

Vorwort.

Den in meinem Programm von 1884 behandelten ähnlichen Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks stehen zwei Gruppen congruenter gleichlaufender Strahlenbüschel aus den Ecken desselben gegenüber. Dies sind entweder die Büschel, in welchen die Strahlen AB, BC, CA oder diejenigen, in denen AC, CB, BA einander entsprechen. Jedes Tripel entsprechender Strahlen in den drei ersten Büscheln giebt ein dem Dreieck ABC umschriebenes und ihm gleichwändig ähnliches Dreieck $\alpha\beta\gamma$; zur Schar der Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ gehört ABC selbst, und der erste Segmentärpunkt O von ABC ist das Nulldreieck der Schar. Dasselbe gilt von der den anderen drei Büscheln zugehörenden Schar, deren Nulldreieck aber der zweite Segmentärpunkt P des Dreiecks ABC ist. Wenn man den Strahl AB nicht dem Strahle BC, sondern einem beliebigen Strahle BX und diesen wiederum einem beliebigen Strahle CY entsprechen lässt, so gelangt man ebenfalls zu einer Schar dem Dreieck ABC umschriebener und einander gleichwändig ähnlicher Dreiecke $\alpha\beta\gamma$; diese sind aber im allgemeinen nicht mehr dem Urdreiecke ABC ähnlich. Die Eigenschaften solcher Scharen, insbesondere diejenigen ihrer Nulldreiecke, bilden den Gegenstand der Untersuchungen des ersten Theiles dieser Abhandlung.

Der zweite Teil ist eine Anwendung einiger allgemeinen Resultate des ersten und enthält eine Untersuchung von 48 ausgezeichneten Punkten des Dreiecks ABC, welche, wie folgt, definiert werden:

1. Die 6 Punkte (O), je mit einem positiven Coordinatenprodukt, aus denen die Seiten des Dreiecks ABC unter dessen Winkeln resp. deren Supplementen erscheinen; desgl. diejenigen 6 Punkte (S), je mit einem positiven Coordinatenprodukt, aus denen jene Seiten unter den Winkeln desjenigen Dreiecks erscheinen, welches aus den Schwerlinien von ABC gebildet ist.
2. Die 6 Winkelgegenpunkte (P) von (O) und diejenigen (T) von (S).
3. Die zweimal 6 Punkte (O') und (S') von derselben Eigenschaft, wie in 1., nur je mit einem negativen Coordinatenprodukt.
4. Die 6 Winkelgegenpunkte (O'') von (O') und diejenigen (S'') von (S').

Diese 48 Punkte verteilen sich zu je zwölf auf 4 Linien:

- a. Die Gerade G, auf welcher die Seiten von ABC von den in ihren Gegenecken an den Kreis ABC gelegten Tangenten geschnitten werden, enthält die Punkte (O'') und (S'').
- b. Die Ellipse E, welche dem Dreieck ABC umschrieben ist und seinen Schwerpunkt S zum Centrum hat, enthält die Punkte (O') und (S').
- c. Der Kreis $\mathfrak{K}$, dessen einer Durchmesser das Centrum M des Kreises um ABC mit dem Winkelgegenpunkte K vom Schwerpunkt S verbindet, enthält die Punkte (P) und (T).
- d. Die Curve C^4 , deren Punkte die Winkelgegenpunkte des Kreises $\mathfrak{K}$ sind, enthält die Punkte (O) und (S).

Der in c. erwähnte Kreis $\mathfrak{K}$ ist derselbe, auf welchen Herr Brocard in Montpellier zuerst aufmerksam gemacht hat. Herr B. entdeckte auf ihm 10 Punkte, nämlich einen der oben genannten sechs Punkte T, welchen er mit K bezeichnet; ferner die 6 Punkte (P), ohne jedoch ihre oben angegebene gemeinsame Definition erkannt, oder wenigstens ohne ihr Bedeutung beigelegt zu haben; er bezeichnet diese Punkte mit H, O, O', A₂, B₂, C₂; ausserdem fand Herr B. drei ausgezeichnete Punkte A', B', C', die den Systemen (P) und (T) nicht angehören. Dass seine Arbeiten interessant waren, beweist der Umstand, dass sich seit ihrer Veröffentlichung sowohl die Zahl der Bearbeiter des Brocard'schen Kreises, als auch die Zahl der Lehrsätze über denselben sehr gemehrt hat. Nachdem nun aber das über diesen Gegenstand herbeigebrachte Material bereits ein recht ansehnliches geworden ist, bleibt uns immer noch die Hauptfrage zu beantworten, nämlich diejenige, aus welchem Principe die Eigenschaften jenes Kreises wie aus einer gemeinsamen Quelle sich ergeben. Dass dieses bisher nicht geschehen ist, scheint mir in folgendem Umstande zu liegen. Jene 10 Punkte wurden bisher in gesonderten Gruppen aufgefasst: die drei Punkte A', B', C' wurden für sich definiert; desgleichen wurden dies die Punkte A₂, B₂, C₂; eine dritte Specialgruppe bildeten O und O', während H und K für sich dastanden. Gibt es nun aber nicht doch eine gemeinsame, sie alle umfassende Definition, welche die Grundlage zu einer einheitlichen Untersuchung bildet?

Wenn man die drei erstgenannten Punkte ausscheidet und statt ihrer die fehlenden 5 Punkte (T) einführt, so ist dies allerdings der Fall. Die 6 Punkte (P) erhalten dann, wie dies oben unter 2. angegeben ist, eine gemeinsame Definition, und eine ihr ganz analoge erhalten die 6 Punkte (T). Die aus dieser Auffassung entspringenden Untersuchungen führen aber, wie wir unten sehen werden, zu einer noch engeren Verwandtschaft der Systeme (P) und (T). Es giebt nämlich ausser dem Dreieck ABC noch ein zweites Dreieck A₂B₂C₂, welches dem ersteren in seinen Beziehungen zum Kreise $\mathfrak{K}$ und seinen Punkten (P) und (T) äquivalent ist. Seine Ecken sind nämlich die zweiten Schnittpunkte des Kreises ABC mit den Transversalen AK, BK, CK. Es ist ähnlich dem aus den Schwerlinien von ABC gebildeten Dreiecke und hat mit ABC den Punkt K sowie den Umkreis, und also auch dessen Centrum M gemein, desgl. die beiden Segmentärpunkte. Jeder der zwölf Punkte (P) und (T) ist dann für einen der beiden Zwillinge ABC und A₂B₂C₂ ein Ppunkt, für den andern ein Tpunkt. Durch diese Doppeleigenschaft ist dann also eine gemeinsame Definition für alle 12 Punkte hergestellt. — Ausser dieser Uebereinstimmung finden wir noch eine gegenseitige Harmonie in der Lagerung dieser Punkte. Es giebt nämlich sechsmal 3 Punkte (P), die je zu einem Punkte T, und gleichfalls sechsmal 3 Punkte (T), welche je zu einem Punkte P harmonisch liegen. Mittels einer bekannten Transformationsmethode lässt sich der Kreis $\mathfrak{K}$ in die Gerade G verwandeln; seine Punkte (P) und (T) werden dadurch die Punkte (O'') und (S''), und auch diesen kommt dieselbe Harmonie der Lagerung zu, welche für ihre Gegenbilder (P) und (T) besteht. Desgleichen besteht für die Dreiecke ABC und A₂B₂C₂ dieselbe Aequivalenz gegenüber der Geraden G, welche sie für $\mathfrak{K}$ besitzen. G wiederum geht mittels einer anderen ebenfalls bekannten Transformation in die Ellipse E über, die Systeme (O'') und (S'') verwandeln sich in die Systeme (O') und (S') und auch für diese besteht die erwähnte Harmonie der Lagerung. Die Ellipse E gehört aber nur noch dem Dreiecke ABC an; dem Dreieck A₂B₂C₂ entspricht eine andere Ellipse mit einem anderen Systeme von zwölf Punkten. Das Letztere gilt auch von der Curve C₄, welche aus $\mathfrak{K}$ auf dieselbe Weise abgeleitet wird, wie E aus G. Auch fehlen die harmonischen Eigenschaften für die Punktsysteme (O) und (S) der Curve C₄; ob dafür analoge Eigenschaften eintreten, habe ich nicht untersucht.



Erster Teil.

Vorbemerkung.

1. Die Ecken eines dem festen Dreieck ABC umschriebenen Dreiecks werden ein für allemal mit α, β, γ bezeichnet, und diese Buchstaben so verteilt werden, dass die Ecken A, B, C der Reihe nach auf den Seiten $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ liegen. Dann schneiden sich die Schenkel der Winkel A und α in B bez. in C , und ihre Scheitel A und α liegen deshalb beide der Seite BC gegenüber. In rücksicht auf diese Uebereinstimmung sollen A und α zwei entsprechende Winkel der Dreiecke ABC und $\alpha\beta\gamma$ heissen, und es ist klar, dass aus gleichem Grunde auch B und β , sowie C und γ einander entsprechen. Zugleich sei festgestellt, dass, wenn ABC und $\alpha\beta\gamma$ gleichwendig oder gegenwendig genannt werden, dies nur in dem Sinne zu nehmen ist, dass die Drehungen ABC und $\alpha\beta\gamma$ gleich resp. entgegengesetzt seien. Wäre also z. B. das Letztere der Fall und $A = \alpha, B = \beta$, so wären die beiden Dreiecke zwar gleichwendig ähnlich, in dem von uns festgesetzten Sinne aber ungleichwendig.
2. Die Punkte O und P heissen Winkelgegenpunkte für ABC , wenn $\angle OAB = \angle PAC$, $\angle OBC = \angle PBA$, also $\angle OCA = \angle PCB$ ist.
3. O heisst der erste Segmentärpunkt des Dreiecks ABC , wenn $\angle OAB = \angle OBC = \angle OCA$ ist. Sein Winkelgegenpunkt P heisst der zweite Segmentärpunkt von ABC .

§ 1.

Dreiecke einer und derselben Schar.

(Siehe die Figuren 1, 2, 3.)

1. Drehen sich die Seiten $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ eines dem Dreieck ABC umschriebenen Dreiecks um A, B, C in demselben Sinne und um denselben Winkel λ , so entsteht ein zweites Dreieck mit den Winkeln α, β, γ , welches ABC in derselben Weise umschrieben ist, wie das erste. Denn beide Dreiecke sind 1. einander gleichwendig, also 2. beide dem Dreieck ABC gleichwendig, oder ihm beide gegenwendig und 3. jedes Paar homologer Seiten geht durch dieselbe Ecke von ABC , und jedes Paar homologer Winkel entspricht demselben Winkel von ABC . Nimmt λ jeden möglichen Wert an, so entstehen unendlich viele gleichwendig ähnliche Dreiecke, welche ABC in demselben Sinne umschrieben sind. Wir nennen sie eine Schar gleichwendig ähnlicher, dem Dreiecke ABC umschriebener Dreiecke, mit Ausschluss aller anderen ihnen ebenfalls gleichwendig ähnlichen Dreiecke, welche ABC in irgend einem anderen Sinne umschrieben sind.

Ueber die Dreiecke einer solchen Schar gelten folgende Lehrsätze:

2. Die homologen Ecken der Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ liegen auf drei Kreisen $BC\alpha, CA\beta, AB\gamma$, welche sich in einem Punkte O schneiden.
3. Dieser Punkt O ist für alle Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ ein und derselbe Punkt; die Seiten BC, CA, AB erscheinen aus ihm unter den Winkeln α, β, γ resp. deren Supplementen.
4. Die Schar $(\alpha\beta\gamma)$ hat ein Nulldreieck, nämlich den Punkt O .

5. Dasjenige Dreieck $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ der Schar, dessen Seiten senkrecht zu OA, OB, OC stehen, ist das grösste; ist λ der Winkel, den die Seiten eines anderen Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ mit den ihnen homologen Seiten des Maximumdreiecks bilden, so ist $\frac{\beta\gamma}{\beta_0\gamma_0} = \cos\lambda$ und $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha_0\beta_0\gamma_0} = \cos^2\lambda$.
6. Da $\cos\lambda = \cos(-\lambda)$, so liegen je zwei congruente Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ symmetrisch zu $\alpha_0\beta_0\gamma_0$.
7. Sind A_0, B_0, C_0 die Centra der drei Ortskreise BCO α , CAO β , ABO γ , so ist $A_0B_0C_0 \sim \alpha_0\beta_0\gamma_0$ und mit ihm in Aehnlichkeitslage; O ist der Aehnlichkeitspunkt und für $A_0B_0C_0$ derselbe Punkt wie für die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$. $\frac{A_0B_0}{\alpha_0\beta_0} = \frac{1}{2}$.

8. Sind δ_0 und δ homologe Punkte für $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ und $\alpha\beta\gamma$, so liegt δ auf dem Kreis mit dem Durchmesser $O\delta_0$; dessen Centrum ist D_0 , der zu δ homologe Punkt in $A_0B_0C_0$.

Den vorstehenden Sätzen, welche bekannt sind, reihen wir noch die folgenden an:

9. Sind L_0 und L zwei homologe Geraden für $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ und $\alpha\beta\gamma$, $O\delta_0$ ein Lot auf L_0 , so geht L durch δ_0 . Denn das Lot $O\delta$ zu L ist die zu $O\delta_0$ homologe Strecke und deshalb nach 8. $\angle \delta_0\delta O = R$, m. a. W. die Senkrechte zu $O\delta$ in δ , und diese ist L , geht durch δ_0 .

Homologe Geraden der Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ bilden also ein Büschel, dessen Scheitel der Fussp. des Lotes aus O auf die dem $\triangle \alpha_0\beta_0\gamma_0$ zugehörige L_0 ist; dies Büschel ist congruent und gleichlaufend den Büscheln A($\beta\gamma$), B($\gamma\alpha$), C($\alpha\beta$).

10. Liegen die Punkte O und O' auf einem Kreise mit der Sehne BC, so liegen ihre Winkelgegenpunkte P und P' ebenfalls auf einem Kreise mit der Sehne BC.

Denn die Büschel B(OO') und C(OO') sind congruent und gleichlaufend. B(PP') und C(PP') sind congruent und gegenläufig mit B(OO') resp. C(OO'); daher sind sie congruent und gleichlaufend zu einander, m. a. W. B, C, P, P' liegen auf einem Kreise.

11. Liegt O innerhalb ABC, so erscheinen aus ihm die Seiten $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$, unter den Winkeln $A + \alpha, B + \beta, C + \gamma$; denn $\angle O\gamma\alpha = O\gamma B = OAB$; $O\alpha\gamma = O\alpha B = OCB$; deshalb $O\gamma\alpha + O\alpha\gamma = OAB + OCB = AOC - ABC \equiv 2R - (B + \beta)$; daher: $\gamma O\alpha = B + \beta$ u. s. w.

Soll dieser Satz für jede Lage von O seine Gültigkeit behalten, so erhält er folgende Fassung (Figur 2 und 3):

Sind ABC und $\alpha\beta\gamma$ gleichwendig, so sind die drei Folgewinkel $\beta O\gamma, \gamma O\alpha, \alpha O\beta$ bez. gleich den Summen $A + \alpha, B + \beta, C + \gamma$.

Sind ABC und $\alpha\beta\gamma$ gegenwendig, so tritt statt des einen Folgewinkels seine Ergänzung zu 4 Rechten ein, und ausserdem sind die Winkel des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ negativ zu nehmen. Im Falle der Ungleichwendigkeit nämlich ist, wie unten gezeigt wird, O von einer Ecke des Dreiecks ABC durch ihre Gegenseite getrennt. Ist A diese Ecke, so ist $\beta O\gamma$ derjenige unter den drei genannten Folgewinkeln, der nicht selbst, sondern dessen Ergänzung zu 4 R der algebraischen Summe $A + \alpha$, oder, wenn die Absolutwerte gelten, $A - \alpha$ gleich ist.

12. Im Dreieck ABC sei P der Winkelgegenpunkt von O. Dann ist mit denselben Modifikationen, wie in 9.: $\angle BPC = A + \alpha, CPA = B + \beta, APC = C + \gamma$.

Denn ist etwa O, also auch P, ein innerer Punkt, so ist:

$$\angle BPC = A + PCA + PBA = A + OCB + OBC = A + \alpha.$$

13. Die Seiten der umschriebenen Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ (auch diejenigen von $A_0B_0C_0$) erscheinen also aus O unter denselben Winkeln, wie die ihnen entsprechenden Seiten von ABC aus P, dem Winkelgegenpunkte von O.

14. M, das Centrum des Kreises um ABC, ist für $A_0B_0C_0$ der Winkelgegenpunkt von O; denn $\angle OB_0C_0 = O\beta_0\gamma_0 = OCA$; auch ist $MB_0A_0 = OCA$, da ihre Schenkel senkrecht zu einander stehen und beide Winkel gleichwendig sind, also $O B_0 C_0 = M B_0 A_0$ u. s. w.

Wird $O\mu_0$ von M halbiert, so ist μ_0 der Winkelgegenpunkt von O für $\alpha_0\beta_0\gamma_0$; der Kreis um M mit MO ist also nach 8. der Ort der Winkelgegenpunkte von O für die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$.

15. Da $B_0MC_0 = 2R - A$ u. s. w., so gilt in Verbindung mit 12. der Satz:

Im Dreieck ABC giebt es zwei Punkte P und H (Höhenpunkt), aus denen die Seiten von ABC unter denselben Winkeln erscheinen, wie die ihnen entsprechenden Seiten des Centralendreiecks $A_0B_0C_0$ aus M resp. O, den Winkelgegenpunkten von H und P für das Dreieck ABC und Winkelgegenpunkten zu einander für $A_0B_0C_0$. Mit der Modifikation, dass μ für M eintritt, gilt dieser Satz auch für die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$; dann ist aber selbstverständlich μ nicht mehr Winkelgegenpunkt von H für das $\triangle ABC$, sondern nur derjenige von O für das betreffende Dreieck $\alpha\beta\gamma$.

16. Jedes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ wird durch O in drei Dreiecke geteilt, welche denjenigen Dreiecken ähnlich sind, in welche ABC von P geteilt wird. Je nachdem dann ABC und $\alpha\beta\gamma$ gleich- oder gegenwändig sind, sind die Teildreiecke von $\alpha\beta\gamma$ denen von ABC gegenwändig, oder gleichwändig; z. B.: $\alpha O\beta \sim BPA$; denn $\sphericalangle O\beta\alpha = \sphericalangle OAC = \sphericalangle PAB$ u. s. w., also:

$$O\alpha : O\beta : O\gamma = \frac{1}{PA} : \frac{1}{PB} : \frac{1}{PC}, \text{ oder: } O\alpha \cdot PA = O\beta \cdot PB = O\gamma \cdot PC.$$

Wir erhalten dadurch das Mittel zur Lösung der Aufgaben:

- Die zwei gleichwändigen Dreiecke ABC und $\alpha\beta\gamma$ je in drei Teildreiecke zu zerlegen, so dass diejenigen des ersteren denen des anderen gegenwändig ähnlich sind, ihre Aufeinanderfolge aber derjenigen der drei anderen Dreiecke gleichwändig ist. Oder: Wenn ABC und $\alpha\beta\gamma$ gegenwändig sind, die Teilung so vorzunehmen, dass die ähnlichen Dreiecke gleichwändig, die Aufeinanderfolge der Teildreiecke in ABC aber derjenigen der Teildreiecke in $\alpha\beta\gamma$ gegenwändig sei.
- Dieselbe Aufgabe, wenn statt ABC und $\alpha\beta\gamma$ die Dreiecke ABC und BCA, oder etwa ABC und ACB gegeben sind u. s. w., d. h. wenn ein und dasselbe Dreieck zweimal in verschiedener Winkelfolge genommen wird.

§ 2.

Die Zahl der Umschreibungen eines Dreiecks um ein anderes und deren Einteilung.

- Es sei $\triangle abc \sim \triangle a'b'c'$, und es mögen a und a' dem Winkel A, b und b' dem Winkel B, c und c' dem Winkel C entsprechen. ABC soll mit abc gleichwändig und zu a'b'c' gegenwändig sein; dann sind auch abc und a'b'c' gegenwändig. Wir ziehen nun durch A die Parallelen zu bc und b'c', durch B zu ca und c'a', durch C zu ab und a'b' und erhalten somit zwei dem Dreieck ABC umschriebene und einander ähnliche Dreiecke. Die Art ihrer Umschreibung ist insofern dieselbe, als (vgl. Vorbemerkung zu § 1) ihre homologen Winkel je demselben Winkel in ABC entsprechen und als ihre homologen Seiten je durch dieselbe Ecke von ABC gehen. Darin aber unterscheiden sich die beiden Umschreibungen, dass $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ gegenwändig sind und deshalb das eine, nämlich $\alpha\beta\gamma$ mit ABC gleichwändig liegt, während $\alpha'\beta'\gamma'$ zu ABC gegenwändig ist.

Zwei Dreiecke, die einander gegenwändig ähnlich und demselben Dreieck ABC in derselben Weise umschrieben sind, nämlich so, dass jeder Winkel in ABC einem Paar homologer Winkel der umschriebenen Dreiecke entspricht, sollen der Kürze halber Zwillingendreiecke heißen. Die zwei Scharen, zu denen sie gehören, sollen Zwillingsscharen, und deren Nulldreiecke Zwillingsschwerpunkte genannt werden.

2. Den sechs Permutationen von ABC entsprechend, lassen sich nun die homologen Winkel der beiden Modelldreiecke abc und $a'b'c'$ denen von ABC auf sechsfache Art zuordnen. Für jede einzelne Zuordnung kann man dieselbe Konstruktion wie in 1. ausführen und erhält auf diese Art sechs Paare von Zwillingendreiecken.
3. Wir gruppieren diese zwölf Umschreibungen folgendermassen:

I. 1. $\alpha_1\beta_1\gamma_1 \sim abc$.	2. $\alpha_2\beta_2\gamma_2 \sim cab$.	3. $\alpha_3\beta_3\gamma_3 \sim bca$.
II. 4. $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1 \sim a'b'c'$.	5. $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2 \sim c'a'b'$.	6. $\alpha'_3\beta'_3\gamma'_3 \sim b'c'a'$.
III. 7. $\alpha_4\beta_4\gamma_4 \sim acb$.	8. $\alpha_5\beta_5\gamma_5 \sim cba$.	9. $\alpha_6\beta_6\gamma_6 \sim bac$.
IV. 10. $\alpha'_4\beta'_4\gamma'_4 \sim a'c'b'$.	11. $\alpha'_5\beta'_5\gamma'_5 \sim c'b'a'$.	12. $\alpha'_6\beta'_6\gamma'_6 \sim b'a'c'$.
4. Je zwei Dreiecke derselben Vertikalreihe, einerseits in den Gruppen I und II, andererseits in den Gruppen III und IV sind Zwillinge.
5. Die sechs Dreiecke in I und IV sind ABC gleichwendig, diejenigen in II und III sind ihm gegenwendig, denn es ist z. B. $\alpha'_4\beta'_4\gamma'_4$ gleichwendig $a'c'b'$, also gegenwendig $a'b'c'$, also gleichwendig ABC.
6. Für die drei Dreiecke einer und derselben Gruppe entsprechen je drei homologe Winkel nicht demselben, sondern verschiedenen Winkeln in ABC und je drei homologe Seiten gehen nicht durch dieselbe Ecke, sondern durch verschiedene Ecken in ABC, und zwar in cyklischer Anordnung, z. B.: $\alpha_1 = a = \beta_2 = \gamma_3$ sind homologe Winkel und sie entsprechen der Reihe nach den Winkeln A, B, C; $\beta_1\gamma_1, \gamma_2\alpha_2, \alpha_3\beta_3$ sind homologe Seiten und sie gehen der Reihe nach durch die Ecken A, B, C.
7. Derselbe Satz gilt auch für irgend drei Dreiecke aus verschiedenen Columnen, wenn sie entweder aus I und II, oder wenn sie aus III und IV entnommen sind.
8. Für je zwei Dreiecke aus I und III, desgl. aus I und IV, sowie aus II und III, desgl. aus II und IV, das eine Dreieck aus der einen Gruppe, das andere aus der anderen entnommen, giebt es stets ein Paar homologer Winkel, die demselben Winkel in ABC entsprechen, also ein Paar homologer Seiten, die durch dieselbe Ecke von ABC gehen. In $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, z. B. und $\alpha_6\beta_6\gamma_6$ ist $\gamma_1 = c = \gamma_6$; beide entsprechen C und es gehen $\alpha_1\beta_1$ und $\alpha_6\beta_6$ beide durch C. —

§. 3.

Kriterium für die Gleich- oder Gegenwendigkeit von ABC mit den Dreiecken einer Schar, deren Nulldreieck O gegeben ist.

Um ein solches Kriterium zu ermitteln, beachten wir:

1. O kann im allgemeinen drei verschiedene Lagen haben.
 - a. O liegt innerhalb ABC und ist deshalb von keiner Ecke durch deren Gegenseite getrennt; jeder der drei Folgewinkel BOC, COA, AOB ist ein hohler.
 - b. O liegt innerhalb eines der drei Innenwinkel, etwa CAB, aber ausserhalb des Dreiecks und ist dann von der Ecke jenes Innenwinkels, also hier von A, durch ihre Gegenseite BC getrennt. Derjenige von den drei genannten Folgewinkeln, dessen Schenkel nicht durch jene Ecke gehen, also hier der Winkel BOC, ist überstumpft.
 - c. O kann im Scheitelraum eines der drei Innenwinkel, etwa desjenigen von A liegen und ist dann von B durch CA, von C durch AB getrennt; wiederum ist BOC überstumpft.
2. a. Hat O die Lage a, so ist $O(ABC)$ gleichwendig ABC, d. h. die Drehung, welche OA um O machen muss, um zuerst auf OB, dann auf OC zu fallen, ist dieselbe, in welcher A den Kreis um ABC durchläuft, um zuerst nach B, dann nach C zu kommen.
- b. Hat O die Lage b, so ist ebenfalls $O(ABC)$ gleichwendig ABC.
- c. Hat O die Lage c, so ist $O(ABC)$ gegenwendig ABC.

3. Sind die drei Folgewinkel BOC, COA, AOB sämtlich hohl, ist ferner b ein Punkt auf OB, b' ein solcher auf dem Gegenstrahl von OB und c ein Punkt auf OC, so ist O(BCA) gleichwendig bco aber gegenwendig b'co.
4. Ist aber BOC überstumpf, so ist O(BCA) gegenwendig bco aber gleichwendig b'co.
5. Nun habe O die Lage 1, a. und es sei $L \parallel OA$. Schneidet L den Strahl OC in c, so schneidet, da die drei Folgewinkel in diesem Falle hohl sind, L nicht den Strahl OB selbst, sondern seinen Gegenstrahl; dies sei in b'. Zuzufolge 3. ist dann O(BCA) gegenwendig b'co, aber gleichwendig cb'O. —

Ist nun $\alpha\beta\gamma$ das Maximumdreieck der Schar, also $\beta\gamma \perp OA$ u. s. w. und dreht man $\alpha\beta\gamma$ um 90° , so wird $\beta\gamma \parallel OA \parallel cb'$; $\gamma\alpha \parallel OB$, $\alpha\beta \parallel OC$ m. a. W. $\alpha\beta\gamma$ in seiner neuen Lage, folglich auch in seiner ursprünglichen Lage, ist ähnlich und gleichwendig cb'O und deshalb nach 5. auch gleichwendig O(BCA) oder O(ABC). Deshalb ist, wenn noch 2, a. beachtet wird, $\triangle \alpha\beta\gamma$ gleichwendig ABC. —

Durch Wiederholung dieser Schlüsse ergibt sich nun in ähnlicher Weise:

6. Hat O die Lage 1, c, so ist $\alpha\beta\gamma$ gleichwendig ABC.
7. Hat O die Lage 1, b, so ist $\alpha\beta\gamma$ gegenwendig ABC.

Diese drei letzten Sätze lassen sich noch folgendermassen aussprechen:

8. Die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ einer Schar ähnlicher, dem Dreieck ABC umschriebener Dreiecke sind diesem gleich- oder gegenwendig, je nachdem das Produkt der trimetrischen Coordinaten von O für ABC ein positives oder ein negatives ist.

§ 4.

Umkehrung der vorigen Aufgabe.

1. Sind die Winkel des zu umschreibenden Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ und ihre Zuordnung zu denen des Dreiecks ABC gegeben, so sind nach § 2, 1 noch zwei Umschreibungen möglich; der gegebenen Zuordnung entsprechen also auch zwei Zwillingsscharen, und jede von ihnen hat ihr Nulldreieck. Es entsteht nun die Frage:
 - a. Wie lässt sich aus den gegebenen Winkeln und der gegebenen Zuordnung im voraus erkennen, ob das Nulldreieck O der mit ABC gleichwendigen Schar innerhalb ABC fällt, ev. ob dasselbe in den Scheitelraum eines der Innenwinkel fallen und welches dieser Innenwinkel sein wird.
 - b. Innerhalb welches der drei Innenwinkel wird das Nulldreieck O' der zu ABC ungleichwendigen Schar zu liegen kommen?

Wir nehmen nun zunächst an, dass die entsprechenden Winkel A und α , B und β , C und γ ungleich sind; denn die Resultate für die besonderen Fälle, wo ein Paar oder wo zwei Paare entsprechende Winkel gleich sind, gehen leicht aus den Ergebnissen für den allgemeinen Fall hervor.

2. Weil $A + B + C = \alpha + \beta + \gamma$, so ist für $A \geq \alpha$ entweder:

1. $B \leq \beta$ und $C \leq \gamma$, oder 2. $B \leq \beta$ und $C \geq \gamma$, oder 3. $B \geq \beta$ und $C \leq \gamma$.

Alle diese Fälle reducieren sich aber auf zwei Hauptfälle, nämlich:

1. Nur ein Winkel in ABC ist grösser, als sein entsprechender in $\alpha\beta\gamma$;
2. nur ein Winkel in ABC ist kleiner, als sein entsprechender in $\alpha\beta\gamma$.

Ohne der Allgemeinheit zu schaden, dürfen wir A als diesen Winkel annehmen.

1. Fall. $A > \alpha$, $B < \beta$, $C < \gamma$. (Figur 4 und 5.)

3. Mit A auf derselben Seite von BC liege ein Punkt α so, dass $\angle C\alpha B = \alpha$, $\angle \alpha BC = \beta$ und $\angle BC\alpha = \gamma$ sei. Ist α' der Spiegelpunkt von α für BC, so ist auch $\angle C\alpha'B = \alpha$,

$\alpha'BC = \beta$ und $BC\alpha' = \gamma$. Der Kreis um $\alpha'BC$ soll nun von $A\alpha'$ zum zweitenmale in O und derjenige um αBC von $A\alpha$ zum zweitenmale in O' geschnitten werden. Dann ergibt sich aus den Peripheriewinkeln, dass die Seiten BC , CA , AB sowohl aus O als auch aus O' unter den Winkeln α , β , γ resp. deren Supplementen erscheinen. Folglich sind O und O' die Nulldreiecke zweier Zwillingsscharen; denn in beiden Fällen entsprechen sich dieselben Winkelpaare A und α , B und β , C und γ .

a. Die Lage des Punktes O .

$A\alpha'$ fällt innerhalb der beiden Winkel $C\alpha'B$ und CAB , wenn zugleich $AB\alpha' < 2R$ und $AC\alpha' < 2R$, m. a. W. wenn zugleich $B + \beta < 2R$ und $C + \gamma < 2R$.

$A\alpha'$ fällt ausserhalb des Winkels $C\alpha'B$ und CAB , wenn $B + \beta$, oder wenn $C + \gamma > 2R$.

$A\alpha'$ fällt in AB , wenn $B + \beta = 2R$, in AC , wenn $C + \gamma = 2R$ ist.

1. es sei $B + \beta < 2R$ und $C + \gamma < 2R$.

$A\alpha'$ fällt innerhalb $C\alpha'B$ und schneidet deshalb den Kreis $BC\alpha'$ zum zweitenmale in einem Punkte O , welcher mit A auf derselben Seite von BC liegt. Deshalb, und weil $A\alpha'$ innerhalb CAB liegt, fällt O innerhalb des Dreiecks ABC , oder in die Ecke A , oder in den Scheitelraum von CAB , je nachdem $A \leq COB$ oder $\leq 2R - \alpha$, m. a. W., je nachdem $A + \alpha \leq 2R$.

2. es sei $B + \beta > 2R$, $C + \gamma < 2R$.

$A\alpha'$ ist ein äusserer Teilstrahl von dem Winkel $C\alpha'B$ und schneidet als solcher den Kreis um $\alpha'BC$ zum zweitenmale in einem Punkte O , der von A durch BC getrennt ist. Deshalb liegt O auf dem Strahle $A\alpha'$ selbst, nicht auf seinem Gegenstrahle. Da nun die Verlängerung von AB über B hinaus innerhalb $CB\alpha'$ fällt, da ja $B + \beta$, oder $AB\alpha' > 2R$, so ist jeder Punkt des Strahles $A\alpha'$, also auch O , von C durch AB getrennt. O ist aber, wie schon gezeigt, auch von A durch BC getrennt, liegt also im Scheitelraum des Winkels ABC .

3. es sei $B + \beta = 2R$, oder $C + \gamma = 2R$.

O fällt, wie man sogleich erkennt, in B , resp. in C .

Ganz dieselben Resultate ergeben sich für den Fall, dass $A < \alpha$, $B > \beta$, $C > \gamma$ ist, und wir erhalten in Verbindung mit § 3, 8 den Satz:

- I. Das Nulldreieck O einer Schar gleichwändig ähnlicher Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, welche dem Dreieck ABC umschrieben und ihm gleichwändig sind, liegt innerhalb ABC , wenn jedes Paar entsprechender Winkel kleiner als zwei Rechte ist; O fällt in eine Ecke von ABC , wenn der Winkel an ihr seinem entsprechenden Winkel in $\alpha\beta\gamma$ supplementär ist; O fällt in den Scheitelraum eines Innenwinkels, wenn dieser mit seinem entsprechenden mehr als zwei Rechte beträgt. Das Coordinatenprodukt von O ist im allgemeinen positiv, im zweiten Falle, nämlich dem Grenzfalle, ist dasselbe Null.

b. Die Lage des Punktes O' .

$A > \alpha$, $B < \beta$, $C < \gamma$.

1. $A\alpha$ ist ein innerer Teilstrahl des Winkels $C\alpha B$ und schneidet deshalb den Kreis $C\alpha B$ zum zweitenmale in einem Punkte O' , der von α und somit auch von A durch BC getrennt ist. Da $A\alpha$ auch ein innerer Teilstrahl des Winkels CAB ist, so liegt O' auch innerhalb des Innenwinkels A und hat deshalb die in § 3, 1, b angegebene Lage. Dasselbe Ergebnis liefert der Fall $A < \alpha$, $B > \beta$, $C > \gamma$. Leicht erhält man noch folgende spezielle Resultate:
2. Ist ein Winkel in ABC seinem entsprechenden Winkel gleich, so fällt O' in die Ecke, an der jener Winkel von ABC liegt; sein Zwillingsspunkt O fällt in den Kreisbogen, der

durch die zwei anderen Ecken und den Höhenpunkt H geht. Ist $A = \alpha$, $B = \beta$, so genügt jeder Punkt des Kreises um ABC der Lage für O' , und O fällt in den Höhenpunkt H von ABC. Ist ein Winkel in $\alpha\beta\gamma$, etwa $\gamma = 0$, also $\alpha\beta\gamma$ ein Parallelstreifen, so fällt O' in die Gegenseite AB des dem $\angle \gamma$ entsprechenden Winkels C; auch O fällt in diese Gegenseite und der Fusspunkt von h halbiert OO' .

Wir erhalten also den Satz:

- II. Das Nulldreieck O' einer Schar gleichwändig ähnlicher Dreiecke $\alpha'\beta'\gamma'$, die dem Dreieck ABC umschrieben und ihm gegenwändig sind, fällt ausserhalb ABC, aber innerhalb desjenigen Innenwinkels, der allein grösser, oder allein kleiner ist, als der ihm entsprechende in $\alpha'\beta'\gamma'$. O' fällt in eine Ecke des Dreiecks ABC, wenn der Winkel an derselben seinem entsprechenden in $\alpha'\beta'\gamma'$ gleich ist, dagegen in eine Seite, wenn der ihrem Gegenwinkel entsprechende Winkel des Dreiecks $\alpha'\beta'\gamma'$ Null ist. Das Koordinatenprodukt von O' ist negativ, resp. Null.

Zusatz: Klappt man die Kreise BCO um BC, ACO um AC, ABO um AB um, so erhält man die Kreise BCO', CAO', ABO'. —

§ 5.

Constanten Inhalt eines Zwillingspaars von Maximumdreiecken.

1. $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ seien die Maximumdreiecke zweier Zwillingsscharen, ersteres gleichwändig und letzteres gegenwändig ABC. Nun ist einerseits nach § 1, 11: $\angle \beta O \gamma = A + \alpha$, $\gamma O \alpha = B + \beta$, $\alpha O \beta = C + \gamma$, andererseits ist $\triangle \alpha\beta\gamma = \beta O \gamma + \gamma O \alpha + \alpha O \beta$. Da $\angle O A \beta = R$, so ist $O \beta$ ein Durchmesser des Kreises CAO β ; desgl. ist $O \gamma$ ein Durchmesser des Kreises ABO γ ; deshalb ist:

$$\triangle \beta O \gamma = \frac{b \cdot c}{2 \sin \beta \sin \gamma} \cdot \sin (A + \alpha) = ABC \cdot \frac{\sin (A + \alpha)}{\sin A \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma};$$

ebenso findet sich, dass:

$$\triangle \gamma O \alpha = ABC \cdot \frac{\sin (B + \beta)}{\sin B \cdot \sin \gamma \cdot \sin \alpha} \quad \text{und} \quad \triangle \alpha O \beta = ABC \cdot \frac{\sin (C + \gamma)}{\sin C \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

Mithin ist:

$$\text{I. } \alpha\beta\gamma = ABC \left\{ \frac{\sin (A + \alpha)}{\sin A \sin \beta \sin \gamma} + \frac{\sin (B + \beta)}{\sin B \sin \gamma \sin \alpha} + \frac{\sin (C + \gamma)}{\sin C \sin \alpha \sin \beta} \right\};$$

und, wenn man die Bemerkungen zu § 1, 11 beachtet:

$$\text{II. } \alpha'\beta'\gamma' = ABC \left\{ \frac{\sin (A - \alpha)}{\sin A \sin \beta \sin \gamma} + \frac{\sin (B - \beta)}{\sin B \sin \gamma \sin \alpha} + \frac{\sin (C - \gamma)}{\sin C \sin \alpha \sin \beta} \right\}.$$

Addiert man I und II, dividiert rechts die Zähler durch $\sin A$, resp. $\sin B$ und $\sin C$ und führt sodann den Generalnenner $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ ein, so ist:

$$\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma' = ABC \cdot \frac{\sin 2 \alpha + \sin 2 \beta + \sin 2 \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}, \text{ oder:}$$

$$\text{III. } \alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma' = 4 \cdot ABC.$$

Die algebraische Summe der Inhalte der beiden Maximumdreiecke zweier Zwillingsscharen ist also das Vierfache des Dreiecks ABC, dem sie umschrieben sind.

Bekannt ist der Spezialfall hiervon, dass jedes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ das Vierfache seines Mittendreiecks ABC ist; das Zwillingdreieck $\alpha'\beta'\gamma'$ degeneriert in diesem Falle, wie sich aus der letzten Bemerkung in § 4, b, 2 ergibt, in einen Punkt.

2. Die Ausdrücke I und II lassen noch eine bemerkenswerte Umformung zu. Es ist

$$\text{nämlich: } \frac{\sin (A + \alpha)}{\sin A \sin \beta \sin \gamma} = \frac{\sin (A + \alpha) \sin \alpha}{\sin A} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} =$$

$$\left(\frac{1}{2} \sin 2 \alpha + \cot A \sin^2 \alpha \right) \cdot \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \quad 2^*$$

und deshalb: $\frac{\sin(A + \alpha)}{\sin A \sin \beta \sin \gamma} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} + \cot A (\cot \beta + \cot \gamma).$

folglich: IV. $\alpha\beta\gamma = ABC(2 + M)$ und V. $\alpha'\beta'\gamma' = ABC(2 - M)$,
 wo $M = \cot A (\cot \beta + \cot \gamma) + \cot B (\cot \gamma + \cot \alpha) + \cot C (\cot \alpha + \cot \beta)$,
 oder $M = \cot \alpha (\cot B + \cot C) + \cot \beta (\cot C + \cot A) + \cot \gamma (\cot A + \cot B)$ ist.
 Bemerkung: Es ist $\infty > M \geq 2$.

Die Funktion M bleibt also dieselbe, mag ABC das eingeschriebene und $\alpha\beta\gamma$ das umgeschriebene Dreieck, oder mag es umgekehrt der Fall sein, und es ergibt sich der Satz:

3. Ist $\triangle ABC = \alpha\beta\gamma$ und umschreibt man, bei beliebiger, aber in beiden Fällen gleicher Zuordnung der entsprechenden Winkel, dem Dreieck ABC die Maxima-Zwillingsdreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$, dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Maxima-Zwillingsdreiecke ABC und $A'B'C'$, so ist:

$$\alpha\beta\gamma = ABC, \alpha'\beta'\gamma' = A'B'C'.$$

Wir erhalten noch einen anderen Satz:

4. Sind $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \alpha_2\beta_2\gamma_2, \alpha_3\beta_3\gamma_3$ die in § 2, 2 erwähnten Dreiecke der Gruppe I und zugleich die Maximumdreiecke der Scharen, zu denen sie gehören, so ist nach der vorstehenden Formel IV:

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_1\gamma_1 &= ABC \{ 2 + \cot A (\cot \beta_1 + \cot \gamma_1) + \cot B (\cot \gamma_1 + \cot \alpha_1) + \cot C (\cot \alpha_1 + \cot \beta_1) \}; \\ \alpha_2\beta_2\gamma_2 &= ABC \{ 2 + \cot A (\cot \alpha_2 + \cot \beta_2) + \cot B (\cot \beta_2 + \cot \gamma_2) + \cot C (\cot \gamma_2 + \cot \alpha_2) \}; \\ \alpha_3\beta_3\gamma_3 &= ABC \{ 2 + \cot A (\cot \gamma_3 + \cot \alpha_3) + \cot B (\cot \alpha_3 + \cot \beta_3) + \cot C (\cot \beta_3 + \cot \gamma_3) \}. \end{aligned}$$

$$\text{VI. } \alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2\gamma_2 + \alpha_3\beta_3\gamma_3 = (6 + 2 \cot T \cdot \cot \delta) ABC,$$

wo $\cot T = \cot A + \cot B + \cot C$ und $\cot \delta = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma$ ist.

Die Funktion $\cot T$ tritt uns im Dreieck ABC nicht nur in der Form $\cot A + \cot B + \cot C$, sondern noch in zwei anderen bemerkenswerten Formen entgegen, nämlich:

- a. Sind (vergl. Vorb. zu § 1) O und P die zwei Segmentärpunkte des Dreiecks ABC, so ist $\angle T = OAB = OBC = OCA = PAC = PCB = PBA$. Diese Eigenschaft der Segmentärpunkte ist bekannt.

- b. Ist S der Schwerpunkt, K sein Winkelgegenpunkt, so ist:

$$\frac{\cot SAB + \cot SBC + \cot SCA}{3} = \cot T = \frac{\cot KAC + \cot KCB + \cot KBA}{3}$$

aber auch:

$$\frac{\cot SAC + \cot SCB + \cot SBA}{3} = \cot T = \frac{\cot KAB + \cot KBC + \cot KCA}{3}$$

Wenn nämlich AD eine Schwerlinie, CF eine Höhe des Dreiecks ABC ist und DE ein Lot auf AB, so ist: $\cot SAB = \frac{AE}{DE} = \frac{AF}{DE} + \frac{FE}{DE} = \frac{AF}{DE} + \frac{EB}{DE}$; nun ist: $\frac{AF}{DE} = 2 \cdot \frac{AF}{FC} = 2 \cot A$ und $\frac{EB}{ED} = \cot B$; also $\cot SAB = \cot B + 2 \cot A$ u. s. w.

Daraus, dass $\cot T = \frac{\cot SAB + \cot SBC + \cot SCA}{3}$, ergibt sich noch der Satz:

5. Ist $A'B'C'$ das aus den Schwerlinien von ABC gebildete Dreieck, so gehört ihm derselbe Winkel T an, wie dem Dreiecke ABC, oder was damit identisch ist: $\cot A + \cot B + \cot C + \cot BSC + \cot CSA + \cot ASB = 0$. Man gelangt leicht zum Beweise, wenn man die Winkel der Seiten von ABC mit den nicht zu ihnen gehörenden Schwerlinien mit den entsprechenden Winkeln im Dreieck $A'B'C'$ vergleicht.
6. Der in Formel VI enthaltene Satz gestaltet sich noch etwas umfassender: Sind die zwölf Maximumdreiecke $\alpha\beta\gamma$ dem Dreieck ABC umschrieben, ist S, die Summe der drei Dreiecke der in § 2, 2 erwähnten Gruppe I, S_2 die der Dreiecke der Gruppe II,

S_3 und S_4 je diejenigen von III und IV, so ist:

$$S_1 = S_4 = ABC (6 + 2 \cot T \cot \delta); S_2 = S_3 = ABC (6 - 2 \cot T \cot \delta).$$

7. Ist $\alpha\beta\gamma = ABC$ und sind dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die zwölf Maximumdreiecke mit den Winkeln A, B, C umschrieben, sind ferner s_1, s_2, s_3, s_4 die den obigen entspr. Summen, so ist:

$$s_1 = s_4 = S_1 = S_4 \text{ und } s_2 = s_3 = S_2 = S_3.$$

§ 6.

Einige weitere Eigenschaften der Zwillingpunkte O und O' .

Liegt O innerhalb des Dreiecks ABC , O' innerhalb des Winkels CAB und von A durch BC getrennt, so ist:

$$1. \angle OBA + OCA = BOC - A = 2R - \alpha - A = 2R - (A + \alpha).$$

Ferner ist $\sin OBA = \sin AOB \cdot \frac{AO}{AB} = \frac{AO \cdot \sin \gamma}{c}$; $\sin OCA = \frac{AO \sin \beta}{b}$; also:

$$2. \frac{\sin OBA}{\sin OCA} = \frac{b \sin \gamma}{c \sin \beta} \text{ und mit Anwendung der correspondierenden Addition:}$$

$$\frac{\tan \frac{OBA - OCA}{2}}{\tan \frac{OBA + OCA}{2}} = \frac{b \sin \gamma - c \sin \beta}{b \sin \gamma + c \sin \beta}; \text{ desgl. } \frac{\tan \frac{O'BA - O'CA}{2}}{\tan \frac{O'BA + O'CA}{2}} = \frac{b \sin \gamma - c \sin \beta}{b \sin \gamma + c \sin \beta}.$$

Da nun

$$\tan \frac{OBA + OCA}{2} = \tan \left(R - \frac{A + \alpha}{2} \right) = \cot \frac{A + \alpha}{2} \text{ und } \tan \frac{O'BA + O'CA}{2} = \cot \frac{A - \alpha}{2}$$

ist, letzteres, weil $O'BA + O'CA = 4R - (2R - \alpha) - A = 2R - (A - \alpha)$, so folgt:

$$3. \frac{\tan \frac{OBA - OCA}{2}}{\tan \frac{O'BA - O'CA}{2}} = \frac{\tan \frac{A - \alpha}{2}}{\tan \frac{A + \alpha}{2}}.$$

Wenn man für α den Wert $-\alpha'$ substituiert (die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ sind ja gegenwärtig), so nimmt die vorstehende Formel die symmetrische Gestalt an:

$$\frac{\tan \frac{OBA - OCA}{2}}{\tan \frac{O'BA - O'CA}{2}} = \frac{\tan \frac{A + \alpha'}{2}}{\tan \frac{A + \alpha}{2}}$$

und, wenn man die Drehungsrichtung der Winkel OBA und OCA , sowie $O'BA$ und $O'CA$ mit in die Formel einführt:

$$4. \tan \frac{OBA + OCA}{2} \cdot \tan \frac{A + \alpha}{2} = \tan \frac{O'BA + O'CA}{2} \cdot \tan \frac{A + \alpha'}{2}.$$

5. OA und $O'A$, OB und $O'B$, OC und $O'C$ sind entsprechende Strahlen zweier congruenten gegenläufigen Büschel; deshalb liegen die Zwillingpunkte O und O' auf einer gleichseitigen Hyperbel $ABCH$; OO' ist ein Durchmesser dieser Hyperbel und wird vom Feuerbach'schen Kreise für ABC halbiert. Die Asymptoten sind den Halbierungslinien der Winkel $OA O'$, $O B O'$, $O C O'$ resp. deren Nebenwinkel parallel. Die Zwillingpunkte aller Punkte einer gleichseitigen Hyperbel $ABCH$ liegen auf dieser.

6. Wenn der Punkt O eine gleichseitige Hyperbel $ABCH$ durchläuft, so sind die Büschel $A(O)$ und $B(O)$ projektivisch. Ist P der Winkelgegenpunkt von O , so ist das Büschel $A(P)$ dem Büschel $A(O)$ und $B(P)$ dem Büschel $B(O)$ congruent, also $A(P)$ und $B(P)$ projektivisch. $A(P)$ und $B(P)$ sind aber auch in perspektivischer Lage. Denn fällt O

in C, so fällt der zu A(O) symmetrische Strahl A(P) in AB und der zu B(O) symmetrische Strahl B(P) fällt in BA; da AC und BC einander entsprechen, so thun dies auch AB und BA. Fällt O in den Höhenpunkt H, so fällt P in dessen Winkelgegenpunkt M, also geht der perspektivische Durchschnitt G der Büschel A(P) und B(P) durch den Mittelpunkt M des Kreises um ABC.

7. Nun kann man sich die Punkte O dieser gleichseitigen Hyperbel in Paare geordnet denken, welche je die Endpunkte eines Durchmessers sind. Dann ordnen sich bekanntlich die Punkte P auf G zu einer Involution, deren Mittelpunkt in M fällt, und deren Doppelpunkte die Schnittpunkte des Kreises um ABC mit der Geraden G sind. Während M der Winkelgegenpunkt von H ist, sind die erwähnten Doppelpunkte die Winkelgegenpunkte der zwei unendlich fernen Punkte der Hyperbel.

Hieraus ergibt sich folgender Satz:

8. Ist umgekehrt G eine Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises um das Dreieck ABC, Z und U seine Schnittpunkte mit G, so ist eine gleichseitige Hyperbel um ABC der Ort der Winkelgegenpunkte von G. Die Winkelgegenpunkte von Z und U sind die zwei unendlich fernen Punkte der Hyperbel; die Winkelgegenpunkte jedes Paares von Punkten der Involution mit den Doppelpunkten Z und U sind die Endpunkte eines Durchmessers dieser Hyperbel.

9. Irgend eine Gerade G der Dreiecksebene ABC hat zum Gegenbild eine dem Dreieck ABC umschriebene Hyperbel, Parabel, Ellipse, je nachdem G den Kreis um ABC schneidet, berührt, oder ausserhalb desselben liegt.

Aus den Sätzen 6—9, welche bekannt sind, ergibt sich nun Folgendes:

10. Sind O und P Winkelgegenpunkte, O' und P' ihre Zwillingspunkte, O'' und P'' die Winkelgegenpunkte der letzteren, so liegen einerseits M O P'', anderseits M P O'' je auf einer Geraden, O P O'' P'' auf einem Kreise, welcher denjenigen um ABC rechtwinkelig schneidet; auch ist $r^2 = MO \cdot MP'' = MP \cdot MO''$. (r Radius des Kreises ABC.) Denn nach dem Vorigen sind O und O' die Endpunkte eines Durchmessers einer gleichseitigen Hyperbel um ABC, also P und O'' ein Punktpaar der Involution auf der Geraden G, die das Gegenbild jener Hyperbel ist; ähnliches gilt von O und P'.
11. (O') sei ein dem Dreieck ABC umschriebener Kegelschnitt, (O) der Ort für die Zwillingspunkte von (O'); dann ist zunächst nach 9. eine Gerade (O'') der Ort für die Winkelgegenpunkte von (O').

Ist ferner N der Pol der Geraden (O'') für den Kreis um ABC, so ist der Kreis mit dem Durchmesser MN der Ort für die Winkelgegenpunkte (P) der Punkte der Curve (O). Denn schneidet die Verbindungslinie MO'' irgend eines Punktes der Geraden (O'') mit M, den Kreis (P) im Punkte P, so ist $MP \cdot MO'' = r^2$, da ja N der Pol zu (O'') ist. Nach 10. ist somit P der Winkelgegenpunkt von O.

§ 7.

Dreiecksreihen mit gemeinschaftlichem Nulldreieck.

O und P seien zwei Winkelgegenpunkte des Dreiecks ABC, und zwar zunächst innerhalb ABC liegend; der Kürze halber sei $\angle OAB = PAC = \alpha'$, $OAC = PAB = \alpha''$ gesetzt; ebenso $OBC = \beta'$ u. s. w. Beide Punkte sind definiert durch die Gleichung:

$$1. \frac{\sin \alpha' \cdot \sin \beta' \cdot \sin \gamma'}{\sin \alpha'' \cdot \sin \beta'' \cdot \sin \gamma''} = -1.$$

2. Durch cyklische Vertauschung der Faktoren des Zählers (oder auch des Nenners) und

jedesmalige Addition der senkrecht unter einander stehenden Teilwinkel ergeben sich die Winkel dreier Dreiecke:

$$\text{I. } \begin{cases} \text{ABC mit den Winkeln: } A = \alpha' + \alpha''; B = \beta' + \beta''; C = \gamma' + \gamma'' \\ \alpha\beta\gamma \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \alpha = \beta' + \gamma''; \beta = \gamma' + \alpha''; \gamma = \alpha' + \beta'' \\ abc \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad a = \gamma' + \beta''; b = \alpha' + \gamma''; c = \beta' + \alpha'' \end{cases}$$

Indem wir noch in der obigen Sinusgleichung ein Paar Faktoren des Zählers vertauschen, dann cyklisch permutieren und, wie oben, addieren, erhalten wir noch:

$$\text{II. } \begin{cases} A, B, C, \text{ mit den Winkeln: } A, = \alpha' + \alpha''; B, = \beta' + \gamma''; C, = \gamma' + \beta'' \\ \alpha, \beta, \gamma, \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \alpha, = \beta' + \beta''; \beta, = \gamma' + \alpha''; \gamma, = \alpha' + \gamma'' \\ a, b, c, \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad a, = \gamma' + \gamma''; b, = \alpha' + \beta''; c, = \beta' + \alpha'' \end{cases}$$

3. Wie die Sinusgleichung 1 in dem Dreieck ABC die Winkelgegenpunkte O und P definiert, ebenso definiert sie in jedem der fünf übrigen Dreiecke ein Paar Winkelgegenpunkte.

Lässt man die gleichnamigen Winkel A, α , a u. s. w. einander entsprechen, so erhellt die Richtigkeit folgender Sätze:

4. Je drei entsprechende Winkel der drei Dreiecke aus der Gruppe I sind die Winkel eines Dreiecks aus II, und umgekehrt; z. B.: $A = A, \alpha = B, a = C, A, = A, \alpha, = B, a, = C$.
5. Entsprechen die Winkel eines Dreiecks denen eines anderen und denen eines dritten in bestimmter Zuordnung, und beträgt jedes Tripel entsprechender Winkel zwei Rechte, so existiert in jedem der Dreiecke ein Paar Winkelgegenpunkte, deren Eckstrahlen in allen drei Dreiecken dieselben sechs Teilwinkel $\alpha', \alpha'' \dots$ erzeugen, und zwar in der aus dem vorstehenden Schema ersichtlichen Anordnung. Die drei Tripel entsprechender Winkel dieser Dreiecke liefern zudem drei neue Dreiecke, in denen ebenfalls je ein Paar Winkelgegenpunkte existiert, deren Eckstrahlen dieselben Teilwinkel, wie in den drei ersten Dreiecken erzeugen.

Zusatz: Durch zwei Dreiecke derselben Gruppe ist das dritte Dreieck und die zweite Gruppe bestimmt. Nicht aber sind sie es durch zwei Dreiecke verschiedener Gruppen; denn nach 4. haben diese beiden Dreiecke einen Winkel gemein, also ist das eine schon teilweise durch das andere mitbestimmt.

6. Diese Sätze erhalten noch eine bemerkenswerte geometrische Deutung, welche sie zu den vorigen Paragraphen in Beziehung setzt:

Wir fixieren nämlich in dem einen der obigen Dreiecke, etwa in ABC den einen der durch die Gleichung $\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha''} \cdot \frac{\sin \beta'}{\sin \beta''} \cdot \frac{\sin \gamma'}{\sin \gamma''} = -1$ definierten Punkte, etwa den Punkt O; dann ziehen wir OA, OB, OC und errichten auf ihnen in A resp. B und C die Senkrechten und erhalten dadurch das Maximumdreieck $\alpha\beta\gamma$ der Schar mit dem Nulldreiecke O. Ziehen wir in ihm die Eckstrahlen O α , O β , O γ , so erkennen wir an den Peripheriewinkeln der Kreise BCO u. s. w., dass: $\alpha = \beta' + \gamma'', \beta = \gamma' + \alpha'', \gamma = \alpha' + \beta''$ ist, m. a. W. Das umschriebene Dreieck $\alpha\beta\gamma$ hat dieselbe Gestalt, wie das oben in I erwähnte zweite Dreieck $\alpha\beta\gamma$.

Errichtet man nun noch auf den Eckstrahlen O α , O β , O γ in α , resp. β und γ die Senkrechten, so entsteht das Maximumdreieck abc einer dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ umschriebenen Schar mit demselben Nulldreieck O. Dieses Dreieck ist ähnlich dem in Gruppe I genannten dritten Dreieck abc.

Ausserdem ist O, wie für das innere Dreieck ABC, so auch für das ihm umschriebene Dreieck $\alpha\beta\gamma$ und das diesem umschriebene Dreieck abc der eine der beiden durch die Sinusgleichung 1 definierten Winkelgegenpunkte.

7. Statt des Punktes O kann man seinen Winkelgegenpunkt P im Dreieck ABC fixieren und nun für P als Nulldreieck ebensolche zwei Umschreibungen machen, wie in 6. Dann haben die umschriebenen Dreiecke wiederum dieselbe Gestalt, wie vorhin, nur ist jetzt ihre Reihenfolge nicht mehr ABC, $\alpha\beta\gamma$, abc, sondern ABC, abc, $\alpha\beta\gamma$; und jetzt ist P für jedes dieser Dreiecke der zweite durch die Gleichung 1 definierte Punkt.

Diese Sätze bieten das Mittel zur Lösung der Aufgabe.

8. In jedem von zwei Dreiecken ein Paar Winkelgegenpunkte der Art zu bestimmen, dass die Eckstrahlen aus ihnen für beide Dreiecke dieselben Teilwinkel ergeben, und noch die 4 übrigen Dreiecke derselben Eigenschaft zu zeichnen.
9. Setzt man die in 6. und 7. angegebene Umschreibung fort, so erhält man sowohl für den Punkt O, als auch für seinen Winkelgegenpunkt P als viertes Dreieck $\mathfrak{ABC}$ ein dem Dreieck ABC ähnliches und bei der Fortsetzung in inf. je eine Kette von Dreiecken mit dreigliederiger Periode, und zwar für O die Periode ABC, $\alpha\beta\gamma$, abc und für P die Periode ABC, abc, $\alpha\beta\gamma$.

10. Ein bemerkenswerther Spezialfall ergibt sich aus der Annahme, dass das Dreieck ABC mit seinen drei cyklischen Winkelfolgen die Gruppe I bildet, nämlich 1 $\left\{ \begin{array}{l} ABC \\ BCA \\ CAB \end{array} \right\}$. Dann ist ihr zunächst die Gruppe II identisch, wie sich aus 4 ergibt.

11. Ferner gelangen wir auf einem neuen Wege durch eine ganz einfache Ueberlegung zu zwei ausgezeichneten Punkten des Dreiecks ABC, nämlich zu dessen Segmentärpunkten. Denn je nachdem A entweder als Winkel des ersten Dreiecks ABC, oder als solcher des Winkels CBA, oder auch als Winkel von CAB betrachtet wird, ist zufolge 2. sowohl $A = \alpha' + \alpha''$, als $A = \alpha' + \beta''$ und $A = \alpha' + \gamma''$; also ist: $\alpha'' = \beta'' = \gamma''$.

Im $\triangle ABC$ existiert somit ein Punkt P, für den $PAC = PCB = PBA$ und folglich auch ein Punkt O, für welchen $OAB = OBC = OCA$ ist.

12. Fixiert man also im Dreieck ABC, den ersten Segmentärpunkt O, und führt die in 9. erwähnte Reihe von Umschreibungen aus, so erhält man die Periode ABC, CAB, BCA, m. a. W., alle Dreiecke in der Kette sind gleichwändig ähnlich, und ausserdem ist O der erste Segmentärpunkt für alle Glieder der Kette. Legt man der Umschreibung den Punkt P zu Grunde, so ist ABC, BCA, CAB die Periode und P ist der gemeinsame zweite Segmentärpunkt aller Glieder der Kette.

§ 8.

Die Quotienten der Ketten (O) und (P).

1. Die 4 ersten Glieder der Dreieckskette, welche entsteht, wenn bei der fortgesetzten Umschreibung der Punkt O zu Grunde liegt, seien: ABC, $\alpha\beta\gamma$, abc und $\mathfrak{ABC}$, letzteres nach § 7, 9 ähnlich dem festen Dreieck ABC.

Die Glieder der anderen Kette, welcher P zu Grunde liegt, seien: ABC, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\mathfrak{ABC}'$, letzteres ebenfalls ähnlich ABC. Dann ist zuf. § 5, II:

$$\alpha\beta\gamma = ABC \cdot \left\{ \frac{\sin(A + \alpha)}{\sin A \sin \beta \sin \gamma} + \frac{\sin(B + \beta)}{\sin B \sin \gamma \sin \alpha} + \frac{\sin(C + \gamma)}{\sin C \sin \alpha \sin \beta} \right\}.$$

Da nun zuf. § 7, 2, I: $A + \alpha = 2R - a$, also $\sin(A + \alpha) = \sin a$, so ist auch:

$$\text{I. } \alpha\beta\gamma = \frac{ABC}{\sin a \sin \beta \sin \gamma} \cdot \left\{ \frac{\sin a \cdot \sin a}{\sin A} + \frac{\sin \beta \cdot \sin b}{\sin B} + \frac{\sin \gamma \cdot \sin c}{\sin C} \right\}.$$

$$\text{II. } abc = \frac{\alpha\beta\gamma}{\sin a \sin b \sin c} \cdot \left\{ \frac{\sin a \cdot \sin A}{\sin \alpha} + \frac{\sin b \cdot \sin B}{\sin \beta} + \frac{\sin c \cdot \sin C}{\sin \gamma} \right\}.$$

wo in der Klammer $\sin \mathfrak{A}$ durch $\sin A$, $\sin \mathfrak{B}$ durch $\sin B$, $\sin \mathfrak{C}$ durch $\sin C$ ersetzt ist.

$$\text{III. } \mathfrak{ABC} = \frac{abc}{\sin A \sin B \sin C} \cdot \left\{ \frac{\sin A \sin \alpha}{\sin a} + \frac{\sin B \sin \beta}{\sin b} + \frac{\sin C \sin \gamma}{\sin c} \right\}.$$

Bezeichnen wir der Kürze halber die Klammergrößen in I, II, III mit x, y, z , so ist:

$$\text{IV. } \mathfrak{ABC} = ABC \cdot \frac{xyz}{\sin A \sin B \sin C \cdot \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cdot \sin a \sin b \sin c}.$$

$$2. \quad \text{V. } a'b'c' = \frac{ABC}{\sin a \sin b \sin c} \cdot \left\{ \frac{\sin a \sin \alpha}{\sin A} + \frac{\sin b \sin \beta}{\sin B} + \frac{\sin c \sin \gamma}{\sin C} \right\}.$$

$$\text{VI. } a'\beta'\gamma' = \frac{a'b'c'}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \cdot \left\{ \frac{\sin \alpha \sin A}{\sin a} + \frac{\sin \beta \sin B}{\sin b} + \frac{\sin \gamma \sin C}{\sin c} \right\}.$$

$$\text{VII. } \mathfrak{A'B'C'} = \frac{a'\beta'\gamma'}{\sin A \sin B \sin C} \cdot \left\{ \frac{\sin A \sin a}{\sin \alpha} + \frac{\sin B \sin b}{\sin \beta} + \frac{\sin C \sin c}{\sin \gamma} \right\}.$$

$$\text{VIII. } \mathfrak{A'B'C'} = ABC \cdot \frac{xyz}{\sin A \sin B \sin C \cdot \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cdot \sin a \sin b \sin c}.$$

3. Es ist also: $\mathfrak{ABC} = \mathfrak{A'B'C'}$.

4. $\frac{a\beta\gamma}{a'b'c'} = \frac{\sin a \sin b \sin c}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$, da auch $\frac{a\beta\gamma}{a'b'c'} = \frac{q^2 \cdot \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{r^2 \cdot \sin a \sin b \sin c}$, falls q und r , die Radien der Kreise um $a\beta\gamma$ und $a'b'c'$ sind, so folgt:

$$\frac{\sin a \sin b \sin c}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = \frac{q^2 \cdot \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{r^2 \cdot \sin a \sin b \sin c} \quad \text{und} \quad \frac{\sin a \sin b \sin c}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = \frac{q}{r}; \text{ mithin:}$$

$$\frac{a\beta\gamma}{a'b'c'} = \frac{q}{r}.$$

Umschreibt man also dem Dreieck ABC die Maximumdreiecke zweier Scharen, deren Nulldreiecke O und P Winkelgegenpunkte sind, so verhalten sich diese Dreiecke, wie die Radien ihrer Umkreise.

5. Die zwei congruenten und dem Dreieck ABC ähnlichen Dreiecke $\mathfrak{ABC}$ und $\mathfrak{A'B'C'}$ liegen zu ihm symmetrisch. Ist nämlich λ der Verschiebungswinkel von $\mathfrak{ABC}$ gegen ABC , so ist:

$$\lambda = \frac{\alpha'' + \beta'' + \gamma'' - (\alpha' + \beta' + \gamma')}{2},$$

denn: $\angle \gamma OB = R - \alpha'$; $\angle CBO = \beta'$; folglich $\angle (CB, \gamma O) = R - (\alpha' + \beta')$; $\angle aO\gamma = R - \gamma'$; $\angle (aO, CB) = 2R - (\alpha' + \beta' + \gamma') = \alpha'' + \beta'' + \gamma''$; also:

$$\angle (BC, \mathfrak{BC}) = \alpha'' + \beta'' + \gamma'' - R = \frac{\alpha'' + \beta'' + \gamma'' - (\alpha' + \beta' + \gamma')}{2}; \text{ ähnlich}$$

$$\text{findet sich: } \angle (BC, \mathfrak{B'C'}) = -\frac{\alpha'' + \beta'' + \gamma'' - (\alpha' + \beta' + \gamma')}{2}.$$

6. Für den Fall, dass $\lambda = 0$, sind $\mathfrak{ABC}$ und ABC in Ähnlichkeitslage mit dem Ähnlichkeitspunkt O ; desgl. sind $\mathfrak{A'B'C'}$ und ABC in Ähnlichkeitslage mit dem Ähnlichkeitspunkt P .

Auch $\mathfrak{ABC}$ und $\mathfrak{A'B'C'}$ sind dann in Ähnlichkeitslage; ihr Ähnlichkeitspunkt ist der unendlich ferne Punkt auf OP .

7. λ kann auf unendlich viele Arten Null werden; denn, es sei

$$\lambda = 0, \text{ oder } \alpha'' + \beta'' + \gamma'' = R, \text{ so ist } B - (\beta'' + \gamma'') = B - R + \alpha'' = \alpha'' - \frac{A - B + C}{2},$$

$$\text{da nun } B - (\beta'' + \gamma'') = \beta' - \gamma'', \text{ so ist: } \beta' - \gamma'' = \alpha'' - \frac{A - B + C}{2}.$$

Ist nun ein beliebiger Strahl AX fixiert, so ist α'' bestimmt und die Schnittpunkte von AX mit der gleichseitigen Hyperbel, welche BC zum Durchmesser hat und deren Punkte O der Bedingung genügen: $OBC - OCB = \alpha'' - \frac{A - B + C}{2}$, genügen für dieses α'' der Gleichung: $\beta' - \gamma'' = \alpha'' - \frac{A - B + C}{2}$, oder $\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = R$.

Zweiter Teil.

Die Gerade der zwölf harmonischen Punktreihen und ihre Gegenbilder, die Ellipse und der Kreis der zwölf harmonischen Punktsysteme.

§ 1.

1. Dem Dreieck ABC lässt sich nach Teil I, § 2 jedes andere, also auch ein ihm ähnliches Dreieck $\alpha\beta\gamma$ auf zwölf Arten umschreiben; desgleichen kann ihm ebenso oft ein Dreieck umschrieben werden, welches dem aus den Schwerlinien von ABC gebildeten Dreiecke XYZ ähnlich ist. Jedes dieser 24 Dreiecke gehört zu einer Schar, und jede dieser Scharen hat ihr Nulldreieck. Aus den Nulldreiecken der ersteren zwölf Scharen erscheinen die Seiten von ABC unter den Winkeln A, B, C resp. deren Supplementen; aus den Nulldreiecken der zwölf letzteren Scharen unter den Winkeln BSC, CSA, ASC, resp. ihren Supplementen.

Nach § 2 und 4 zerfallen zwölf zusammengehörige Nulldreiecke in zwei Systeme von je sechs; jedes Nulldreieck des einen Systems hat ein positives, jedes des anderen ein negatives Koordinatenprodukt. Die Nulldreiecke des einen Systems sind die Zwillingpunkte zu denen des andern.

2. Indem wir nach dem in § 2 gegebenen Schema gruppieren, erhalten wir folgende Fälle:

I. $\alpha\beta\gamma$ und ABC sind gleichwendig.

a.				b.			
1.	$\alpha\beta\gamma \sim ABC$	Null $\triangle$	H Winkelggp. M;	$\alpha\beta\gamma \sim XYZ$	Null $\triangle$	S Winkelggp. K;	
2.	" CAB	" O	" P;	" ZXY	" T	" U;	
3.	" BCA	" P	" O.	" YZX	" V	" W.	

II. $\alpha\beta\gamma$ und ABC sind gegenwendig.

4.	$\alpha\beta\gamma \sim ABC$	Null $\triangle$	H' Winkelggp. H'';	$\alpha\beta\gamma \sim XYZ$	Null $\triangle$	S' Winkelggp. S'';	
5.	" CAB	" O'	" O'';	" ZXY	" T'	" T'';	
6.	" BCA	" P'	" P''.	" YZX	" V'	" V''.	

III. $\alpha\beta\gamma$ und ABC sind gegenwendig.

7.	$\alpha\beta\gamma \sim ACB$	Null $\triangle$	A Winkelggp. A';	$\alpha\beta\gamma \sim XZY$	Null $\triangle$	A' Winkelggp. A'';	
8.	" CBA	" B	" B';	" ZYX	" B'	" B'';	
9.	" BAC	" C	" C'.	" YXZ	" C'	" C''.	

IV. $\alpha\beta\gamma$ und ABC sind gleichwendig.

10.	$\alpha\beta\gamma \sim ACB$	Null $\triangle$	α Winkelggp. a;	$\alpha\beta\gamma \sim XZY$	Null $\triangle$	α' Winkelggp. a';	
11.	" CBA	" β	" b;	" ZYX	" β'	" b';	
12.	" BAC	" γ	" c.	" YXZ	" γ'	" c'.	

Die Nulldreiecke A, B, C im vorstehenden Schema sind die Ecken des Dreiecks ABC, dagegen sind α, β, γ im Schema nicht mit den Ecken eines der umschriebenen Dreiecke zu verwechseln.

2. Von den 48 Punkten des Schemas sind uns zunächst die folgenden bekannt: H ist der Höhenpunkt des Dreiecks ABC, M sein Winkelgegenpunkt und Centrum des Kreises um ABC. O ist der erste, sein Winkelgegenpunkt P ist der zweite Segmentärpunkt des Dreiecks ABC. α, β, γ sind die Schnittpunkte der Kreisbögen BHC, CHA, AHB mit den Schwerlinien aus A, B, C; sie sind auch die Fusspunkte der Lote aus H auf diese Schwerlinien, liegen also auf dem Kreise über dem Durchmesser SH, und $\alpha\beta\gamma$ ist ähnlich dem aus den Schwerlinien von ABC gebildeten Dreieck; α liegt noch auf den zwei Kreisen durch A, welche CB in B resp. in C berühren, sowie auf dem Apollonischen Kreise für die nach $\frac{CA}{BA}$ harmonisch geteilte CB; ähnliches gilt von β und γ . Ihre Winkelgegenpunkte a, b, c sind die Brocard'schen Punkte A_2, B_2, C_2 . K ist der Winkelgegenpunkt des Schwerpunktes S. Die Ecken A, B, C sind zuf. § 4, b, 2 die Zwillingspunkte von α, β, γ . Die Punkte A', B', C' liegen, wie man leicht erkennt, so auf den Schwerlinien von ABC, dass $AS = SA', BS = SB', CS = SC'$.

§ 2.

Die Gerade der zwölf harmonischen Punktreihen.

1. Wird die Ecke A des Dreiecks ABC (Figur 7) als das Nulldreieck der Schar $\alpha\beta\gamma$ in III, 7 des vorstehenden Schemas aufgefasst und noch mit O bezeichnet, so fällt der Strahl CO in CA, der Strahl BO in BA und AO fällt in die Parallele AX zu BC. Der zu CA in bezug auf die Fundamentalstrahlen CA und CB symmetrische Strahl ist CB, der zu AX in bezug auf AC und AB symmetrische Strahl ist die Tangente in A an den Kreis ABC. Der Schnittpunkt dieser Tangente mit CB ist also der Winkelgegenpunkt $\mathfrak{A}$ von A.

Die Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ in III, a des Schemas liegen somit auf der Geraden G, auf welcher die Tangenten an den Kreis ABC in den Ecken A, B, C deren Gegenseiten schneiden, und sie fallen in diese drei Schnittpunkte.

Bekanntlich ist der Pol der Geraden G für den Kreis ABC der Winkelgegenpunkt K des Schwerpunktes S im Dreieck ABC.

2. AK, BK, CK mögen den Kreis ABC noch in A_2, B_2, C_2 schneiden. Dann ist AA_2 die Polare von $\mathfrak{A}$, also $\mathfrak{A}A_2$ Tangente an den Kreis ABC. Die Gegenseiten BC und B_2C_2 des Sehnenvierecks B_2C_2BC schneiden sich auf der Polaren G des Diagonalspunktes K, also, da BC durch $\mathfrak{A}$ geht, in $\mathfrak{A}$. Die Seite B_2C_2 und die Tangente $\mathfrak{A}A_2$ schneiden sich also in $\mathfrak{A}$. Ebenso schneiden sich C_2A_2 und $B_2\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}$, A_2B_2 und $C_2\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}$.
3. Die Gerade G ist für die beiden Dreiecke ABC und $A_2B_2C_2$ der gemeinsame Ort der Schnittpunkte der drei Seiten mit den in den Gegenecken an den Umkreis gelegten Tangenten. Diese drei Schnittpunkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sind für beide Dreiecke dieselben und sie sind für jedes derselben die Winkelgegenpunkte der Ecken, diese in dem angegebenen Sinne als Nulldreiecke von Scharen umschriebener Dreiecke aufgefasst.
4. Man beweist leicht aus den Peripheriewinkeln, dass jedes der beiden Dreiecke ABC und $A_2B_2C_2$ ähnlich ist dem Schwerliniendreiecke des anderen und dass die sechs Systeme $ABA_2C, BCB_2A, CAC_2B, A_2B_2AC_2, B_2C_2BA_2, C_2A_2CB_2$ harmonisch sind.
5. AA_2 , die Polare von $\mathfrak{A}$, schneide G in Z; dann ist B (A_2KAZ) harmonisch; $\angle A_2BA = B + CBA_2 = B + CAK = B + BAS$; ferner ist $\angle KBA = SBC$. Daraus, und dass B (A_2KAZ) harmonisch ist, folgt $\angle ABZ = SCB$; ebenso findet sich, dass

$\angle ACZ = SBC$. Also ist Z der Winkelgegenpunkt $\mathfrak{A}'$ des Punktes A' , welcher ja nach § 1, 2 auf AS so liegt, dass $AS = SA'$. Ähnlich zeigt man, dass $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$ auf G liegen.

6. Die Winkelgegenpunkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ der Nulldreiecke A' , B' , C' (Schema, III, b) liegen also auf G und sind ausserdem auf den Polaren der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die harmonisch conjugierten Punkte zu K in den Reihen $A_2KA\mathfrak{A}'$ u. s. w.
7. Derselbe Satz behält offenbar seine Gültigkeit, wenn statt des Dreiecks ABC das Dreieck $A_2B_2C_2$ ins Auge gefasst wird, und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ für dieses letztere als die Winkelgegenpunkte derjenigen Punkte A'_2 , B'_2 , C'_2 gedacht werden, welche den Nulldreiecken A' , B' , C' in ABC entsprechen.
8. Die Reihen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{B}'\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{C}'\mathfrak{B}$ sind harmonisch; die erste z. B. liegt dem harmonischen Büschel A(ACKB) perspektivisch. Die Reihen $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ sind harmonisch; die erste z. B. liegt dem harmonischen Büschel $\mathfrak{K}(ZB\mathfrak{A}\mathfrak{C})$ perspektivisch (Z ist der Schnittpunkt von BC und AK).
9. Wir zeigen nun, dass auch die Punkte H'' O'' P'' S'' T'' V'' sechs harmonische Reihen auf G bilden.

Sind A' und S' die im Schema III, 7, b und II, 4, b angegebenen Punkte, so lässt sich, wenn zunächst $A > B > C$ angenommen wird, aus Teil I, § 4, b, II nachweisen, dass S' von C durch AB getrennt und im Winkelraume ACB und deshalb auch durch BC von A' getrennt liegt. Deshalb ist $\angle AS'B = ASB$, aber $CS'B = 2R - CSB$, ausserdem $CA'B = CSB$. B, C, S' und A' liegen also auf einem Kreise. Dann liegen auf Teil I, § 1, 10 auch B, C und die Winkelgegenpunkte $\mathfrak{A}'$ und S'' von A' resp. S' auf einem Kreise. In derselben Weise findet sich, dass folgende Systeme je auf einem Kreise liegen.

10.

a. $\mathfrak{A}H''BC$, $\mathfrak{B}H''CA$, $\mathfrak{C}H''AB$;	b. $\mathfrak{A}S''BC$, $\mathfrak{B}S''CA$, $\mathfrak{C}S''AB$;
a. $\mathfrak{A}O''BA$, $\mathfrak{B}O''CB$, $\mathfrak{C}O''AC$;	b. $\mathfrak{A}T''BA$, $\mathfrak{B}T''CB$, $\mathfrak{C}T''AC$;
a. $\mathfrak{A}P''CA$, $\mathfrak{B}P''AB$, $\mathfrak{C}P''BC$;	b. $\mathfrak{A}V''CA$, $\mathfrak{B}V''AB$, $\mathfrak{C}V''BC$.
11. Je drei Kreise sub a. in derselben Horizontalreihe stehend, desgl. je drei solcher Kreise sub b. schneiden sich in einem Punkte der Geraden G. Ist z. B., indem wir die zweite Reihe a. beachten, Z der zweite Schnittpunkt des Kreises $\mathfrak{C}O''AC$ mit G, so muss, weil (für $A > B > C$) Z von C durch BC getrennt ist, $\angle CZA = 2R - \mathfrak{C}CA = 2R - B$ sein; deshalb ist $\angle \mathfrak{A}ZA = B = 2R - \mathfrak{A}BA$. Daher liegt Z auch auf dem Kreise $\mathfrak{A}BA$ oder $\mathfrak{A}O''BA$; ähnlich liegt Z auf dem Kreise $\mathfrak{B}O''CB$. Z ist also identisch mit dem Schnittpunkt O'' der genannten drei Kreise, m. a. W. O'' liegt auf der Geraden G. Ähnlich die übrigen Punkte. Für H'' passt dieser Beweis nicht, da die drei Ortskreise für diesen Punkt in die Geraden $\mathfrak{A}BC$, $\mathfrak{B}CA$, $\mathfrak{C}AB$ degenerieren; es würde zunächst nur folgen, dass H'' auf der unendlich fernen Geraden liegt. Aber, wenn wir beachten, dass sein Winkelgegenpunkt H' beliebig auf dem Kreis ABC liegt (vgl. Teil I, § 4, b, 2), so folgt, dass jeder unendlich ferne Punkt für H'' eintreten kann, also auch derjenige der Geraden G. Die sechs Punkte H'' O'' P'' S'' T'' V'' liegen somit auf G.
12. Dass sie sechs harmonische Reihen auf G bilden, ergibt sich folgendermassen: Wir fassen irgend eine Seite des Dreiecks ABC als die Achse eines Kreisbüschels auf. Ist BC diese Achse, so erzeugt das Büschel auf G eine hyperbolische Involution mit dem Centrum $\mathfrak{A}$; ihre Doppelpunkte seien D und E, etwa D mit $\mathfrak{B}$ auf derselben Seite von $\mathfrak{A}$. Zuzufolge 10. sind conjugierte Punktepaare dieser Involution: $\mathfrak{A}$ und H'' , $\mathfrak{A}'$ und S'' ; $\mathfrak{B}$ und O'' , $\mathfrak{B}'$ und T'' ; $\mathfrak{C}$ und P'' , $\mathfrak{C}'$ und V'' . Nach 8. ist die Reihe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}$ harmonisch,

also: $\frac{AB - AC}{AB - AC} : \frac{AC - AB}{AC - AB} = -1$. Beachtet man nun, dass $AB = \frac{(AD)^2}{AO''}$,
 $AC = \frac{(AD)^2}{AP''}$, $AB = \frac{(AD)^2}{AS''}$, $AC = \frac{(AD)^2}{AH''}$, und setzt diese Werte in die vorstehende

Gleichung ein, so erhält man nach der Reduktion: $\frac{AH'' - AO''}{AS'' - AO''} : \frac{AS'' - AP''}{AS'' - AP''} = -1$;

m. a. W. $H'' O'' S'' P''$ bilden eine harmonische Reihe. Ähnlich das Uebrige.

13. $H'' O'' S'' P''$, $O'' P'' T'' H''$, $P'' H'' V'' O''$, $S'' T'' H'' V''$, $T'' V'' O'' S''$, $V'' S'' P'' T''$ sind harmonische Reihen auf G.
14. Da H'' der unendlich ferne Punkt auf G ist, so ergibt sich: S'' ist der Halbierungspunkt von $O'' P''$, der Punkt P'' ist der Halbierungspunkt von $O'' T''$ und O'' derjenige von $P'' V''$.
15. S'' ist der Fusspunkt der Senkrechten MK auf G. Dies folgt aus Teil I, § 6, 10, indem ja S'' und K die Winkelgegenpunkte der beiden Zwillingpunkte S' resp. S sind.
16. Wenn man für das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ diejenigen 6 Punkte bestimmt, welche den Punkten $H'' O'' P''$, $S'' T'' V''$ des Dreiecks ABC entsprechen, so findet sich durch einfache Wiederholung der vorhergehenden Schlüsse und Beachtung von 3. und 7., dass jene Punkte mit den ihnen entsprechenden des Dreiecks ABC identisch sind, z. B. H''_2 mit H'' u. s. w.
17. Die Gerade G mit ihren zwölf Punkten ist also dem Dreieck $A_2 B_2 C_2$ gegenüber dasselbe, was sie gegenüber dem Dreieck ABC ist; jeder ihrer zwölf Punkte vertritt ein Paar entsprechender Punkte des Dreieckspaares ABC und $A_2 B_2 C_2$.
18. Wir dürfen je zwei Punkte auf G, welche im Schema in derselben Horizontalreihe stehen, einander conjugiert nennen, z. B. A und A' , O'' und T'' , da sie ja in harmonischen Reihen stehen, z. B. $ABAC$ u. s. w.; wir erinnern ferner daran, dass das Dreieck XYZ im Schema ähnlich $A_2 B_2 C_2$ ist, m. a. W. $\angle X = A_2$, $Y = B_2$, $Z = C_2$. Dann gilt der Satz:
19. Der eine von zwei conjugierten Punkten ist im Dreieck ABC ($A_2 B_2 C_2$) der Winkelgegenpunkt desjenigen Punktes, aus welchem die drei Seiten von ABC ($A_2 B_2 C_2$) in irgend einer bestimmten Reihenfolge unter den Winkeln A, B, C (A_2 , B_2 , C_2) erscheinen; der andere ist im Dreieck $A_2 B_2 C_2$ (ABC) der Winkelgegenpunkt desjenigen Punktes, aus welchem in entsprechender Reihenfolge wie vorhin, die Seiten von $A_2 B_2 C_2$ (ABC) unter den Winkeln A, B, C (A_2 , B_2 , C_2) erscheinen.
20. Es ist $\triangle ABC \sim AO''P'' \sim P''BO'' \sim O''P''C$ (gleichwendig). Denn nach 10. liegt O'' auf dem Kreise BCB ; also ist $\angle CO''P''$ oder auch $CO''B = 2R - CBB = 2R - (B + C) = A$. Der Punkt P'' liegt auf dem Kreise CBG ; also $\angle CP''O''$ oder $CP''G = CBG = B$; mithin ist $\triangle O''P''C \sim ABC$.

Die homologen Seitenpaare der Dreiecke ABC und $O''P''C$ schneiden sich unter dem Winkel, den AB mit der Geraden G bildet; denn $O''P''$ und AB sind homologe Seiten und $O''P''$ fällt in G. Ähnliches gilt von ABC und $P''BO''$, sowie von ABC und $AO''P''$. Die homologen Seitenpaare von $AO''P''$ und $P''BO''$ schneiden sich unter dem Winkel C; ähnliches gilt von $P''B'O''$ und $O''P''C$, sowie von $O''P''C$ und $AO''P''$.

21. $(O''P'')^2$ ist die Potenz der Punkte O'' und P'' für den Kreis um ABC. Denn, wird der letztere von $O''C$ noch in Y, von $O''B$ noch in Z geschnitten, so ist $O''Y = P''B$ und $O''C = P''Z$, weil nach 14. und 15. O'' und P'' Spiegelpunkte für den durch K gehenden Durchmesser sind. Nun ist $\triangle CO''P'' \sim O''P''B$; also $(O''P'')^2 = O''C \cdot P''B$; also ist, wegen $P''B = O''Y$, $(O''P'')^2 = O''Y \cdot O''C = P''B \cdot P''Z$.

Es ist $(O''P'')^2 = \left\{ \frac{2r}{\sqrt{\cot^2 \delta - \cot^2 \delta_0}} \right\}^2$, wo $\cot \delta_0 = \cot 30^\circ$ und $\cot \delta = \cot A + \cot B + \cot C$.

§ 3.

Der Kreis der zwölf harmonischen Punktsysteme.

(Figur 7.)

1. Wir verbinden M , den Mittelpunkt des Kreises ABC , mit den im vorigen Paragraphen betrachteten zwölf Punkten auf G . Ist r der Radius des Kreises, so ist $MK \cdot MS'' = r^2$, weil K der Pol von G und nach § 1 S'' der Fusspunkt der Senkrechten MK auf G ist. Nun sind a und $\mathfrak{A}$ die Winkelgegenpunkte zweier Zwillingpunkte, nämlich der Punkte α und A (vergl. das Schema III, a und IV, a). Folglich liegt zuf. Teil I, § 6, 10 der Punkt a so auf dem Strahle $M\mathfrak{A}$, dass $Ma \cdot M\mathfrak{A} = r^2$. Deshalb liegt a auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ mit dem Durchmesser MK .

Dieser Schluss gilt aber, wie für den Punkt a , so für alle Winkelgegenpunkte der zwölf Nulldreiecke in I, a und I, b, sowie IV, a und IV, b des Schemas und wir haben den Satz: Diese zwölf Winkelgegenpunkte liegen auf dem Kreise $\mathfrak{K}$, welcher, wie in der Einleitung bemerkt wurde, der Brocard'sche genannt wird.

2. Sie liegen gruppenweise harmonisch auf diesem Kreise, nämlich:
 $MPKO$, $POUM$, $OMWP$, $KUMW$, $UWPK$, $WKOU$; $aba'c$, $bcb'a$, $ca'cb$, $a'b'ac$, $b'c'ba'$, $c'a'cb'$.

Dies geht unmittelbar daraus hervor, dass sie je auf harmonischen Büscheln liegen mit dem Scheitel M , welcher ein Punkt auf $\mathfrak{K}$ ist, z. B. $aba'c$ auf dem harmonischen Büschel M ($\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}$).

3. Jeder der zwölf Punkte auf $\mathfrak{K}$ soll demjenigen auf G entsprechend heissen, mit welchem er auf demselben Strahle aus M liegt, z. B. a und $\mathfrak{A}$, W und V'' .
4. Die Geraden durch K und je einen der zwölf Punkte auf $\mathfrak{K}$ sind in bezug auf den Kreis ABC die Polaren der entsprechenden Punkte auf G . Es ist z. B. KW die Polare von V'' , weil sie einerseits durch den Pol K der Geraden G geht, auf welcher V'' liegt und, weil sie andererseits senkrecht zu MV'' steht, indem $\angle KWM$ ein Halbkreiswinkel ist.
5. Diese zwölf Polaren gehen durch die conjugierten Punkte ihrer Pole.
6. Zunächst gilt dies von den Polaren Ka , Kb , Kc der Punkte $\mathfrak{A}$, resp. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$; denn sie sind identisch mit den Geraden A_2A , B_2B , C_2C , welche nach § 2, 2 ebenfalls die Polaren von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind und nach § 2, 6 durch die conjugierten Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gehen. Daraus folgt nun, dass auch die Polaren Ka' , Kb' , Kc' der Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gehen. Denn es ist z. B. zuf. 2. $K(aba'c)$ ein harmonisches Büschel; ebenso ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}$ eine harmonische Reihe. Nun gehen Ka , Kb , Kc der Reihe nach durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; folglich geht Ka' durch $\mathfrak{A}$.
7. Auch die Geraden aus K nach den sechs übrigen Punkten gehen durch die conjugierten Punkte ihrer Pole.

Nach § 2, 21 ist $(O''P'')^2$ die Potenz der Punkte O'' und P'' für den Kreis ABC ; ausserdem ist $O''P'' = P''T''$. Der Kreis mit dem Durchmesser $O''T''$ schneidet also den Kreis ABC rechtwinkelig. Da $MU \cdot MT'' = r^2 = MP \cdot MO''$, so schneidet auch der Kreis $O''P''UP$ den Kreis ABC rechtwinkelig, ist also identisch mit dem Kreise, der den Durchmesser $O''T''$ hat. Daher ist $T''P \perp MO''$ und fällt deshalb in KP , m. a. W.; die Polare KP von O'' geht durch dessen conjugierten Punkt T'' . Ebenso findet sich, dass KO durch V'' geht; KM geht, wie schon gezeigt, durch S'' .

Endlich geht KU durch O'' ; denn $K(POUM)$ und $T''V''O''S''$ sind harmonisch; KP , KO , KM gehen durch T'' , V'' , S'' , also KU durch O'' . Ebenso geht KW durch P'' , KK , wie selbstverständlich, durch H'' .

8. Die Sehnen des Kreises K , welche je ein Paar conjugierter Punkte auf ihm verbinden, gehen durch den Pol π der Geraden G in bezug auf den Kreis $\mathfrak{K}$. Wir betrachten jede

dieser Sehnen, etwa aa' in Verbindung mit derjenigen, welche das conjugierte Paar M und K verbindet. Die Gegenseiten Ka' und Ma des Sehnenvierecks $MaKa'$ schneiden sich in $\mathfrak{A}$, die Gegenseiten Ka und Ma' in $\mathfrak{A}'$. Daher ist der Diagonalepunkt π , nämlich der Schnittpunkt von aa' und MK der Pol von $\mathfrak{AA}'$ m. a. W. von G in bezug auf den Kreis $\mathfrak{K}$.

9. Jedes Dreieck also, dessen Ecken 3 oder 12 Punkte auf $\mathfrak{K}$ und den Ecken eines anderen conjugiert sind, liegt diesem perspektivisch und π ist das Collineationscentrum. Die Achse ist G ; denn im Sehnenviereck $aba'b'$ z. B. ist π der Diagonalepunkt; folglich liegt der Schnittpunkt von ab und $a'b'$ auf G , der Polaren von π .
10. Jeder der sechs Punkte M, O, P, K, W, U , besitzt die Eigenschaft:

Die Strahlen aus einem derselben nach irgend einem der zwölf harmonischen Systeme auf $\mathfrak{K}$ gehen auch durch eines der zwölf harmonischen Systeme auf G .

Für die Punkte M und K ist dies bereits in 1—2 und 4—7 dargethan; wir zeigen zunächst die Gültigkeit des Satzes für die sechs von den Punkten M, O, P, K, W, U selbst gebildeten harmonischen Systeme und wählen den Punkt O .

- a. OM geht durch P'' , OP durch H'' , OK durch V'' . Da nun $O(MOKP)$ und $P''O''V''H''$ harmonisch sind, so geht die Tangente OO'' an $\mathfrak{K}$ durch O'' .
- b. $O(OPWM)$ und $O''H''T''P''$ sind harmonisch; OO'' geht durch O'' , OP geht durch H'' , OM durch P'' ; also geht OW durch T'' .
- c. $O(PMUO)$ und $H''P''S''O''$ sind harmonisch; OP geht durch H'' , OM durch P'' , OO'' durch O'' ; also geht OU durch S'' .

Die Beweisführung für den Punkt P ist dieselbe wie für O . Betreffs U und W ist zu bemerken, dass nach dem Vorigen UM, UK, UO durch T'' resp. O'' resp. S'' gehen; dann folgt das Übrige ähnlich wie vorhin.

11. Wir zeigen nun, dass der Satz auch gilt, wenn die sechs harmonischen Systeme $aba'c$ u. s. w. eintreten. Zuvor folgern wir (was schon anderweitig bekannt), dass G die Potenzlinie der Kreise $\mathfrak{K}$ und ABC ist; nämlich nach 7. schneidet der Kreis mit dem Durchmesser $O''T''$ den Kreis ABC rechtwinkelig und geht durch P ; da nun nach 10. $P''P$ den Kreis $\mathfrak{K}$ tangiert, wird auch $\mathfrak{K}$ rechtwinkelig geschnitten. P'' liegt also auf der genannten Potenzlinie; dasselbe thut O'' aus gleichem Grunde; also ist G diese Potenzlinie. Daraus folgt: $\mathfrak{Bb} \cdot \mathfrak{BM} = \mathfrak{BA} \cdot \mathfrak{BC}$. Nach § 2, 10, Zeile 3, a folgt: $\mathfrak{BA} \cdot \mathfrak{BC} = \mathfrak{BP}'' \cdot \mathfrak{BA}$; also $\mathfrak{Bb} \cdot \mathfrak{BM} = \mathfrak{BP}'' \cdot \mathfrak{BA}$, also $\sphericalangle \mathfrak{bAP}''$ oder $\mathfrak{bAB} = \mathfrak{bMP}''$ oder $\mathfrak{bAB} = \mathfrak{bMO} = \mathfrak{baO}$. Da auch $\mathfrak{baBA}$ ein Kreis ist, so folgt $\mathfrak{bAB} = \mathfrak{baB}$; also $\sphericalangle \mathfrak{baO} = \mathfrak{baB}$ oder a, O, B fallen in eine Gerade.

Nun geht aO durch $\mathfrak{B}$, aK durch $\mathfrak{A}'$, aM durch $\mathfrak{A}$; also, da $a(MOKP)$ und $\mathfrak{ABAC}$ harmonisch sind, geht aP durch $\mathfrak{C}$. Weiter folgt, wenn $a(OPWM)$ und $\mathfrak{BCB'A}$ beachtet werden, dass aW durch $\mathfrak{B}'$ geht; ferner in ähnlicher Weise, aU durch $\mathfrak{C}'$ geht.

Ähnlich verfährt man mit b und c .

Dann aber gehen etwa die Strahlen Ua durch $\mathfrak{C}'$, Ub durch $\mathfrak{A}'$, Uc durch $\mathfrak{B}'$, mithin, wenn $U(aba'c)$ und $\mathfrak{C'A'C'B'}$ beachtet werden, geht Ua durch $\mathfrak{C}$ u. s. w.

12. π ist für die Dreiecke $MOP, KWU, abc, a'b'c'$ der Winkelgegenpunkt ihrer Schwerpunkte. Für die zwei ersteren Dreiecke geht dies aus dem Vorhergehenden hervor; es schneidet z. B. die Seite MP die Tangente OO'' in O'' u. s. w.

Für $abc, a'b'c'$ beachten wir: Der Pol Z von aa' liegt auf G , da aa' durch π geht. Schneidet ein Strahl aus Z den Kreis $\mathfrak{K}$ in L und N , so sind $aLa'N$ ein harmonisches System. Fällt L in b , so fällt N in c , fällt L in b' , so fällt N in c' ; daher gehen bc und $b'c'$ durch Z . G ist also auch für diese zwei Dreiecke der Ort für die Schnittpunkte der Seiten mit den in ihren Gegenecken an $\mathfrak{K}$ gelegten Tangenten.

13. Die Gestalt der Dreiecke MOP, KWU, abc , $a'b'c'$.

- a. $\angle MOP = MPO = R - \delta$, wenn $\cot \delta = \cot A + \cot B + \cot C$. (Vergl. Hoffm. Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht XII, pag. 108.)
- b. $\angle UKW = 2 \delta'$, wenn $\cot \delta \cdot \cot \delta' = 3$. Denn es ist $\cot KMU = \cot S''MT'' = \frac{S''M}{S''T''} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S''M}{S''P''} = \frac{1}{3} \cot \delta$; also $\tan \delta' = \frac{1}{3} \cot \delta$ oder $\cot \delta \cdot \cot \delta' = 3 = \cot^2 \delta_0$.
- c. Da $\sin bKc : \sin cKa : \sin aKb = \sin a : \sin b : \sin c$, so ist abc ähnlich demjenigen, dessen Seiten parallel sind den Geraden Ka , Kb , Kc oder auch den Geraden AK , BK , CK .
- d. Da die Winkel des Dreistrahls $K(abc)$ bekannt und $K(aba'c')$, $K(bcb'c')$, $K(cac'a)$ harmonische Büschel sind, so sind auch die Winkel $b'Kc'$, $c'Ka'$, $a'Kb'$ bekannt und $a'b'c'$ ist ähnlich einem Dreieck, dessen Seiten den Strahlen Ka' , Kb' , Kc' parallel laufen.

§ 4.

Die Ellipse der zwölf harmonischen Punktsysteme.

(Figur 8.)

- Die Gerade G kann als der perspektivische Durchschnitt zweier Strahlenbüschel $A(Z)$ und $B(Z)$ aufgefasst werden. Ziehen wir zu zwei entsprechenden Strahlen AZ und BZ die in bezug auf AC und AB , resp. BA und BC symmetrischen Strahlen AY und BY , so ist bekanntlich ein dem Dreieck ABC umschriebener Kegelschnitt E der Ort des Winkelgegenpunktes Y von Z . Fällt Z in $\mathfrak{A}$, so ist dem Strahle $A\mathfrak{A}$ symmetrisch die Parallele AY zu BC ; dem Strahle $B\mathfrak{A}$ oder BC ist derjenige Strahl BY symmetrisch, der in BA fällt. Die Parallele AY ist somit eine Tangente an E . Ebenso lässt sich zeigen, dass die Parallele durch B zu CA , sowie diejenige durch C zu AB eine Tangente an E ist. Bekanntlich ist dieser Kegelschnitt die dem Dreieck ABC umschriebene Ellipse, deren Centrum in den Schwerpunkt S von ABC fällt.
- Aus der vorhergehenden Nummer ergibt sich: Die Winkelgegenpunkte der zwölf in § 2 auf G ermittelten Punkte liegen auf E , nämlich die Punkte $A, B, C, A', B', C', H', O', P', S', T', V'$. Da das Büschel $A(ABA'C)$ dem Büschel $A(\mathfrak{A}B\mathfrak{A}'C)$ congruent und die Reihe $\mathfrak{A}B\mathfrak{A}'C$ harmonisch ist, auch A auf E liegt, so ist auch das System $ABA'C$ harmonisch. Aus dieser Schlussweise folgt, dass folgende zwölf Systeme auf E harmonisch sind: $ABA'C, BCB'A, CAC'B, A'B'AC', B'C'BA', C'A'CB'$; $H'O'S'P', O'P'T'H', P'H'V'O', S'T'H'V', T'V'O'S', V'S'P'T'$.
- AA', BB', CC' sind Durchmesser der Ellipse E , da A' auf AS liegt, wie bereits in § 1, 2 erwähnt wurde. S ist der Ähnlichkeitspunkt der congruenten Dreiecke ABC und $A'B'C'$.
- H' ist der vierte Schnittpunkt des Kreises um ABC mit der Ellipse E .
- H' ist der Brocard'sche Punkt R . Denn, ist H' der Winkelgegenpunkt des unendlich fernen Punktes H'' auf G , so ist $\angle H'AC = \lambda$, wenn λ der Winkel von G mit AB ist. Ist μ der Winkel von AH' und BC , so ist $\mu = C - \lambda$. Ist ν der Winkel von AH'' oder G mit $A\mathfrak{A}$, der Tangente an den Kreis ABC , so ist auch $\nu = C - \lambda$, weil $H''AB = \lambda$, $\mathfrak{A}AB = C$ ist. Auch ist $\nu = \angle AMK$, also $\mu = \angle AMK$. Im Programm 332, Reckl. 1884, ist gezeigt, dass $\angle AMK$ dem Winkel gleich ist, welchen BC mit der Seite $B'C'$ des ersten Brocard'schen Dreiecks bildet. Da $AR \parallel B'C'$, so bildet AR mit BC den Winkel $\angle AMK$ oder μ , welchen auch AH' mit BC bildet.

6. Es ist $AH' \parallel BO' \parallel CP'$; $AO' \parallel BP' \parallel CH'$; $AP' \parallel BH' \parallel CO'$. Denn nach 5. ist $H'AC = \lambda$, also $H'AB = A + \lambda$. Nach § 2, 10 ist $AB\Omega O''$ ein Kreis, also $\angle ABO'' = \angle A\Omega O''$. Nun ist $\angle A\Omega O'' = C - \lambda$; also $ABO'' = C - \lambda$. Weil nun O'' und O' Winkelgegenpunkte sind, so ist auch $CBO' = C - \lambda$ und $ABO' = B + C - \lambda$. Dann folgt aber: $\angle H'AB + ABO' = A + \lambda + B + C - \lambda = 2R$, m. a. W. $AH' \parallel BO'$ u. s. w.
7. Die Seiten des Dreiecks ABC erscheinen aus den Punkten $H' O' P' S' T' V'$ unter denselben Winkeln, unter denen die ihnen homologen Seiten von $A'B'C'$ aus den Punkten $S' T' V' H' O' P'$ erscheinen. Denn es ist etwa das Büschel $S' (ABA'C)$ harmonisch und $\angle AS'B = \angle ASB$, $\angle BS'C = 2R - \angle BSC$, also $\angle CS'A = 2R - \angle CSA$. Aus der Harmonie des Büschels lässt sich aber dann folgern, dass $\angle CS'A' = \angle SCB$. Fasst man nun in derselben Art $S' (BCB'A)$ ins Auge, so findet sich $\angle CS'B' = \angle SCA$; mithin ist $\angle CS'A' + \angle CS'B' = \angle SCB + \angle SCA$, oder $\angle A'S'B' = C$ u. s. w.
8. Da nach 4. S der Ähnlichkeitspunkt der congruenten Dreiecke ABC , $A'B'C'$ ist und nach 7. H' und S' homologe Punkte dieser Dreiecke, so halbiert S die Sehne $H'S'$ u. s. w., also:
9. Je zwei conjugierte Punkte unter den 12 Ellipsenpunkten $H' O' \dots$ sind die Endpunkte eines Durchmessers.
10. Da $H'O'S'P'$ ein harmonisches System und $H'S'$ ein Durchmesser der Ellipse ist, so ist die Sehne $O'P'$ parallel der Tangente in H' an E und dem zu $H'S'$ conjugierten Durchmesser; $O'P'$ wird also von $H'S'$ halbiert. Also:
11. Die 4 Dreiecke ABC , $A'B'C'$, $H'OP'$, $S'T'V'$ haben den gemeinsamen Schwerpunkt S und sind der Ellipse E' umschrieben, welche mit E concentrisch, ähnlich und in Ähnlichkeitslage ist und welche die halben Dimensionen hat, wie E .
12. Die Zwillingpunkte H , O , P u. s. w. der zwölf Punkte auf E liegen auf einer Curve C^4 , deren Punkte die Winkelgegenpunkte des in § 3 behandelten Kreises $\mathfrak{K}$ sind.

§ 5.

Beziehungen der vorigen Resultate zu einem Probleme allgemeineren Charakters.

Der Inhalt des II. Teiles unserer Abhandlung steht, wie wir schon gesehen haben, in naher Beziehung zur folgenden Aufgabe, welche von allgemeinerem Interesse ist:

- a. Welches ist die gegenseitige Lage derjenigen zwölf Punkte, in die der Scheitel O eines Dreistrahles fällt, wenn derselbe möglichst oft so gelegt wird, dass ihm ein gegebenes Dreieck ABC eingeschrieben ist?
- b. In welcher Beziehung stehen zu jenen 12 Punkten (O) diejenigen zwölf Punkte (S), in welche, bei derselben Forderung, der Scheitel eines zweiten Dreistrahls fällt, welcher dem ersteren concentrisch so gelegt werden kann, dass jeder Strahl des einen mit den drei Strahlen des anderen ein harmonisches Büschel bildet?

Für den speziellen Fall, dass die drei Folgewinkel des Dreistrahles O den Innenwinkeln des Dreiecks ABC , diejenigen des Dreistrahls S den Innenwinkeln des Schwerliniendreiecks von ABC supplementär sind, haben wir die Antwort in den Entwicklungen des vorigen Paragraphen erhalten. Über die Lage der Winkelgegenpunkte (P) von (O) und (T) von (S) erhielten wir Aufschluss in den §§ 2 und 3.

Die gewonnenen Resultate bleiben aber im Wesentlichen noch dieselben, wenn die soeben genannte Bedingung folgendermassen verallgemeinert wird: Es seien $2R - \alpha$, $2R - \beta$, $2R - \gamma$ die Folgewinkel eines Dreistrahls (O), und $2R - \alpha'$, $2R - \beta'$, $2R - \gamma'$ diejenigen des ihm conjugierten Dreistrahles S , und es sei die Bedingung erfüllt: $\cot A + \cot B + \cot C = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma$; also auch $\cot A + \cot B + \cot C = \cot \alpha' + \cot \beta' + \cot \gamma'$; dann liegen diejenigen 6 Punkte O , desgl. diejenigen 6 Punkte S , welche je ein negatives Produkt

trimetrischer Coordinaten haben, auf der Ellipse E; die 6 Punkte (O'), desgl. diejenigen (S'), je mit positivem Coordinatenprodukt liegen auf C'. Die 12 Winkelgegenpunkte (P') und (T') von (O') resp. (S') liegen auf $\mathfrak{L}$, und die Winkelgegenpunkte (P) und (T) von (O) und (S) liegen auf G. Diejenigen 12 Punkte, die auf E, resp. auf $\mathfrak{L}$, resp. auf G liegen, bilden je 12 harmonische Systeme.

Da der uns zugemessene Raum zu Ende geht, mögen folgende Andeutungen genügen:

A.

1. Die Punkte a, b, c liegen so auf BC, CA, AB, dass $\lambda = \frac{aC}{CB} = \frac{cB}{BA} = \frac{bA}{AC}$. λ ist, da die Richtungen beachtet werden sollen, positiv, wenn a auf dem einen Schenkel des Aussenwinkels an C liegt, negativ, wenn a auf CB selbst oder seiner Verlängerung über B hinaus liegt. Aa soll mit t_a u. s. w. bezeichnet werden; Bb und Cc mögen sich in α schneiden u. s. w. Dann folgt aus dem Cosinussatze:
 $t_a^2 = a^2 (\lambda + \lambda^2) + b^2 (1 + \lambda) - \lambda c^2$; also: I. $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = (1 + \lambda + \lambda^2) (a^2 + b^2 + c^2)$, wenn $BC = a$ u. s. w. Ist bBDA ein Parallelogramm, so ergibt sich, dass $\triangle ADC = ABC$ und $aCA = \lambda \cdot ABC$ und cD gleich und parallel aC, also: $\triangle aCD = aCc = \lambda^2 \cdot ABC$; folglich: II. $\triangle ADa = (1 + \lambda + \lambda^2) \cdot ABC$. Ferner sind t_a, t_b, t_c die Seiten des Dreiecks ADa und seine Winkel gleich denen des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$. Aus I. und II. folgt:

$$\frac{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}{ADa} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2) (1 + \lambda + \lambda^2)}{ABC (1 + \lambda + \lambda^2)} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ABC};$$

$$\text{also: III. } \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \cot A + \cot B + \cot C.$$

3. Das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ist dem Dreieck ABC umschrieben; die Ecke α liegt, wie sich unten ergeben wird, auf der Ellipse, welche durch B, C und den Schwerpunkt S geht und welche der Ellipse E des § 4 congruent und mit ihr in Ähnlichkeitslage ist.
4. Über die Dimensionen von E sei nebenbei Folgendes bemerkt. Sind m und n die Halbachsen, m, und n, zwei conjugierte Halbmesser, die den Winkel φ bilden, so ist $m^2 + n^2 = m'^2 + n'^2$ und $mn = m'n' \cdot \sin \varphi$. Ist SA = m, und SX sein conjugierter Halbmesser, so ist zufolge des Satzes: Das Rechteck aus den Segmenten zweier parallelen Tangenten zwischen ihren Berührungspunkten und einer dritten Tangente ist dem Quadrate des den parallelen Tangenten parallelen Halbdurchmessers gleich: $SX^2 = \frac{a^2}{3}$. Dann findet sich leicht: $m^2 + n^2 = \frac{2}{9} (a^2 + b^2 + c^2)$; $mn = \frac{4}{9} ABC \sqrt{3}$. Ist nun: $\cot \delta = \cot A + \cot B + \cot C$ und $\cot \delta_0 = \cot 60^\circ + \cot 60^\circ + \cot 60^\circ$, so folgt:

$$\text{I. } \frac{1}{2} \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \right) = \frac{\cot \delta}{\cot \delta_0}; \quad \text{II. } m + n = \frac{2}{3} \sqrt{2 ABC (\cot \delta + \cot \delta_0)};$$

$$\text{III. } m - n = \frac{2}{3} \sqrt{2 ABC (\cot \delta - \cot \delta_0)}.$$

Sind Z und Z' die zwei Zwillingspunkte, aus denen die Seiten des Dreiecks ABC unter Winkeln von 120° resp. 60° erscheinen und sind abc, a'b'c' die ihnen entsprechenden dem $\triangle ABC$ umschriebenen gleichseitigen Maximumdreiecke, ersteres mit ABC gleichwendig, letzteres ihm gegenwendig, sind ϱ und ϱ' die Radien ihrer Umkreise, so ist:

$$\text{IV. } \varrho = m + n; \quad \varrho' = m - n.$$

Aus I. folgt: Allen der Ellipse E eingeschriebenen Dreiecken, die deren Centrum S zum Schwerpunkte haben, kommt derselbe Winkel δ zu. Auch sind die ihnen umschriebenen gleichseitigen Maximumdreiecke abc einander gleich; ebenso die Dreiecke a'b'c'.

Folgende einfache Konstruktion gibt die Länge und die Richtungen der Hauptachsen:

Ziehe durch A die Parallele zu BC und beschreibe um A den Kreis mit $\frac{BC}{3}$, der die Parallele in X und Y schneiden möge; errichte über XY die gleichseitigen Dreiecke XYZ und XYU (U nach BC hin); dann ist $SZ = m + n$, $SU = m - n$. Aus dem Cosinussatze folgt leicht, dass SZ und SU die oben angegebenen Werte haben. Die Halbierungslinie von USZ giebt die Richtung der grossen Axe, die seines Nebenwinkels diejenige der kleinen Axe. Wird nämlich XY von der ersten Halbierungslinie in P von der zweiten in N geschnitten, so ist $AN \cdot AP = AZ^2$, und SZ ist die Länge der zu XY parallelen Halbachse. Daher trifft der Satz zu: Wenn die Segmente einer Ellipsentangente vom Berührungspunkte A bis zu ihren Schnittpunkten N und P mit zwei senkrechten Geraden SN und SP aus dem Ellipsencentrum die zur Tangente parallele Halbachse zur mittleren geometrischen Proportionale haben, so sind SP und SN die Richtungen der Achsen.

B. Figur 6.

5. Dem Kreise E mit dem Centrum S sind drei gleichseitige Dreiecke einbeschrieben: ABC, $O_1O_2O_3$, $O_4O_5O_6$; das mittlere Dreieck ist den zwei anderen gegenwärtig, also sind diese beiden gleichwändig. Der gemeinsame Inkreis sei E_1 .
6. Es ist $AO_1 \parallel BO_2 \parallel CO_3$; $AO_2 \parallel BO_3 \parallel CO_1$; $AO_3 \parallel BO_1 \parallel CO_2$ und $AO_4 \parallel BO_5 \parallel CO_6$; $AO_5 \parallel BO_6 \parallel CO_4$; $AO_6 \parallel BO_4 \parallel CO_5$.
7. Jeder der sechs Punkte O hat ein negatives Produkt trimetrischer Coordinaten.
8. AO_1 und BO_3 schneiden sich in einem Punkte γ des Kreises ASB,
 BO_3 " CO_2 " " " " " " α " " BSC,
 CO_2 " AO_1 " " " " " " β " " CSA.
9. $A\beta$ schneide BC in a, $B\gamma$ schneide CA in b und $C\alpha$ schneide AB in c; dann ist:
 $\frac{aC}{CB} = \frac{bA}{AC} = \frac{cB}{BA}$.
10. AA₁, BB₁, CC₁ seien Durchmesser in E, desgleichen $O_1S, \dots$ bis O_6S_6 . Dann sind ABA₁C₁ u. s. w. 6 harmonische Punktsysteme; desgleichen sind O_1, O_2, S, O_3 u. s. w. 12 harmonische Punktsysteme.
11. Z halbiere den Bogen O_1O_4 und eine Ebene $\mathcal{E}$ schneide die Ebene ABC in AZ. Wir projicieren die ganze Figur auf $\mathcal{E}$, indem wir aus jedem Punkte derselben das Lot auf $\mathcal{E}$ fallen; die Buchstaben in der Projektion sollen dieselben bleiben wie die entsprechenden in der Original-Figur.
12. In der Projektion sind nun die Dreiecke ABC, $O_1O_2O_3$, $O_4O_5O_6$ nicht mehr gleichseitig; sie sind aber inhaltsgleich, haben denselben Schwerpunkt S, sind der Ellipse E ein- und der Ellipse E₁ umschrieben; E und E₁ haben das Centrum S, sind in Ähnlichkeitslage und das lineare Ähnlichkeitsverhältnis ist 2.
 Es ist noch $\triangle ABC \simeq A_1B_1C_1$; $O_1O_2O_3 \simeq S_1S_2S_3$; $O_4O_5O_6 \simeq S_4S_5S_6$; auch die Dreiecke $A_1B_1C_1$, $S_1S_2S_3$, $S_4S_5S_6$ haben den gemeinsamen Schwerpunkt S und sind der E ein- der E₁, aber umschrieben.
13. Die in 6., 7., 9., 10. für die Originalfigur aufgestellten Behauptungen gelten auch für die Projektion.
14. Was 8. betrifft, so liegen α, β, γ jetzt auf den drei der E congruenten und ihr ähnlich liegenden Ellipsen BSC, CSA, ASB.
15. $\angle \alpha \equiv BO_1C$ (α ist gleich oder supplementär BO_1C); denn BO_3 oder $B\alpha \parallel CO_1$; also

$Bx \parallel CO$, u. s. w. Es ist: $\alpha \equiv BO, C \equiv CO_2A \equiv AO_3B$; $\gamma \equiv CO, A \equiv AO_2B \equiv BO_3C$; $\beta \equiv AO, B \equiv BO_2C \equiv CO_3A$.

16. Aus 11. folgt, dass O, A und O_4A , desgl. O, B und O_4C sowie auch O, C und O_4B symmetrisch zur Schnittkante ZA der Ebenen $\mathcal{E}$ und ABC liegen. Deshalb ist in der Projektion: $\sphericalangle BO, C \equiv BO_4C$; $CO, A \equiv BO_4A$; $AO, B \equiv CO_4A$. Ausserdem ergibt sich aus 6. und 13. $BO_4C \equiv AO_5B \equiv CO_6A \equiv \alpha$; $CO_4A \equiv BO_5C \equiv AO_6B \equiv \beta$; $AO_4B \equiv CO_5A \equiv BO_6C \equiv \gamma$.
17. Folgende Systeme von je 4 Punkten liegen je auf einem Kreise: BCO, O_4 , CAO, O_5 , ABO, O_6 ; BCO_2O_5 , CAO_2O_6 , ABO_2O_4 ; BCO_3O_6 , CAO_3O_4 , ABO_3O_5 . Fällt speziell O_4 in A , mithin O_5 in B und O_6 in C , so vertritt der Kreis um ABC die drei ersten Kreise; die sechs anderen berühren E je in einer Ecke des Dreiecks ABC und je zwei von ihnen haben eine Seite desselben zur gemeinsamen Sehne. Dieser spezielle Fall ist in § 4 behandelt worden.
18. Da S , und O , homologe Punkte der congruenten Dreiecke ABC und A, B, C , sind, so ist: $BS, C = BO, C \equiv \alpha$; $CS, A = CO, A \equiv \gamma$ und $AS, B = AO, B \equiv \beta$. Da ferner zuf. 13. der Dreistrahl $S, (A, B, C)$ demjenigen $S, (ABC)$ concentrisch so liegt, dass jeder Strahl des einen mit den dreien des andern ein harmonisches Büschel bildet; so ist $BS, C \equiv \alpha'$, $CS, A \equiv \gamma'$, $AS, B \equiv \beta'$, wo, wie oben gesagt, α' , β' , γ' die Winkel des Schwerlinien-dreiecks von $\alpha\beta\gamma$ sind.
19. Ebenso, wie $AO, \parallel BO_2 \parallel CO_3$ u. s. w., ist auch $AS, \parallel BS_2 \parallel CS_3$ u. s. w. und deshalb bleiben die Behauptungen in 15. und 16. richtig, wenn man in ihnen O , mit S , O_2 mit S_2 u. s. w., sowie α mit α' , β mit β' , γ mit γ' vertauscht. Desgleichen bleibt 17. richtig, wenn O , mit S , u. s. w. vertauscht wird.

Die vorstehenden Angaben enthalten alles Nötige, um die in den §§ 1—4 erhaltenen Resultate so zu verallgemeinern, dass sie auch gültig bleiben, wenn für die Voraussetzung $\alpha = A$, $\beta = B$, $\gamma = C$ u. s. w. die allgemeinere Voraussetzung eintritt:

$$\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \cot A + \cot B + \cot C.$$

20. Aus dem Vorstehenden in Verbindung mit § 4, 5 lässt sich noch folgern: Ist $A'B'C'$ das erste Brocard'sche Dreieck, so sind die Halbierungslinien, der durch BC und $B'C'$ sowie CA und $C'A'$ sowie AB und $A'B'$ gebildeten Winkel resp. ihrer Nebenwinkel den Hauptachsen der Ellipse E parallel.

Recklinghausen, 15. März 1886.

Artzt.

Berichtigung: In einigen Exemplaren lies pag. 23 Zeile 5: 3 der 12 statt 3 oder 12.

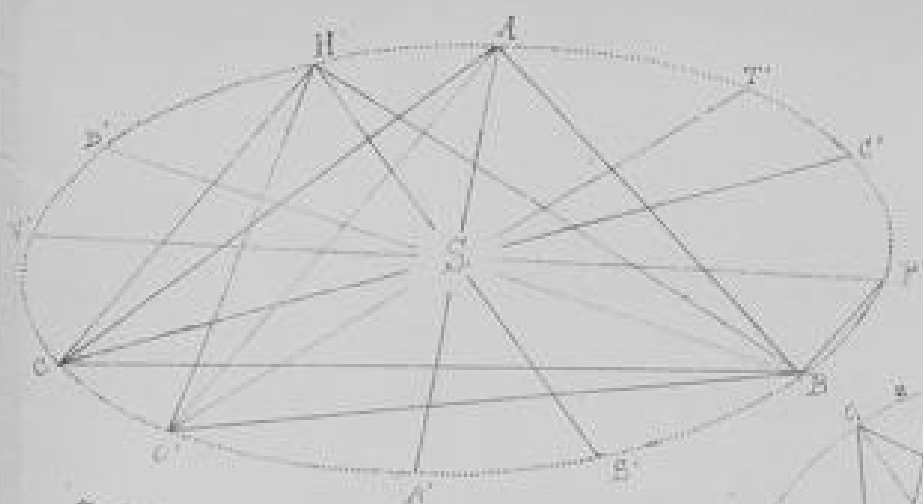


Fig. 1.

Fig. 6.

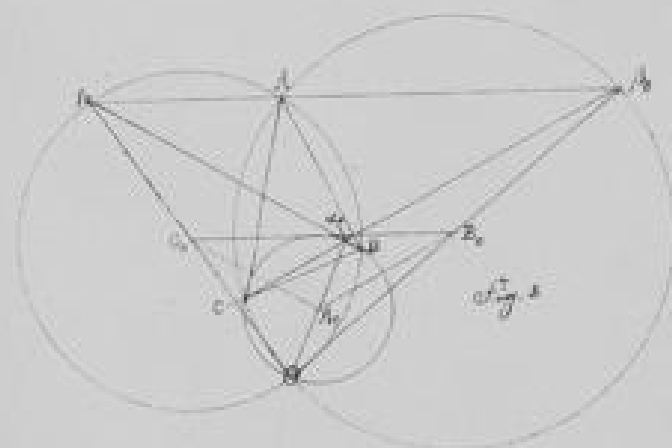
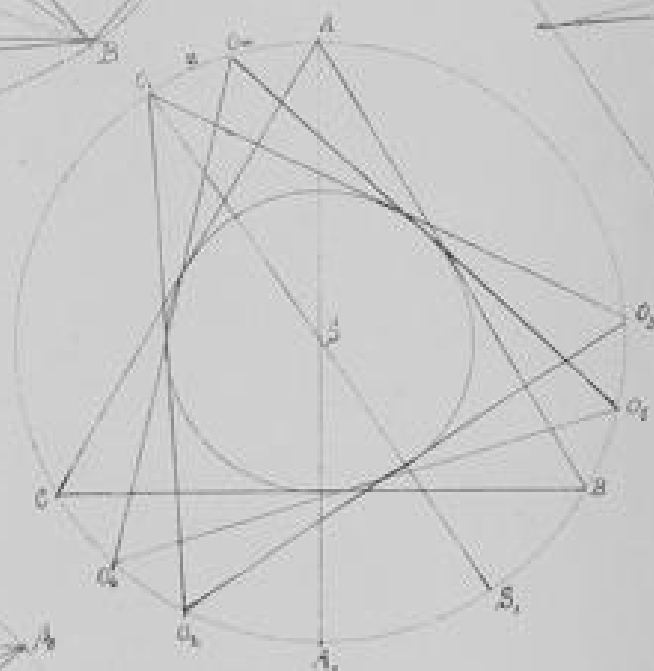


Fig. 5.

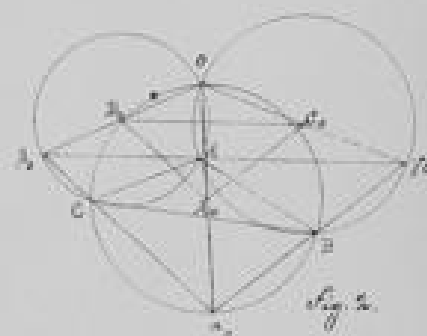


Fig. 2.



Fig. 5.

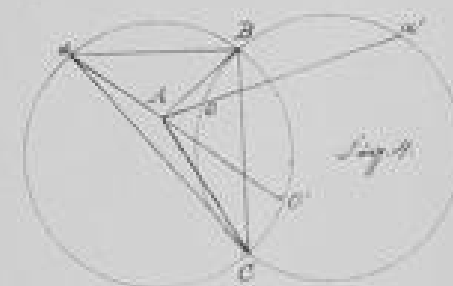


Fig. 4.

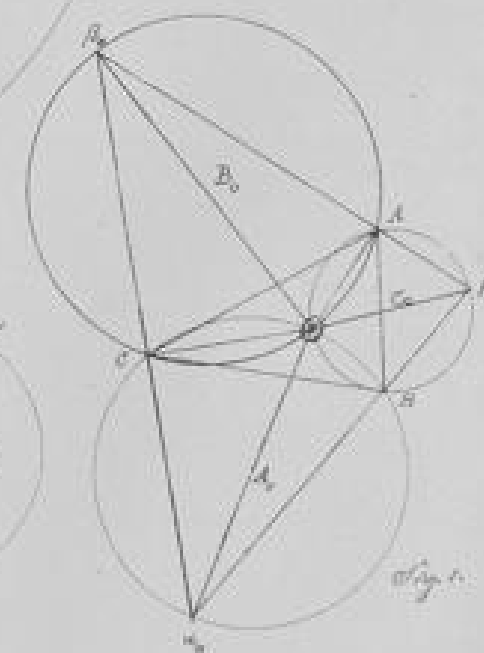


Fig. 1.

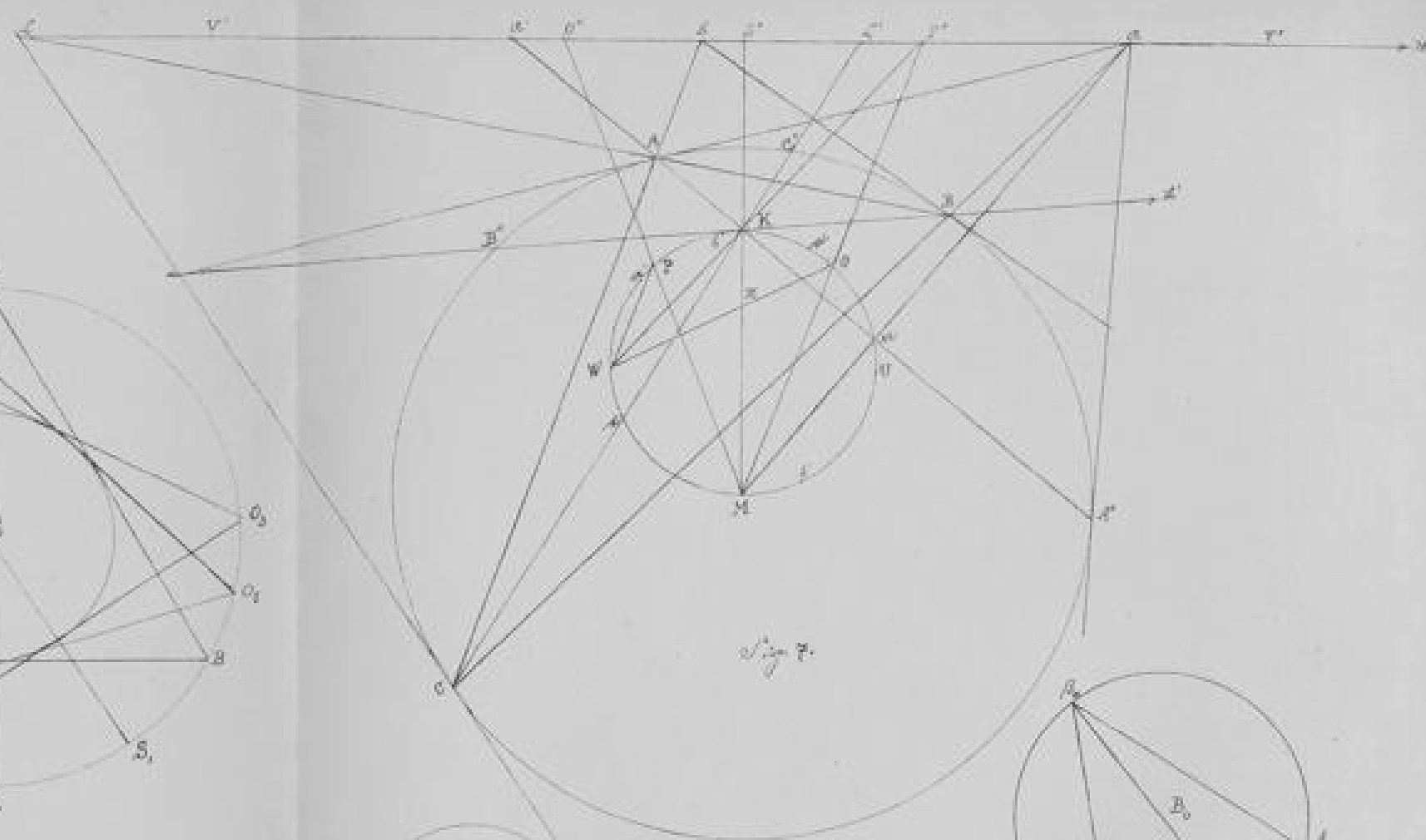


Fig. 7.

