

Realgymnasium
und
Gymnasium
in
Hagen.



Schicksundzwanzigster Jahrgang.

Inhalt:
Planimetrische Aufgaben in systematischer Anordnung (mit beigelegten Musterbeispielen)
vom ordentlichen Lehrer Rich. Sehender.

1885. Progr.-Nr. 338.

Hagen 1885.
Verlag von Gustav Bag.

gha
5 (1885)

527, 20⁶



Planimetrische Aufgaben in systematischer Anordnung

(mit beigelegten Musterbeispielen).

Wenn im folgenden der Versuch gemacht wird, der grossen Anzahl zum Teil vortrefflicher und umfangreicher Sammlungen von planimetrischen Aufgaben eine neue hinzuzufügen, so geschieht es nicht, um etwas wesentlich neues zu liefern; die Sammlung soll vielmehr speziell nur den Zwecken unserer eigenen Schule dienen. Sie soll eine hinreichend grosse Anzahl von Aufgaben darbieten aus den verschiedenen Kapiteln des planimetrischen Unterrichts, doch sollen dieselben weniger nach den einzelnen Kapiteln als nach der geringeren oder grösseren Schwierigkeit der Lösung gruppiert sein. Ersteres ist für uns um so weniger nötig, als wir die ausführliche Behandlung planimetrischer Aufgaben erst dann beginnen, wenn dieser Teil des mathematischen Unterrichts abgeschlossen ist, also in Untersekunda. Nach unserm Lehrplan wird mit der Anfertigung häuslicher mathematischer Arbeiten in Sekunda begonnen; im Zusammenhang damit schreiten wir erst im letzten Semester der Obertertia zur ausführlichen und sorgfältigen Behandlung der planimetrischen Aufgaben, prägen den Schülern die einzelnen Teile, in welche die Lösung einer Aufgabe notwendig zerfällt, genau ein und gewöhnen sie durch oft wiederholte mündliche und schriftliche Einübung weniger charakteristischer Aufgaben an die den einzelnen Abschnitten adäquate Form des Ausdrucks. Vielfach wird man es vielleicht für unpädagogisch und fehlerhaft halten, erst am Schlusse des dritten oder beim Beginne des vierten Jahres, in welchem der Schüler mathematischen Unterricht erhält, die Lösung planimetrischer Aufgaben zu beginnen, da er schon in jüngerem Alter fähig sei, planimetrische Konstruktionsaufgaben zu lösen. Dies ist meines Dafürhaltens richtig, wenn man es mit besonders guten Schülergenerationen zu thun hat, und wenn es dem Lehrer nur darauf ankommt, dass die betreffende Aufgabe gelöst, d. h. dass die Konstruktion derselben gegeben wird. Im allgemeinen aber werden die Verstandeskräfte eines Tertianers noch nicht so weit entwickelt sein, dass er streng zwischen Analysis und Konstruktion, was die Bedeutung dieser Teile und ihre Darstellung anlangt, zu unterscheiden vermag, dass er die wesentlichen Punkte, auf die es beim Beweise ankommt, herausfindet. Will man dem Tertianer häusliche Arbeiten zumuten und die im Unterrichte erledigten Kapitel der Planimetrie repetieren und einprägen, so empfiehlt sich die Durchnahme und nachträgliche Ausarbeitung von Übungssätzen, wie sie sich z. B. in der Sammlung von Gandtner & Junghaus in vorzüglicher Auswahl finden. Die Anfertigung sorgfältiger Figuren macht den meisten Schülern auf diesem Standpunkt Vergnügen; es überrascht die Schüler und setzt sie in Erstaunen, dass es neben den Lehrsätzen ihres Lehrbuches noch eine Menge anderer wichtiger Sätze giebt; die logische Strenge der Beweise bringt ihnen immer wieder zum Bewusstsein, dass in der Mathematik immer eines logisch aus dem andern folgen muss. Überhaupt scheint man heutzutage vielfach den bildenden Wert der Übungssätze zu unterschätzen und alles Heil von den planimetrischen Aufgaben zu erwarten. Daher kommt es dann, dass so mancher Schüler der oberen Klassen eine Konstruktionsaufgabe verhältnissmässig leicht löst, dagegen vor dem Beweise eines weit einfacheren Übungssatzes wie vor etwas ganz absonderlichem scheu zurückbebt.

Die Beifügung von mehreren Musterbeispielen bei einzelnen Kapiteln geschah im Interesse unserer Schüler. Wir sind an unserer Schule übereingekommen, von den Schülern eine ganz bestimmte uns

korrekt erscheinende Ausdrucksweise zu verlangen. Durch die Beispiele wird dieselbe ein für allemal normiert, was um so wünschenswerter ist, als vielfach, selbst in ganz neuen Veröffentlichungen, gegen Strenge des Ausdrucks gefehlt wird.

Als bekannt setzen wir bei der Bearbeitung von Aufgaben nur die Fundamentalaufgaben voraus, die in allen Lehrbüchern gewissermassen als das absolut notwendige Handwerkszeug aufgeführt sind. Es sind dies folgende: Zeichnung des Dreiecks, wenn die den vier Kongruenzsätzen entsprechenden Stücke gegeben sind, Halbieren eines Winkels und einer Strecke, Errichten und Fällen einer Senkrechten, Teilung einer Strecke in eine Anzahl gleicher Teile, Zeichnung eines Kreissegments mit gegebenem Winkel, Ziehen der Tangenten an einen und zwei Kreise (letztere Aufgabe freilich erst dann, nachdem sie in Sekunda ausführlich durchgenommen und sorgfältig bearbeitet ist), Teilung einer Strecke nach gegebenem Verhältnis, Konstruktion der vierten und mittleren Proportionale, goldener Schnitt, die einfachsten Verwandlungs- und Teilungsaufgaben in Bezug auf Figuren. Anfangs sind solche Aufgaben zu wählen, die direkt sich auf die 4 Fundamentalfälle der Dreieckskonstruktion zurückführen lassen; doch auch bei weniger einfachen Aufgaben ist zu verlangen, dass bis auf diese Fundamentalprobleme zurückgegangen wird, und dass der Schüler sich nicht mit der Bemerkung begnügt, die Aufgabe sei nun auf die und die vielleicht früher dagewesene zurückgeführt. Damit hängt es dann notwendig zusammen, dass die Verwendung geometrischer Örter auf ein möglichst geringes Maass beschränkt wird.

Wenn man im Laufe der Konstruktion auf verschiedenen etwas abweichenden Wegen zum Ziele kommen kann, dann ist streng darauf zu halten, dass die Konstruktion in ihren Einzelheiten genau dem in der Analysis angedeuteten Wege entspricht. Dass der Schüler dazu angehalten wird, die in der Exposition gegebenen Grössen für die Konstruktionsfigur zu verwenden, ist wohl selbstverständlich. In manchen Fällen, z. B. wenn unter den gegebenen Stücken eines Dreiecks sich zwei Mittellinien befinden, führt die Konstruktion leicht zu einem indirekten Beweise. Lässt sich durch passende Wahl der Analysis und Konstruktion dieser Übelstand vermeiden, so ist der Schüler beim Stellen der Aufgabe auf diese Schwierigkeit aufmerksam zu machen; ist dies nicht möglich, so wird es am besten sein, wenn man selbst in der Klasse die betreffende Umkehrung eines bekannten Satzes bildet und beweist. Auf eine ausführliche und erschöpfende Determination legen wir nur ausnahmsweise grösseren Wert; meist macht dem Schüler die Wahl des Ausdrucks hier besondere Schwierigkeit, und sehr häufig lässt sich ja die Determination auch nur mit Hilfe trigonometrischer Grössen knapp und korrekt gestalten.

Bezeichnungen.

1. Im beliebigen Dreieck (ABC) — ähnlich im rechtwinkligen und gleichschenkligen — sind die Winkel mit α (links), β (rechts), γ (oben) zu bezeichnen; die Gegenseiten mit a, b, c ; die zugehörigen Höhen mit h_a, h_b, h_c ; die von h_a gebildeten Abschnitte der Grundlinie mit p und q , p liegt an β , q an α ; die Mittellinien mit t_a, t_b, t_c ; die Winkelhalbierenden mit w_a, w_b, w_γ ; die durch w_γ entstehenden Abschnitte der Grundlinie mit u und v , u an β , v an α liegend; der Radius des umgeschriebenen Kreises mit r , der des eingeschriebenen mit ρ , die der äusseren Berührungskreise mit ρ_a, ρ_b, ρ_c ; der von h_a und t_a gebildete Winkel mit $\angle h_a t_a$.

2. Die Winkel eines Vierecks sind im Kreise rechts herum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; die Seiten a, b, c, d , so dass an a die Winkel α und β liegen; die Diagonalen e und f , so dass a, b, e und d, a, f Dreiecke bilden.

3. Die Summe oder Differenz geradliniger Stücke wird mit s und d , die Summe und Differenz von Winkeln mit σ und δ bezeichnet.

I. Dreiecks- und Vierecksaufgaben, welche direkt auf die vier Fundamentalaufgaben zurück führen.

Beispiel. Aufgabe: Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem eine Seite, der von ihr und der Grundlinie eingeschlossene Winkel und die Mittellinie zur Grundlinie gegeben ist.

Exposition: Es sind 2 Strecken a und t_c und ein Winkel β gegeben; es soll ein Dreieck konstruiert werden, in welchem die Mittellinie zur Grundlinie gleich t_c , eine Seite gleich a und der von ihr und der Grundlinie eingeschlossene Winkel gleich β ist.

Konstruktion: Man schneidet auf einer Geraden eine Strecke AB gleich a ab, trägt im Punkte A an sie eine zweite Gerade unter dem Winkel β an, und beschreibt um B einen Kreisbogen mit t_c als Radius, der diese in C schneidet. Verlängert man hierauf AC um sich selbst bis D und verbindet man B mit D , so ist ABD das verlangte Dreieck.

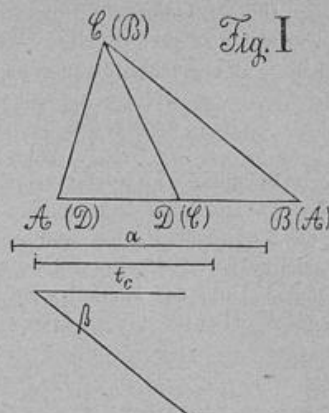
- 1) $AB = a$ nach K.
- 2) $\sphericalangle BAD = \beta$ n. K.
- 3) $BC = t_c$ n. K. und Mittellinie, weil $AC = CD$ ist.

1. a, b, h_c	14. a, w_γ, γ	27. h_c, p, ta
2. a, c, h_c	15. a, h_c, w_γ	28. p, ta, β
3. a, h_c, a	16. h_c, w_γ, γ	29. c, ha, w_β
4. a, h_c, γ	17. p, w_γ, β	30. h_c, p, w_β
5. c, h_c, a	18. w_γ, u, β	31. a, p, w_β
6. h_c, a, γ	19. u, β, γ	32. h_c, w_β, β
7. h_c, a, β	20. a, h_c, u	33. a, h_c, w_β
8. h_c, p, q	21. h_c, w_γ, u	34. p, w_β, β
9. a, b, p	22. c, ha, γ	35. ha, w_γ, γ
10. a, p, γ	23. c, tc, ha	36. a, hb, w_γ
11. a, c, tc	24. ha, tc, β	37. a, w_γ, u
12. c, tc, a	25. ha, p, β	38. h_c, w_γ, a
13. h_c, tc, a	26. a, ha, ta	
39. $a, h_c, p = 2q$	44. $a, \beta, tc = \frac{1}{2}c$	
40. $a, p, q = h_c$	45. $h_c, \beta, a = ta$	
41. $a, h_c, a = 2\beta$	46. $w_\gamma, a, \beta = \frac{1}{2}a$	
42. $a, h_c, a = \gamma$	47. $ha, \beta, c = w_\beta$	
43. $a, \beta, c = 2h_c$	48. $a, h_c, w_\gamma = u$	

Ein Viereck zu konstruieren aus:

1. a, b, c, d, β
2. a, b, c, α, β
3. a, b, c, β, γ
4. a, b, c, d, e
5. a, b, c, e, α
6. a, b, e, α, γ
7. a, c, e, α, δ
8. $a, e, \alpha, \beta, \gamma$
9. a, b, c, e, f
10. a, e, f, α, β
11. a, b, f, α, δ
12. $a, b, f, \nrightarrow af, \nrightarrow bf$
13. $a, c, e, \nrightarrow ae, \nrightarrow ce$
14. $a, e, f, \nrightarrow ae, \nrightarrow af$
15. $a, b, c, e, \alpha = \beta$
16. $a, b, \beta, \delta, \alpha = \gamma$
17. $a, e, \beta, b = c = d$
18. $a, b, c, \beta, e = f$
19. $a, b, \alpha, \beta, e = f$
20. $a, e, \alpha, \beta, b = d$
21. $a = b, \beta, e, f, \varepsilon^{**}$
22. $a = b, c = d, e, \alpha, \beta$

*) ε ist der von den Diagonalen gebildete Winkel.



Durch Auslassung eines gegebenen Stückes ergeben sich Aufgaben für das Trapez, durch das Auslassen zweier solche für das Parallelogramm.

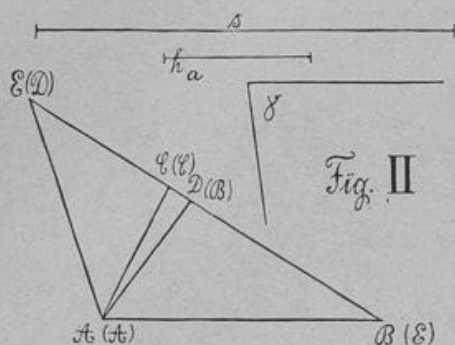
II. Dreiecksaufgaben, bei denen die Summe oder Differenz der beiden Seiten, die Differenz der Winkel an der Grundlinie, die Differenz der durch die Höhe entstehenden Grundliniensegmente oder zwei dieser Grössen gegeben sind.

$$(s = a + b, d = a - b, m = p - q, \delta = \alpha - \beta).$$

Beispiel. Aufgabe: Ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Summe der beiden Seiten, die zur grösseren gehörige Höhe und der Winkel an der Spitze gegeben ist.

Exposition: Es sind zwei Strecken s und h_a und ein Winkel γ gegeben. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, in welchem die Summe der beiden Seiten gleich s , die Höhe zur grösseren Seite gleich h_a und der Winkel an der Spitze gleich γ ist.

Analysis: (Figur II). $\triangle ABC$ sei das verlangte; es sei AD senkrecht auf BC und gleich h_a ,



$AC + BC$ gleich s und $\angle ACB$ gleich γ . Man verlängert BC um das Stück CE gleich CA und verbindet A mit E . Im Dreieck ACD ist AD gleich h_a , ADC gleich R und $\angle ACD$ gleich γ ; folglich ist es bestimmt. Der Punkt E liegt auf der Verlängerung von DC und hat von C den Abstand CE gleich CA . Der Punkt B liegt auf der Verlängerung von CD und hat von E den Abstand s .

Konstruktion: (Figur II mit den in Klammern stehenden Buchstaben versehen). Man schneidet auf einer Geraden die Strecke AB gleich h_a ab, trägt in den Punkten A und B zwei Geraden unter den Winkeln $R - \gamma$ und R an, die sich in C schneiden, und verlängert BC um ein Stück CD gleich CA . Wenn man nun auf DB das Stück DE gleich s bestimmt

und E mit A verbindet, so ist $\triangle ACE$ das verlangte.

Beweis. 1) $AB \perp CE$ und gleich h_a n. Konstr.

$$\angle ABC = R$$

$$\angle BAC = R - \gamma$$

$$2) \quad \angle ACB = \gamma$$

$$DC + CE = s \text{ n. K.}$$

$$DC = CA \text{ n. K.}$$

$$3) \quad CA + CE = s.$$

Aufgaben. Ein Dreieck zu konstruieren aus:

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------------------|
| 1. a, b, m | 18. a, b, δ | 35. d, h_b, γ |
| 2. a, m, α | 19. a, m, δ | 36. $a - h_c, \alpha, \beta$ |
| 3. a, m, β | 20. a, h_c, δ | 37. $a - h_c, p, q$ |
| 4. s, c, γ | 21. b, h_a, δ | 38. $a - h_c, t_c, \beta$ |
| 5. s, α, β | 22. h_a, γ, δ | 39. $a - h_c, t_a, \beta$ |
| 6. s, c, δ | 23. h_c, γ, δ | 40. $a - h_c, h_a, \beta$ |
| 7. s, h_c, β | 24. d, c, γ | 41. $a - h_c, w_\gamma, \beta$ |
| 8. s, h_a, c | 25. d, c, γ | 42. $a - h_c, w_\beta, \beta$ |
| 9. s, h_a, δ | 26. d, α, β | 43. m, s, β |
| 10. s, c, α | 27. d, c, δ | 44. m, s, γ |
| 11. s, h_b, α | 28. d, h_c, β | 45. $m, s, \sigma = \alpha + \beta$ |
| 12. s, h_b, δ | 29. d, h_a, c | 46. m, s, δ |
| 13. $a + h_c, t_c, \beta$ | 30. d, h_a, β | 47. m, d, β |
| 14. $a + h_c, h_b, \beta$ | 31. d, h_a, γ | 48. m, d, γ |
| 15. h_c, m, α | 32. d, h_a, δ | 49. m, d, σ |
| 16. h_c, m, β | 33. d, h_c, α | 50. m, d, δ |
| 17. h_a, m, β | 34. d, h_b, c | |

1. $s_1 = a + b + c$, α , β
2. s_1 , hc , a
3. s_1 , hc , p
4. s_1 , p , β
5. $d_1 = a + b - c$, β , γ
6. d_1 , α , β
7. d_1 , ha , β
8. d_1 , ha , γ

Beispiel. Aufgabe: Ein Dreieck zu konstruieren, von dem der Radius des umschriebenen Kreises, der Winkel an der Spitze und die von der Spitze ausgehende Mittellinie gegeben ist.

Exposition: Es sind 2 Strecken r und t_c und ein Winkel γ gegeben; es soll ein Dreieck gezeichnet werden, in dem der Radius des umgeschriebenen Kreises gleich r , der Winkel an der Spitze gleich γ und die Mittellinie zur Grundlinie gleich t_c ist.

Analysis: (Figur III). Dreieck ABC sei das verlangte; es sei $\sphericalangle ACB$ gleich γ , die Mittellinie CD gleich t_c und der Radius des umgeschriebenen Kreises mit dem Centrum O gleich r . Verbindet man O mit A und B , so sind AO und BO gleich r , Winkel AOB gleich 2γ , also Dreieck AOB bestimmt. D ist die Mitte von AB . C hat von D den Abstand t_c und liegt auf dem Kreisbogen über AB , welcher den Winkel γ faßt.)

Konstruktion: Man zeichnet einen Winkel gleich 2γ , schneidet auf seinen Schenkeln zwei Strecken AB und AC gleich r ab und verbindet A mit B . Hierauf beschreibt man über BC ein Kreissegment, welches den Winkel γ fasst, halbiert BC in D , schlägt um D mit t_c als Radius einen Kreisbogen, der den Bogen des Segmentes zweimal schneidet, verbindet den einen Durchschnittspunkt (E) mit B und C und erhält so als verlangtes das Dreieck BCE .

Beweis. Beschreibt man um A mit r als Radius einen Kreis, so muss dieser ausser durch B und C auch durch E gehen, weil $\sphericalangle BEC$ gleich γ und $\sphericalangle BAC$ gleich 2γ ist. Ausserdem ist nach Konstr. DE Mittellinie und gleich tc .

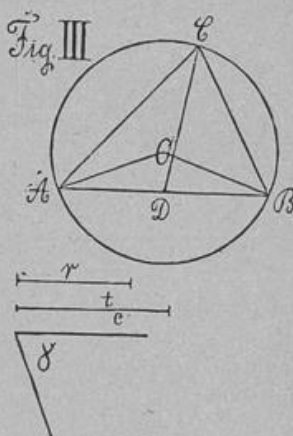
1. c, t_c, γ
2. p, q, γ
3. u, v, γ
4. h_c, u, γ
5. p, u, γ
6. $p, q, \nrightarrow atc$
7. $c, \nrightarrow ct_c, \gamma$
8. $c, \nrightarrow atc, \gamma$
9. $c, \nrightarrow atc, \nrightarrow btc$
10. c, h_c, γ
11. $h_c, m = p - q, \delta = \alpha - \beta$
12. p, q, δ
13. c, m, δ
14. $s_1 = a + b + c, h_c, \gamma$
15. $s_1, h_c, \sigma = \alpha + \beta$
16. $d_1 = a + b - c, h_a, \alpha$

IV. Vierecksaufgaben, die sich durch das Ziehen von Diagonalen in Dreiecksaufgaben aus II und III zurückführen lassen.

$$\begin{array}{lll}
 1. \ a, b, c, \beta, \delta & 6. \ a, b, c = d, \beta, \delta & 11. \ a \pm b, e, \beta, \delta, \varepsilon \\
 2. \ a, b, e, f, \delta & 7. \ a = b, c = d, e, f, \beta & 12. \ a \pm b, d, f, \alpha, \varepsilon \\
 3. \ a, b, c, e, \nabla df & 8. \ a \pm b, c, d, e, \beta & 13. \ a \pm b, f, \varepsilon, \nabla ae, \nabla be \\
 4. \ a, b, e, \nabla cf, \nabla df & 9. \ a \pm b, c, e, \beta, \gamma & 14. \ a \pm b, c + d, e, \beta, \delta \\
 5. \ a, b, c = d, e, f & 10. \ a \pm b, e, f, \alpha, \beta & 15. \ a + b, c - d, e, \beta, \delta
 \end{array}$$

Aufgaben über das Trapez und Parallelogramm lassen sich den vorstehenden entsprechend leicht bilden.

*) Man könnte C auch durch $DC = t_c$ und OC gleich r bestimmen.



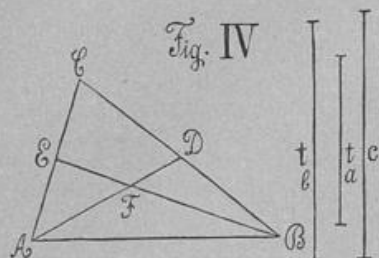
V. Dreiecksaufgaben, bei denen eine oder zwei Mittellinien, die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze oder die Abschnitte, u und v , gegeben sind, in welche die Grundlinie hierdurch zerfällt.

Anmerkung. Bei den Aufgaben mit einer Mittellinie ist zu beachten, dass die um sich selbst verlängerte Mittellinie und die Seite Diagonalen eines Parallelogrammes sind; bei denen, wo zu den gegebenen Stücken w_γ oder u resp. v gehören, dass $\sphericalangle hc w_\gamma = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ist.

Beispiel. Aufgabe: Ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Grundlinie und die zu den beiden Seiten gehörenden Mittellinien gegeben sind.

Exposition: Es sind drei Strecken c , t_a und t_b gegeben; es soll ein Dreieck konstruiert werden, in welchem die Grundlinie gleich c und die nach den Seiten gehenden Mittellinien gleich t_a und t_b sind.

Analysis: (Figur IV). Dreieck ABC sei das verlangte. Es sei die Grundlinie AB gleich c , die



Mittellinie AD gleich t_a , die Mittellinie BE gleich t_b , und ihr Durchschnittspunkt heisse F . Im Dreieck ABF ist AB gleich c , AF gleich $\frac{2}{3}t_a$ und BF gleich $\frac{2}{3}t_b$. Der Punkt D liegt auf der Verlängerung von AF und hat von A den Abstand t_a . Der Punkt C liegt auf der Verlängerung von BD und hat von D den Abstand DC gleich DB .

Konstruktion: Man zeichnet ein Dreieck ABC , dessen Seiten bezüglich gleich c , $\frac{2}{3}t_b$ und $\frac{2}{3}t_a$ sind. Alsdann verlängert man AC um CD gleich $\frac{1}{3}t_a$, verbindet D mit B und verlängert BD um sich selbst bis E . Verbindet man schliesslich A mit E , so ist $\triangle ABE$ das verlangte.

Beweis. Man verlängert BC , bis sie AE in F trifft. Es ist:

- 1) $AB = c$ nach Konstr.
- 2) AD Mittellinie zu BE nach K. und gleich t_a . Es ist $CD = \frac{1}{2}AC$, folglich C der Schwerpunkt des Dreiecks, daher auch BF Mittellinie. Weil aber der grössere Abschnitt BC gleich $\frac{2}{3}t_b$ ist, so muss BF selbst gleich t_b sein.

Anmerkung. Die Analysis könnte an einer Stelle wesentlich abweichen, nämlich in Betreff der Bestimmung des Punktes C . Es könnte heissen: D liegt auf der Verlängerung von BF und hat von B den Abstand t_b , C ist der Durchschnittspunkt der Verlängerungen von AE und BD . In der Konstruktion verlängert man dem entsprechend AC um CD gleich $\frac{1}{3}t_a$, BC um CE gleich $\frac{1}{3}t_b$ und zuletzt AE und BD , bis sie sich in F schneiden. Nur leidet diese Darstellung an einem Übelstande, dass nämlich im Beweise als Umkehrung des Satzes über Mittellinien der Satz erscheinen muss: „Teilen sich 2 Ecktransversalen eines Dreiecks im Verhältnis 2 : 1, so sind sie Mittellinien.“

Aufgaben. Ein Dreieck zu konstruieren aus:

- | | | |
|---|---|----------------------------------|
| 1. a, b, tc | 16. $hc, tc, \alpha + \beta = \sigma$ | 31. $a, wc \pm hc, \delta$ |
| 2. a, tc, γ | 17. c, tc, ta | 32. wc, u, δ |
| 3. $a, tc, \sphericalangle atc$ | 18. $c, \sphericalangle cta, \sphericalangle ctb$ | 33. u, v, α |
| 4. $tc, \sphericalangle atc, \sphericalangle btc$ | 19. $ta, tb, \sphericalangle ta tb$ | 34. u, v, β |
| 5. $hc + tc, \sphericalangle hc tc, \gamma$ | 20. $ta, tb, \sphericalangle cta$ | 35. u, v, δ |
| 6. $tc - hc, \sphericalangle hc tc, \gamma$ | 21. ta, tb, α | 36. $u, v, a - b = d$ |
| 7. a, ha, tc | 22. hc, tc, ta | 37. d, u, α |
| 8. ha, tc, α | 23. $hc, tc, \sphericalangle cta$ | 38. d, u, β |
| 9. c, ta, γ | 24. hc, ta, tb | 39. d, u, δ |
| 10. hc, ta, γ | 25. $c, tc, \sphericalangle ta tb$ | 40. $u - v = d_1, \alpha, \beta$ |
| 11. ha, hb, ta | 26. $c, ta + tb, \sphericalangle cta$ | 41. d_1, d, β |
| 12. a, tc, α | 27. $c, tb \pm ta, \sphericalangle ta tb$ | 42. d_1, d, γ |
| 13. tc, α, β | 28. ta, tb, tc | 43. u, v, ha |
| 14. $tc, \sphericalangle ctc, \gamma$ | 29. $a, w_\gamma, \alpha - \beta = \delta$ | |
| 15. $tc, \sphericalangle atc, \alpha$ | 30. w_γ, γ, δ | |

VI. Dreiecksaufgaben, bei denen die Summe oder Differenz zweier Höhen zu den gegebenen Stücken gehört.

Es ist zu beachten, dass $a + b = s$, $h_a + h_b = s_1$ und γ , ebenso $a - b = d$, $h_b - h_a = d_1$ und γ Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks sind, so dass immer durch je zwei derselben das dritte mitbestimmt ist.

Aufgaben. Ein Dreieck zu konstruieren aus:

- | | | |
|--|---|--------------------------------|
| 1. $h_a + h_b = s_1$, a , γ | 7. s , s_1 , $\alpha - \beta = \delta$ | 13. d_1 , β , γ |
| 2. s_1 , c , γ | 8. $h_b \pm h_a$, c , α | 14. $a - b = d$, d_1 , c |
| 3. s_1 , c , $\alpha + \beta = \sigma$ | 9. $h_b - h_a = d_1$, a , γ | 15. d , d_1 , β |
| 4. s_1 , β , γ | 10. d_1 , c , γ | 16. d , d_1 , δ |
| 5. $a + b = s$, s_1 , c | 11. d_1 , c , $\alpha + \beta = \sigma$ | 17. d , h_a , h_b |
| 6. s , s_1 , β | 12. a , b , d_1 | |

VII. Dreiecksaufgaben, bei denen der Radius des umgeschriebenen Kreises (r) oder der des eingeschriebenen (ρ) gegeben ist.

Der Radius r , die Seite c und der Winkel 2γ sind Stücke eines gleichschenkligen Dreiecks, sodass durch zwei derselben das dritte bekannt ist. Der von der Höhe und dem nach der Spitze gehenden Radius gebildete Winkel ist gleich der Differenz der Winkel an der Grundlinie und wird von der Halbierenden des Winkels an der Spitze halbiert. In dem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete gleich ρ mit dem Gegenwinkel $\frac{1}{2}\gamma$ ist, hat die andere Kathete die Länge $\frac{1}{2}(a + b - c)$.

Aufgaben. Ein Dreieck zu konstruieren aus:

- | | | |
|---|---|--|
| 1. r , a , b | 21. r , c , δ | 41. h_c , t_c , w_γ |
| 2. r , c , α | 22. r , h_c , w_γ | 42. ρ , c , α |
| 3. r , a , β | 23. r , h_c , δ | 43. ρ , α , β |
| 4. r , a , β | 24. r , t_c , δ | 44. ρ , a , γ |
| 5. r , a , h_c | 25. r , w_γ , δ | 45. ρ , c , γ |
| 6. r , h_c , α | 26. r , $a \pm b$, γ | 46. ρ , a , h_c |
| 7. r , c , h_c | 27. r , $a \pm b$, c | 47. ρ , h_c , α |
| 8. r , c , h_a | 28. $c \pm r$, a , γ | 48. ρ , w_γ , γ |
| 9. r , c , t_c | 29. $c \pm r$, h_c , γ | 49. ρ , h_c , w_γ |
| 10. r , ρ , q | 30. $c \pm r$, t_c , γ | 50. ρ , $a + b - c = d_1$, h_c |
| 11. r , h_c , γ | 31. $c \pm r$, t_a , γ | 51. ρ , d_1 , $\alpha - \beta = \delta$ |
| 12. r , h_a , γ | 32. r , $a + b$, $h_a + h_b$ | 52. d_1 , h_c , γ |
| 13. r , t_c , γ | 33. r , $h_a + h_b$, γ | 53. ρ , d_1 , w_γ |
| 14. r , $p - q = d$, γ | 34. r , $a + b$, γ | 54. d_1 , w_γ , γ |
| 15. r , h_c , t_c | 35. r , $a - b$, $h_b - h_a$ | 55. ρ , $a - b = d$, $\alpha^*)$ |
| 16. r , h_c , $p - q = d$ | 36. r , $h_b - h_a$, γ | 56. ρ , d , β |
| 17. r , t_c , d | 37. r , $a - b$, γ | 57. ρ , d , $\alpha - \beta = \delta$ |
| 18. r , w_γ , d | 38. h_c , t_c , $\alpha - \beta = \delta$ | 58. r , ρ , γ |
| 19. r , a , $\alpha - \beta = \delta$ | 39. h_c , $p - q$, δ | 59. r , ρ , c |
| 20. r , b , δ | 40. t_c , $p - q$, δ | |

VIII. Dreiecksaufgaben, bei denen der Radius eines äusseren Berührungskreises ρ_c gegeben ist.

Beispiel. Aufgabe: Ein Dreieck zu konstruieren, von dem der Radius des äusseren Berührungskreises der Grundlinie, ein Winkel an der Grundlinie und seine Halbierungslinie gegeben ist.

Exposition: Es sind 2 Strecken ρ_c und w_β und ein Winkel β gegeben. Ein Dreieck ist zu konstruieren, in welchem der Radius des Berührungskreises der Grundlinie gleich ρ_c , ein Winkel an der Grundlinie gleich β und seine Halbierende gleich w_β ist.

^{*)} Die Differenz der Grundlinienssegmente, die durch den Berührungspunkt des eingeschriebenen Kreises bestimmt sind, ist gleich $a - b$.

101. 11, 12, 13, 14

19. a, b, α, β

20. a, b, γ, δ

21. $a, b, \beta, e = f$

22. a, e, γ, δ

23. a, e, β, ε

24. $a \pm b, c, e, \beta$

25. $a \pm b, e, \alpha, \beta$

26. $a \pm b, e, \gamma, \delta$

27. $a \pm b, e, f, \beta$

28. $a \pm b, c + d, e, \beta$

Ein Tangenten-Viereck zu konstruieren aus:

1. $\rho, \alpha, \beta, \gamma$

2. $\rho, \alpha, \alpha, \gamma$

3. $\rho, \alpha, \beta, \gamma$

4. ρ, α, b, e

5. ρ, α, b, β

6. $\rho, a \pm b, \alpha, \beta$

7. $\rho, a \pm b, e, \beta$

8. $\rho, a - b, e, \alpha$

9. a, b, c, α

10. a, b, c, β

11. a, b, c, e

12. a, c, e, β

13. a, b, α, β

14. a, b, e, α

15. a, e, α, β

16. $a, b, e, \angle ce$

17. $a \pm b, c, e, \beta$

18. $a \pm b, e, \alpha, \beta$

19. a, α, β, γ

Ein Sehnen-Tangenten-Viereck zu konstruieren aus:

1. ρ, α, β

2. ρ, α, α

3. ρ, α, γ

4. ρ, e, α

5. $\rho, a + c, \alpha$

6. a, b, e

7. a, b, β

8. a, e, β

9. $a \pm b, e, \beta$

10. $r, a \pm b, \beta$

Anmerkung. Aufgaben über das allgemeine Viereck lassen sich häufig, zumal wenn die Diagonalen gegeben sind, durch Ziehen von Linien parallel und gleich den Diagonalen auf frühere Dreiecks- oder Parallelogramm-Aufgaben zurückführen. Z. B. in folgenden Fällen:

Ein Viereck zu konstruieren aus

e, f, ε, a, c

$e, f, \varepsilon, a, \gamma$

$e, f, \varepsilon, \alpha, \gamma$

$e, f, \varepsilon, a, \alpha + \beta$

$e, f, \varepsilon, c, \alpha + \beta$

$e, f, \varepsilon, \alpha + \beta, \gamma$

$e, f, \varepsilon, a + b, \angle af$

$e, f, \varepsilon, a \pm c, \beta + \gamma$

$e \pm f, \varepsilon, a, c, \beta + \gamma$

Die Kreisaufgaben, ebenso wie diejenigen über Verwandlung und Teilung von Figuren eignen sich wenig für häusliche Ausarbeitungen. Bei den wenigsten derselben wird sich eine Analysis ungezwungen ergeben. Damit fällt dann das streng Logische der Lösung, und es ist dem Zufall und besonderer Begabung ein grösserer Spielraum beim Finden der Konstruktion gelassen. Die Aufgaben sollen aber doch so gewählt werden, dass jeder auch nur mittelmässig begabte Schüler nach der nötigen Anleitung durch den Lehrer die Lösung finden kann. Ich will damit dem Werte dieser Aufgaben durchaus nicht zu nahe treten, halte die Durchnahme derselben im Gegenteil für sehr notwendig, doch lassen sich dieselben wohl besser in der Klasse verwenden zur Einübung und späteren Repetition der zugehörigen planimetrischen Kapitel. Es wird sich sogar besonders empfehlen, derartige früher besprochene Aufgaben für die Extemporalien zu stellen. Die einfachen Kreisaufgaben und an sie anschliessend das Apollonische Problem erfordern jedenfalls eine sorgfältige Behandlung im Unterricht.

X. Dreiecksaufgaben, welche durch Teilung nach gegebenem Verhältnis oder Konstruktion der 4. Proportionale ohne Hilfsdreieck gelöst werden.

Ein Dreieck zu konstruieren aus:

1. $m : n = a : b, \alpha, \gamma^*)$

2. $a : b, a, \alpha$

3. $a \pm b, a : b, \gamma$

4. $a \pm b, a : b, \alpha$

5. $a + b + c, a : b : c$

6. $a : b, a, hc$

7. $a : b, hc, p$

8. $a : b, ha, \gamma$

9. $c, hc, p : q$

10. $a, hc, p : q$

11. $c, ha, p : q$

12. $ha, p : q, \beta$

13. $a \pm b : c, ha, \beta$

14. $r, a : b, \alpha$

15. $r, c : hc, \gamma$

16. $r, c : tc, \gamma$

17. $r, c : ta, \gamma$

18. $r, c, p : q$

19. $r, \gamma, p : q$

20. r, γ, u, v

21. $r, c : a \pm b, \gamma$

22. $r, c : p, \gamma$

23. $c, r : hc, \gamma$

24. $hc, a : wc, \alpha - \beta$

25. $a : b, hb \pm ha, \gamma$

26. $a \pm b, ha : hb, \gamma$

27. $a \pm b : c, hb \pm ha, \gamma$

^{*)} m und n sind bald als Zahlen, bald als Strecken gegeben.

XI. Dreiecksaufgaben, bei denen zunächst ein dem gesuchten ähnliches konstruiert werden muss.

Beispiel. Aufgabe: Ein Dreieck zu konstruieren, von dem gegeben ist die Höhe, der Winkel an der Spitze und das Verhältnis, in welchem der Radius des umgeschriebenen Kreises zu der von der Spitze ausgehenden Mittellinie steht.

Exposition: Es sind drei Strecken m , n und h_c und ein Winkel γ gegeben. Ein Dreieck soll konstruiert werden, in welchem die Höhe gleich h_c , der Winkel an der Spitze gleich γ ist, und in welchem sich der Radius des umgeschriebenen Kreises zur Mittellinie verhält wie die Strecke m zu n .

Analysis: (Fig. VI). Dreieck ABC sei das verlangte. Es sei die Höhe CD gleich h_c , der Winkel an der Spitze $\angle ACB$ gleich γ ; CE sei Mittellinie, O das Centrum des umgeschriebenen Kreises, und es sei $CO : CE = m : n$. Schneiden wir auf CE ein Stück CE' gleich n ab und ziehen wir durch E' eine Parallele zu AB , welche die anderen Seiten in A' und B' schneidet, von CD in D' geschnitten und in E' halbiert wird, so ist $\triangle A'B'C \sim \triangle ABC$. Das Centrum O' des diesem Dreieck umgeschriebenen Kreises liegt auf CO , weil die Mittelpunkte der umgeschriebenen Kreise für alle von einem Dreieck durch eine Parallele zur Grundlinie abgeschnittenen Dreiecke auf dem nach der Spitze gehenden Radius des umgeschriebenen Kreises liegen. Es verhält sich $CO : CE = CO' : CE'$; ferner $CO : CE = m : n$, folglich $CO' : CE' = m : n$, und daher ist $CO' = m$. Im Dreieck $A'B'O'$ ist jetzt $A'O' = B'O' = m$ und Winkel $\angle A'O'B' = 2\gamma$. C hat von O' den Abstand m und von E' (Mitte von $A'B'$) den Abstand n . CD ist senkrecht $A'B'$ und gleich h_c , also ist D bestimmt. A und B endlich liegen auf den Verlängerungen von CA' und CB' und auf $AB \perp CD$.

Konstruktion: Man zeichnet einen Winkel gleich 2γ , schneidet auf seinen Schenkeln zwei Stücke $O'A'$ und $O'B'$ gleich m ab, verbindet A' mit B' und halbiert es in E' . Dann beschreibt man um O' mit m und um E' mit n als Radius Kreisbögen, die sich in C schneiden, und verbindet C mit A' und B' . Hierauf zieht man CD' senkrecht $A'B'$, schneidet darauf CD gleich h_c ab, zieht durch D eine Parallele zu $A'B'$ und verlängert CA' und CB' , bis sie dieselbe in A und B schneiden. $\triangle ABC$ ist das verlangte.

Beweis. Man zieht CE' und verlängert es, bis es AB in E schneidet; ausserdem konstruiert man den dem Dreieck ABC umschriebenen Kreis O , dessen Centrum auf CO' liegen muss.

$$\begin{aligned} \triangle ABC &\sim \triangle A'B'C \\ CE' &\text{ halbiert } A'B' \\ CE &\text{ halbiert } AB \end{aligned}$$

In ähnlichen Dreiecken verhalten sich homologe Mittellinien wie die Radien der umschriebenen Kreise, folglich:

- 1) $CO : CE = CO' : CE' = m : n$
- 2) $\angle ACB = \angle A'CD' = \frac{1}{2} \angle A'O'B' = \gamma$
- 3) $CD \perp AB$ und gleich h_c

Aufgaben. Ein Dreieck zu konstruieren aus:

- | | | |
|--------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $a, c : h_c, \alpha$ | 12. $a, h_c : t_c, \gamma$ | 23. $h_c, c : t_c, \beta$ |
| 2. $a, h_c : p, \alpha$ | 13. $a, h_c : (p - q), \alpha$ | 24. $h_c, a : w_\gamma, \gamma$ |
| 3. $a, h_c : p, \gamma$ | 14. $a, c : h_c, \alpha - \beta$ | 25. $h_c, a : b, \alpha - \beta$ |
| 4. $a, c : t_c, \beta$ | 15. $a, h_a : t_c, \alpha$ | 26. $h_c, p : q, \alpha$ |
| 5. $a, h_c : t_c, \beta$ | 16. $a, h_a : t_c, \gamma$ | 27. $h_c, p : q, \gamma$ |
| 6. $a, h_c : w_\gamma, \gamma$ | 17. $a, t_a : t_c, \gamma$ | 28. $h_c, p : q, \alpha - \beta$ |
| 7. $a, h_c : w_\gamma, \alpha$ | 18. $a, t_a : t_b, \gamma$ | 29. $h_c, a : t_c, \gamma$ |
| 8. $a, p : q, \alpha$ | 19. $a, c : r, \alpha$ | 30. $h_c, h_a : t_c, \gamma$ |
| 9. $a, p : q, \gamma$ | 20. $a, r : h_c, \alpha$ | 31. $h_c, c : r, \alpha$ |
| 10. $a, p : q, \alpha - \beta$ | 21. $a, r : h_c, \gamma$ | 32. $h_c, r : t_c, \gamma$ |
| 11. $a, c : t_c, \gamma$ | 22. $h_c, a : t_c, \beta$ | 33. $h_c, c : p, \alpha$ |

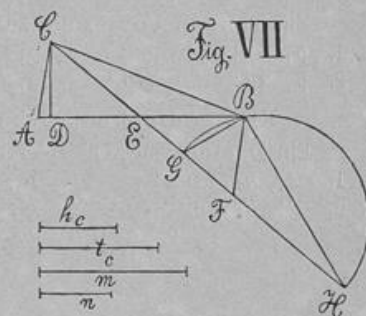
- | | | |
|---|---|---------------------------------|
| 34. $h_c, c : p, \gamma$ | 48. $tc, p : h_c, a$ | 62. $r, c : tc, \beta$ |
| 35. $tc, c : h_c, a$ | 49. $w_\gamma, a : h_c, \gamma$ | 63. $r, h_c : tc, \beta$ |
| 36. $tc, a : w_\gamma, \gamma$ | 50. $w_\gamma, a : h_c, a$ | 64. $r, p : q, a$ |
| 37. $tc, a : b, a - \beta$ | 51. $w_\gamma, a : tc, \beta$ | 65. $r, p : q, \gamma$ |
| 38. $tc, p : q, \gamma$ | 52. $w_\gamma, h_c : tc, \beta$ | 66. $r, p : q, a - \beta$ |
| 39. $tc, c : a \pm b, \beta$ | 53. $w_\gamma, a : b, a - \beta$ | 67. $r, a : tc, a$ |
| 40. $tc, c : a \pm b, \gamma$ | 54. $w_\gamma, a : tc, \gamma$ | 68. $r, h_c : tc, \gamma$ |
| 41. $tc, c : a \pm b, a - \beta$ | 55. $w_\gamma, h_c : tc, \gamma$ | 69. $r, c : a \pm b, \beta$ |
| 42. $tc, ta : tb, \gamma$ | 56. $w_\gamma, c : a \pm b, \beta$ | 70. $r, c : a \pm b, \gamma$ |
| 43. $tc, c : r, a$ | 57. $w_\gamma, c : a \pm b, \gamma$ | 71. $r, c : a \pm b, a - \beta$ |
| 44. $tc, c : r, a - \beta$ | 58. $w_\gamma, c : h_c, a - \beta$ | 72. $r, ta : tc, \gamma$ |
| 45. $tc, r : h_c, a$ | 59. $w_\gamma, c : r, a$ | 73. $r, ta : tb, \gamma$ |
| 46. $tc, r : h_c, \gamma$ | 60. $w_\gamma, c : p, a$ | 74. $r, c : p, a$ |
| 47. $tc, c : hb \pm ha, \gamma$ | 61. $r, c : h_c, a$ | 75. $r, c : p, \gamma$ |
| 76. $a \pm b, a : h_c, \gamma$ | 90. $hb \pm ha, c : a \pm b, \gamma$ | |
| 77. $a \pm b, a : h_c, a$ | 91. $hb \pm ha, ta : tc, \gamma$ | |
| 78. $a \pm b, a : tc, \beta$ | 92. $hb \pm ha, r : h_c, \gamma$ | |
| 79. $a \pm b, c : tc, \beta$ | 93. $hb \pm ha, r : tc, \gamma$ | |
| 80. $a \pm b, a : w_\gamma, \beta$ | 94. $hb \pm ha, c : p, \gamma$ | |
| 81. $a \pm b, p : q, a$ | 95. $tb \pm ta, c : h_c, a$ | |
| 82. $a \pm b, p : q, \gamma$ | 96. $tb \pm ta, h_c : w_\gamma, \gamma$ | |
| 83. $a \pm b, p : q, a - \beta$ | 97. $tb \pm ta, a : b, a - \beta$ | |
| 84. $hb \pm ha, a : h_c, \gamma$ | 98. $tb \pm ta, p : q, a$ | |
| 85. $hb \pm ha, a : w_\gamma, \gamma$ | 99. $tb \pm ta, p : q, \gamma$ | |
| 86. $hb \pm ha, h_c : w_\gamma, \gamma$ | 100. $tb \pm ta, c : a \pm b, \gamma$ | |
| 87. $hb \pm ha, p : q, \gamma$ | 101. $tb \pm ta, ta : tc, \gamma$ | |
| 88. $hb \pm ha, a : tc, \gamma$ | 102. $tb \pm ta, ta : tb, \gamma$ | |
| 89. $hb \pm ha, h_c : tc, \gamma$ | 103. $tb \pm ta, r : tc, \gamma$ | |
| 104. $a, ha : hb, \gamma^*)$ | 109. $h_c, ha : hb, \gamma$ | 114. $r, ha : hb, \gamma$ |
| 105. $c, ha : hb, \gamma$ | 110. $h_c, ha : hb, a - \beta$ | 115. $p, ha : hb, \gamma$ |
| 106. $a, ha : hb, a$ | 111. $tc, ha : hb, a$ | 116. $tc, ha : hb : h_c$ |
| 107. $c, ha : hb, a$ | 112. $w_\gamma, ha : hb, \gamma$ | 117. $w_\gamma, ha : hb : h_c$ |
| 108. $h_c, ha : hb, a$ | 113. $w_\gamma, ha : hb, a - \beta$ | 118. $r, ha : hb : h_c$ |
| 119. $p, ha : hb : h_c$ | 120. $a + b + c, ha : hb : h_c$ | |

Befindet sich unter den gegebenen Stücken das Verhältnis der beiden Seiten $a : b$ und eine Strecke, die mit a und b ein Dreieck bildet, so ist hierdurch auch das Verhältnis bekannt, in welchem die dritte Seite dieses Dreiecks durch die Halbierungslinien des Innen- und Aussen-Winkels an der Gegenecke geteilt wird; damit ergibt sich als geometrischer Ort dieser Ecke ein Halbkreis, dessen Durchmesser-Endpunkte bekannt sind.

Beispiel. Aufgabe: Ein Dreieck zu konstruieren aus der Mittellinie und Höhe zur Grundlinie und dem Verhältnis der beiden Seiten.

Exposition. Vier Strecken h_c, tc, m und n sind gegeben, mit deren Hülfe ein Dreieck konstruiert werden soll, in welchem die Höhe zur Grundlinie gleich h_c , ihre Mittellinie gleich tc und das Verhältnis der beiden Seiten gleich dem Verhältnis der Strecken m und n ist.

Analysis: (Fig. VII). $\triangle ABC$ sei das verlangte. Es sei $CD \perp AB$ und gleich h_c , $AE = EB$, CE gleich tc und $BC : AC = m : n$. Im Dreieck CDE ist CD gleich h_c , CE gleich tc und



^{*)} Wenn unter den gegebenen Stücken sich das Verhältnis zweier Höhen, z. B. $h_a : h_b = m : n$ befindet, so beachte man, dass $h_a : h_b = b : a$, also durch a und $h_a : h_b$ auch b bekannt ist.

$\sphericalangle CDE$ gleich R , folglich ist es bestimmt. Verlängert man CE um EF gleich CE und verbindet man F mit B , so ist CF gleich $2t_c$ und $BF = AC$; folglich $BC : BF = m : n$. Also liegt B auf einem Halbkreise, dessen Endpunkte man erhält, wenn man CF innerlich und äusserlich nach dem Verhältnis $m : n$ teilt; ausserdem auf der Verlängerung von DE . A endlich liegt auf ED und hat von E den Abstand EA gleich EB .

Aufgaben. Ein Dreieck zu konstruieren aus:

- | | | |
|---|--|---------------------------------------|
| 1. $c, w_\gamma, a : b$ | 9. $c, p : q, a : b$ | 17. u, v, t_a |
| 2. $c, h_c, a : b$ | 10. u, v, w_γ | 18. $u, v, \sphericalangle t_a t_b$ |
| 3. $c, t_c, a : b$ | 11. u, v, h_c | 19. $c, \alpha, t_a : t_b$ |
| 4. $c, h_a, a : b$ | 12. u, v, t_c | 20. $c, \gamma, t_a : t_b$ |
| 5. $c, r, a : b$ | 13. $u, v, p - q$ | 21. $a, c, t_a : t_b$ |
| 6. $p, q, a : b$ | 14. $h_c, p - q, a : b$ | 22. $c, h_c, t_a : t_b$ |
| 7. $c, p - q, a : b$ | 15. $t_c, p - q, a : b$ | 23. $p, q, t_a : t_b$ |
| 8. $c, \sphericalangle c w_\gamma, a : b$ | 16. $c, t_a, a : b$ | 24. $r, \gamma, t_a : t_b$ |
| 25. $c, r, t_a : t_b$ | 26. $c, t_a : t_b, \sphericalangle c t_c$ | |
| 27. $c, h_c, h_a : h_b$ | 38. F, c, α | 49. $F, t_c, p - q^{**})$ |
| 28. $c, t_c, h_a : h_b$ | 39. F, c, h_a | 50. F, h_c, t_a |
| 29. $c, w_\gamma, h_a : h_b$ | 40. F, c, t_c | 51. F, h_c, w_γ |
| 30. $p, q, h_a : h_b$ | 41. F, c, r | 52. F, h_c, r |
| 31. $c, p : q, h_a : h_b$ | 42. F, r, γ | 53. $F, h_c, \sphericalangle t_a t_b$ |
| 32. $c, r, h_a : h_b$ | 43. F, a, h_c | 54. F, h_a, h_b |
| 33. a, b, w_γ | 44. F, h_c, α | 55. $F, c, a : b$ |
| 34. h_a, h_b, w_γ | 45. F, h_c, γ | 56. $F, h_c, a : b$ |
| 35. $a + c, b + c, \gamma$ | 46. $F, h_c, \alpha - \beta$ | 57. $F, h_c, t_a : t_b$ |
| 36. $a - c, b - c, \gamma$ | 47. F, h_c, t_c | |
| 37. $F, a, c^*)$ | 48. $F, h_c, p - q$ | |
| | 58. c, h_c, p (Es ist $2F = c \cdot h_c = (a + b + c) \cdot p$) | |
| | 59. $a + b, c, h_c$ | 60. F, h_c, p |

XII. Vierecksaufgaben, die mit Hülfe der Proportionen gelöst werden.

Aufgaben. Ein Viereck zu konstruieren aus:

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $a : b, c, d, e, \beta$ | 5. $a : b : c, d, \alpha, \beta$ | 9. $a : b, c, \beta, \delta, \varepsilon$ |
| 2. $a : b, c, e, \alpha, \beta$ | 6. $a : b : c, e, \alpha, \beta$ | 10. $a : c, e, \alpha, \beta, \gamma$ |
| 3. $a : b, e, f, \alpha, \beta$ | 7. $a : b : c, e, \beta, \delta$ | 11. $a : b : d, c, \beta, \gamma$ |
| 4. $a : b, e, \alpha, \beta, \varepsilon$ | 8. $a : b, c, \alpha, \beta, \varepsilon$ | 12. $a : b : d, e, \gamma, \delta$ |

Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus:

- | | | | |
|-------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $r, a : b, \alpha, \beta$ | 3. $r, a : b : c, \beta$ | 5. $a : b, e, \alpha, \beta$ | 7. $a : b : c, d, \beta$ |
| 2. $r, a : b, \gamma, \delta$ | 4. $r, a : e, \alpha, \beta$ | 6. $a : b, e, \beta, \varepsilon$ | 8. $a : b, c, \beta, \varepsilon$ |

Ein Tangentenviereck zu konstruieren aus:

- | | | | |
|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1. $p, a : b, \alpha, \beta$ | 3. $p, a : c, \alpha, \gamma$ | 5. $a : b, e, \alpha, \beta$ | 7. $a : c, b, \alpha, \beta$ |
| 2. $p, a : e, \alpha, \beta$ | 4. $p, a : b, e, \beta$ | 6. $a : b, c, \alpha, \beta$ | 8. $a : c, e, \alpha, \beta$ |

XIII. Aufgaben, lösbar durch algebraische Analysis.

Ein Dreieck zu konstruieren aus:

- | | | | |
|------------------------|-------------------------------------|--|-----------------------------|
| 1. $F, h_c, p \cdot q$ | 3. $F, h_c, p^2 - q^2$ | 5. $F, c \pm h_c, \alpha - \beta$ | 7. $p \cdot q, r, \gamma$ |
| 2. $F, h_c, p^2 + q^2$ | 4. $F, c \pm h_c, \gamma$ | 6. $F, c \pm h_c, r$ | 8. $p^2 \pm q^2, r, \gamma$ |
| | 9. $a \pm b, h_a \cdot h_b, \gamma$ | 10. $a^2 \pm b^2, h_b \pm h_a, \gamma$ | |

*) F = Dreiecksfläche = $\frac{1}{2} g \cdot h$.

**) $h_c, t_c, \frac{1}{2}(p - q)$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck.

★ CDE gleich R, folglich ist F mit B, so ist CF gleich 2te Halbkreise, dessen Endpunkte m : n teilt; ausserdem auf dem Abstand EA gleich EB.

Aufgaben. Ein Dreieck

1. $c, w_\gamma, a :$
2. $c, hc, a :$
3. $c, tc, a :$
4. $c, ha, a :$
5. $c, r, a :$
6. $p, q, a :$
7. $c, p - q, a :$
8. $c, \Delta cw_\gamma, a :$
25. $c, \Delta ct_c, a :$
27. $c, hc, ha :$
28. $c, tc, ha :$
29. $c, w_\gamma, ha :$
30. $p, q, ha :$
31. $c, p : q, ha :$
32. $c, r, ha :$
33. a, b, w_γ
34. ha, hb, w_γ
35. $a + c, b + c, a - c$
36. $a - c, b - c, a + c$
37. F, a, c
58. c
59. a

XII. Vierecksaufg.

Aufgaben. Ein Viereck

1. $a : b, c, d, e$
2. $a : b, c, e, \alpha$
3. $a : b, e, f, \alpha$
4. $a : b, e, \alpha, \beta$

Ein Sehnenviereck zu

1. $r, a : b, \alpha, \beta$
2. $r, a : b, \gamma, \delta$

Ein Tangentenviereck

1. $p, a : b, \alpha, \beta$
2. $p, a : c, \alpha, \beta$

XIII. Aufgaben, 18

Ein Dreieck zu konstruieren

1. $F, hc, p \cdot q$
2. $F, hc, p^2 + q^2$
9. $a \pm b,$

*) $F = \text{Dreiecksfläche}$

**) $hc, tc, \frac{1}{2}(p - q)$

© The Tiffen Company, 2007

TIFFEN® Gray Scale

- A 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
- R G B Y M C K W

F gleich CE und verbindet man : n. Also liegt B auf einem Ausserlich nach dem Verhältnis liegt auf ED und hat von E den

17. u, v, ta
18. $u, v, \Delta ta tb$
19. $c, \alpha, ta : tb$
20. $c, \gamma, ta : tb$
21. $a, c, ta : tb$
22. $c, hc, ta : tb$
23. $p, q, ta : tb$
24. $r, \gamma, ta : tb$
- ★ ct_c
49. $F, tc, p - q$
50. F, hc, ta
51. F, hc, w_γ
52. F, hc, r
53. $F, hc, \Delta ta tb$
54. F, ha, hb
55. $F, c, a : b$
56. $F, hc, a : b$
57. $F, hc, ta : tb$

+ c) · p)

en gelöst werden.

9. $a : b, c, \beta, \delta, \epsilon$
10. $a : c, e, \alpha, \beta, \gamma$
11. $a : b : d, c, \beta, \gamma$
12. $a : b : d, e, \gamma, \delta$

7. $a : b : c, d, \beta$
8. $a : b, c, \beta, \epsilon$

7. $a : c, b, \alpha, \beta$
8. $a : c, e, \alpha, \beta$

7. $p \cdot q, r, \gamma$
8. $p^2 \pm q^2, r, \gamma$

$a \pm ha, \gamma$