

Ostern 1914.

Realgymnasium der Ämter
:: Wanne und Eickel. ::

Eine von Lagebeziehungen un-
abhängige geometrische Beweis-
methode und deren Anwendung.

Von

Oberlehrer Richard Potthof.



1914. Prog. Nr. 533.

Druck von Herchenbach & Co., Wanne.

Qwa
7 (1914)

Landes- u. Stadt-Bibl.
Düsseldorf

44.9.304



§ 1.

Es gibt geometrische Sätze, deren Beweis auf elementare Weise leicht geführt werden kann, wenn auf eine bestimmte Figur Bezug genommen wird. Ein allgemeiner Beweis dagegen, der nicht auf bestimmte Lagebeziehungen in der Figur Rücksicht nimmt, stößt vielfach auf Schwierigkeiten, es sei denn, daß man sich des Hilfsmittels der analytischen Geometrie bedient. So liegt z. B., wenn man die Figur 1 zu Grunde legt, der Beweis des folgenden Satzes auf der Hand:

Liegt D auf der Geraden BC, E auf der Geraden CA und F auf der Geraden AB, so schneiden die drei Kreise durch A, E, F, durch B, F, D und durch C, D, E einander in demselben Punkte S.

In der Tat folgt an Hand der Figur, wenn S zunächst den Schnittpunkt der beiden Kreise durch A und B bedeutet:

$$\sphericalangle AFS + BFS = \pi.$$

$$AFS = CES.$$

$$BFS = CDS. \text{ Also:}$$

$CES + CDS = \pi.$ Nach dem Satze vom Kreisviereck liegen mithin C, D, E und S auf einem Kreise.

Man erkennt aber auch sogleich, daß der Beweis modifiziert werden muß, wenn F auf der Verlängerung der Seite AB liegt, oder E auf der Verlängerung von CA, oder wenn beides der Fall ist usw. Es ist nun kein erstrebenswertes Ziel, den allgemeinen Beweis eines Satzes dadurch zu erbringen, daß man den Satz für alle möglichen Spezialfälle beweist. Es entsteht somit das Bedürfnis, eine Methode anzugeben, die einen allgemeinen, von besonderen Lagebeziehungen in der Figur unabhängigen elementar-geometrischen Beweis dieses Satzes und ähnlicher Sätze zu führen gestattet. Eine solche Methode soll im folgenden entwickelt und angewandt werden.

Die dieser Methode zu Grunde liegende Definition des Winkels kommt auf Gedanken von Möbius hinaus, auf die Killing und Hovestadt in ihrem Handbuch des mathematischen Unterrichts hinweisen (Bd. II, § 3,2 Seite 45 ff.). Die hier gegebene Definition des Winkels weicht insofern ab, als eine Unterscheidung zwischen positiven und negativen Winkeln nicht eingeführt wird.

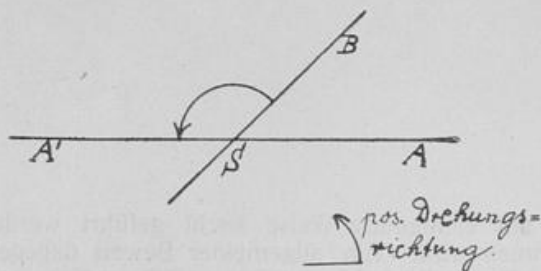
§ 2. Definitionen und Hilfssätze.

In der Ebene soll eine bestimmte Drehungsrichtung als positiv festgesetzt sein.

- (1.) Definition. Sind g und g' zwei einander in S schneidende Geraden, so soll unter dem Winkel der Geraden g mit g' derjenige Winkel verstanden werden, den die Gerade g' beschreibt, wenn sie aus ihrer Anfangslage heraus in positivem Sinne um S soweit gedreht wird, bis sie zum erstenmale mit g zusammenfällt.

Ist A ein von S verschiedener Punkt von g, A' ein von S verschiedener Punkt von g', so liegt es nahe, da g durch A und S, g' durch A' und S bestimmt ist, den von g mit g' gebildeten Winkel durch das Symbol $\sphericalangle ASA'$ zu bezeichnen. Diese Festsetzung gibt dem Symbol $\sphericalangle ASA'$ eine neue, von der üblichen abweichende Bedeutung. Denn: g ist nicht nur durch S und A, sondern auch durch S und einen beliebigen anderen ihrer Punkte bestimmt, und ähnliches gilt auch von g'. In dem Symbol $\sphericalangle ASA'$ wird man also A durch jeden anderen Punkt von g, A' durch jeden anderen Punkt von g' ersetzen dürfen. D. h.:

- (2.) Ist B irgend ein anderer Punkt der durch S und A bestimmten Geraden, so ist $\sphericalangle ASA' = BSA'$. Ist B' irgend ein anderer Punkt der durch S und A' bestimmten Geraden, so ist $\sphericalangle ASA' = ASB'$.



Figur 1a

Zum Verständnis des Folgenden wird es gut sein, sich die abweichende Bedeutung, welche dem Symbol $\sphericalangle$ ASB in dieser Arbeit gegeben ist, an einer Figur klar zu machen. In der Figur 1a z. B. bedeuten $\sphericalangle$ ASB und $\sphericalangle$ A'SB eine und dieselbe Drehung, welche durch einen mit Pfeil versehenen Bogen angedeutet ist. In der sonst üblichen Bezeichnungsweise dagegen bedeuten $\sphericalangle$ ASB und $\sphericalangle$ A'SB zwei verschiedene Winkel (Supplementwinkel). Es ist ferner wichtig, zu beachten, daß es in dem Symbol $\sphericalangle$ ASB auf die Reihenfolge der Eckbuchstaben (A und B) ankommt. Nach der alten Bedeutung ist $\sphericalangle$ ASB = BSA, nach den hier gemachten Festsetzungen dagegen ergänzen sich $\sphericalangle$ ASB und BSA zu π .

Umgekehrt gilt:

- (3.) Ist $\sphericalangle$ BSA' = ASA', so liegen A, B und S in einer Geraden.
Ist $\sphericalangle$ ASB' = ASA', so liegen A', B' und S in einer Geraden.

Ferner gilt der Satz:

- (4.) Liegen A, B, C auf einer Geraden, und ist $\sphericalangle$ DAC = EBC, oder $\sphericalangle$ CAD = CBE, so ist DA parallel EB, und seine Umkehrung.

Auch der folgende Satz ergibt sich leicht:

- (5.) Kann ein Punkt C durch Umklappen der Ebene um AB als Achse mit einem Punkt C' zur Deckung gebracht werden (od. ist C' das Spiegelbild von C in Bezug auf AB), so ist $\sphericalangle$ ABC = C'BA.

Umgekehrt:

- (6.) Ist $\sphericalangle$ ABC = C'BA, so kann die Gerade BC durch Umklappen um AB als Achse mit der Geraden BC' zur Deckung gebracht werden. (Ist noch die Strecke BC = BC', so ist C' das Spiegelbild von C in Bezug auf AB).

Denn, wenn C'' das Spiegelbild von C in Bezug auf AB ist, so ist nach (5) $\sphericalangle$ ABC = C''BA, also, wegen $\sphericalangle$ ABC = C'BA, $\sphericalangle$ C''BA = C'BA. Nach (3) fällt mithin die Gerade BC' mit B''C zusammen.

M sei der Mittelpunkt des durch die Punkte A, B und C gehenden Kreises. Eine Gerade g drehe sich in positiver Richtung um B, dann dreht sich auch der Radius, der M mit dem von B verschiedenen Schnittpunkte der Geraden g mit dem Kreise verbindet in positiver Richtung, und zwar um den doppelten Betrag der von g vollführten Drehung. Fällt g zunächst mit BC zusammen und dreht g sich dann bis zum Zusammenfallen mit AB, sodaß g den $\sphericalangle$ ABC beschreibt, so dreht der genannte Radius sich in positiver Richtung aus der Anfangslage MC in die Endlage MA um den doppelten Betrag. Der Betrag dieser Drehung ist aber von der Lage des Punktes B auf dem Kreise unabhängig. Es folgt demnach:

- (7.) Sind A, B, C und D vier Punkte eines Kreises, so ist $\sphericalangle$ ABC = ADC.

Umgekehrt gilt der Satz:

- (8.) Sind A, B, C und D vier Punkte der Art, daß $\sphericalangle$ ABC = ADC, so liegen A, B, C und D auf einem Kreise.

Denn, wenn der Kreis durch A, B und C die Gerade AD in dem von D verschiedenen Punkte D' schneidet, so wäre

$\sphericalangle$ ABC = AD'C. Es ist vorausgesetzt

$\sphericalangle$ ABC = ADC. Demnach würde folgen:

$\sphericalangle$ ADC = AD'C. Nach (4) müßten also die Geraden DC und D'C parallel sein. Das ist nicht möglich, da beide C gemein haben.

ABC und A'B'C' seien zwei Dreiecke der Art, daß AB = A'B', $\sphericalangle$ CAB = C'A'B' und $\sphericalangle$ ABC = A'B'C'. Ich verschiebe A'B'C' so, daß A' auf A, B' auf B fällt. Dann fällt, da $\sphericalangle$ CAB = C'A'B', nach (3) die Gerade A'C' auf die Gerade AC. Ähnlich folgt, daß die Gerade B'C' die Gerade BC deckt. C' fällt mithin auf C.

- (9.) Sind in zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ $AB = A'B'$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$ und $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, so lassen sich die Dreiecke durch Verschiebung zur Deckung bringen.

Da die betrachteten Dreiecke verschiebungskongruent sind, so liegt, wenn C an der linken Seite der Richtung AB liegt, C' an der linken Seite der Richtung $A'B'$, und es liegt, wenn C an der rechten Seite der Richtung AB liegt, C' an der rechten Seite der Richtung $A'B'$. Zwei verschiebungskongruente Dreiecke sind gleichsinnig.

In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sei $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$. Durch Parallelverschiebung von $A'B'$ kann man ein Dreieck A_1B_1C' erhalten, in dem die Strecke $A_1B_1 = AB$ ist. Unter Benutzung von (4) folgt: $\sphericalangle C'A_1B_1 = \sphericalangle C'A'B' = \sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle A_1B_1C' = \sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC$. Nach (9) ist also $\triangle A_1B_1C'$ dem $\triangle ABC$ gleichsinnig kongruent. Daraus folgt: $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B_1C'A_1 = \sphericalangle B'C'A'$.

- (10.) Sind in zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$ und $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, so ist auch $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A'$.

Da $\triangle A_1B_1C'$ gleichsinnig $A'B'C'$ und $\triangle A_1B_1C'$ gleichsinnig ABC , so ist $\triangle ABC$ gleichsinnig $A'B'C'$. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind gleichsinnig ähnlich.

Ganz entsprechend ergibt sich, unter Benutzung von (5) und (6):

- (11.) Sind in zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ die Strecke $AB = A'B'$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle ABC = \sphericalangle C'B'A'$, so läßt sich $A'B'C'$ durch Verschiebung verbunden mit Umklappung mit ABC zur Deckung bringen und es ist $\sphericalangle BCA = \sphericalangle A'C'B'$.

Wenn zwei Dreiecke umklappungskongruent sind, so sind sie ungleichsinnig, d. h.: Liegt C rechts von der Richtung AB , so liegt C' links von der Richtung $A'B'$ usw.

Mit Hülfe von (11) ergibt sich dann weiter:

- (12.) Sind in zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ $\sphericalangle CAB = \sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle ABC = \sphericalangle C'B'A'$, so ist auch $\sphericalangle BCA = \sphericalangle A'C'B'$. Die beiden Dreiecke sind ungleichsinnig ähnlich.

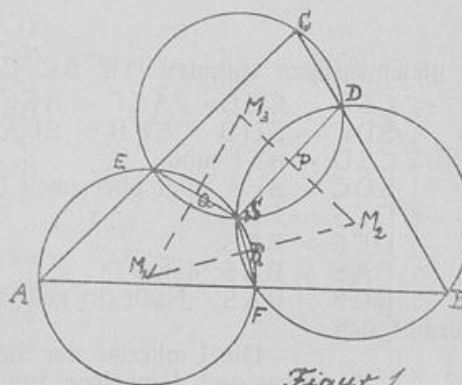
§ 3. Ein Satz vom Dreieck. Die umschriebenen Kreise eines vollständigen Vierseits.

Der Beweis des in der Einleitung genannten Satzes:

- (13.) Liegt D auf der Geraden BC , E auf der Geraden CA und F auf der Geraden AB , so schneiden die drei Kreise durch A, E, F , durch B, F, D und durch C, D, E einander in demselben Punkte S gestaltet sich jetzt wie folgt, ohne daß man nötig hat, auf besondere Lagen in der Figur Rücksicht zu nehmen. (Fig. 1.) S bedeute zunächst den Schnittpunkt der Kreise durch A und B .

- $\sphericalangle SDC = \sphericalangle SDB$, nach (2).
- $\sphericalangle SDB = \sphericalangle SFB$, nach (7), daher
- $\sphericalangle SDC = \sphericalangle SFB$. Da aber nach (2)
- $\sphericalangle SFB = \sphericalangle SFA$, so ist
- $\sphericalangle SDC = \sphericalangle SFA$, und wegen
- $\sphericalangle SFA = \sphericalangle SEA$, (7), folgt
- $\sphericalangle SDC = \sphericalangle SEA$. Berücksichtigt man noch, daß nach (2)
- $\sphericalangle SEA = \sphericalangle SEC$ ist, so ergibt sich:
- $\sphericalangle SDC = \sphericalangle SEC$. Nach (8) geht also der Kreis durch C, D und E auch durch S .

Da nach dem vorhergehenden $\sphericalangle SDC = \sphericalangle SEA$ $\sphericalangle SFB$, so bilden die Geraden SD, SE, SF mit den betreffenden Seiten des Dreiecks ABC gleiche Winkel.



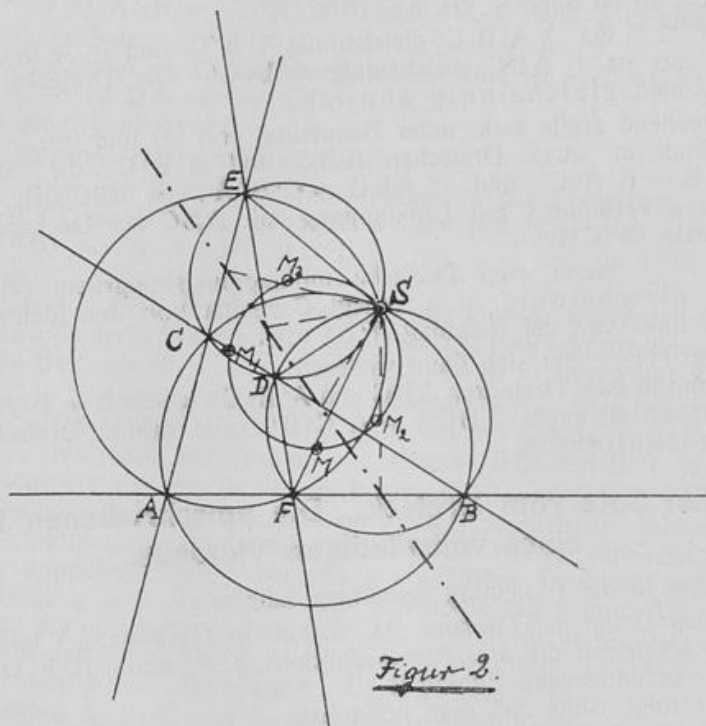
Figur 1.

Sind M_1 , M_2 und M_3 die Mittelpunkte der durch A, B und C gehenden Kreise, P, Q und R die Schnittpunkte von SD, SE und SF bez. mit M_2M_3 , M_3M_1 und M_1M_2 , so ist $\angle SRM_2 = \angle SPM_2$, denn SP und SR stehen senkrecht zu M_2M_3 bez. M_1M_2 . Nach (8) ist also SRM_2P ein Kreisviereck, daher ist nach (7) $\angle RSP = \angle RM_2P$. Nun ergibt sich, unter Benutzung der Sätze (2) und (7)

- $\angle RM_2P = \angle M_1M_2M_3$,
- $\angle RSP = \angle FSD = \angle FBD = \angle ABC$. Es folgt:
- $\angle M_1M_2M_3 = \angle ABC$. Ebenso kommt
- $\angle M_2M_3M_1 = \angle BCA$, und
- $\angle M_3M_1M_2 = \angle CAB$.

Die Dreiecke $M_1M_2M_3$ und ABC sind mithin gleichsinnig ähnlich.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die auf den Seiten des Dreiecks ABC angenommenen Punkte D, E, F in einer Geraden liegen. (Fig. 2). Die Figur besteht dann aus den



Figur 2.

vier gleichwertigen Geraden DE, BC, CA und AB. Jetzt ist

- $\angle CSD = \angle CED = \angle AEF = \angle ASF$, und
- $\angle SDC = \angle SDB = \angle SFB = \angle SFA$. Aus
- $\angle CSD = \angle ASF$ und
- $\angle SDC = \angle SFA$ folgt aber nach (10).
- $\angle DCS = \angle FAS$.
- $\angle DCS = \angle BCS$.
- $\angle FAS = \angle BAS$, daher
- $\angle BCS = \angle BAS$. Nach (8) geht also der Umkreis des Dreiecks ABC auch durch S und

es ergibt sich:

(14.) Die Umkreise der vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Da SD, SE, SF mit den betreffenden Seiten des Dreiecks ABC gleiche Winkel bilden, so liegt es nahe, umgekehrt von einem Punkte S des Umkreises des Dreiecks ABC auszugehen,

und von S aus Gerade SD, SE und SF nach den Seiten von ABC zu ziehen, so daß $\angle SDC = SEA = SFB$. Würde nun FE die Seite BC in dem von D verschiedenen Punkte D' schneiden, so ergäbe die Anwendung des Satzes (14) daß die den vier Dreiecken des vollständigen Vierseits A, B, C, D', E, F umschriebenen Kreise einander in S' schnitten. S liegt aber wegen $\angle SEA = SFA$ auf dem Kreise AEF und ferner auf dem Kreise ABC und ist demnach mit S' identisch. Es ergibt sich daher

$\angle SD'B = SEC$. Und da

$\angle SDB = SEC$ ist, so folgt

$\angle SDB = SD'B$, eine Gleichung, die nach (4) den Widerspruch SD parallel SD' nach sich ziehen würde. Daher gilt der Satz:

- (15) Ist S ein beliebiger Punkt auf dem Umkreise eines Dreiecks ABC und nimmt man auf BC, CA und AB die Punkte D, E und F so an, daß $\angle SDC = SEA = SFB$, so liegen D, E und F in einer Geraden.

Zieht man von S die Lote nach den Dreiecksseiten, so erhält man als Spezialfall, daß die Fußpunkte der Lote in einer Geraden liegen. (Simson'sche od. Wallace'sche Gerade).

Aus der Gleichwertigkeit der Seiten des vollst. Vierseits folgt:

- (16.) Zieht man von dem Schnittpunkte der umschriebenen Kreise eines vollst. Vierseits vier Gerade, die mit den Seiten des Vierseits bez. gleiche Winkel bilden, so liegen die Schnittpunkte dieser vier Geraden mit den betreffenden Seiten des Vierseits in einer Geraden.

Es seien M_1 , M_2 und M_3 die Mittelpunkte der Kreise AEF, BFD, CDE, die sonstigen Bezeichnungen wie in der Anmerkung zu Satz (13). (Fig. 2 und Fig. 1). Da P, Q und R die Mitten von SD, SE und SF sind, so liegen P, Q und R in einer Geraden. Wegen $\angle SPM_3 = SQM_1 = SRM_2$ schneiden die umschriebenen Kreise des Vierseits gebildet aus den Seiten des Dreiecks $M_1M_2M_3$ und PQ einander in S. S liegt also auf dem Umkreise des Dreiecks $M_1M_2M_3$. Da alle umschriebenen Kreise eines Vierseits gleichwertig sind, so gilt der Satz:

- (17.) Die Mittelpunkte der umschriebenen Kreise eines vollständigen Vierseits liegen auf einem Kreise, der durch den Schnittpunkt der umschriebenen Kreise geht.

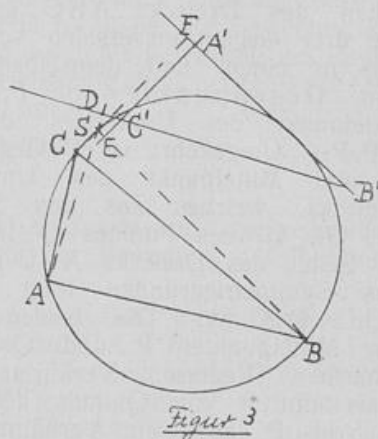
Literaturangabe: Zu 15. A. Grüttner. Bem. z. d. Fig. d. Simson'schen Geraden. Archiv d. Math. u. Ph. 1900. Leipz.

Interessante Erweiterungen der Sätze über das Vierseit bei W. K. Clifford. Mathematical papers, 1882, London. (Abh. VIII: Synthetic proof of Miquel's theorem).

G. Pesci. Dei circoli circoscritti ai triangoli formati da n rette poste in un piano. Periodico di matematica per l'insegnamento secondario. 18.0, Rom.

ABC und A'B'C' seien zwei beliebig gelegene ungleichsinnig ähnliche Dreiecke. Ich nehme auf den Seiten des Dreiecks A'B'C' die Punkte D, E und F so an (Fig. 3), daß $\angle ADC' = BEA' = CFB'$. Ist S der Schnittpunkt von AD und BE, so ist $\angle SDC' = ADC' = BEC' = SEC'$. S, D, E, C' bilden also ein Kreisviereck. Daher erhält man: $\angle ASB = DSE = DC'E = B'C'A' = ACB$. S liegt also auf dem Umkreise des Dreiecks ABC. Ist S' der Schnittpunkt von AD und CF, so ergibt sich in derselben Weise, daß auch S' auf dem Umkreise des Dreiecks ABC liegt. S' ist demnach mit S identisch und es gilt der Satz:

- (18.) Zieht man von den Ecken eines Dreiecks ABC nach den entsprechenden Seiten eines dem Dreieck ABC ungleichsinnig ähnlichen Dreiecks Gerade so, daß die Geraden mit den betreffenden Seiten des zweiten Dreiecks gleiche Winkel bilden, so schneiden sich diese Geraden in einem Punkte des Umkreises des Dreiecks ABC.



§ 4. Von den Winkelgegentransversalen und Gegenpunkten. Ein Satz über die (verallgemeinerte) Simson'sche Gerade.

Ich betrachte den von den Geraden UW und VW gebildeten Zweistrah. L_1 sei das Spiegelbild eines beliebigen Punktes L in Bezug auf UW (Fig. 4), L_2 das Spiegelbild von L in Bezug auf VW. LL_1 schneide UW in N_1 , LL_2 schneide VW in N_2 . Die Symmetrieachse des gleichschenkeligen Dreiecks L_1L_2W schneide L_1L_2 in M. Da

✧ $WML_2 = WN_2L_2 = \frac{\pi}{2}$, so ist WMN_2L_2 ein Kreisviereck (8). Deshalb ist nach (7)

✧ $MWN_2 = ML_2N_2$. Da aber N_1N_2 parallel L_1L_2 , so ist nach (4)

✧ $ML_2N_2 = N_1N_2L$, also

✧ $MWN_2 = N_1N_2L$. Wegen

✧ $WN_1L = WN_2L = \frac{\pi}{2}$ ist auch WN_1LN_2 ein Kreisviereck, also

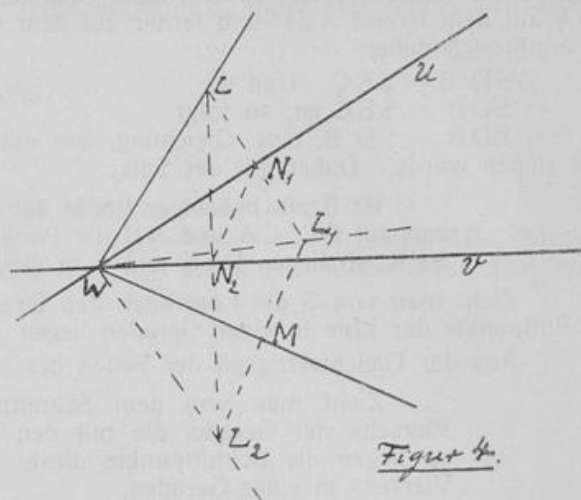
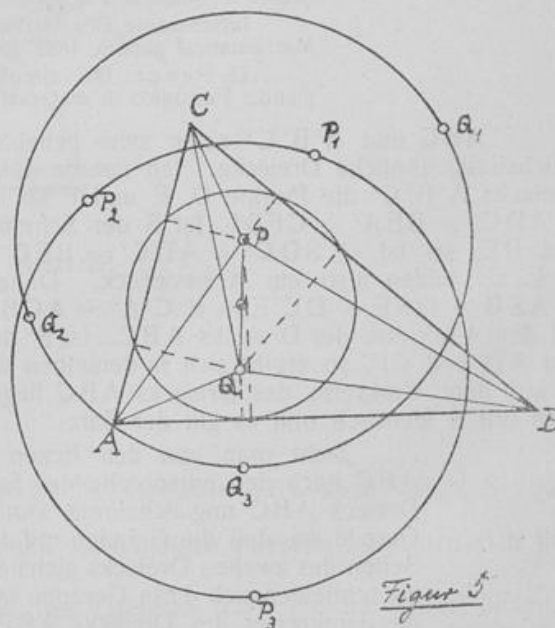
✧ $N_1N_2L = N_1WL$, und mithin

✧ MWN_2 oder $MWV = N_1WL$ oder UWL ,

d. h. der von MW mit WV gebildete Winkel ist gleich dem von UW mit WL gebildeten Winkel. Man sagt MW sei die Gegentransversale von WL in Bezug auf den Zweistrah WU, WV und erkennt leicht, daß WM durch Umklappen um eine der beiden Symmetrieachsen des Zweistrahls WU, WV mit WL zur Deckung gebracht werden kann. Aus dem Vorhergehenden folgt dann:

Ist W der Schnittpunkt eines Zweistrahls, L ein beliebiger Punkt, so ist die Gegentransversale von WL in Bezug auf den Zweistrah Mittel senkrecht der Verbindungsstrecke der Spiegelbilder des Punktes L in Bezug auf die beiden Geraden des Zweistrahls.

Liegt ein Dreieck ABC und ein Punkt P vor, so sind demnach die Gegentransversalen der drei Ecktransversalen in Bezug auf je ein Seitenpaar Mittel senkrecht desjenigen Dreiecks, das von den Spiegelbildern P_1, P_2, P_3 des Punktes P in Bezug auf die Seiten des Dreiecks ABC gebildet wird. Die drei Gegentransversalen schneiden sich also in einem und demselben Punkte Q, dem Gegenpunkte von P, und Q ist Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $P_1P_2P_3$. Umgekehrt ist P Gegenpunkt von Q und Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks, welches aus den Spiegelbildern Q_1, Q_2, Q_3 des Punktes Q in Bezug auf die Seiten des Dreiecks ABC gebildet wird. Aus Symmetriegründen folgt weiter, daß $PQ_1 = QP_1$ ist. Die beiden Kreise mit den Mittelpunkten P und Q haben also denselben Radius. Verkürzt man den Kreis um P von Q aus, den Kreis um Q von P aus im Verhältnis 2 : 1, so findet man:



(19.) Sind P und Q Gegenpunkte eines Dreiecks, so liegen die Fußpunkte der von P und Q auf die Dreiecksseiten gefälltten Lote auf einem Kreise, der die Mitte der Strecke PQ als Mittelpunkt hat.

Ein besonderes Paar Gegenpunkte sind der Höhenschnittpunkt und der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises. Der Kreis des Satzes (19) ist in diesem Falle der Feuerbach'sche Kreis.

Liegt P auf dem Umkreise des Dreiecks ABC, so ist $\sphericalangle ACQ = PCB = PAB = CAQ$. Nach (4) muß also CQ parallel AQ sein. Ebenso ergibt sich BQ parallel AQ. D. h.:

Der Gegenpunkt eines Punktes des Umkreises eines Dreiecks ist ein unendlich ferner Punkt und umgekehrt.

Sind nun P ein Punkt auf dem Umkreise des Dreiecks ABC, D, E, F drei Punkte auf BC, CA, AB so, daß $\sphericalangle PDC = PEA = PFB$, und ist G der Schnittpunkt der Gegentransversalen von BP mit der Geraden DEF, so ist

$\sphericalangle GBD = FBP$, ferner

$\sphericalangle BDG = BPF$ (da DFBP ein Kreisviereck). Nach (10) ist also

$\sphericalangle DGB = PFB$. Hieraus:

Verbindet man einen auf dem Umkreise eines Dreiecks ABC gewählten Punkt P mit den auf den drei Seiten gelegenen Punkten D, E und F, die so gewählt sind, daß $\sphericalangle PDC = PEA = PFB = \varphi$, so bildet die durch D, E, F gehende Gerade mit den Gegentransversalen, welche zu den von P ausgehenden Ecktransversalen gehören, ebenfalls den Winkel φ .

(Verallg. eines Satzes bei „Fuhrmann, synth. Beweise plan. Sätze“).

§ 5. Ueber Scharen einem Grunddreieck eingeschriebener gleichsinnig ähnlicher Dreiecke. Die Brocard'schen Punkte. Die Tucker'sche Kreisschar.

Ich nehme in der Ebene des Grunddreiecks ABC einen Punkt P beliebig an. Ist D ein beliebiger Punkt auf BC, so sind durch P, D, B und P, D, C zwei Kreise bestimmt, welche AB und CA und in F und E schneiden mögen. Die Punkte A, F, P, E liegen nach (13) auf einem Kreise. Ich nehme jetzt an, D bewege sich auf BC, P bleibt fest.

$\sphericalangle EFP = EAP = CAP$.

$\sphericalangle PFD = PBD = PBC$.

Bei der Bewegung bleiben also $\sphericalangle EFP$ und $\sphericalangle PFD$ konstant. Durch die Bedingung $\sphericalangle EFP = CAP = \text{konst.}$ ist aber, nach (3), die gegenseitige Lage der Geraden EF und FP eindeutig bestimmt, ebenso durch die Bedingung $\sphericalangle PFD = PBC$ die gegenseitige Lage von PF und FD. Die gegenseitige Lage der Geraden EF und FD ist folglich auch eindeutig bestimmt und ändert sich im Verlaufe der Bewegung nicht. D. h. $\sphericalangle EFD$ bleibt bei der Bewegung konstant. Gleiches gilt von $\sphericalangle FDE$ und $\sphericalangle DEF$. Man erhält also durch die Bewegung des Punktes D eine Schar dem Dreieck ABC eingeschriebener unter einander gleichsinnig ähnlicher Dreiecke DEF. Diese dem Punkte P zugeordnete Schar soll mit (P) bezeichnet werden.

Man kann (P) noch in anderer Weise erzeugen. Es ist nämlich

$\sphericalangle FPE = FAE = BAC$.

$\sphericalangle DPF = DBF = CBA$.

$\sphericalangle EPD = ECD = ACB$. Die Winkel FPE, DPF und EPD sind konstant, die gegenseitige Lage der Strahlen des Dreistrahl PD, PE, PF bleibt also bei der Bewegung des Punktes D erhalten, d. h. der Dreistrahl dreht sich um den Punkt P.

Ist D_1 der Fußpunkt des von P auf BC gefälltten Lotes, und fällt, wenn D mit D_1 zur Deckung kommt, E auf E_1 , F auf F_1 , so ist auch PE_1 ein Lot auf CA, PF_1 ein Lot auf AB. Zu (P) gehört also das Dreieck der Fußpunkte der von P auf die Seiten des Grunddreiecks gefälltten Lote. Alle übrigen Dreiecke von (P) entstehen durch Drehung um P verbunden mit Streckung von P aus. P bleibt in der Tat homologer Punkt der Dreiecke von (P), da die Dreiecke PD_1D , PE_1E und PF_1F gleichs. ähnlich sind und daher $PD_1 : PE_1 : PF_1 = PD : PE : PF$

ist. Die Größe der Drehung, die das Lotfußpunktsdreieck in DEF überführt werde mit φ bezeichnet und positiv oder negativ gerechnet, je nachdem Dreieck DEF durch eine positive oder negative Drehung aus dem Lotfußpunktsdreieck hervorgeht. Der Parameter φ variiert also zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Es besteht die Beziehung: $PD = \frac{PD_1}{\cos \varphi}$. Sind d und d_1 irgend zwei homologe Strecken der Dreiecke $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = 0$, so gilt die Gleichung $d = \frac{d_1}{\cos \varphi_1}$. Jeder Punkt T_1 des Lotfußpunktsdreiecks beschreibt bei der Drehung eine geradlinige Bahn, die auf PT_1 senkrecht steht. Insbesondere liegen die Mittelpunkte der Umkreise von (P) auf einer Geraden, welche auf der Verbindungsgeraden des Punktes P mit dem Umkreismittelpunkt des Lotfußpunktsdreiecks senkrecht steht. Die Schar der Umkreise von (P) wird also dann mit der Schar der Umkreise von (Q) zusammen fallen können, wenn die Lotfußpunktsdreiecke von (P) und (Q) denselben Umkreis haben. Das ist der Fall, wenn P und Q Gegenpunkte sind. (19). In diesem Falle ist die Zentrale der Umkreise von (P) und der Umkreise von (Q) die Mittelsenkrechte der Strecke PQ. W sei ein beliebiger Punkt dieser Mittelsenkrechten, V die Mitte von PQ. Da die Dreiecke WVP und WVQ ungleichsinnig kongruent sind, so ist die Drehung, welche die Richtung PV auf dem kürzesten Wege auf die Richtung PW fallen läßt der Drehung, welche die Richtung QV auf dem kürzesten Wege in die Richtung QW überführt, gleich aber entgegengesetzt. Ist δ der Betrag dieser Drehung, so ist, wenn z. B. die PV in PW bringende Drehung positiven Sinn hat, W der Umkreismittelpunkt des zu $\varphi = \delta$ gehörenden Dreiecks von (P), W aber auch der Umkreismittelpunkt des zu $\varphi = -\delta$ gehörenden Dreiecks von (Q). Da ferner die Radien dieser beiden Kreise $= \frac{h'}{\cos \delta}$ sind, wenn h den Radius des Umkreises der Lotfußpunktsdreiecke bedeutet, so ergibt sich:

Sind P und Q Gegenpunkte, so haben zwei Dreiecke der Scharen (P) und (Q), die zwei dem Betrage nach gleichen, dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Werten des Parameters φ entsprechen, denselben Umkreis. Der Ort der Umkreis-Mittelpunkte aller Dreiecke von (P) und (Q) ist die Mittelsenkrechte von PQ.

Die Figur des Satzes (13) (Fig. 1) läßt, außer der in (14) vorausgesetzten speziellen Lage, noch eine zweite besondere Lage zu. Man lasse den Punkt D nach B, E nach C, F nach A konvergieren. (Fig. 6). Dann nähert sich S einer Grenzlage Ω , die dadurch ausgezeichnet ist, daß $\angle \Omega BC = \angle \Omega CA = \angle \Omega AB$. Vgl. (13). Ω heißt der erste Brocard'sche Punkt des Dreiecks ABC. Bei diesem Grenzübergange wird der Kreis durch A zum Berührungskreise von AB, er liegt dann also ganz auf einer Seite von AB, und da er durch Ω und C geht, so liegen Ω und C an derselben Seite der Richtung AB. Ebenso ergibt sich: Ω und A liegen an derselben Seite der Richtung BC, Ω und B liegen an derselben Seite der Richtung CA. Also liegt Ω im Innern des Dreiecks ABC.

Konvergiert dagegen D nach C, E nach A und F nach B, so nähert sich S als Grenzlage dem zweiten Brocard'schen Punkte Ω' des Dreiecks ABC und es ist $\angle \Omega' CB = \angle \Omega' AC = \angle \Omega' BA$. Ω' liegt ebenfalls im Innern des Dreiecks ABC.

Ist Ω'' Gegenpunkt von Ω , so ist

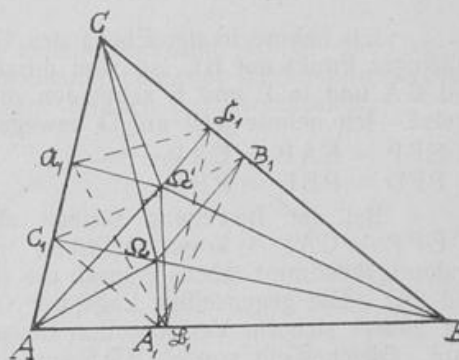
$$\angle \Omega'' AC = \angle \Omega BC,$$

$$\angle \Omega'' BA = \angle \Omega CA,$$

$$\angle \Omega'' CB = \angle \Omega AC, \text{ da aber}$$

$$\angle \Omega AC = \angle \Omega BC = \angle \Omega CA \text{ so folgt}$$

$\angle \Omega'' AC = \angle \Omega'' BA = \angle \Omega'' CB$. Betrachte ich nun z. B. den Kreis durch Ω'' , A und C, so fällt wegen $\angle \Omega'' AC = \angle \Omega'' CB$ der zweite Schnittpunkt von CB mit diesem Kreise mit C zusammen, d. h. der Kreis berührt CB in C u. s. f. Ω'' ist demnach mit Ω' identisch. Der zweite Brocard'sche Punkt des Dreiecks ABC ist also der Gegenpunkt des ersten.



Figur 6.

Infolgedessen lassen sich die Betrachtungen zu Anfang dieses Paragraphen ohne weiteres auf die beiden Brocard'schen Punkte anwenden. Da hier aber das Grunddreieck ABC sowohl zur Schar (Ω) wie zu (Ω') gehört, so bestehen diese beiden Scharen aus dem Dreieck ABC gleichsinnig ähnlichen Dreiecken. Die Umkreisschar ist die sog. Tucker'sche Kreisschar. Der erste Brocard'sche Punkt der Dreiecke von (Ω) ist Ω , der zweite Brocard'sche Punkt der Dreiecke von (Ω') ist Ω' .

Die A entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke (Ω) liegen auf AB , die A entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke (Ω') auf $AC^*)$. Da Ω und Ω' innerhalb des Grunddreiecks liegen, so ist es möglich, die Richtung $A\Omega$ mit der Richtung AB , die Richtung $A\Omega'$ mit der Richtung AC durch eine Drehung zur Deckung zu bringen, deren Betrag ω kleiner ist als $\frac{\pi}{2}$.

$A_1B_1C_1$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ seien zwei zugehörige Dreiecke der Scharen (Ω) und (Ω') , d. h. zwei Dreiecke, die gleichen aber entgegengesetzten Werten des Parameters φ entsprechen. Dann ist

$$\sphericalangle B_1A_1B = \sphericalangle B_1\Omega B,$$

$$\sphericalangle C_1B_1C = \sphericalangle C_1\Omega C. \quad \text{Da aber}$$

$$\sphericalangle \Omega BB_1 = \sphericalangle \Omega CC_1 \quad \text{und}$$

$$\sphericalangle BB_1\Omega = \sphericalangle CC_1\Omega, \quad \text{so folgt nach (10)}$$

$$\sphericalangle B_1\Omega B = \sphericalangle C_1\Omega C, \quad \text{und daher auch}$$

$\sphericalangle B_1A_1B = \sphericalangle C_1B_1C$ und ferner, wie sich in derselben Weise ergibt, $= \sphericalangle A_1C_1A$. Die Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ bilden demnach mit den entsprechenden Seiten von ABC gleiche Winkel. Ebenso erhält man: Die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ bilden mit den entsprechenden Seiten von ABC gleiche Winkel.

Es ist ferner

$$\sphericalangle A\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1 = \sphericalangle A\Omega'\mathfrak{A}_1, \quad \text{und wie oben}$$

$\sphericalangle B_1A_1B = \sphericalangle B_1\Omega B$. Da nun $A_1B_1C_1$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ durch zwei dem Betrage nach gleiche, dem Sinne nach entgegengesetzte Drehungen aus den Lotfußpunktsdreiecken hervorgegangen sind, so erhält man leicht:

$$\sphericalangle \Omega B_1B = \sphericalangle A\mathfrak{A}_1\Omega'. \quad \text{Ferner ist}$$

$$\sphericalangle B_1B\Omega = \sphericalangle \Omega'A\mathfrak{A}_1, \quad \text{folglich nach (12)}$$

$$\sphericalangle A\Omega'\mathfrak{A}_1 = \sphericalangle B_1\Omega B, \quad \text{also auch}$$

$$\sphericalangle A\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1 = \sphericalangle B_1A_1B.$$

Die Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ bilden mit den entsprechenden Seiten des Dreiecks ABC denselben Winkel wie die Seiten des Dreiecks ABC mit den entsprechenden Seiten des Dreiecks $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$.

Es werde jetzt insbesondere vorausgesetzt, daß die positive Drehungsrichtung so festgesetzt worden sei, daß $\sphericalangle \Omega AB = \omega$ und infolgedessen $\sphericalangle CA\Omega' = \omega$ ist. Das Dreieck ABC gehört in (Ω) zu dem Parameter $-(\frac{\pi}{2} - \omega)$, in (Ω') zu dem Parameter $\frac{\pi}{2} - \omega$.

$A_1B_1C_1$ sei das in (Ω) zu $\varphi = \omega$ gehörende Dreieck, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ das in (Ω') zu $-\omega$ gehörende. Es ist $\sphericalangle B_1A_1B = \sphericalangle B_1\Omega B = \frac{\pi}{2}$. $A_1B_1C_1$ ist ABC unter rechtem Winkel eingeschrieben, gleiches gilt von $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$. Der Mittelpunkt $\mathfrak{L}$ des Umkreises von $A_1B_1C_1$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ wird Lemoine'scher oder Grebe'scher Punkt des Dreiecks ABC genannt, der Umkreis von $A_1B_1C_1$ der 2. Lemoine'sche Kreis. Im 2. Lemoine'schen Kreise ist, da z. B. A_1C_1 senkrecht zu AC , $A_1\mathfrak{A}_1$ Durchmesser, $A_1\mathfrak{A}_1$ geht also durch den Lemoine'schen Punkt L , ebenso $B_1\mathfrak{B}_1$ und $C_1\mathfrak{C}_1$. Nach (7) ist jetzt

$$\sphericalangle A\mathfrak{A}_1A_1 = \sphericalangle C_1\mathfrak{A}_1A_1 = \sphericalangle C_1B_1A_1 = \sphericalangle CBA. \quad \text{Ferner}$$

$\sphericalangle A_1A\mathfrak{A}_1 = \sphericalangle BAC$. Nach (12) sind also $A\mathfrak{A}_1A_1$ und ABC ungleichsinnig ähnlich. Man nennt in diesem Falle $A_1\mathfrak{A}_1$ antiparallel zu BC bezüglich des Zweistrahls AB, AC . Klappt man $A\mathfrak{A}_1A_1$ um eine Symmetrieachse des Zweistrahls AB, AC um, so wird $A_1\mathfrak{A}_1$ parallel zu BC , $A\mathfrak{L}$ wird $A_1\mathfrak{A}_1$ und daher BC halbieren und wird außerdem Gegentransversale zu ihrer Anfangslage. Man erhält also:

Die Antiparallelen zu den Dreiecksseiten durch den Lemoine'schen Punkt schneiden die Seiten in Punkten des zweiten Lemoine'schen Kreises. Der Lemoine'sche Punkt ist der Gegenpunkt des Schwerpunktes. (Symmedianpunkt).

*) Die A entspr. Eckpunkte der Dreiecke (Ω) sollen mit A_1 bezeichnet werden usw., die A entspr. Eckpunkte der Dreiecke von (Ω') mit $\mathfrak{A}_1$ u. s. f.

§ 6. Ausdehnung der Sätze des § 3 auf Kegelschnitte.

Der Beweis der Sätze (13) und (14) beruht auf den Sätzen (2), (7) und (8), der Beweis des Satzes (14) benutzt ferner noch den Satz (10). Der Beweis von (14) kann aber auch ohne Benutzung von (10) geführt werden. Zu diesem Zwecke werde ein Punkt der Figur, durch den zwei Kreise gehen, ein Punkt erster Ordnung, ein Punkt durch den drei Kreise gehen, ein Punkt zweiter Ordnung genannt.

Man betrachte jetzt ein von vier Geraden I, II, III und IV gebildetes Vierseit, und zwar werde vorausgesetzt, daß die Schnittpunkte der Geraden IV mit I, II, III von den Schnittpunkten der Geraden I, II, III verschieden seien, ebenso die Schnittpunkte von I, II, III unter einander. Wende ich jetzt den Satz (13) auf das von I, II, III gebildete, von IV geschnittene Dreieck an, wobei die Schnittpunkte von IV mit I, II, III den Punkten D, E, F entsprechen, so erhalte ich drei sich in einem Punkte schneidende Kreise. Außer diesem Schnittpunkte zweiter Ordnung hat jeder dieser drei Kreise mit einem anderen des Systems noch einen Punkt erster Ordnung gemein. Diese Schnittpunkte erster Ordnung sind die Schnittpunkte von IV mit I, II, III und sind daher von einander verschieden. Auf jedem Kreise des Tripels liegen demnach zwei Punkte erster Ordnung. Wird nun noch der Umkreis des von I, II, III gebildeten Dreiecks mit in die Betrachtung gezogen, so kann dieser Kreis nicht durch einen Punkt erster Ordnung des betrachteten Kreistripels gehen. Denn ein solcher Punkt des Tripels liegt auf einer der Geraden I, II, III, etwa auf I, und müßte also, um auf dem Umkreise des Dreiecks I, II, III zu liegen, mit einem der Schnittpunkte von I mit II, III, zusammenfallen, was der Voraussetzung widerspricht. Nehme ich nun an, der Umkreis des Dreiecks I, II, III gehe nicht durch den Punkt zweiter Ordnung des betrachteten Kreistripels, so schneide er jeden Kreis des Tripels in zwei Punkten erster Ordnung. Zwei Kreise des Tripels, etwa die Umkreise der Dreiecke I, II, IV und I, III, IV, würden also mit dem Umkreise von I, II, III eine Figur bilden, die keinen Punkt zweiter Ordnung aufwiese. Wende ich aber den Satz (13) auf das von II, III, IV gebildete, von I geschnittene Dreieck an, so folgt, daß die Umkreise der Dreiecke I, II, IV; I, III, IV und I, II, III sich in einem Punkte zweiter Ordnung schneiden. Die Annahme, der Umkreis von I, II, III ginge nicht durch den gemeinsamen Punkt des zuerst betrachteten Kreistripels, ist also falsch.

In diesem Beweise von (14) ist, außer dem Satze (13), nur die Eigenschaft des Kreises benutzt, mit einem anderen Kreise (oder einer Geraden), den (oder die) er in einem Punkte schneidet, noch einen zweiten, unter Umständen mit dem ersten zusammenfallenden Punkt gemein zu haben. Der Beweis von (13) benutzt Teil 2 des Satzes (2), sowie die Sätze (7) und (8).

Es sei nun S eine Gruppe von drei Punkten S_1, S_2, S_3 . Sind Q und R zwei beliebige andere Punkte, so soll das Doppelverhältnis der Strahlen S_1Q, S_2Q, S_3Q, RQ mit dem Symbol $\angle SQR$ bezeichnet werden. Dann gilt Teil 2 des Satzes (2):

Ist R' irgend ein anderer Punkt der durch R und Q bestimmten Geraden, so ist $\angle SQR = \angle SQR'$.

Sind Q und Q' zwei Punkte einer Kurve zweiter Ordnung, die durch S und R geht, so gilt der dem Satze (7) entsprechende Satz:

Liegen S, R, Q, Q' auf einer Kurve zweiter Ordnung, so ist $\angle SQR = \angle SQ'R$.

Umgekehrt gilt auch der (8) entsprechende Satz:

Ist $\angle SQR = \angle SQ'R$, so liegen S, R, Q, Q' auf einer Kurve zweiter Ordnung.

Ich nehme jetzt in der Ebene eines Dreiecks ABC zwei beliebige Punkte S_1, S_2 an. Sind D, E, F beliebige Punkte auf den Seiten des Dreiecks, und ist S_3 der vierte Schnittpunkt der Kegelschnitte durch S_1, S_2, A, E, F und durch S_1, S_2, B, F, D , so läßt sich der Beweis des Satzes (13) wörtlich durchführen, wenn die Punktgruppe S_1, S_2, S_3 mit S bezeichnet wird, das Symbol $\angle SQR$ in dem eben auseinandergesetzten Sinne gebraucht wird und außerdem die Sätze (7) und (8) in der modifizierten Form benutzt werden. Man erhält dann den dem Satze (13) entsprechenden Satz:

Nimmt man in der Ebene eines Dreiecks ABC zwei Punkte S_1, S_2 und auf den Seiten des Dreiecks bez. die Punkte D, E und F an, so schneiden die Kegelschnitte durch A, E, F, S_1, S_2 , durch B, F, D, S_1, S_2 und durch C, D, E, S_1, S_2 einander in einem und demselben Punkte S_3 .

Liegen D, E, F in einer Geraden, so erhält man vier Kegelschnitte, die S_1 und S_2 gemein haben und den Dreiecken des vollständigen Vierseits umgeschrieben sind. Je zwei dieser Kegelschnitte haben, wenn außer S_1, S_2 noch Q ein Schnittpunkt beider ist, überdies noch einen Punkt R gemein. Diese Eigenschaft entspricht der Eigenschaft zweier Kreise, die, wenn Q ein Schnittpunkt beider ist, überdies noch einen Punkt P gemein haben. Ein Kegelschnitt wird außerdem von einer Geraden in zwei Punkten geschnitten. Der letzte Beweis des Satzes (14) läßt sich also ohne weiteres auf die vorliegende Figur übertragen. Man hat nur so zu tun, als ob die Punkte S_1 und S_2 überhaupt nicht vorhanden wären, d. h. sie nicht als Schnittpunkte der Kegelschnitte mitzuzählen, und statt Kreis Kegelschnitt zu sagen. Man erhält also:

Haben vier den Dreiecken eines vollständigen Vierseits umschriebene Kegelschnitte zwei Punkte gemein, so schneiden sie sich noch in einem und demselben dritten Punkte.

(Ein analytischer Beweis des letzten Satzes findet sich bei „Pfaff, Kegelschnittssysteme am vollst. Vierseit“. Programm des Gymn. Helmstedt 1913. Leipzig Nr. 989).



Liegen D, E, F in einer Geraden, so er-
gemein haben und den Dreiecken des vollständigen
Kegelschnitte haben, wenn außer S_1, S_2 noch Q ein
Punkt R gemein. Diese Eigenschaft entspricht der
Schnittpunkt beider ist, überdies noch einen Punkt
außerdem von einer Geraden in zwei Punkten ges-
läßt sich also ohne weiteres auf die vorliegende Figu-
ob die Punkte S_1 und S_2 überhaupt nicht vorhanden
Kegelschnitte mitzuzählen, und statt Kreis Kegelschni-

Haben vier den Dreiecken eines
schnitts zwei Punkte gemein, so schne-
dritten Punkte.

(Ein analytischer Beweis des
systeme am vollst. Vierseit". Progr



und S_2
ei dieser
ch einen
n Q ein
itt wird
zes (14)
tun, als
unkte der

e Kegel-
emselben

gelschnitt-
Nr. 989).

