frac{Ap}{k}; \quad \cos MOy' = \frac{Bq}{k}; \quad \cos MOz' = \frac{Cr}{k},$$

wo p und q die in XII angegebenen Werte haben mögen und MOz' einen spitzen Winkel bezeichne. Wie es sein muß, ist nach Gleichung X:  $\cos^2 MOx' + \cos^2 MOy' + \cos^2 MOz' = 1$ . Aus diesen Gleichungen erhellt, daß auch MO um Oz' im Inneren des Erdförpers (scheinbar) einen Kegelmantel mit elliptischer Grundfläche beschreibt, deren Achsen sich wie  $\sqrt{B(C-A)}$  und  $\sqrt{A(C-B)}$  zu einander verhalten. Beide Kegelmäntel werden in derselben Richtung beschrieben, und zwar jeder von beiden in  $\frac{2\pi}{n}$  mittleren Sonnentagen, wo nach dem Obigen  $n' = nD =$

$n \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cdot \sqrt{\frac{C-B}{A}}$  ist. Der Wert von  $n'$  ist uns nicht genau bekannt, da wir die Größe  $\frac{(B-A)}{C}$  nicht kennen; ist diese = 0, so ist nach den bis zur Mitte des vorigen Jahrhunderts reichenden Beobachtungen ungefähr  $\frac{2\pi}{n'} = 304,8$ . Aus den Gleichungen VII ergibt sich ferner, wenn wir auch im Folgenden von der Wirkung außerirdischer Kräfte absehen:

$$\begin{aligned} \text{XIX.} \quad \cos MOx &= \frac{A p a}{k} + \frac{B q b}{k} + \frac{C r c}{k} = \frac{K C_0'}{k}, \\ \cos MOy &= \frac{A p a'}{k} + \frac{B q b'}{k} + \frac{C r c'}{k} = \frac{K C_0''}{k}, \\ \cos MOz &= \frac{A p a''}{k} + \frac{B q b''}{k} + \frac{C r c''}{k} = \frac{K C_0'''}{k}, \end{aligned}$$

und da  $C_0'$ ,  $C_0''$ ,  $C_0'''$  Constanten bezeichnen, deren Quadratsumme nach dem Obigen gleich  $k^2$  ist, so würde die Linie  $MOM'$  ohne die Einwirkung fremder Weltkörper in dem festen Coordinatensysteme der  $(x, y, z)$  und damit im Weltenraume eine feste Lage haben, d. h. sich stets parallel bleiben. Aus der letzten der drei vorstehenden Gleichungen folgt ferner, da  $c'' = \cos \Theta = \cos zOz'$  ist, nach XII und XIV die Gleichung:

$$\begin{aligned} \text{XX.} \quad \cos zOz' &= \frac{k \cos MOz}{Cr} + \frac{A \sin \Theta}{Cr} \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{C-B}{A}} \cdot \sin(n't + \gamma) \sin \varphi \\ &\quad - \frac{B \sin \Theta}{Cr} \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cdot \cos(n't + \gamma) \cos \varphi; \end{aligned}$$

ebenso folgt aus der vorletzten Gleichung, weil  $c' = \cos yOz' = \sin \Theta$ , falls man nur die erste Potenz von  $\varepsilon$  berücksichtigt,

$$\begin{aligned} \cos yOz' &= \cos MOy - \frac{A \cos \Theta}{Cr} \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{C-B}{A}} \cdot \sin(n't + \gamma) \sin \varphi \\ &\quad + \frac{B \cos \Theta}{Cr} \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cdot \cos(n't + \gamma) \cos \varphi, \end{aligned}$$

und aus der ersten jener drei Gleichungen, da  $c = \cos xOz'$ ,

$$\cos xOz' = \cos MOx - \frac{A \varepsilon}{Cr} \sqrt{\frac{C-B}{A}} \sin(n't + \gamma) \cos \varphi - \frac{B \varepsilon}{Cr} \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cos(n't + \gamma) \sin \varphi.$$

Leicht erhellt ferner, daß unter den getroffenen Voraussetzungen  $\angle MOz = \Theta_0$  ist. Ferner ergeben sich aus den oben angegebenen Werten von  $\cos JOz'$ ,  $\cos JOy'$ ,  $\cos JOz'$  bei Vernachlässigung der zweiten sowie der höheren Potenzen von  $\varepsilon$  die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{XXI.} \quad \cos JOz &= \frac{(a''p + b''q + c''r)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = -\frac{\sin \Theta}{r} \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{C-B}{A}} \cdot \sin(n't + \gamma) \sin \varphi \\ &\quad + \frac{\sin \Theta}{r} \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cdot \cos(n't + \gamma) \cos \varphi + \cos zOz' \\ &= \cos MOz - \frac{(C-A)}{Cr} \sin \Theta \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{C-B}{A}} \sin(n't + \gamma) \sin \varphi + \frac{(C-B)}{Cr} \sin \Theta \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cos(n't + \gamma) \cos \varphi; \\ \cos JOy &= \frac{(a'p + b'q + c'r)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{\cos \Theta}{r} \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{C-B}{A}} \cdot \sin(n't + \gamma) \sin \varphi - \frac{\cos \Theta}{r} \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cdot \cos(n't + \gamma) \cos \varphi \\ &\quad + \cos yOz' \\ &= \cos MOy + \frac{(C-A)}{Cr} \cos \Theta \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{C-B}{A}} \sin(n't + \gamma) \sin \varphi - \frac{(C-B)}{Cr} \cos \Theta \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cos(n't + \gamma) \cos \varphi; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\cos JOx &= \frac{(ap + bq + cr)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{\varepsilon}{r} \sqrt{\frac{C-B}{A}} \cdot \sin(n't + \gamma) \cos \varphi + \frac{\varepsilon}{r} \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cdot \cos(n't + \gamma) \sin \varphi + \cos x Oz' \\ &= \cos MOx + \frac{(C-A)}{Cr} \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{C-B}{A}} \sin(n't + \gamma) \cos \varphi + \frac{(C-B)}{Cr} \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cos(n't + \gamma) \sin \varphi.\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß die Linien  $Oz'$  und  $OJ$  sich bei der Drehung der Erde um die Linie  $OM$  bewegen. Leicht ist ersichtlich, daß, wenn  $A = B$ , die Linien  $Oz'$  und  $OJ$  unter den obigen Voraussetzungen stets mit  $OM$  in derselben Ebene liegen, und zwar  $OM$  zwischen  $Oz'$  und  $OJ$ . Jede der beiden letzteren Linien beschreibt alsdann um  $OM$  in der Zeit von  $\frac{2\pi}{(n + n')}$  mittleren Sonnentagen den Mantel eines geraden Kreiskegels, und zwar verhalten sich die Radien der Grundflächen dieser Kegel zu einander wie  $A : (C - A)$ . Die Linie  $Ox'$  braucht dagegen nach dem Obigen die Zeit von einem Sterntage, bis sie, nachdem sie von  $ON$  aus- und einmal durch die Ebene  $xOy$  hindurch gegangen ist, die feste Ekliptik wieder erreicht.

Könnte die Erde ihre drehende Eigenbewegung ungestört vollziehen, so würde sich dem Erdbewohner, wenn die Constante  $\varepsilon$  nicht  $= 0$  ist, folgende Erscheinung darbieten. Falls die feste Linie  $OM$  einen Fixstern trüge, würde dieser an der täglichen scheinbaren Drehung des Himmels gewölbes keinen Anteil haben, sondern um ihn würden sich sämtliche Weltkörper zu drehen scheinen, wobei die von der instantanen Drehungsachse (die sich noch etwas schneller in der Richtung der täglichen Drehung um  $OM$  bewegt) getroffenen Sterne momentan in Ruhe blieben. Es liegt nahe, die Linie  $OM$  als Weltachse, auf welcher der Himmelsäquator senkrecht stehe, anzunehmen, wie es Nyren in seiner schönen Abhandlung über die „Bestimmung der Rotation der Erdachse“, St. Petersburg 1872, thut. Alsdann ist allerdings, da  $OM$  in etwa 305 Tagen einen Kegelmantel um  $Oz'$  zu beschreiben scheint, für jeden Ort auf der Erdoberfläche die Polhöhe wie die Meridianrichtung veränderlich; aber diese Veränderungen vollziehen sich langsam in der angegebenen Zahl von Tagen und sind demnach leicht in Rechnung zu ziehen, wenn man die Größen  $\varepsilon$  und  $n'$  genau kennt. Th. v. Oppolzer nimmt in seinem „Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten“, 2. Auflage, Leipzig 1882, die verlängerte instantane Drehungsachse der Erde als Weltachse an und läßt den Himmelsäquator auf dieser senkrecht stehen. Ob die praktische Astronomie hierauf eingehen kann, erscheint fraglich, da diese letztere Achse im Weltraume eine vollständige Drehung in einer Zeit vollzieht, die etwas kürzer ist, als ein Tag, und, wenn man die störenden Kräfte in Rechnung zieht, fast in derselben Zeit sich im Inneren der Erde um die Linie  $Oz'$  bewegt, sodaß die zur Ortsbestimmung der Gestirne erforderlichen Declinationen und Rectascensionen innerhalb eines Tages Veränderungen erleiden müßten, und ebenso die Polhöhen und Meridianrichtungen unserer Sternwarten. Die täglichen Veränderungen der Polhöhe, welche seiner Annahme entsprechen, giebt v. Oppolzer an, nicht jedoch die Veränderungen der Meridianrichtung, welche, sowie die hierdurch bedingten Correctionen der Durchgangszeiten der Gestirne durch die Mittagsebene bei Bestimmung ihrer Rectascensionen, in höheren Breiten recht erhebliche Werte erhalten würden.

Nimmt man dagegen mit Nyren die Linie  $OM$ , deren Lage nach dem Obigen im Systeme der  $(x', y', z')$  durch die Gleichungen:

$$\cos MOx' = \frac{A\varepsilon}{k} \cdot \sqrt{\frac{C-B}{A}} \sin(n't + \gamma); \quad \cos MOy' = -\frac{B\varepsilon}{k} \cdot \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cos(n't + \gamma); \quad \cos MOz' = \frac{Cr}{k}$$

bestimmt wird, als Weltachse an, so bedürfen wieder die meisten der von jenem Astronomen in der erwähnten Abhandlung angegebenen Werte der Nutation dieser Achse gewisser Correctionen, welche ich in dem Programm der hiesigen Lehranstalt vom Jahre 1882 entwickelt und zusammengestellt habe. Allerdings ist in dieser meiner Abhandlung angenommen worden, daß  $\varepsilon = 0$  sei, sodaß die geraden Linien OM und Oz' zusammenfallen; doch läßt sich leicht zeigen, daß beide Linien, auch wenn die Zahl  $\varepsilon$  von Null verschieden, aber so klein ist, daß man ihre Potenzen  $\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon^3$  u. s. w., ferner die Größe  $\frac{(B-A)}{B}$ , sowie die aus  $\varepsilon$  und Größen von der Ordnung der störenden Kräfte gebildeten Producte vernachlässigen darf, durch die Einwirkung des Mondes und der Sonne gleiche Nutationen erleiden (Siehe den Anhang). Ob die von Oppolzer nach seiner Theorie berechneten Werte der Nutation der instantanen Drehungsachse der Erde für die praktische Astronomie zur Bestimmung der Lage der Gestirne brauchbar sind, muß dem Urteil der Fachmänner überlassen bleiben.

Betrachtet man nun die Einwirkung des Mondes und der Sonne auf die Drehung der Erde, so hört  $\Theta_0$  auf, eine Constante zu sein, und auch  $g$  erhält einen neuen Wert, dessen von  $\varepsilon$  unabhängiger Teil veränderlich ist. Bezeichnen alsdann  $\mathcal{Q}$  und  $\mathcal{Q}'$  die Maßzahlen der Massen des Mondes und der Sonne,  $r$  und  $r'$  die Maßzahlen der Entfernungen ihrer Mittelpunkte vom Punkte O,  $f$  und  $f'$  diejenigen der Entfernungen jener Mittelpunkte von einem beliebigen Massenteilchen der Erde  $dm$ ,  $x_1, y_1, z_1$  die Coordinaten des Mondmittelpunktes im Systeme der  $(x', y', z')$ , dagegen  $x'_1, y'_1, z'_1$  die Coordinaten des Sonnenmittelpunktes,  $x', y', z'$ , wie früher, die Coordinaten des Schwerpunktes von  $dm$  in demselben Systeme, so sind in diesem die (durch das entsprechende Kraftmaß gemessenen) Componenten der von dem Monde auf das Massenteilchen  $dm$  ausgeübten Anziehung:  $\frac{\mathcal{Q}(x_1 - x')}{f^3} dm, \frac{\mathcal{Q}(y_1 - y')}{f^3} dm, \frac{\mathcal{Q}(z_1 - z')}{f^3} dm$ .

Für die Sonne ergeben sich ähnliche Ausdrücke.

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } f^{(-3)} &= \left\{ (x_1 - x')^2 + (y_1 - y')^2 + (z_1 - z')^2 \right\}^{(-\frac{3}{2})} \\ &= \frac{1}{r^3} + \frac{3(x, x' + y, y' + z, z')}{r^5} - \frac{3(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{2r^5}, \end{aligned}$$

wenn man die höheren Potenzen von  $\frac{1}{r}$  ihrer Kleinheit wegen vernachlässigt. Die auf der rechten Seite in den Gleichungen VIII vorkommenden Ausdrücke erhalten also, wenn zunächst nur der Einfluß des Mondes betrachtet und  $(x'^2 + y'^2 + z'^2) = d^2$  gesetzt wird, da  $Sx'dm = Sy'dm = Sz'dm = Sx'y'dm = Sx'z'dm = Sy'z'dm = 0$  ist, die folgenden Werte. Es ist

$$\begin{aligned} \text{XXII. } S(y'Z' - z'Y') dm &= \frac{\mathcal{Q}[y'(z_1 - z') - z'(y_1 - y')]}{f^3} dm \\ &= \frac{3\mathcal{Q}y_1z_1S(y'y' - z'z')}{r^5} dm - \frac{3\mathcal{Q}Sd^2(y'z_1 - z'y_1)}{2r^5} dm; \\ S(z'X' - x'Z') dm &= \frac{\mathcal{Q}[z'(x_1 - x') - x'(z_1 - x')]}{f^3} dm = \\ &= \frac{3\mathcal{Q}x_1z_1S(z'z' - x'x')}{r^5} dm - \frac{3\mathcal{Q}Sd^2(z'x_1 - x'z_1)}{2r^5} dm; \end{aligned}$$

$$S(x'Y' - y'Z') dm = \frac{\mathcal{L}[x'(y_1 - y') - y'(x_1 - x')]}{f^3} dm = \\ \frac{3\mathcal{L}x_1y_1S(x'x' - y'y') dm}{r^5} - \frac{3\mathcal{L}Sd^2(x'y_1 - y'z_1) dm}{2r^5},$$

wobei zu beachten, daß nach dem Obigen  $S(y'y' - z'z') dm = (C - B)$ ,  $S(z'z' - x'x') dm = (A - C)$ ,  $S(x'x' - y'y') dm = (B - A)$  ist. Bezeichnet man sodann den concaven Winkel, welchen die Linie, deren Maßzahl  $r$  ist, mit  $Oz'$  bildet, durch  $(90^\circ - \delta)$ , wo  $\delta$  dem Gebrauche nach negativ zu nehmen ist, wenn  $(90^\circ - \delta)$  einen stumpfen Winkel darstellt, ferner den Winkel, welchen die Projection jener Linie auf der Ebene  $x'Oy'$  mit der Linie  $ON$  bildet, durch  $\alpha^*$ , welcher Winkel von  $ON$  an in der Drehungsrichtung der Erde von 0 bis  $360^\circ$  gezählt werden soll, so ist nach dem Obigen:

$$x_1 = r \cos \delta \cdot \cos(\alpha - \varphi); \quad y_1 = r \cos \delta \sin(\alpha - \varphi); \quad z_1 = r \sin \delta,$$

und für die Sonne findet man die in derselben Weise gebildeten Gleichungen:

$$x_1' = r' \cos \delta' \cdot \cos(\alpha' - \varphi); \quad y_1' = r' \cos \delta' \sin(\alpha' - \varphi); \quad z_1' = r' \sin \delta'.$$

Berücksichtigt man zunächst die Einwirkung des Mondes als die bedeutendere allein, so ist

$$\text{XXIII. } S(y'Z' - z'Y') dm = \frac{3\mathcal{L}(C - B)}{r^3} \sin \delta \cos \delta \sin(\alpha - \varphi) - \frac{3\mathcal{L}}{2r^4} \cdot S[d^2y' \sin \delta - d^2z' \cos \delta \sin(\alpha - \varphi)] dm,$$

$$S(z'X' - x'Z') dm = \frac{3\mathcal{L}(A - C)}{r^3} \sin \delta \cos \delta \cos(\alpha - \varphi) - \frac{3\mathcal{L}}{2r^4} \cdot S[d^2z' \cos \delta \cos(\alpha - \varphi) - d^2x' \sin \delta] dm,$$

Bezeichnet man ferner die der Zeit  $t$  entsprechende Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn in der festen Ekliptik, vom positiven Zweige der  $x$ -Achse an in der Richtung nach dem positiven Zweige der  $y$ -Achse von 0 bis  $360^\circ$  gezählt, durch  $\mathcal{O}$ , so ist  $(\mathcal{O} + \psi)$  der von  $ON$  und der Verbindungslinie jenes Knotens mit dem Punkte  $O$  gebildete Winkel. Nennen wir ferner  $v$  die Länge des Schwerpunktes des Mondes zur Zeit  $t$ , und zwar in der Mondbahn selbst von einem Punkte an gemeßt, welcher um den Bogen  $\mathcal{O}$  von jenem Knoten rückwärts liegt, und  $\beta$  den spizen Neigungswinkel der Mondbahn gegen die Ekliptik zu derselben Zeit, so erhält man nach unschwerer Rechnung durch die Formeln der Coordinatenverwandlung die Gleichungen:

$$\text{XXIV. } \cos \delta \cos \alpha = \cos(v - \mathcal{O}) \cos(\mathcal{O} + \psi) - \sin(v - \mathcal{O}) \sin(\mathcal{O} + \psi) \cos \beta;$$

$$\cos \delta \sin \alpha = \cos(v - \mathcal{O}) \sin(\mathcal{O} + \psi) \cos \theta + \sin(v - \mathcal{O}) \cos(\mathcal{O} + \psi) \cos \beta \cos \theta - \sin(v - \mathcal{O}) \sin \beta \sin \theta;$$

$$\sin \delta = \cos(v - \mathcal{O}) \sin(\mathcal{O} + \psi) \sin \theta + \sin(v - \mathcal{O}) \cos(\mathcal{O} + \psi) \cos \beta \sin \theta + \sin(v - \mathcal{O}) \sin \beta \cos \theta,$$

und hieraus ergeben sich die strenge richtigen Gleichungen:

$$\text{XXV. } \sin \delta \cos \delta \sin \alpha = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8} \sin^2 \beta\right) \sin 2\theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \sin 2\beta \cos(\mathcal{O} + \psi) - \frac{1}{8} \sin 2\theta \sin^2 \beta \cos 2(\mathcal{O} + \psi)$$

$$- \frac{1}{4} \sin 2\theta \cos \frac{4\beta}{2} \cos 2(v + \psi) - \frac{1}{4} \cos 2\theta \sin \beta \cos \frac{2\beta}{2} \cos(2v - \mathcal{O} + \psi)$$

$$+ \frac{3}{8} \sin 2\theta \sin^2 \beta \cos 2(v - \mathcal{O}) + \frac{1}{4} \cos 2\theta \sin \beta \sin \frac{2\beta}{2} \cos(2v - 3\mathcal{O} - \psi)$$

$$- \frac{1}{4} \sin 2\theta \sin \frac{4\beta}{2} \cos 2(v - 2\mathcal{O} - \psi);$$

$$\sin \delta \cos \delta \cos \alpha = -\frac{1}{4} \cos \theta \sin 2\beta \sin(\mathcal{O} + \psi) + \frac{1}{4} \sin \theta \sin^2 \beta \sin 2(\mathcal{O} + \psi)$$

$$+ \frac{1}{2} \sin \theta \cos \frac{4\beta}{2} \sin 2(v + \psi) + \frac{1}{4} \cos \theta \sin \beta \cos \frac{2\beta}{2} \sin(2v - \mathcal{O} + \psi)$$

$$+ \frac{1}{4} \cos \theta \sin \beta \sin \frac{2\beta}{2} \sin(2v - 3\mathcal{O} - \psi) - \frac{1}{4} \sin \theta \sin \frac{4\beta}{2} \sin 2(v - 2\mathcal{O} - \psi).$$

Ähnliche Ausdrücke erhält man für  $\sin \delta' \cos \delta' \sin \alpha'$  und  $\sin \delta' \cos \delta' \cos \alpha'$ .

\*) Die hier und im folgenden auftretenden Winkel  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$  sind von den auf Seite 5 durch  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$  bezeichneten Winkeln wohl zu unterscheiden.



Da ferner  $\sin(\alpha - \varphi) = (\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi)$ ,  $\cos(\alpha - \varphi) = (\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi)$ , so stellen sich, wenn man die hier entwickelten Werte in die Gleichungen XXII einsetzt, die Größen  $\frac{1}{r^3}$  und  $\frac{1}{r^4}$  sowie den Winkel  $v$  als Funktionen der Zeit und der Bahnelemente des Mondes ausdrückt, die von der Anziehung der Sonne abhängigen Glieder in gleicher Weise behandelt, den Winkeln  $\theta$ ,  $\phi$  und  $\varphi$  die in den Gleichungen XVII und XVIII entwickelten Werte giebt, ferner nur die ersten Potenzen von  $\varepsilon$  sowie von den Maßzahlen der störenden Kräfte in Rechnung zieht (wie es im Folgenden immer geschehen soll, wenn nicht ausdrücklich anderes bemerkt wird), die Größen auf der rechten Seite der Gleichungen XXIII als Summen dar, deren einzelne Glieder die Form haben:  $u_i \cos(it + \lambda_i)$  oder  $w_i \sin(it + \lambda_i)$ , wo  $i$ ,  $u_i$ ,  $w_i$ ,  $\lambda_i$  von der Zeit unabhängige Zahlen bedeuten, z. B.  $= 0$  sind. Dies gilt auch dann noch, wenn die säcularen Störungen der fortschreitenden Bewegung der Erde und des Mondes in Rechnung gezogen werden.\*) Die Gleichungen VIII nehmen also unter diesen Voraussetzungen folgende Form an:

$$\text{XXVI. } \frac{dp}{dt} + \frac{(C-A)}{A} nq = \frac{1}{A} \cdot S(y'Z' - z'Y') dm = \frac{1}{A} \cdot \Sigma [u_i \cos(it + \lambda_i) + w_i \sin(it + \lambda_i)];$$

$$\frac{dq}{dt} - \frac{(C-A)}{B} np = \frac{1}{B} \cdot S(z'X' - x'Z') dm = \frac{1}{B} \cdot \Sigma [u'_i \cos(it + \lambda_i) + w'_i \sin(it + \lambda_i)],$$

wo auch  $u'_i$  und  $w'_i$  von der Zeit unabhängige Größen bezeichnen. Die Summationen erstrecken sich auf die sämtlichen Werte von  $i$ .

Für diejenigen Werte von  $i$ , welche von  $n' = n \cdot \sqrt{\frac{C-B}{A}} \cdot \sqrt{\frac{C-A}{B}}$  erheblich verschieden sind, erhält man hiernach für die entsprechenden Teilwerte von  $p$  und  $q$  die folgenden Ausdrücke:

$$\text{XXVII. } p = \Sigma \left\{ \frac{1}{(i^2 - n'^2)} \cdot \left[ \left( \frac{(C-B)}{AB} \cdot n u'_i - \frac{i w_i}{A} \right) \cos(it + \lambda_i) + \left( \frac{(C-B)}{AB} \cdot n w'_i + \frac{i u_i}{A} \right) \sin(it + \lambda_i) \right] \right\};$$

$$q = - \Sigma \left\{ \frac{1}{(i^2 - n'^2)} \cdot \left[ \left( \frac{(C-A)}{AB} \cdot n u_i + \frac{i w'_i}{B} \right) \cos(it + \lambda_i) + \left( \frac{(C-A)}{AB} \cdot n w_i - \frac{i u'_i}{B} \right) \sin(it + \lambda_i) \right] \right\}.$$

Ist dagegen  $i = n'$  oder wenig von  $n'$  verschieden, so kann man in dieser Weise die zugehörigen Teilwerte von  $p$  und  $q$  entweder überhaupt nicht, oder doch nicht genau genug bestimmen, und man muß dieselben wieder durch Variation der bisherigen Constanten  $\varepsilon$  und  $\gamma$  zu finden suchen.

Handelt es sich nun hier um diejenigen Glieder in der Entwicklung von  $\frac{S(y'Z' - z'Y')}{A} dm$  und  $\frac{S(z'X' - x'Z')}{B} dm$ , welche die Factoren  $\sin(n't + \gamma)$  und  $\cos(n't + \gamma)$  enthalten, so ist zu bemerken, daß bei Vernachlässigung der zweiten und der höheren Potenzen von  $\varepsilon$  in dem ersteren Ausdruck die mit  $\sin(n't + \gamma)$ , in dem letzteren die mit  $\cos(n't + \gamma)$  multiplicierten Glieder verschwinden. Man erhält z. B. bei der Entwicklung von  $\frac{S(y'Z' - z'Y')}{A} dm$  u. a. folgende Glieder:

$$\frac{3Q(C-B)}{4r^3A} \left\{ \cos \theta \sin 2\beta \sin(\oslash + \phi) \sin \varphi + \cos 2\theta \sin 2\beta \cos(\oslash + \phi) \cos \varphi \right\}$$

$$+ \frac{3Q}{2r^4A} S \delta^2 z' dm \left\{ \sin(v - \oslash) \sin(\oslash + \phi) \cos \beta \sin \varphi + \sin(v - \oslash) \cos(\oslash + \phi) \cos \beta \cos \theta \cos \varphi \right\}.$$

\*) Bei der Berechnung der Präcession der Gestirne und der Schiefe der Ekliptik drückt man gewöhnlich die Glieder, in welchen  $i$  sehr kleine, schwer zu bestimmende Werte hat als Summe von der Form  $(a + b t + c t^2 \dots)$  aus, doch erhält man hierdurch nur Näherungswerte der zu berechnenden Größen, welche hier nicht in Betracht zu ziehen sind.

Nach Einführung der durch die Gleichungen XVII und XVIII bestimmten Werte von  $\Theta$ ,  $\phi$ ,  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  ergeben sich hieraus die folgenden den Factor  $\sin(n't + \gamma)$  enthaltenden Producte, in denen man, da sie mit  $\varepsilon$  multipliciert sind,  $\Theta$  statt  $\Theta_0$  und  $\phi$  statt  $g$  schreiben kann, wobei nur Größen von der Ordnung  $\varepsilon^2$  vernachlässigt werden:

$$\frac{3Q(C-B)}{4r^3A} \cdot \left\{ \frac{-\cos \Theta^2 + \sin \Theta^2 + \cos 2\Theta}{\sin \Theta} \right\} \cdot \sin 2\beta \sin(\varnothing + \psi) \cdot \left\{ \frac{\mu}{2(n+n')} - \frac{\nu}{2(n-n')} \right\} \sin(n't + \gamma) = 0,$$

$$+ \frac{3Q}{2r^4A} \cdot S d^2 z' dm \cdot \left\{ -\frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} + \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} \right\} \cdot \sin(v - \varnothing) \sin(\varnothing + \psi) \cos \beta \cdot \left\{ \frac{\mu}{2(n+n')} - \frac{\nu}{2(n-n')} \right\} \sin(n't + \gamma) = 0.$$

Ein gleiches Resultat ergibt die Berechnung der übrigen in  $\frac{S(y'Z' - z'Y') dm}{A}$  enthaltenen mit  $\sin(n't + \gamma)$  multiplicierten Glieder, wie eine leichte Rechnung zeigt. Prüft man ferner des Beispiels halber die folgenden bei der Entwicklung von  $\frac{S(z'X' - x'Z') dm}{B}$  vorkommenden Ausdrücke:

$$\frac{3Q(A-C)}{2r^3B} \left\{ \sin \Theta \cos \frac{4\beta}{2} \sin 2(v + \psi) \cos \varphi - \sin 2\Theta \cos \frac{4\beta}{2} \cos 2(v + \psi) \sin \varphi \right\}$$

$$- \frac{3Q}{2r^4B} \cdot S d^2 z' dm \cdot \left\{ \cos(v - \varnothing) \cos(\varnothing + \psi) \cos \varphi + \cos(v - \varnothing) \sin(\varnothing + \psi) \cos \Theta \sin \varphi \right\},$$

so ergeben diese die folgenden den Factor  $\cos(n't + \gamma)$  enthaltenden Producte:

$$\frac{3Q(A-C)}{2r^3B} \left\{ \cos \Theta + \cos \Theta - 2 \cos \Theta \right\} \cos \frac{4\beta}{2} \sin 2(v + \psi) \cdot \left\{ \frac{\mu}{2(n+n')} + \frac{\nu}{2(n-n')} \right\} \cos(n't + \gamma) = 0,$$

$$- \frac{3Q}{2r^4B} \cdot S d^2 z' dm \cdot \left\{ \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} - \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} \right\} \cos(v - \varnothing) \cdot \cos(\varnothing + \psi) \cdot \left\{ \frac{\mu}{2(n+n')} + \frac{\nu}{2(n-n')} \right\} \cos(n't + \gamma) = 0,$$

und die übrigen in  $S(z'X' - x'Z') dm$  enthaltenen Glieder liefern, soweit sie mit  $\cos(n't + \gamma)$  multipliciert sind, dasselbe Resultat. Demgemäß sind in der Entwicklung von  $\frac{S(y'Z' - z'Y') dm}{A}$  nur die mit  $\cos(n't + \gamma)$  multiplicierten Glieder in Betracht zu ziehen, in der Entwicklung von  $\frac{S(z'X' - x'Z') dm}{B}$  die mit  $\sin(n't + \gamma)$  multiplicierten; in beiden Ausdrücken kann man hier ferner

diejenigen Glieder vernachlässigen, welche den Winkel  $v$  enthalten, da diese schon in der Gleichung XXVII Berücksichtigung gefunden haben\*). Es handelt sich hier also nur noch um die Integration folgender Differentialgleichungen, wenn zunächst nur die den Mond betreffenden Glieder in Betracht gezogen werden:

$$\text{XXVIII.}$$

$$\frac{dp}{dt} + \frac{(C-B)}{A} nq = \frac{3Q(C-B)}{Ar^3} \cdot \left\{ \frac{\mu}{(n+n')} + \frac{\nu}{(n-n')} \right\} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left( (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta) (\cos^2 \Theta + \cos 2\Theta) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sin 2\beta \cos(\varnothing + \psi) \cdot (\cos 2\Theta \operatorname{ctg} \Theta - 2 \sin 2\Theta - \operatorname{ctg} \Theta) \right) \cos(n't + \gamma), \\ & \left. - \frac{1}{2} \sin^2 \beta \cos 2(\varnothing + \psi) (\cos^2 \Theta + \cos 2\Theta - 2) \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{dq}{dt} - \frac{(C-A)}{B} np = \frac{3Q(C-A)}{Br^3} \cdot \left\{ \frac{\mu}{(n+n')} - \frac{\nu}{(n-n')} \right\} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left( (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta) (\cos^2 \Theta + \cos 2\Theta) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sin 2\beta \cos(\varnothing + \psi) \cdot (\cos 2\Theta \operatorname{ctg} \Theta - 2 \sin 2\Theta - \operatorname{ctg} \Theta) \right) \sin(n't + \gamma), \\ & \left. - \frac{1}{2} \sin^2 \beta \cos 2(\varnothing + \psi) (\cos^2 \Theta + \cos 2\Theta - 2) \right\} \end{aligned} \right\}$$

\*) Zieht man diese sowie die sonstigen  $\varepsilon$  als Factor enthaltenden Glieder erst bei der folgenden Rechnung in Betracht, so wird diese ein wenig genauer, ohne daß das Schlussergebnis erheblich geändert wird. Bemerkt mag werden, daß man bei Entwicklung der Größen  $v$  und  $v'$  sowie der Potenzen von  $\frac{1}{r}$  und  $\frac{1}{r'}$  als Functionen der Zeit  $t$  keine Glieder erhält, welche  $\cos(2n't + \gamma_1)$  oder  $\sin(2n't + \gamma_1)$  als Factoren enthalten, noch Functionen von der Form  $\cos(it + \gamma_1)$  oder  $\sin(it + \gamma_1)$ , in denen  $i$  von  $2n'$  nur wenig verschieden wäre,  $\gamma_1 = \gamma$  oder von  $\gamma$  verschieden. Dasselbe gilt von den sich langsam verändernden Winkeln  $\beta$  und  $\beta'$ ,  $\varnothing$  und  $\varnothing'$ .

Ähnliche Glieder sind infolge der Sonnenanziehung der rechten Seite jeder von beiden Gleichungen hinzuzufügen. Um diese zu integrieren, muß man beim Differenzieren der Ausdrücke  $p = \varepsilon \sqrt{\frac{C-B}{A}} \sin(n't + \gamma)$  und  $q = -\varepsilon \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cos(n't + \gamma)$  die Zahlen  $\varepsilon$  und  $\gamma$  wieder als veränderliche Größen betrachten.

Da ferner  $(\cos^2 \Theta + \cos 2\Theta) = (3 \cos^2 \Theta - 1)$ ,  $(\cos^2 \Theta + \cos 2\Theta - 2) = -3 \sin^2 \Theta$ ,  $(\cos 2\Theta \operatorname{ctg} \Theta - 2 \sin 2\Theta - \operatorname{ctg} \Theta) = -3 \sin 2\Theta$ ,

$$\left\{ \frac{p}{(n+n')} + \frac{q}{(n-n')} \right\} = \varepsilon \cdot \frac{n}{(n^2-n'^2)} \cdot \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cdot \frac{(A+B-C)}{A},$$

$$\left\{ \frac{p}{(n+n')} - \frac{q}{(n-n')} \right\} = \varepsilon \cdot \frac{n}{(n^2-n'^2)} \cdot \sqrt{\frac{C-B}{A}} \cdot \frac{(A+B-C)}{B} \text{ ist, so erhalten}$$

die Gleichungen XXVIII infolge der Variation der Constanten die folgende Form:

$$\begin{aligned} \text{XXIX. } \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot \sqrt{\frac{C-B}{A}} \cdot \sin(n't + \gamma) + \varepsilon \cdot \frac{d\gamma}{dt} \cdot \sqrt{\frac{C-B}{A}} \cdot \cos(n't + \gamma) = \\ \frac{3\varepsilon \mathcal{Q}(C-B)}{Ar^3} \cdot \frac{n}{(n^2-n'^2)} \cdot \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cdot \frac{(A+B-C)}{A} \cdot \left\{ \begin{aligned} &(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \beta) \cdot (3 \cos^2 \Theta - 1) \\ &- \frac{3}{2} \sin 2\beta \cos(\mathcal{O} + \psi) \sin 2\Theta \\ &+ \frac{3}{2} \sin^2 \beta \cos 2(\mathcal{O} + \psi) \sin^2 \Theta \end{aligned} \right\} \cos(n't + \gamma), \\ - \frac{d\varepsilon}{dt} \sqrt{\frac{C-A}{B}} \cos(n't + \gamma) + \varepsilon \cdot \frac{d\gamma}{dt} \sqrt{\frac{C-A}{B}} \sin(n't + \gamma) = \\ \frac{3\varepsilon \mathcal{Q}(C-A)}{Br^3} \cdot \frac{n}{(n^2-n'^2)} \cdot \sqrt{\frac{C-B}{A}} \cdot \frac{(A+B-C)}{B} \cdot \left\{ \begin{aligned} &(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \beta) \cdot (3 \cos^2 \Theta - 1) \\ &- \frac{3}{2} \sin 2\beta \cos(\mathcal{O} + \psi) \sin 2\Theta \\ &+ \frac{3}{2} \sin^2 \beta \cos 2(\mathcal{O} + \psi) \sin^2 \Theta \end{aligned} \right\} \sin(n't + \gamma). \end{aligned}$$

Auch hier treten auf der rechten Seite jeder Gleichung ähnliche Glieder, welche der Sonnenanziehung entsprechen, hinzu.

Ist  $A = B$ , wie man bisher bei der Bestimmung der Präcession und Nutation meistens angenommen hat, so erhält sofort, daß  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$  ist. Berücksichtigt man die uns freilich unbekannte Differenz  $(B-A)^*$ , so stellt sich, wenn man die Größen  $\frac{1}{r^3}$ ,  $\frac{1}{r'^3}$ ,  $\sin^2 \beta$ ,  $\sin^2 \beta'$ ,  $\sin 2\beta \cos(\mathcal{O} + \psi)$ ,  $\sin 2\beta' \cos(\mathcal{O}' + \psi)$ ,  $\sin^2 \beta \cos 2(\mathcal{O} + \psi)$ ,  $\sin^2 \beta' \cos 2(\mathcal{O}' + \psi)$ ,  $\sin \Theta$  etc. als Functionen der Zeit  $t$  entwickelt, das Differential  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  als eine Größe von der Form  $\Sigma(a \cos i t + b \sin i t) \cdot \sin 2(n't + \gamma) \cdot dt$  dar, wo  $a$ ,  $b$ ,  $i$  von der Zeit unabhängige Größen bezeichnen, und  $i$  von  $2n'$  verschieden ist; die Summation erstreckt sich auf alle Werte von  $i$ .

Selbst wenn man die säcularen Veränderungen der Excentricitäten der Erdbahn wie der Mondbahn und demnach Größen von der zweiten Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte in Rechnung zieht, wird man zu diesem Resultate gelangen. Da die Größen  $a$  und  $b$  nach dem Obigen als Producte von Factoren von der Ordnung der störenden Kräfte, die noch mit  $\frac{n' \cdot (B-A)}{A}$  multipliciert sind, nur sehr kleine Werte haben können, so ergibt sich durch Integration der aus XXIX folgenden Gleichung:

\*) Es ist alsdann, wie eine leichte Rechnung ergibt:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{3 \mathcal{Q}}{2r^3} \cdot \frac{n'(B-A)}{(n^2-n'^2)} \cdot \frac{(A+B-C)}{AB} \cdot \sin 2(n't + \gamma) \cdot \left\{ \begin{aligned} &(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \beta) \cdot (3 \cos^2 \Theta - 1) \\ &- \frac{3}{2} \sin 2\beta \cos(\mathcal{O} + \psi) \sin 2\Theta \\ &+ \frac{3}{2} \sin^2 \beta \cos 2(\mathcal{O} + \psi) \sin^2 \Theta \end{aligned} \right\}.$$



$$\text{XXX. } \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \Sigma (a \cos it + b \sin it) \cdot \sin 2(n't + \gamma) dt,$$

daß der Wert von  $\varepsilon$  nur kleine, und zwar periodische Veränderungen erleiden kann, von denen die bedeutendste innerhalb eines Zeitraumes von etwa 152 mittleren Sonnentagen nach einander ihre sämtlichen verschiedenen Werte erhält. Auch diese sind so klein, daß sie bisher durch die Beobachtungen nicht nachgewiesen werden konnten.

Durch Auflösung der Gleichungen XXIX erhält man ferner für  $\frac{d\gamma}{dt}$  den Ausdruck:

$$\text{XXXI. } \frac{d\gamma}{dt} = \frac{3\mathcal{E}}{2r^3} \cdot \frac{n'}{(n^2 - n'^2)} \cdot \frac{(A+B-C)}{AB} \cdot \left\{ (A+B) + (B-A) \cos 2(n't + \gamma) \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (1 - \frac{1}{3} \sin^2 \beta) (3 \cos^2 \theta - 1) \\ - \frac{1}{3} \sin^2 \beta \cos (\delta + \psi) \sin 2\theta \\ + \frac{1}{3} \sin^2 \beta \cos^2 (\delta + \psi) \sin 2\theta \end{array} \right\}.$$

Auch hier sind noch auf der rechten Seite der Gleichung die von der Anziehung der Sonne abhängenden Glieder zu addieren. Der Winkel  $\gamma$  erhält also ein kleines Increment von der Form  $(ct + d)$ , wo  $c$  eine von  $t$  unabhängige positive Zahl,  $d$  eine Summe sehr kleiner periodischer veränderlicher Größen bezeichnet, von denen die bedeutendste gleichfalls nach ungefähr 152 mittleren Sonnentagen ihre früheren Werte wieder erhält.

Zieht man endlich die Änderungen in Betracht, welche die Größe  $r$  durch die außerirdischen störenden Kräfte gemäß der dritten der Gleichungen VIII erleidet, und setzt man demnach  $r = (n + w_1)$ , so daß also in den Gleichungen XI und XIII  $(-w_1)$  an die Stelle von  $z$  tritt, so überzeugt man sich leicht durch Auflösung der letzteren, daß auch jetzt wieder  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$  ist, so daß also der Wert von  $\varepsilon$  unverändert bleibt, während  $\gamma$  kleinen Veränderungen unterliegt, welche, entsprechend dem Werte von  $S(x'Y' - y'X')dm$ , nach XXII, wenn man nur die erste Potenz von  $\varepsilon$  in Rechnung zieht, lediglich periodische Glieder enthalten, bei denen die Dauer der Periode etwas weniger als einen halben, bzw. einen ganzen mittleren Sonnentag beträgt.

Als Resultat der Gleichungen XXVII, XXX, XXXI ergibt sich also, daß infolge der von Sonne und Mond auf die Erdmasse geübten Anziehung die Größen  $p$  und  $q$  zwar periodische Veränderungen erleiden, aus denen sich die Größe der Rückweichung der Äquinocialpunkte und der Nutation der  $z'$ -Achse wie auch der Linie OM leicht ableiten läßt, daß aber der Wert der kleinen Größe  $\varepsilon$  nur unerhebliche, nicht der Zeit  $t$  proportionale, sondern lediglich periodische Veränderungen erleidet, vorausgesetzt, daß der von den störenden Kräften unabhängige Wert von  $\varepsilon$  so klein ist, daß man die zweite sowie die höheren Potenzen desselben, multipliziert mit Größen von der Ordnung der störenden Kräfte, vernachlässigen darf. Die durch die Anziehung des Mondes und der Sonne verursachten Änderungen des Winkels  $\gamma$  haben eine geringe Verkürzung und periodische Veränderungen der Umlaufzeit der augenblicklichen Drehungsachse sowie der kleinsten Trägheitsachse des Erdkörpers um die oben durch OM bezeichnete gerade Linie zur Folge.

Die bisherigen Untersuchungen beruhten auf einer der Wirklichkeit nicht entsprechenden Annahme, daß nämlich die Erde einen völlig starren Körper bilde; im Folgenden soll untersucht werden, in welcher Weise gegenseitige Verschiebungen ihrer Massenteile Einfluß auf die Lage und die Bewegungen ihrer Drehungsachse ausüben können. Sehen wir ab von den im Inneren der Erde vorkommenden Flüssigkeiten, über welche wir zu wenig wissen, betrachten wir also nach wie vor den festen Erdkern als eine starre Masse, so haben wir hier die in dem Wasser- und dem Luft-Oceane stattfindenden Bewegungen ins Auge zu fassen. Treten Schwankungen des Erdkernes

um O, den Schwerpunkt der gesamten Erdmasse, ein, so werden diese Bewegungen im Meere wie in der Atmosphäre hervorrufen, welche Flüssigkeiten nach hydrostatischen Gesetzen sich im Zustande des Gleichgewichtes zu erhalten und Störungen desselben auszugleichen suchen. Da diese Wiederherstellung des gestörten Gleichgewichtes sich verhältnismäßig schnell vollzieht, während jene an sich sehr unbedeutenden Schwankungen, welche wir hier zu berücksichtigen haben, nur langsam vor sich gehen, so wird die Annahme, welche man sich in der Theorie der Ebbe und Flut gestattet, auch hier nicht unzulässig sein, daß nämlich das Meer wie die Atmosphäre bei den durch diese Schwankungen des Erdkernes hervorgerufenen Bewegungen im Zustande des Gleichgewichtes verharre. Ob nun diese Bewegungen der Luft und des Wassers, wenigstens in gewissen Fällen, die Größe und Dauer der Schwankungen des Erdkernes zu ändern vermögen, bilde den Gegenstand der folgenden Untersuchung.

Wir legen derselben wieder ein festes\*) rechtwinkliges Coordinatensystem der  $(x, y, z)$  mit dem Anfang O, dem Schwerpunkte der gesamten Erdmasse, zu Grunde und behalten uns vor, die Lage seiner Achsen später zu bestimmen. Durch O als Anfang denken wir uns ferner ein zweites rechtwinkliges Coordinatensystem der  $(x', y', z')$  gelegt, in welchem jede Achse einer der drei freien oder Principal-Achsen des festen Erdkernes parallel sei, oder mit ihr zusammenfalle, — und zwar sei die Achse der  $z'$  derjenigen Principalachse parallel, welcher das größte Trägheitsmoment des Erdkernes entspreche; ihr positiver Zweig bilde mit dem positiven Zweige der  $z$ -Achse einen spitzen Winkel. Es gelten nun wieder die auf die Bewegung der gesamten Erdmasse um ihren Schwerpunkt O bezüglichen Gleichungen I und II, und behält man für die Cosinüsse der von den positiven Zweigen der Achsen beider Systeme gebildeten concaven Winkel die früher gewählten Bezeichnungen bei, wie auch die Symbole  $p, q, r$  ihre frühere Bedeutung behalten mögen, so gelten auch nach wie vor die Gleichungen III bis VI; die erste der Gleichungen II nimmt jedoch, da jetzt die Größen  $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}, Sx'y'dm, Sx'z'dm, Sy'z'dm$  nicht mehr einzeln der Null gleich gesetzt werden dürfen, die folgende Form an:

$$\begin{aligned} Co' + \int M'dt &= S(a'x' + b'y' + c'z') \left( x \frac{da''}{dt} + y \frac{db''}{dt} + z \frac{dc''}{dt} + a'' \frac{dx'}{dt} + b'' \frac{dy'}{dt} + c'' \frac{dz'}{dt} \right) dm \\ &\quad - S(a''x' + b''y' + c''z') \left( x' \frac{da'}{dt} + y' \frac{db'}{dt} + z' \frac{dc'}{dt} + a' \frac{dx'}{dt} + b' \frac{dy'}{dt} + c' \frac{dz'}{dt} \right) dm \\ &= \left( a' \frac{da''}{dt} - a'' \frac{da'}{dt} \right) Sx'^2 dm + \left( b' \frac{db''}{dt} - b'' \frac{db'}{dt} \right) Sy'^2 dm + \left( c' \frac{dc''}{dt} - c'' \frac{dc'}{dt} \right) Sz'^2 dm \\ &\quad + \left( a' \frac{db''}{dt} + b' \frac{da''}{dt} - a'' \frac{db'}{dt} - b'' \frac{da'}{dt} \right) Sx'y' dm + \left( a' \frac{dc''}{dt} + c' \frac{da''}{dt} - a'' \frac{dc'}{dt} - c'' \frac{da'}{dt} \right) Sx'z' dm \\ &\quad + \left( b' \frac{dc''}{dt} + c' \frac{db''}{dt} - b'' \frac{dc'}{dt} - c'' \frac{db'}{dt} \right) Sy'z' dm + (a'b'' - a''b') S \left( x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) dm \\ &\quad + (a''c' - a'c'') S \left( z' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dz'}{dt} \right) dm + (b'c'' - b''c') S \left( y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right) dm. \end{aligned}$$

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit  $K = (\pm 1)$ , so ist zu beachten, daß nach V  $K(a'b'' - a''b') = c$ ;  $K(a''c' - a'c'') = b$ ;  $K(b'c'' - b''c') = c$ , ferner nach den aus den Gleichungen VI abgeleiteten Umformungen

\*) Auch hier ist das Wort „fest“ in dem auf Seite 1 erläuterten Sinne zu verstehen.

$$K \left( a' \frac{da''}{dt} - a'' \frac{da'}{dt} \right) = (bq + cr); \quad K \left( b' \frac{db''}{dt} - b'' \frac{db'}{dt} \right) = (ap + cr); \quad K \left( c' \frac{dc''}{dt} - c'' \frac{dc'}{dt} \right) = (ap + bq)$$

zu setzen ist, welche Gleichungen bereits oben gebraucht worden sind. Endlich ist, weil

$$\left( a \frac{da}{dt} + a' \frac{da'}{dt} + a'' \frac{da''}{dt} \right) = \left( b \frac{db}{dt} + b' \frac{db'}{dt} + b'' \frac{db''}{dt} \right) = 0,$$

nach IV, V und VI:

$$\begin{aligned} K(a'db'' + b'da'' - a''db' - b''da') &= a'a'dc + a'cda' - a'adc' - a'c'da + b'bdc' + b'e'db \\ &- b'b'dc - b'edb' - a''adc'' - a''c'da + a''a'dc + a''cda'' - b''b'dc - b''edb'' + b''bdc'' \\ &+ b''e'db = -aadc + bbdc - bedb + aeda + a'eda' + a''cda'' - b'edb' - b''edb'' - aa'dc' \\ &- aa''dc'' + bb'dc' + bb''dc'' = -(aq + bp) dt; \end{aligned}$$

und ebenso ergibt sich

$$K(a'dc + c'da'' - a''dc' - c'da') = -(ar + cp) dt;$$

$$K(b'dc'' + c'db'' - b''dc' - c'db') = -(br + eq) dt.$$

Demnach kann man der ersten der Gleichungen II auch den folgenden Ausdruck geben:

$$\begin{aligned} KC'o + K \int M dt' &= (bq + cr) Sx'^2 dm + (ap + cr) Sy'^2 dm + (ap + bq) Sz'^2 dm \\ &- (aq + bq) Sx'y' dm - (ar + cp) Sx'z' dm - (br + ep) Sy'z' dm \\ &+ cS \left( x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) dm + bS \left( z' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dz'}{dt} \right) dm + aS \left( y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right) dm. \end{aligned}$$

Bedienen wir uns der oben gebrauchten Abkürzungen  $S(x'^2 + y'^2) dm = C$ ;  $S(x'^2 + y'^2) dm = B$ ;  $S(y'^2 + z'^2) dm = A$ , wo A, B und C jetzt veränderliche Größen darstellen, und setzen wir  $Sy'z' dm = F$ ;  $Sx'z' dm = G$ ;  $Sx'y' dm = H$ , so lautet jene Gleichung:

$$\begin{aligned} KCo' + K \int M dt' &= a \left[ Ap - Gr - Hq + S \left( y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right) dm \right] \\ &+ b \left[ Bq - Fr - Hp + S \left( z' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dz'}{dt} \right) dm \right] + c \left[ Cr - Gn - Fq + S \left( x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) dm \right]. \end{aligned}$$

Ähnliche Transformationen sind für die beiden anderen zu II gehörigen Gleichungen zulässig. Setzt man endlich:

$$P = \left[ Ap - Gr - Hq + S \left( y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right) dm \right],$$

$$Q = \left[ Bq - Fr - Hp + S \left( z' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dz'}{dt} \right) dm \right],$$

$$R = \left[ Cr - Gn - Fq + S \left( x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) dm \right],$$

so lauten die Gleichungen II jetzt:

$$\text{XXXII. } aP + bQ + cR = KCo' + K \int M' dt;$$

$$a'P + b'Q + c'R = KCo'' + K \int M'' dt;$$

$$a''P + b''Q + c''R = KCo''' + K \int M''' dt.$$

Aus diesen erhält man durch Differenzierung statt der früheren Gleichungen VIII die folgenden:

$$\text{XXXIII. } \frac{dP}{dt} - rQ + qR = S(y'Z' - z'Y') dm;$$

$$\frac{dQ}{dt} + rP - pR = S(z'X' - x'Z') dm;$$

$$\frac{dR}{dt} - qP + pQ = S(x'Y' - y'X') dm.$$



Da wir darauf verzichten müssen, eine vollständige Auflösung der vorliegenden Aufgabe zu geben, und nur einzelne besondere Fälle derselben in Betracht ziehen wollen, so mag zunächst die Einwirkung der außerirdischen Kräfte unbeachtet bleiben. Alsdann ergibt sich aus den Gleichungen XXXII die folgende:  $(P^2 + Q^2 + R^2) = (Co'^2 + Co''^2 + Co'''^2) = k^2$ , wo also  $k$  ähnlich wie früher einen constanten Wert hat, den wir positiv annehmen. Man kann demnach die Lage einer im Raume von  $O$  ausgehenden geraden Linie  $OM$  durch folgende Gleichungen bestimmen:  $\cos MOz' = \frac{R}{k}$ ;  $\cos MOy' = \frac{Q}{k}$ ;  $\cos MOx' = \frac{P}{k}$ . Nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie ist alsdann  $k \cos MOz = K Co''$ ;  $k \cos MOy = K Co'$ ;  $k \cos MOx = K Co'$ . Die Linie  $OM$  hat also, wenn keine Einwirkung fremder Weltkörper auf die Teile der Erdmasse stattfindet, im Weltenraume eine feste Lage\*) (sie entspricht, wie sofort erhellt, der auch früher mit  $OM$  bezeichneten geraden Linie). Diese Linie diene von nun an als Achse der  $z$ ; ihr positiver Zweig sei nach der Nordseite des Weltenraumes gerichtet. Die positiven Zweige der festen Achsen der  $x$  und  $y$  mögen wieder eine solche Lage zu einander haben, daß die Drehung von  $(+Ox)$  nach  $(+Oy)$  in der Richtung der täglichen Rotation der Erde, also in der Richtung ihrer Revolution um die Sonne erfolge; dasselbe gelte von den positiven Zweigen der Achsen der  $x'$  und der  $y'$ .

Zur Vereinfachung der folgenden Betrachtung nehmen wir ferner an, daß der Erdkern kugelförmig und seine Masse symmetrisch zu den drei durch seine freien Achsen gelegten Ebenen, verteilt sei, jedoch so, daß ihre Dichtigkeit in der Nähe des auf der  $z'$ -Achse senkrechten Hauptkreises größer sei, als an den übrigen Stellen. Es kann alsdann, da das spezifische Gewicht des Erdkernes beträchtlich größer ist, als dasjenige des Meeres und der Luft, der Zustand des Gleichgewichtes in beiden Flüssigkeiten nach den von Laplace entwickelten Gesetzen nur dann erhalten bleiben, wenn der Schwerpunkt des Erdkernes mit demjenigen der gesamten Erdmasse  $O$  zusammenfällt. In diesem Falle bilden also die Achsen der  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$  selbst die freien oder Principal-Achsen des festen Erdkernes, und bezeichnet  $dm$  ein Massenteilchen desselben,  $dm'$  ein Teilchen der ihn umgebenden Flüssigkeiten, so sind die Summen  $Sy'z'dm$ ,  $Sx'z'dm$ ,  $Sx'y'dm$ ,  $Sy'\frac{dz'}{dt}dm$ ,  $Sz'\frac{dy'}{dt}dm$ ,  $Sz'\frac{dx'}{dt}dm$ ,  $Sx'\frac{dz'}{dt}dm$ ,  $Sx'\frac{dy'}{dt}dm$ ,  $Sy'\frac{dx'}{dt}dm$  einzeln  $= 0$ . Der Wirklichkeit entspricht ferner die Annahme, daß der Bruch  $\frac{Sdm'}{Sdm}$  einen recht kleinen positiven Wert habe.

Gestützt auf diese Voraussetzungen können wir nun zur Integration der Gleichungen XXXIII schreiten. Um erste Näherungswerte für die Größen  $\frac{P}{k}$ ,  $\frac{Q}{k}$ ,  $\frac{R}{k}$  zu erhalten, betrachten wir Meer und Luft vorläufig als starre, mit dem Erdkerne während der Zeit  $t = 0$  bis  $t = t$  fest verbundene Massen von einer solchen Form, daß auch die Summen  $Sy'z'dm'$ ,  $Sx'z'dm'$ ,  $Sx'y'dm'$  einzeln  $= 0$  seien. Diese Annahme entspricht der Wirklichkeit um so genauer, je kleiner wir den Wert des Bruches  $\frac{Sdm'}{Sdm}$  ansetzen dürfen. In diesem Falle ist also  $P = Ap$ ,  $Q = Bq$ ,  $R = Cr$ , und die Gleichungen XXXIII sind mit den Gleichungen VIII identisch. Wir erhalten also nach XII für  $\frac{P}{k}$  und  $\frac{Q}{k}$  die Werte:

$$\frac{P}{k} = \frac{\varepsilon \sqrt{A(C-B)}}{k} \cdot \sin(n't + \gamma); \quad \frac{Q}{k} = -\frac{\varepsilon \sqrt{B(C-A)}}{k} \cdot \cos(n't + \gamma),$$

wo  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  und  $n$  ihre frühere Bedeutung haben. Nehmen wir an, es sei zur Zeit  $t = 0$  die positive

\*) d. h. sie bleibt bei der Bewegung von  $O$  sich stets parallel, ebenso die Achsen der  $x$  und der  $y$ .

unbenannte Zahl  $\varepsilon$  wieder so klein, daß man die zweite sowie die höheren Potenzen von  $\frac{P}{k}$  und  $\frac{Q}{k}$  vernachlässigen dürfe, so gilt dies auch, da  $\varepsilon$  und  $k$  constante Werte haben, für jeden folgenden Zeitmoment. Da nun die Einwirkung, welche das Meer und die Atmosphäre auf den starren Erdkern auszuüben vermögen, wegen der Geringfügigkeit ihrer Massen nur unbedeutend ist, so können durch diese, auch wenn letztere sich in ihrem natürlichen flüssigen Zustande und ihre Teile sich im Gleichgewichte befinden, wie wir nun und fernerhin wieder annehmen wollen, während einer kurzen Zeit die Werte von  $\frac{P}{k} = \cos MOx'$  und  $\frac{Q}{k} = \cos MOy'$  keine beträchtlichen Veränderungen leiden. Haben letztere Größen also zur Zeit  $t = 0$  sehr kleine Werte, deren Potenzen, einschließlich der zweiten, nebst dem Producte  $\frac{P}{k} \cdot \frac{Q}{k}$  man vernachlässigen darf, so gilt dasselbe auch während der darauf folgenden Dauer von  $t$  Zeiteinheiten, wenn wir der Zahl  $t$  einen nur unerheblichen Wert beilegen. Dasselbe läßt sich ebenso von den Größen  $p$  und  $q$  nachweisen, demnach gilt es nach Gleichung XXXIII auch für die Größen  $\frac{dP}{kdt}$  und  $\frac{dQ}{kdt}$ . Während dieser Zeit und auch am Ende derselben ist also die Größe  $R^2 = k^2$ ,  $\cos zOz' = c'' = \cos \Theta = 1$  zu setzen.

Die Gleichungen XIV gehen demnach für jenen Zeitraum in die folgenden über:  $a = \cos(\varphi - \psi)$ ;  $b = -\sin(\varphi - \psi)$ ;  $a' = \sin(\varphi - \psi)$ ;  $b' = \cos(\varphi - \psi)$ ;  $a'' = \cos zOx' = -\sin \Theta \sin \varphi = \frac{P}{k}$ ;  $b'' = \cos zOy' = -\sin \Theta \cos \varphi = \frac{Q}{k}$ , sodaß also  $\sin \varphi = -\frac{P}{k \sin \Theta}$ ,  $\cos \varphi = -\frac{Q}{k \sin \Theta}$  zu setzen ist, falls  $\sin \Theta > 0$ . Hieraus ergeben sich für  $c$  und  $c'$  die Gleichungen:

$$c = \sin \Theta \sin \psi = \sin \Theta \sin [\varphi - (\varphi - \psi)] = \frac{Q}{k} \cdot \sin(\varphi - \psi) - \frac{P}{k} \cdot \cos(\varphi - \psi);$$

$$c' = \sin \Theta \cos \psi = \sin \Theta \cos [\varphi - (\varphi - \psi)] = -\frac{Q}{k} \cos(\varphi - \psi) - \frac{P}{k} \sin(\varphi - \psi),$$

welche Gleichungen auch dann gelten, wenn  $\sin \Theta = 0$  ist.

Nach Gleichung III hat man demnach für die Schwerpunktscoordinaten von  $dm$  oder  $dm'$  die Gleichungen:

$$\text{XXXIV. } x' = x \cdot \cos(\varphi - \psi) + y \cdot \sin(\varphi - \psi) + z \cdot \frac{P}{k};$$

$$y' = -x \cdot \sin(\varphi - \psi) + y \cdot \cos(\varphi - \psi) + z \cdot \frac{Q}{k};$$

$$z' = x \cdot \frac{Q}{k} \cdot \sin(\varphi - \psi) - x \cdot \frac{P}{k} \cdot \cos(\varphi - \psi) - y \cdot \frac{Q}{k} \cos(\varphi - \psi) - y \cdot \frac{P}{k} \sin(\varphi - \psi) + z.$$

Den Bedingungen des Gleichgewichtes der Flüssigkeiten entspricht es, wenn wir annehmen, daß, falls  $\frac{P}{k} = \frac{Q}{k} = 0$  ist, das Meer und die Atmosphäre um die feste Linie  $OM$ , die Achse der  $z$ , rotieren und zwar mit derselben Winkelgeschwindigkeit  $r$ , welche der Erdkern in Bezug auf seine instantane Drehungsachse hat, da diese drei Massen, wenn sie auch nicht in fester Verbindung mit einander stehen, doch zu demselben Körper gehören. Nehmen wir nur noch ein drittes rechtwinkliges Coordinatensystem der  $(x'', y'', z'')$  mit  $O$  als Anfang an, in welchem der positive Zweig der  $z''$ -Achse mit demjenigen der  $z$ -Achse zusammenfalle, während die beiden anderen Achsen gleichfalls mit der Winkelgeschwindigkeit  $r$  in der Drehrichtung der flüssigen Teile der Erde rotieren, — stimmt mit dieser auch die Richtung der Bewegung von  $(+Ox'')$  nach  $(+Oy'')$  überein und geben wir dem positiven Zweige der  $x''$ -Achse eine solche Lage, daß er, wenn  $\sin \Theta = \sin zOz' = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{k} = 0$ , also auch  $P = Q = 0$  wird, mit dem positiven Zweige der  $x'$ -Achse zusammen-

fallt, so sind in diesem Systeme, wie sich aus den geltenden Voraussetzungen ableiten läßt, die Schwerpunktskoordinaten  $x''$  und  $y''$  des Flüssigkeitsteilchens  $dm'$  nahezu unveränderlich. Man hat alsdann für diese die Gleichungen:  $x = x'' \cdot \cos(\varphi - \psi) - y'' \sin(\varphi - \psi)$ ;

$$y = x'' \sin(\varphi - \psi) + y'' \cos(\varphi - \psi); \quad z = z'';$$

führt man diese Werte an Stelle von  $x$ ,  $y$  und  $z$  in die Gleichungen XXXIV ein, so lauten diese:

$$\text{XXXV. } x' = (x'' + z'' \frac{P}{k}); \quad y' = (y'' + z'' \frac{Q}{k}); \quad z' = (z'' - x'' \frac{P}{k} - y'' \frac{Q}{k}).$$

Wir nehmen nun noch an, die Masse des festen Erdkernes sei bei ihrer symmetrischen Lage zu den Coordinatenebenen des Systemes der  $(x', y', z')$  so verteilt, daß seine beiden kleineren Trägheitsmomente  $A$  und  $B$ , welche den Achsen der  $x'$  und  $y'$  entsprechen, einander gleich seien.

Ist alsdann  $\frac{P}{k} = \frac{Q}{k} = 0$ , so liegen sämtliche Wasser- und Luftteilchen, da sich das Meer wie die Atmosphäre im Gleichgewichte befinden soll, symmetrisch zu den Ebenen  $x''Oy''$ ,  $x''Oz''$ ,  $y''Oz''$ , und es sind daher die Gleichungen richtig:  $Sx''y''dm' = 0$ ;  $Sx''z''dm' = 0$ ;  $Sy''z''dm' = 0$ .

Sind die Größen  $\frac{P}{k}$  und  $\frac{Q}{k}$  einzeln nicht  $= 0$ , jedoch wenig von 0 verschieden, und finden Schwanfungen des Erdkernes um seinen Schwerpunkt statt, welche sich, wie wir annehmen, so vollziehen mögen, daß keine Reibungen zwischen den festen und flüssigen Massen stattfinden, so bleiben doch die drei letzten Gleichungen nahezu richtig, da die Änderungen, welche die Coordinaten  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  durch jene Schwanfungen erleiden können, höchstens Größen von der Ordnung  $\frac{(C-A)}{A} \cdot \frac{P}{k}$ , bzw.  $\frac{(C-A)}{A} \cdot \frac{Q}{k}$

darstellen, welche im Folgenden noch mit Factoren von der Ordnung  $\frac{Sdm'}{Sdm}$  multipliciert werden und demnach, da wir uns mit annähernd richtigen Resultaten begnügen müssen, vernachlässigt werden mögen. Nach den Gleichungen XXXV ist alsdann für den Schwerpunkt eines Flüssigkeitsteilchens

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{z''}{k} \cdot \frac{dP}{dt}; \quad \frac{dy'}{dt} = z'' \cdot \frac{dQ}{dt}; \quad \frac{dz'}{dt} = - \left( \frac{x''}{k} \frac{dP}{dt} + \frac{y''}{k} \frac{dQ}{dt} \right).$$

Für die Größen  $F$ ,  $G$ ,  $H$  erhält man die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{F}{B} = \frac{Q}{Bk} (Sz''z''dm' - Sy''y''dm'); \quad \frac{G}{A} = \frac{P}{Ak} (Sz''z''dm' - Sx''x''dm'); \quad \frac{H}{A} = \frac{H}{B} = 0.$$

Hieraus ergibt sich, daß unter den obigen Voraussetzungen

$R = (Cr - Gp - Fq + Sx' \frac{dy'}{dt} dm' - Sy' \frac{dx'}{dt} dm') = Cr$ , also  $r = \frac{C}{R}$ , d. i. gleich einer Constanten ist, welche wieder durch  $n$  bezeichnet werden mag. Für  $p$  und  $q$  ergeben sich aus den Werten von  $P$  und  $Q$  die Ausdrücke:

$$p = \frac{P}{A} + \frac{nP}{Ak} \cdot (Sz''z''dm' - Sx''x''dm') + \frac{1}{Ak} \cdot S(y''y'' + z''z'') dm' \cdot \frac{dQ}{dt};$$

$$q = \frac{Q}{B} + \frac{nQ}{Bk} \cdot (Sz''z''dm' - Sy''y''dm') - \frac{1}{Bk} \cdot S(x''x'' + z''z'') dm' \cdot \frac{dP}{dt}.$$

Führt man diese Werte an Stelle von  $p$  und  $q$  in die Gleichungen XXXIII ein, so nehmen diese nach einigen Umrechnungen, wenn man nach den getroffenen Voraussetzungen Größen von der Ordnung  $\frac{P^2}{k^2}$ ,  $\frac{Q^2}{k^2}$ ,  $\frac{PQ}{k^2}$ ,  $\frac{(B-A)}{B}$ ,  $\frac{(C-A)P}{Ak}$  unterdrückt, demnach  $k = Cn$  und zur Abkürzung  $[B - S(x''x'' + z''z'') dm'] = B_1$ ,  $[A - S(y''y'' + z''z'') dm'] = A_1$ ,  $[C - S(x''x'' + y''y'') dm'] = C_1$  setzt, welche Größen hier als Constanten zu betrachten sind, schließlich die folgende Form an:



XXXVI.  $\frac{dP}{kdt} + \frac{(C_1 - B_1)}{B_1} \cdot \frac{nQ}{k} = 0$ ;  $\frac{dQ}{kdt} - \frac{(C_1 - A_1)}{A_1} \cdot \frac{nP}{k} = 0$ , woraus man durch Integration, wenn  $\frac{(C_1 - B_1)}{B_1} \cdot \frac{(C_1 - A_1)}{A_1} \cdot n^2 = n_1'^2$  gesetzt wird, die Gleichungen erhält:

$$\text{XXXVII. } \frac{P}{k} = \sqrt{\frac{C_1 - B_1}{B_1}} \cdot \varepsilon_1 \sin(n_1' t + \gamma_1);$$

$$\frac{Q}{k} = -\sqrt{\frac{C_1 - A_1}{A_1}} \cdot \varepsilon_1 \cdot \cos(n_1' t + \gamma_1),$$

wo  $\varepsilon_1$  und  $\gamma_1$  neue Constanten bezeichnen. Hat also die Zahl  $\varepsilon_1$  zur Zeit  $t = 0$  nur einen kleinen Wert, so werden die Schwankungen des festen Erdkernes während des angenommenen kurzen Zeitraumes von  $t$  Zeiteinheiten unbeträchtlich sein.

Anders verhält sich die Sache, wenn die Wasserteile zur Wiederherstellung des Gleichgewichtes im Meere sich auf vorgeschriebenem Wege bewegen müssen. Nehmen wir an, der wieder als kugelförmig gedachte feste Erdkern, dessen Masse in seinem Innern symmetrisch zu den durch seine freien Achsen der  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  gelegten Ebenen verteilt sei und eine solche Lage habe, daß  $A = B < C$  sei, trage an seiner Oberfläche senkrecht zu dieser stehende, gleichmäßig verteilte, feste, unbiegsame Wände von gleicher Dicke, welche die Ebene der ( $x'$ ,  $y'$ ) senkrecht durchschneiden und alle in gleicher Weise zu beiden Seiten derselben nach Westen, also entgegen der Rotationsrichtung des Erdkörpers gekrümmt seien. Zur Vereinfachung der Betrachtung nehmen wir ferner die Masse des Meeres, welches den rotierenden Erdkern in einem Gürtel von mäßiger Breite umgebe, so klein an, daß das in den durch jene Wände gebildeten Gerinnen gleichmäßig verteilte Meerwasser in diesen auch bei den Schwankungen des Erdkernes vollständig enthalten bleibe und, wenn  $\frac{P}{k} = \frac{Q}{k} = 0$  ist, in der Ebene der ( $x'$ ,  $y'$ ) in allen gleich hoch stehe. Ist der Schwerpunkt des Wasserteilchens  $dm'$  von  $O$ , dem Schwerpunkte der Erdmasse, um eine Strecke von  $r$  Längeneinheiten entfernt, welche mit dem positiven Zweige der  $z'$ -Achse den concaven Winkel  $\vartheta$  einschließe, während ihre Projection auf die Ebene der ( $x'$ ,  $y'$ ) mit dem positiven Zweige der  $x'$ -Achse den in der Richtung von  $(+Ox')$  nach  $(+Oy')$  von  $0$  bis  $360^\circ$  gezählten Winkel  $\omega$  bilde, so hat man für die Schwerpunktskoordinaten von  $dm'$  die Gleichungen:  $z' = r \cos \vartheta$ ;  $y' = r \sin \vartheta \sin \omega$ ;  $x' = r \sin \vartheta \cos \omega$ .

Ist  $\frac{P}{k} = \frac{Q}{k} = 0$ , so ist nach dem Obigen  $z'' = z'$ , ebenso  $y'' = y'$  und  $x'' = x'$ . Sind diese Gleichungen nicht erfüllt, so ist nach Gleichung XXXIV:  $z' = (z'' - x'' \cdot \frac{P}{k} - y'' \cdot \frac{Q}{k})$ . Nach dem Früheren sind hier die Coordinaten  $x''$ ,  $y''$ , und auch  $z''$ , wenn die absoluten Werte von  $\frac{P}{k}$  und  $\frac{Q}{k}$  sehr klein sind und Größen von der Ordnung  $\frac{(C - A)}{A} \cdot \frac{P}{k} \cdot \frac{Sdm'}{Sdm}$  vernachlässigt werden dürfen, als Constanten zu betrachten. Wir erhalten nun aus dem Werte von  $z'$ , wenn  $x'' = r_0 \sin \vartheta_0 \cos \omega_0$ ,  $y'' = r_0 \sin \vartheta_0 \sin \omega_0$ ,  $z'' = r_0 \cdot \cos \vartheta_0$  gesetzt wird, für  $\vartheta$  die Gleichung:  $\vartheta = \left\{ \vartheta_0 + \frac{1}{r_0 \sin \vartheta_0} \left( x'' \cdot \frac{P}{k} + y'' \cdot \frac{Q}{k} \right) \right\}$ . Infolge der Krümmungen der Gerinne ändert sich mit  $\vartheta$  zugleich der Winkel  $\omega$  um eine Größe, welche mit  $\cos \vartheta$  einerlei Vorzeichen hat, also durch  $\rho z' \left( x'' \cdot \frac{P}{k} + y'' \cdot \frac{Q}{k} \right)$  bezeichnet werden kann, wo  $\rho$  eine positive unbenannte Zahl bezeichnet,

welche eine Function von  $r$  und  $\vartheta$  darstellt, jedoch von  $\omega$  unabhängig ist, da die auf der Oberfläche des festen Erdkernes gleichmäßig verteilten Gerinne sämtlich in derselben Weise gekrümmt sind. Berücksichtigt man ferner, daß in den Producten, welche  $\frac{P}{k}$  oder  $\frac{Q}{k}$  als Factoren enthalten, bei Vernachlässigung der Größen von der Ordnung  $\frac{P^2}{k^2}$ ,  $\frac{Q^2}{k^2}$ ,  $\frac{P}{k} \cdot \frac{Q}{k}$  die Symbole  $x'$  und  $x''$  unter einander vertauscht werden dürfen, ebenso  $y'$  und  $y''$ , ferner  $z'$  und  $z''$ , desgleichen  $r$  und  $r_0$ ,  $\vartheta$  und  $\vartheta_0$ ,  $\omega$  und  $\omega_0$ , so erhält man für  $x'$  und  $y'$  die Werte:

$$\begin{aligned} \text{XXXVIII. } x' &= x'' + z'' \cos^2 \omega_0 \frac{P}{k} + z'' \sin \omega_0 \cos \omega_0 \frac{Q}{k} \\ &\quad - \rho z'' \sin^2 \vartheta_0 \sin \omega_0 \cos \omega_0 \frac{P}{k} - \rho z'' \sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \omega_0 \frac{Q}{k}; \\ y' &= y'' + z'' \sin \omega_0 \cos \omega_0 \frac{P}{k} + z'' \sin^2 \omega_0 \frac{Q}{k} \\ &\quad + \rho z'' \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \omega_0 \frac{P}{k} + \rho z'' \sin^2 \vartheta_0 \sin \omega_0 \cos \omega_0 \frac{Q}{k}, \end{aligned}$$

in welchen Gleichungen, wie im Folgenden, für  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  die obigen constanten Werte:  $x'' = r_0 \sin \vartheta_0 \cos \omega_0$ ,  $y'' = r_0 \sin \vartheta_0 \sin \omega_0$ ,  $z'' = r_0 \cos \vartheta_0$  zu setzen sind.

Ist nun  $dm' = r_0^2 \cdot \sin \vartheta_0 \, dr_0 \cdot d\vartheta_0 \cdot d\omega_0$ , so erhält man, da  $\rho$  von  $\omega_0$  unabhängig ist, nach dem Früheren für  $F$  und  $G$  die Werte:

$$\begin{aligned} F &= Sz''z'' \sin^2 \omega_0 dm' \cdot \frac{Q}{k} - Sy''y'' dm' \cdot \frac{Q}{k} + S\rho z''z'' \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \omega_0 dm' \cdot \frac{P}{k}; \\ G &= Sz''z'' \cos^2 \omega_0 dm' \cdot \frac{P}{k} - Sx''x'' dm' \cdot \frac{P}{k} - S\rho z''z'' \sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \omega_0 dm' \cdot \frac{Q}{k}, \end{aligned}$$

indem bei der Integration die Glieder, welche den Factor  $\sin \omega_0 \cdot \cos \omega_0$  enthalten, infolge der gleichmäßigen Verteilung des Meerwassers rings um den Erdkern herum verschwinden.\*). In ähnlicher Weise ergibt sich aus dem Obigen, daß

$$\begin{aligned} \left( Sx' \frac{dz'}{dt} dm' - Sz' \frac{dx'}{dt} dm' \right) &= \frac{1}{k} \left\{ -Sz''z'' \cos^2 \omega_0 dm' \cdot \frac{dP}{dt} - Sx''x'' dm' \cdot \frac{dP}{dt} + S\rho z''z'' \sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \omega_0 dm' \cdot \frac{dQ}{dt} \right\} \\ \left( Sz' \frac{dy'}{dt} dm' - Sy' \frac{dz'}{dt} dm' \right) &= \frac{1}{k} \left\{ Sz''z'' \sin \omega_0^2 dm' \cdot \frac{dQ}{dt} + Sy''y'' dm' \cdot \frac{dQ}{dt} + S\rho z''z'' \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \omega_0 dm' \cdot \frac{dP}{dt} \right\} \end{aligned}$$

ist. Für  $q$  und  $p$  erhält man also die Werte:

$$\begin{aligned} q &= \left\{ \frac{Q}{B} + \frac{Sz''z'' \sin^2 \omega_0 dm'}{B} \cdot \frac{nQ}{k} - \frac{Sy''y'' dm'}{B} \cdot \frac{nQ}{k} + \frac{S\rho z''z'' \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \omega_0 dm'}{B} \cdot \frac{nP}{k} \right. \\ &\quad \left. - \frac{Sz''z'' \cos^2 \omega_0 dm'}{Bk} \cdot \frac{dP}{dt} - \frac{Sx''x'' dm'}{Bk} \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{S\rho z''z'' \sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \omega_0 dm'}{Bk} \cdot \frac{dQ}{dt} \right\}; \\ p &= \left\{ \frac{P}{A} + \frac{Sz''z'' \cos^2 \omega_0 dm'}{A} \cdot \frac{nP}{k} - \frac{Sx''x'' dm'}{A} \cdot \frac{nP}{k} - \frac{S\rho z''z'' \sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \omega_0 dm'}{A} \cdot \frac{nQ}{k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{Sz''z'' \sin^2 \omega_0 dm'}{Ak} \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Sy''y'' dm'}{Ak} \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{S\rho z''z'' \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \omega_0 dm'}{Ak} \cdot \frac{dP}{dt} \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte von  $p$  und  $q$  in die Gleichungen XXXIII ein, so lauten diese nach einigen Umrechnungen, bei denen zu beachten ist, daß wegen der Kugelgestalt des Erdkernes sowie der gleichmäßigen Verteilung und symmetrischen Lage der festen wie der im Gleichgewicht befindlichen flüssigen Massenteile in Bezug auf die Coordinatenebenen der  $(y'', z'')$  und der  $(x'', z'')$  die Gleichungen  $Sy''y'' dm' = Sx''x'' dm'$ ;  $Sz''z'' \sin^2 \omega_0 dm' = Sz''z'' \cos^2 \omega_0 dm' = \frac{1}{2} Sz''z'' dm'$  richtig sind und, weil

\*) Wir nehmen hier und im Folgenden die Dicke jener Wände so klein an, daß sie, also auch die Masse der Wände, vernachlässigt werden kann.

alle Glieder der Gleichungen XXXIII Größen von der Ordnung  $\frac{P}{k}, \frac{Q}{k}$  darstellen, bei Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung  $\frac{P^2}{k^2}$  u. die Größen  $A = B, (A_1 + \frac{1}{2} Sz''z''dm') = A_2 = (B_1 + \frac{1}{2} Sz''z''dm') = B_2$  (man vergleiche die obigen Werte von  $A_1$  und  $B_1$ ) hier als Constanten betrachtet werden können, wie folgt:

$$\text{XXXIX. } \frac{dP}{kdt} + \frac{(C_1 - B_2)}{B_2} \cdot \frac{nQ}{k} = - \frac{nP}{B_2 k} \cdot S \rho z''z'' \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \omega_0 dm' - \frac{dQ}{B_2 kdt} \cdot S \rho z''z'' \sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \omega_0 dm';$$

$$\frac{dQ}{kdt} - \frac{(C_1 - A_2)}{A_2} \cdot \frac{nP}{k} = - \frac{nQ}{A_2 k} \cdot S \rho z''z'' \sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \omega_0 dm' + \frac{dP}{A_2 kdt} \cdot S \rho z''z'' \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \omega_0 dm'$$

Führt man den in der zweiten Gleichung gegebenen Wert von  $\frac{dQ}{kdt}$  in die erste Gleichung ein, den in der ersten gegebenen Wert von  $\frac{dP}{kdt}$  in die zweite, so erhält man schließlich, wenn  $\frac{n(C_1 - A_2)}{A_2} = \frac{n(C_1 - B_2)}{B_2} = n'_2$ , die positive unbenannte Zahl  $\frac{S \rho z''z'' \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \omega_0 dm'}{A_2} = \frac{S \rho z''z'' \sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \omega_0 dm'}{B_2} = s_1$ ,  $A_2(1 + s_1^2) = A_3 = B_2(1 + s_1^2) = B_3$ , endlich  $\frac{n(C_1 - A_3)}{A_3} = \frac{n(C_1 - B_3)}{B_3} = n_3^*$  gesetzt wird, folgende Gleichungen:

$$\text{XL. } \frac{dP}{kdt} + n'_2 \cdot \frac{Q}{k} = - \frac{s_1(n + n'_2)}{(1 + s_1^2)} \cdot \frac{P}{k};$$

$$\frac{dQ}{kdt} - n'_2 \cdot \frac{P}{k} = - \frac{s_1(n + n'_2)}{(1 + s_1^2)} \cdot \frac{Q}{k}.$$

Durch Integration dieser Gleichungen ergeben sich, wenn man zunächst ihre rechte Seite unberücksichtigt läßt, die folgenden:

$$\text{XLI. } \frac{P}{k} = \eta_2 \sin(n'_2 t + \gamma_2); \quad \frac{Q}{k} = - \eta_2 \cos(n'_2 t + \gamma_2).$$

Die Werte der Größen  $\eta_2$  und  $\gamma_2$  müssen, damit die Größen auf der rechten Seite der vorigen Gleichungen Berücksichtigung finden, nach der Theorie von der Variation der Constanten aus folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$\text{XLII. } \frac{d\eta_2}{dt} \cdot \sin(n'_2 t + \gamma_2) + \eta_2 \cdot \frac{d\gamma_2}{dt} \cdot \cos(n'_2 t + \gamma_2) = - \frac{s_1(n + n'_2)}{(1 + s_1^2)} \cdot \eta_2 \sin(n'_2 t + \gamma_2);$$

$$- \frac{d\eta_2}{dt} \cdot \cos(n'_2 t + \gamma_2) + \eta_2 \cdot \frac{d\gamma_2}{dt} \cdot \sin(n'_2 t + \gamma_2) = \frac{s_1(n + n'_2)}{(1 + s_1^2)} \cdot \eta_2 \cos(n'_2 t + \gamma_2).$$

Durch Auflösung derselben erhält man die Werte  $\frac{d\eta_2}{dt} = - \frac{s_1(n + n'_2)\eta_2}{(1 + s_1^2)}; \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = 0.$

Bezeichnet man die positive unbenannte Zahl  $\frac{s_1(n + n'_2)}{(1 + s_1^2)}$  der Kürze halber durch  $\sigma$ , so ist  $\frac{d\eta_2}{\eta_2} = - \sigma dt$ , also  $\eta_2 = e^{(\lambda - \sigma t)}$ ;  $\gamma_2 = \gamma_3$ , wo  $\lambda$  und  $\gamma_3$  Constanten bezeichnen.

Unter den oben getroffenen Voraussetzungen ist also

$$\text{XLIII. } \sin zOz' = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{k} = e^{(\lambda - \sigma t)}.$$

Während der kurzen Zeitdauer von  $t = 0$  bis  $t = t$  und demnach auch während der folgenden Zeit, wie sich leicht zeigen läßt, nimmt also die Größe des spitzen Winkels  $zOz'$  beständig ab und nähert sich der Null, sodaß die Achse der  $z'$  bei ihrer  $\frac{2\pi}{(n + n')}$  mittlere Sonnentage währenden Rotation um die Linie OM, welche letztere, abgesehen von der Einwirkung fremder

\*) Es wird hier angenommen, daß  $(C_1 - A_3) = (C_1 - B_3)$  positiv sei, demnach auch  $n'_2$  und  $n_3$ .



Weltkörper, im Weltenraume eine feste Lage hat, sich dieser mehr und mehr nähern und schließlich mit ihr (wenigstens für unsere Wahrnehmung) zusammenfallen wird. In diesem Falle werden also die Schwankungen des rotierenden festen Erdkernes durch die Einwirkung der durch sie bedingten Bewegungen des Meeres auch ohne den Einfluß der Reibung verringert und schließlich aufgehoben.

Dagegen sind die Zahlen  $s_1$  und  $\sigma$  negativ, wenn unter Aufrechterhaltung der sonstigen Voraussetzungen angenommen wird, daß jene auf der Oberfläche des festen Erdkernes senkrechten Wände und Gerinne sich nördlich und südlich von der Ebene der  $(x', y')$  nach Osten krümmen. Alsdann kann der Winkel  $zOz'$  im Laufe der Zeit wachsen, und die Schwankungen des Erdkernes nebst den von ihnen bedingten Bewegungen im Meere können erheblicher werden. Ob nun die Reibungen, welche in Wirklichkeit mit solchen Bewegungen verbunden wären, ausreichen würden, um das Anwachsen jenes Winkels und die Zunahme der Schwankungen des Erdkernes zu verhindern, wohl gar in eine Abnahme zu verwandeln, erscheint, namentlich wenn die Meerestiefe nur gering ist, zweifelhaft, und die Behauptung, welcher man hin und wieder, selbst in berühmten wissenschaftlichen Werken, begegnet, daß durch „den Widerstand des Meeres“ dergleichen periodische Bewegungen der festen Erdmasse aufgehoben würden, bedarf der Begründung.

Wir müssen an dieser Stelle auf eine allgemeine, d. h. alle Fälle umfassende und gleichmäßig berücksichtigende Untersuchung der gegenseitigen Abhängigkeit, in welcher die Bewegungen der festen und der flüssigen Teile der Erdmasse zu einander stehen, verzichten, da diese zu umfangreiche geographische, speciell hydrographische Vorarbeiten erfordern würde. Erwähnt mag noch werden, daß der Einfluß der täglichen und halbtäglichen Ebbe und Flut auf die Präcession und Nutation sowie auf die Drehungsgeschwindigkeit der Erde theoretisch in einer Abhandlung untersucht worden ist, welche von mir in dem 1881 erschienenen Jahresberichte unserer Anstalt veröffentlicht wurde (leider ist dieselbe durch Druckfehler über Gebühr entstellt). Sollte das oben Mitgeteilte dazu beitragen, das Interesse wissenschaftlicher Kreise für die Behandlung und Lösung der vorliegenden ebenso schwierigen, wie für die Astronomie und Geographie hochwichtigen Aufgabe zu fördern, so wäre der Zweck dieser Zeilen erfüllt.

## A n h a n g.

Es mag hier noch der Beweis gegeben werden, daß die durch die Anziehung des Mondes und der Sonne bewirkten Rotationen der Achse der  $z'$  und der durch die Gleichungen

$$\cos MOx' = \frac{\varepsilon \sqrt{A(C-B)}}{k} \cdot \sin(n't + \gamma); \quad \cos MOy' = -\frac{\varepsilon \sqrt{B(C-A)}}{k} \cdot \cos(n't + \gamma); \quad \cos MOz' = \frac{Cr}{k}$$

bestimmten geraden Linie OM identisch sind, auch wenn diese Linien nicht zusammenfallen, der Wert der positiven Zahl  $\varepsilon$  jedoch so klein ist, daß man ihre Potenzen von der zweiten an, sowie Producte, welche die Zahl  $\varepsilon$  und daneben eine Größe von der Ordnung der störenden Kräfte, nämlich der von jenen Weltkörpern ausgeübten Anziehungen, als Factoren enthalten, vernachlässigen darf. Wir wollen uns ferner der Kürze halber darauf beschränken, der gewöhnlichen Annahme nach  $A = B$  zu setzen. Bei Berücksichtigung jener störenden Kräfte kann nach dem Obigen die Linie OM oder die  $z''$ -Achse nicht mehr als eine festliegende\*) gerade Linie, also auch die auf OM senkrechte Ebene der  $(x'', y'')$  in dem zuletzt angenommenen Coordinatensysteme nicht mehr als

\*) d. h. sich stets parallel bleibende.

eine sich parallel bleibende Ebene betrachtet werden. Nehmen wir nun wieder das ursprünglich angenommene rechtwinklige Koordinatensystem der  $(x, y, z)$  in Gebrauch und bezeichnen den spitzen Winkel  $MOz$ , welcher von  $OM$  und dem positiven Zweige der  $z$ -Achse gebildet wird, durch  $\Theta'$ , so hat man nach jenem bekannten Satze der analytischen Geometrie die Gleichung  $\cos \Theta' = \cos MOz = \cos MOx' \cdot \cos zOx' + \cos MOy' \cdot \cos zOy' + \cos MOz' \cdot \cos zOz'$ , und da nach XIV  $\cos zOx' = a'' = -\sin \Theta \sin \varphi$ ;  $\cos zOy' = b'' = -\sin \Theta \cos \varphi$ ;  $\cos zOz' = \cos \Theta$ , und nach den getroffenen Voraussetzungen  $k = Cr = Cn$  zu setzen ist, so kann man derselben die Form geben:

$$\begin{aligned} \cos \Theta' &= \cos \Theta - \frac{\varepsilon \cdot A}{Cn} \sqrt{\frac{C-A}{A}} \cdot \sin \Theta [\sin(n't + \gamma) \cdot \sin \varphi - \cos(n't + \gamma) \cos \varphi] \\ &= \cos \Theta + \frac{\varepsilon \cdot A}{Cn} \sqrt{\frac{C-A}{A}} \cdot \sin \Theta \cdot \cos[(n + n')t + 1 + \gamma]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß

$$\Theta' = \Theta - \varepsilon \cdot \frac{A}{Cn} \sqrt{\frac{C-A}{A}} \cdot \cos[(n + n')t + 1 + \gamma],$$

$$\frac{d\Theta'}{dt} = \frac{d\Theta}{dt} + \varepsilon \cdot \frac{A}{Cn} \sqrt{\frac{C-A}{A}} \cdot (n + n') \cdot \sin[(n + n')t + 1 + \gamma], \quad \text{und da}$$

$$n' = n \left( \frac{C-A}{A} \right), \quad (n + n') = \frac{Cn}{A} \quad \text{ist,}$$

$$\frac{d\Theta'}{dt} = \frac{d\Theta}{dt} + \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{C-A}{A}} \cdot \sin[(n + n')t + 1 + \gamma] \quad \text{gesetzt werden darf.}$$

Schneidet die Ebene der  $(x'', y'')$  die Ebene der  $(x, y)$  in der Linie  $N''N'''$  und ist  $ON''$  derjenige Zweig derselben, welcher mit der Linie  $ON$  zur Zeit  $t$  nahezu zusammenfällt,\* — bezeichnet  $\psi'$  ferner den von  $ON''$  und  $(+Ox)$  zu dieser Zeit gebildeten Winkel, von  $(+Ox)$  an in der Richtung nach  $(-Oy)$  von 0 bis  $360^\circ$  gezählt (man vergleiche, was hierüber bei der Entwicklung der Gleichungen XIV gesagt ist), so erhält man (wohl am einfachsten aus der Betrachtung eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks mit den Katheten  $(90^\circ - \psi')$ ,  $(90^\circ - \Theta')$  und der Hypotenuse  $MOx$ ) die Gleichung:  $\cos MOx = \sin \Theta' \sin \psi'$ . Nach dem oben bereits in Anwendung gekommenen Lehrsätze ist ferner  $\cos MOx = \cos MOz' \cdot \cos xOz' + \cos MOx' \cdot \cos xOx' + \cos MOy' \cdot \cos xOy'$ , d. i. gemäß den Gleichungen XIV:

$$\begin{aligned} \cos MOx &= \sin \Theta \sin \psi + \frac{\varepsilon \cdot A}{Cn} \sqrt{\frac{C-A}{A}} \cos \Theta \cdot \sin \psi \sin \varphi \cdot \sin(n't + \gamma) + \frac{\varepsilon A}{Cn} \sqrt{\frac{C-A}{A}} \cos \psi \cos \varphi \sin(n't + \gamma) \\ &\quad - \frac{\varepsilon \cdot A}{Cn} \sqrt{\frac{C-A}{A}} \cos \Theta \sin \psi \cos \varphi \cos(n't + \gamma) + \frac{\varepsilon A}{Cn} \sqrt{\frac{C-A}{A}} \cos \psi \sin \varphi \cos(n't + \gamma), \end{aligned}$$

$$\text{also ist nach dem Obigen} \quad \sin \Theta' \sin \psi' = \sin \Theta \sin \psi + \frac{\varepsilon A}{Cn} \sqrt{\frac{C-A}{A}} \cdot \cos \psi \sin[(n + n')t + 1 + \gamma],$$

$$\text{demnach} \quad \psi' = \psi + \frac{\varepsilon A}{Cn} \sqrt{\frac{C-A}{A}} \cdot \frac{\sin[(n + n')t + 1 + \gamma]}{\sin \Theta'}, \quad \text{und da man im letzten Gliede } \Theta' \text{ als}$$

$$\text{eine Constante betrachten darf,} \quad \frac{d\psi'}{dt} = \frac{d\psi}{dt} + \varepsilon \sqrt{\frac{C-A}{A}} \cdot \frac{\cos[(n + n')t + 1 + \gamma]}{\sin \Theta'}.$$

Aus XV ergeben sich nun die wichtigeren Gleichungen:

$$\frac{d\Theta}{dt} = (q \sin \varphi - p \cos \varphi) \quad \text{und} \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{(q \cos \varphi + p \sin \varphi)}{\sin \Theta}.$$

Die Werte von  $p$  und  $q$  sind die Summen der aus den Gleichungen XII und XXVII hervorgehenden Teilwerte dieser Zahlen. Setzt man diese an Stelle von  $p$  und  $q$  in die vorhergehenden Gleichungen ein, so erhalten diese die Form:

\*) sodaß also  $N''$  den absteigenden Knoten der Ebene der  $(x'', y'')$  darstellt.



$$\frac{d\Theta}{dt} = -\varepsilon \sqrt{\frac{C-A}{A}} \sin[(n+n')t + 1 + \gamma] + V;$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\varepsilon \sqrt{\frac{C-A}{A}} \frac{\cos[(n+n')t + 1 + \gamma]}{\sin \Theta} + W, \text{ wo } V \text{ und } W \text{ gewisse}$$

Funktionen der Zeit  $t$  und der störenden Kräfte bedeuten.

Da Größen von der Ordnung  $\varepsilon^2$  hier vernachlässigt werden, darf man in dem ersten Gliede auf der rechten Seite der letzteren Gleichung  $\Theta$  mit  $\Theta'$  vertauschen. Aus den Größen  $V$  und  $W$ , welche nach den getroffenen Voraussetzungen Glieder mit dem Factor  $\varepsilon$  nicht enthalten, sind die Luni-Solar-Mutationen der Achse der  $z'$  abzuleiten, während die ersten Glieder auf der rechten Seite der beiden letzten Gleichungen von der Einwirkung fremder Weltkörper unabhängig sind, übrigens wegen ihrer Kleinheit und der Kürze ihrer Periode für die Beobachtung vollständig verschwinden. Aus dem Obigen ergibt sich ferner, daß  $\frac{d\Theta'}{dt} = V$  und  $\frac{d\psi'}{dt} = W$  ist. Man erhält also unter den obigen Voraussetzungen für die durch Einwirkung des Mondes und der Sonne hervorgebrachten Änderungen der Winkel  $\Theta'$  und  $\psi'$  bezw. dieselben Werte wie für die Änderungen der Winkel  $\Theta$  und  $\psi$ , was hier bewiesen werden sollte.

Zum Schluß sei mir gestattet, die genauen Werte der wichtigsten in den Ausdrücken  $V$  und  $W$  enthaltenen Glieder, wie ich sie in der Programmarbeit der hiesigen Lehranstalt vom Jahre 1882 im Anschluß an die oben erwähnte Abhandlung von Nyren entwickelt und berechnet habe, hier noch einmal anzugeben. Es ist demnach:

$$V = \frac{d\Theta'}{dt} = -\frac{3Q}{2a^3} \frac{(2C-A-B)}{Cn} \sum k_i \sin \Theta' \left( 1 + \frac{\frac{1}{2}(E_2 + E_1) \sin 2\Theta' + (E_2 - E_1) \sin \Theta'}{2 \sin \Theta'} \right) \sin(it + \lambda_i)$$

$$- \frac{3Q}{4a^3} \frac{(2C-A-B)}{Cn} \sum k'_i \cos \Theta' \left( 1 + \frac{\frac{1}{2}(E'_2 + E'_1) \cos 2\Theta' + \frac{1}{2}(E'_2 - E'_1) \cos \Theta'}{\cos \Theta'} \right) \sin(i't + \lambda'_i),$$

$$W = \frac{d\psi'}{dt} = -\frac{3Q}{2a^3} \frac{(2C-A-B)}{Cn} \sum k_i \cos \Theta' \left( 1 + \frac{(E_2 + E_1) \sin \Theta' + \frac{1}{2}(E_2 - E_1) \sin 2\Theta'}{\sin 2\Theta'} \right) \cos(it + \lambda_i)$$

$$- \frac{3Q}{4a^3} \frac{(2C-A-B)}{Cn} \sum k'_i \cos 2\Theta' \left( 1 + \frac{\frac{1}{2}(E'_2 + E'_1) \cos \Theta' + \frac{1}{2}(E'_2 - E'_1) \cos 2\Theta'}{\cos 2\Theta'} \right) \cos(i't + \lambda'_i),$$

$$\text{wo } E_1 = \frac{0,99676 \frac{i}{n}}{\left(1 + 0,99676 \frac{i}{n}\right)}; \quad E_2 = \frac{0,99676 \frac{i}{n}}{\left(1 - 0,99676 \frac{i}{n}\right)}; \quad E'_1 = \frac{0,99676 \frac{i'}{n}}{\left(1 + 0,99676 \frac{i'}{n}\right)}; \quad E'_2 = \frac{0,99676 \frac{i'^*}{n}}{\left(1 - 0,99676 \frac{i'}{n}\right)}$$

zu setzen ist. Die Summationen erstrecken sich auf alle aus der Theorie der Mondbewegung hervorgehenden Werte von  $i$  und  $i'$ ; der Winkel  $\lambda_i$  ist entweder  $= 0$  oder  $= \text{const.} \pm 2\psi'^*$ , dagegen ist  $\lambda'_i = \text{const.} \pm \psi'$ ;  $k_i$  und  $k'_i$  bezeichnen Constanten,  $a$  die mittlere Entfernung der Mittelpunkte des Mondes und der Erde von einander. Hierzu treten die ähnlich gebildeten von der Wirkung der Sonne abhängigen Glieder.

Vernachlässigt man in diesen Formeln die Größen  $E_1, E_2$  etc., so erhält man die Resultate der Poisson'schen Näherungsformeln, mit denen man bisher sich begnügte, die jedoch für genauere Bestimmungen nicht ausreichen. Während dieselben die Präcession genau ergeben, da in den dieselbe betreffenden Gliedern  $i$  und  $i'$  nahezu verschwinden, bedürfen die von Nyren aufgestellten Schlußwerte für die Mutation der kleinsten Hauptachse der Erde oder der Linie OM gewisser

\*) Bei der Berechnung dieser Größen ist  $B = A$  angenommen, und in den Werten von  $V$  und  $W$  sind die mit  $\frac{(B-A)}{Cn}$  multiplizierten Glieder von kurzer Periode vernachlässigt worden.

\*\*) In einigen Gliedern fehlt die Größe  $2\psi'$ .



Correctionen, von denen die wichtigsten in Folgendem enthalten sind, wo  $L$  die mittlere Länge des Mondes,  $L'$  die wahre Länge der Sonne,  $P$  und  $P'$  die mittleren Längen der Perigäen des Mondes und der Sonne,  $\Omega$  die wahre Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn bezeichnen.

Mutation in der Schiefe der Ekliptik für das Jahr 1900

nach Nyren:

corrigiert:

$$\begin{aligned} \Delta \theta' = & + 0,0888 \cos 2L \\ & + 0,0114 \cos (3L - P) \\ & + 0,0183 \cos (2L - \Omega) \\ & - 0,0047 \cos (L + P) \\ & + 0,0011 \cos (4L - 2P) \\ & + 0,0014 \cos (4L - 2L') \\ & + 0,0023 \cos (3L - 2L' + P) \\ & + 0,0024 \cos (3L - P - \Omega) \\ & + 0,0030 \cos (L - P - \Omega) \\ & - 0,0030 \cos (L - P + \Omega) \\ & + 0,5460 \cos 2L', \\ & + 0,0952 \cos 2L \\ & + 0,0127 \cos (3L - P) \\ & + 0,0194 \cos (2L - \Omega) \\ & - 0,0049 \cos (L + P) \\ & + 0,0013 \cos (4L - 2P) \\ & + 0,0016 \cos (4L - 2L') \\ & + 0,0025 \cos (3L - 2L' + P) \\ & + 0,0026 \cos (3L - P - \Omega) \\ & + 0,0031 \cos (L - P - \Omega) \\ & - 0,0031 \cos (L - P + \Omega) \\ & + 0,5487 \cos 2L' \end{aligned}$$

Mutation in der Länge der Gestirne für 1900

nach Nyren:

corrigiert:

$$\begin{aligned} \Delta \phi' = & + 0,2067 \sin 2\Omega \\ & - 0,2047 \sin 2L \\ & - 0,0262 \sin (3L - P) \\ & - 0,0343 \sin (2L - \Omega) \\ & + 0,0115 \sin (L + P) \\ & - 0,0026 \sin (4L - 2P) \\ & + 0,0678 \sin (L - P) \\ & + 0,0028 \sin (2L - 2P) \\ & - 0,0033 \sin (4L - 2L') \\ & + 0,0143 \sin (L - 2L' + P) \\ & + 0,0026 \sin (L + 2L' - P) \\ & - 0,0052 \sin (3L - 2L' + P) \\ & - 0,0006 \sin (5L - 2L' - P) \\ & + 0,0025 \sin (2L - 2\Omega) \\ & + 0,0060 \sin (2L - 2L') \\ & - 0,0044 \sin (3L - P - \Omega) \\ & + 0,0020 \sin (L + P - \Omega) \\ & - 0,0007 \sin (3L - 2L' + P - \Omega) \\ & + 0,0125 \sin (2L' - \Omega) \\ & + 0,0014 \sin (L - 2L' + P + \Omega) \\ & + 0,0057 \sin (L - P - \Omega) \\ & + 0,0057 \sin (L - P + \Omega) \\ & - 1,2590 \sin 2L' \\ & + 0,1263 \sin (L' - P') \\ & - 0,0211 \sin (L' + P') \\ & - 0,0070 \sin (3L' - P') \\ & + 0,2065 \sin 2\Omega \\ & - 0,2221 \sin 2L \\ & - 0,0296 \sin (3L - P) \\ & - 0,0370 \sin (2L - \Omega) \\ & + 0,0120 \sin (L + P) \\ & - 0,0030 \sin (4L - 2P) \\ & + 0,0706 \sin (L - P) \\ & + 0,0030 \sin (2L - 2P) \\ & - 0,0039 \sin (4L - 2L') \\ & + 0,0148 \sin (L - 2L' + P) \\ & + 0,0027 \sin (L + 2L' - P) \\ & - 0,0059 \sin (3L - 2L' + P) \\ & - 0,0007 \sin (5L - 2L' - P) \\ & + 0,0027 \sin (2L - 2\Omega) \\ & + 0,0065 \sin (2L - 2L') \\ & - 0,0051 \sin (3L - P - \Omega) \\ & + 0,0021 \sin (L + P - \Omega) \\ & - 0,0008 \sin (3L - 2L' + P - \Omega) \\ & + 0,0126 \sin (2L' - \Omega) \\ & + 0,0015 \sin (L - 2L' + P + \Omega) \\ & + 0,0059 \sin (L - P - \Omega) \\ & + 0,0059 \sin (L - P + \Omega) \\ & - 1,2665 \sin 2L' \\ & + 0,1267 \sin (L' - P') \\ & - 0,0212 \sin (L' + P') \\ & - 0,0071 \sin (3L' - P') \end{aligned}$$

Correctionen, von denen die wichtigsten in Folgendem enthalten sind, wo  $L$  die mittlere Länge des Mondes,  $L'$  die wahre Länge des Mondes,  $P$  die wahre Länge der Perigäen der Mondbahn und  $\odot$  die wahre Länge der Sonne,  $\oslash$  die wahre Länge der Perigäen der Sonne,  $\oslash$  die wahre Länge der Perigäen der Sonne,  $\oslash$  die wahre Länge der Perigäen der Sonne.

nach Rydberg

$$\begin{aligned}\Delta \Theta' = & + 0,0888 \cos 2L \\ & + 0,0114 \cos (3L - P) \\ & + 0,0183 \cos (2L - \odot) \\ & - 0,0047 \cos (L + P) \\ & + 0,0011 \cos (4L - 2P) \\ & + 0,0014 \cos (4L - 2L') \\ & + 0,0023 \cos (3L - 2L' + P) \\ & + 0,0024 \cos (3L - P - \odot) \\ & + 0,0030 \cos (L - P - \odot) \\ & - 0,0030 \cos (L - P + \odot) \\ & + 0,5460 \cos 2L'\end{aligned}$$

nach Rydberg

$$\begin{aligned}\Delta \phi' = & + 0,2067 \sin 2L \\ & - 0,2047 \sin 2L \\ & - 0,0262 \sin (3L - P) \\ & - 0,0343 \sin (2L - \odot) \\ & + 0,0115 \sin (L + P) \\ & - 0,0026 \sin (4L - 2P) \\ & + 0,0678 \sin (L - P) \\ & + 0,0028 \sin (2L - 2P) \\ & - 0,0033 \sin (4L - 2L') \\ & + 0,0143 \sin (L - 2L' + P) \\ & + 0,0026 \sin (L + 2L' - P) \\ & - 0,0052 \sin (3L - 2L' + P) \\ & - 0,0006 \sin (5L - 2L' - P) \\ & + 0,0025 \sin (2L - 2\odot) \\ & + 0,0060 \sin (2L - 2L') \\ & - 0,0044 \sin (3L - P - \odot) \\ & + 0,0020 \sin (L + P - \odot) \\ & - 0,0007 \sin (3L - 2L' + P - \odot) \\ & + 0,0125 \sin (2L' - \odot) \\ & + 0,0014 \sin (L - 2L' + P + \odot) \\ & + 0,0057 \sin (L - P - \odot) \\ & + 0,0057 \sin (L - P + \odot) \\ & - 1,2590 \sin 2L' \\ & + 0,1263 \sin (L' - P') \\ & - 0,0211 \sin (L' - P') \\ & - 0,0070 \sin (3L' - P')\end{aligned}$$

© The Tiffen Company, 2007

TIFFEN® Gray Scale



Jahr 1900  
corrigiert:

$$\begin{aligned}& 62 \cos 2L \\ & 27 \cos (3L - P) \\ & 44 \cos (2L - \odot) \\ & 49 \cos (L + P) \\ & 13 \cos (4L - 2P) \\ & 16 \cos (4L - 2L') \\ & 25 \cos (3L - 2L' + P) \\ & 26 \cos (3L - P - \odot) \\ & 31 \cos (L - P - \odot) \\ & 31 \cos (L - P + \odot) \\ & 37 \cos 2L'\end{aligned}$$

Jahr 1900

corrigiert:

$$\begin{aligned}& 65 \sin 2L \\ & 21 \sin 2L \\ & 96 \sin (3L - P) \\ & 70 \sin (2L - \odot) \\ & 20 \sin (L + P) \\ & 30 \sin (4L - 2P) \\ & 06 \sin (L - P) \\ & 30 \sin (2L - 2P) \\ & 39 \sin (4L - 2L') \\ & 48 \sin (L - 2L' + P) \\ & 27 \sin (L + 2L' - P) \\ & 59 \sin (3L - 2L' + P) \\ & 07 \sin (5L - 2L' - P) \\ & 27 \sin (2L - 2\odot) \\ & 65 \sin (2L - 2L') \\ & 51 \sin (3L - P - \odot) \\ & 21 \sin (L + P - \odot) \\ & 08 \sin (3L - 2L' + P - \odot) \\ & 26 \sin (2L' - \odot) \\ & 15 \sin (L - 2L' + P + \odot) \\ & 59 \sin (L - P - \odot) \\ & 59 \sin (L - P + \odot) \\ & 65 \sin 2L' \\ & 267 \sin (L' - P') \\ & 12 \sin (L' - P') \\ & 71 \sin (3L' - P')\end{aligned}$$