Geschichtliche Bemerkungen zur Aufzählung der Vielflache.

The problem of enumeration of polyhedra is one of extreme difficulty.

Cayley.

I. Einleitung.

Fedorow schreibt in der Einleitung zu seiner Gestaltenlehre:[1]) „Die Geschichte dieses Wissenschaftszweiges trägt manche seltsame Züge an sich. Eine so elementare mathematische Lehre, wie es die Elemente der Lehre von den Figuren sind, welche mit der elementaren Geometrie als ein Ganzes aufzufassen ist, war bis auf die letzten Jahrzehnte des Jahrhunderts fast unberührt geblieben. Die Studien eines Plato, eines Pythagoras und eines Archimedes wurden erst von den jetzigen Mathematikern fortgesetzt." Bis zu einem gewissen Grade müssen wir diese Bemerkung Fedorows als berechtigt anerkennen, nämlich insoweit sie sich auf die Aufzählung und die Darstellung der einfachen Formen der Vielflache, ohne Rücksicht auf Symmetrie und metrische Eigenschaften beziehen soll. Die Probleme, deren Lösung sich die Geometer auf dem Gebiete der Gestaltenlehre angelegen sein liefsen, bezogen sich in der That seit dem Altertum wesentlich darauf, alle Vielflache mit gleichen und ähnlichen Grenzpolygonen zu bestimmen, oder eine Klassifikation der Vielflache nach dem Prinzip der Symmetrie zustande zu bringen.

Das erste, schon von den Alten gekannte Problem, schränkt die Betrachtung von vornherein auf eine Gruppe ganz spezieller Polyederformen ein, und darf als erledigt gelten. Eine meisterhafte Darstellung hat es neuerdings in Hefs' „Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung" gefunden. Das zweite ist u. a. von Kirkman und Camille Jordan[2]) behandelt worden und hat letzteren zur Einteilung der konvexen Polyeder in 9 Klassen geführt. Das scheinbar elementarste Problem aber, nämlich das der Klassifikation aller möglichen Polyederformen von einer bestimmten Anzahl Flächen, Kanten und Ecken ist bis heutigen Tages noch nicht gelöst. Bereits Steiner stellte wiederholt[3]) die Frage, wie man die Anzahl der von n Ebenen gebildeten verschiedenen konvexen Polyeder berechne, ohne dafs eine Antwort auf diese Frage je erfolgt wäre. Es soll aber nicht gesagt werden, dafs die Mathematiker diesem Problem nicht ihre Aufmerksamkeit zugewandt hätten. Auch schon vor Steiner hatten Euler und Meister dahingehende Versuche unternommen und nach dem grofsen Geometer ist das Interesse an der Beantwortung der Frage keineswegs erloschen. Dafs die Bemühungen nicht von Erfolg gekrönt waren, hat dies seinen Grund nur in der Schwierigkeit des Problems an sich, wie Cayley meint, oder vielleicht gar in der unrichtigen Fragestellung, wie aus den Untersuchungen Eberhards in dessen Morphologie der Polyeder[4]) zu folgen scheint? — In der That dünkt es uns, als sei durch letztgenannte Arbeit, die auch der betreffende Kritiker in Ohrtmanns Jahrbuch[5]) als „ein Werk von grundlegender Bedeutung" bezeichnet, das Problem der Klassifikation der Polyeder, freilich in einer weit von der ursprünglichen verschiedenen Auffassung in gewissem Sinne gelöst: gelöst, insofern gezeigt wird, welchen andern Standpunkt man der Frage gegenüber einzunehmen hat oder wie die Frage formuliert werden mufs, wenn sie einer

[1]) Fedorow, Inhaltsangabe seiner „Elemente der Gestaltenlehre". Zeitschr. f. Krystallographie und Mineralogie von P. Groth. 21. Bd. 5./6. Heft. 1893.

[2]) C. Jordan, Recherches sur les polyèdres. Crelles Journal. Bd. 66 u. 68. S. hierzu auch: Ohrtmanns Jahrbuch XIX. S. 520.

[3]) J. Steiner, Gesammelte Werke Bd. I. S. 227 u. S. 454.

[4]) Eberhard, Zur Morphologie der Polyeder. Leipzig 1891.

[5]) Ohrtmanns Jahrbuch XXIII. S. 544 etc.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Beantwortung überhaupt fähig werden soll. Es ist hier nicht der Ort, auf den Inhalt dieses Werkes einzugehen, vielmehr sollen im folgenden diejenigen Versuche gewürdigt werden, welche von verschiedenen Seiten gemacht wurden, für das Problem in der ursprünglichen Steinerschen Fragestellung eine Antwort zu finden, nämlich die möglichen Formen der Polyeder einer bestimmten Flächenzahl (resp. Ecken- oder Kantenzahl) zu bestimmen. Richtig bemerkt hierzu bereits Cayley: „*I consider that the problem is to find the different polyhedra rather than to count them.*“ Auch in dieser letzteren Richtung, für die Anzahl der Vielflache einer bestimmten Flächenzahl einen von dieser abhängigen algebraischen Ausdruck zu finden, hat es nicht an Versuchen gefehlt, wenn sich dieselben auch fast ausschliefslich nur auf ganz spezielle Formen beziehen, wie im weiteren gezeigt wird. Als Hauptaufgabe mufs wohl im Auge behalten werden, die Gestalten der möglichen Vielflache wirklich darzustellen und Methoden anzugeben, mittels deren dieselben gefunden werden können. Diese Methoden, welche im folgenden zu besprechen sind, haben in der That genügt, die möglichen Formen der Vielflache von geringer Seitenzahl, vom Vierflach ausgehend, abzuleiten, und haben dazu geführt, uns eine gewisse Kenntnis der einfachsten Gestalten zu vermitteln. Warum dieselben nicht hinreichen, Schlüsse auf die Zahl der Gestalten zu gestatten, wird sich bei Würdigung derselben ergeben. Es ist notwendig, zuerst auf einige elementare Begriffe und Anschauungen näher einzugehen.

Für jedes Eulersche Polyeder, d. h. für jedes konvexe Vielflach, dessen Oberfläche einfach zusammenhängend ist, mit f Seitenflächen, k Kanten und e Ecken gilt zunächst die Eulersche Gleichung

$$e + f = k + 2.$$

Wenn f_h die Anzahl der h-seitigen Grenzflächen, e_h die Zahl der von je h Flächen gebildeten Ecken bezeichnet, also

$$1) \quad \begin{cases} f_3 + f_4 + f_5 + \ldots = f, \\ e_3 + e_4 + e_5 + \ldots = e, \end{cases}$$ ist, so ergeben sich die Gleichungen

$$2) \quad \begin{cases} 3\,f_3 + 4\,f_4 + 5\,f_5 + \ldots = 2\,k, \\ 3\,e_3 + 4\,e_4 + 5\,e_5 + \ldots = 2\,k. \end{cases}$$

Da wir diesen die Form geben können

$$3\,(f_3 + f_4 + f_5 + \ldots) + f_4 + 2\,f_5 + \ldots = 2\,k,$$
$$3\,(e_3 + e_4 + e_5 + \ldots) + e_4 + 2\,e_5 + \ldots = 2\,k,$$

so folgen hieraus mit Rücksicht auf 1) die Gleichungen bez. Ungleichungen:

$$3) \quad 3\,f \lessgtr 2\,k, \quad 3\,e \lessgtr 2\,k;$$

und mit Hilfe des Eulerschen Satzes ergiebt sich hieraus ferner:

$$4) \quad e + 4 \leqq 2\,f \leqq 4\,e - 8, \quad f + 4 \leqq 2\,e \leqq 4\,f - 8.$$

Die Folgerungen aus diesen und weiteren Beziehungen zwischen den Gröfsen f, k und e hat bereits Euler selbst gezogen,[6]) und verweisen wir hierfür auf die unten zitierten Elemente der Geometrie von Baltzer. Es möge aus diesen Folgerungen nur hervorgehoben werden, dafs es kein Polyeder mit 7 Kanten giebt, dafs kein Vielflach von lediglich mehr als fünfseitigen Grenzflächen gebildet existieren kann, und dafs gemäfs den leicht zu beweisenden Beziehungen:

$$5) \quad \begin{cases} 3\,f_3 + 2\,f_4 + f_5 \geqq 12, \\ 3\,e_3 + 2\,e_4 + e_5 \geqq 12, \end{cases}$$

ein Polyeder ohne drei- und vierseitige Grenzflächen mindestens 12 fünfseitige besitzt, ein solches ohne drei- und fünfseitige mindestens 6 vierseitige u. s. w. Verstehen wir mit Eberhard unter

[6]) Euler, Elementa doctrinae solidorum. Nov. Comment. Acad. scient Imp. Petropolitanae. Tom. IV. (1758) und dasselbe bei späteren. S. hierüber Baltzer, Elemente. Bd. II, S. 214 u. ff.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

allgemeinem Polyeder ein solches, bei welchem durch keine Ecke mehr als 3 Flächen gehen,[7]) und nennen die übrigen singulär, so sind die ersteren charakterisiert durch die Gleichung $3f = 2k$, während für alle singulären $3f < 2k$ ist. Ein Polyeder, dessen Grenzflächen nur Dreiecke sind, bezeichnet man seit Möbius mit dem Namen Trigonalpolyeder. Für ein solches gilt $3e = 2k$, während sonst $3e < 2k$ ist. Das Minimum der Eckenzahl bei konstanter Flächenzahl $f = n$ besitzen die Trigonalpolyeder, das Maximum die allgemeinen Polyeder, denn die Gleichungen 3) geben mit dem Eulerschen Satze kombiniert für jene

$$f = n,\ e = \frac{n}{2} + 2,\ k = \frac{3n}{2},$$

für diese

$$f = n,\ e = 2n - 4,\ k = 3n - 6,$$

woraus, nebenbei bemerkt, folgt, dafs für jede Zahl n der Flächen allgemeine Polyeder existieren, Trigonalpolyeder aber nur, wenn n eine gerade Zahl ist. Teilen wir nach dem Werte der Zahl n der Flächen alle möglichen Polyeder in Klassen, so enthält jede Klasse eine bestimmte Anzahl Ordnungen nach der zugehörigen Zahl e der Ecken, von denen die erste Ordnung, mit der Minimalzahl der Ecken, unter Umständen — wenn sie vorhanden ist — die Trigonalpolyeder umfafst, die letzte aber stets die allgemeinen Polyeder. Zu jeder Ordnung, d. h. demselben f und e, gehören eine Reihe verschieden gestalteter Typen. Zwei Polyeder, welche in den Zahlen e, f und k, aber auch in der Anzahl der einzelnen f_3, f_4, f_5 u. s. w. übereinstimmen, können in der Anordnung ihrer Grenzflächen noch differieren, d. h. allomorph nach Eberhards Bezeichnung sein. Als Beispiel dienen die Figuren 28a bis 28d auf Tafel B. Isomorph werden sie genannt, wenn sie gestaltlich, nicht metrisch, aber nicht nur nach Art, sondern auch nach Anordnung der Grenzflächen, vollkommen übereinstimmen.[8])

Einem gegebenen Polyeder P kann immer ein anderes P′ so zugeordnet werden, dafs mit Beziehung auf eine feste Kugel O die Ebenen des einen die Polarebenen zu den Ecken des andern als Polen sind und umgekehrt. Die Zahl der Flächen des einen ist somit gleich der Zahl der Ecken des andern und umgekehrt, während die Zahl der Kanten in beiden Polyedern übereinstimmt. Zwei solche Polyeder P und P′ heifsen polar, conjugiert oder reciprok.[9]) Sind die Zahlen für ihre Grenzgebilde e, f, k, bez. e′, f′, k′, so gelten also nicht nur die Gleichungen $e' = f$, $f' = e$, $k' = k$, sondern die Zahl der Kanten einer Seitenfläche des einen ist gleich der Zahl der Kanten in der entsprechenden Ecke des andern. So ist das reciproke eines allgemeinen Polyeders ein Trigonalpolyeder und umgekehrt. Ist das zu P reciproke Polyeder P′ isomorph mit P, so nennt man P sich selbst reciprok oder nach Kirkman autopolar.[10]) Die notwendige, aber noch nicht hinreichende Bedingung hierfür ist $e = f = \frac{k}{2} + 1$. Da diese Gleichung nur aussagt, dafs $e_3 + e_4 + e_5 + \ldots = f_3 + f_4 + f_5 \ldots$ ist, so sind noch die Bedingungen $e_3 = f_3$, $e_4 = f_4 \ldots$ hinzuzufügen. Eine recht anschauliche Darstellung des bisher erläuterten gab Breton[11]) in einer Arbeit, die es wohl zu verdienen scheint, in ihren wesentlichen Punkten reproduziert zu werden. (Siehe hierzu Fig. 1 und 2, Tafel I.)

---

[7]) O. Hermes bezeichnet dieselben als „einfache Vielflache“. (Programm Kölln. Gymn. Berlin 1894.) Wir werden uns im folgenden des seit Wiener (Über Vielecke und Vielflache, Leipzig 1864) geläufigen Ausdruckes „Vielflach“ ebenfalls — besonders in Verbindung mit Zahlen — bedienen, ohne das Wort Polyeder grundsätzlich zu vermeiden.

[8]) Das genauere Characteristicum des Isomorphismus zweier Polyederindividuen s. bei Eberhard, Morphologie etc. S. 11 ff. C. Jordan nennt solche Polyeder homolog.

[9]) *Corpora reciproca voco, quorum utrumque tot habet angulos solidos, quot alterum latera; hinc et tota latera quot alterum angulos solidos.*“ Meister, Comment. soc. reg. Gotting. T. VII. 1785. Commentatio de solidis geometricis etc. S. 39.

[10]) Kirkman, On autopolar Polyedra. Philos. transact. 1857.

[11]) Ph. Breton, Note sur la classification des polyèdres. Compt. Rend. hebd. des séances de l'acad. des sciences. t. 51. (1860.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir betrachten die Gröfsen f, k, e als Koordinaten eines Raumpunktes, bezogen auf drei zu einander senkrechte Koordinatenebenen. Dann ist $e + f - k = 2$ die Gleichung einer Ebene, welche die e-, f- und k-Achse bez. in den Punkten $+2$, $+2$ und -2 schneidet, wodurch ihre Lage ersichtlich wird und sich ihre Spuren in den drei Koordinatenebenen leicht ergeben. Wir betrachten nur den Oktanten, in welchem die drei Gröfsen e, f und k, was nach ihrer vorherigen Bedeutung notwendig ist, positiv sind. Die Gleichungen $3f = 2k$ und $3e = 2k$ stellen wir als zwei weitere Ebenen dar, von denen die erste die e-Achse, die zweite die f-Achse als Gerade enthält. Diese beiden Ebenen mögen die durch die Eulersche Gleichung dargestellte in den Geraden l_1 bez. l_2 schneiden. Dann hat der Schnittpunkt T von l_1 und l_2 in dieser letzteren Ebene die Koordinaten $e = f = 4$, $k = 6$, welche sich eben durch Auflösung der drei Gleichungen nach e, f und k ergeben. Alle Punkte, für welche $3f < 2k$ ist, liegen zwischen der Ebene $3f = 2k$ und der Koordinatenebene $f = o$. Diejenigen Punkte, für welche $3e < 2k$ ist, liegen zwischen der Ebene $3e = 2k$ und der Koordinatenebene $e = o$. Die zulässigen Werte von e, f und k, d. h. diejenigen, welche als Zahlen für ein mögliches Polyeder gelten können, sind also die Koordinaten für solche Punkte, welche in der Ebene $e + f = k + 2$ in dem in Figur 1 schraffierten Flächenstücke zwischen l_1 und l_2 liegen.

Wir projizieren nun die Geraden l_1 und l_2 auf die Koordinatenebene $k = o$ und bezeichnen diese Projektionen mit l_1' und l_2', den Schnittpunkt beider, dessen Koordinaten in der Ebene $e = f = 4$ sind, mit T'. Die Gleichungen von l_1' und l_2' sind $e - \frac{f}{2} = 2$, bez. $f - \frac{e}{2} = 2$. Jeder Punkt der Ebene $e + f = k + 2$, dessen Projektion in der Ebene $k = o$ zwischen die Schenkel des Winkels $l_1' T' l_2'$, d. h. in den in Fig. 1 schraffierten Teil der Ebene $k = o$ fällt, und zwar auf ganzzahlige Werte für e und f, entspricht einem möglichen Polyeder. In Fig. 2 ist die Ebene $k = o$ für sich gezeichnet und die betr. Punkte sind durch Einteilung der Ebene in Quadrate markiert. Auf der Geraden l_1' liegen die Trigonalpolyeder, auf l_2' die allgemeinen Polyeder, auf der Halbierungslinie des Winkels $l_1' T' l_2'$ befinden sich die autopolaren Polyeder. Aber nicht jedes Polyeder P auf dieser Geraden ist sich selbst reciprok; das zu ihm reciproke P' fällt nur auf denselben Wert von e und f.[12]) Überhaupt liegen zwei reciproke Polyeder auf verschiedenen Seiten der Winkelhalbierenden in gleichem Abstande von einem und demselben Punkte dieser Geraden. Die zulässige Anzahl der e zu einem gegebenen f und umgekehrt läfst sich dann aus Figur 2 sofort ablesen; k aber ergiebt sich aus $k = e + f - 2$. Alle Polyeder mit derselben Anzahl k der Kanten liegen übrigens auf Senkrechten zu der Winkelhalbierenden durch alle Quadratecken, welche auf den Schenkeln l_1' und l_2' des Winkels oder innerhalb desselben liegen, und man ersieht auch aus der Figur, dafs ein Polyeder mit 7 Kanten unmöglich ist.

Da zwei reciproke Polyeder in der Zahl der Kanten übereinstimmen, könnte man versuchen, die Polyeder überhaupt nach der Zahl k der Kanten zu klassifizieren, wie dies bereits Breton in der zitierten Abhandlung empfahl. Auch C. Reinhardt nimmt in seiner an Möbius anschliefsenden Polyedertheorie[13]) die Kanten zum Ausgangspunkt seiner Betrachtungen, die übrigens ein anderes Ziel verfolgen als eine Auffindung der allomorphen Polyedertypen. Natürlicher, und der Etymologie entsprechender, scheint es aber wohl, die Flächenzahl zum Einteilungsprinzip zu erheben, wobei man immer annehmen darf, dafs dabei $e \gtrless f$ ist, da die Polyeder für $e < f$ dann als die reciproken zu den vorigen leicht zu konstruieren sind. Da ferner, wie im Schlufswort genauer gezeigt werden soll, alle singulären Polyeder sich aus den allgemeinen ableiten lassen, so

[12]) Das Polyeder Figur 3 Tafel I, für welches $e_3 = f_3 = 4$, $e_4 = f_4 = 3$ ist, ist autopolar. Wie für dieses, gilt auch für die Polyeder Figur 4 und Figur 5 die Gleichung $e = f = \frac{k}{2} + 1$, aber für die beiden letztgenannten ist $e_3 = 4$, $e_4 = 3$, $f_3 = 5$, $f_4 = 1$, $f_5 = 1$ bez. $f_3 = 4$, $f_4 = 3$, $e_3 = 5$, $e_4 = 1$, $e_5 = 1$. Diese beiden Polyeder sind also eins dem andern reciprok, aber nicht autopolar. Sie befinden sich mit dem ersten auf der Winkelhalbierenden in demselben Punkte $e = f = 7$. Das Konstruktionsprinzip dieser, sowie aller auf den Tafeln gezeichneten Vielflache besteht darin, dafs aufserhalb des Vielflachs über einer Seitenfläche desselben (gewählt ist immer eine solche mit der gröfsten Anzahl der Kanten) ein Punkt angenommen, und aus demselben die ganze Oberfläche des Vielflachs d. h dessen Ecken und Kanten auf diese Seitenfläche projiziert wird.

[13]) C. Reinhardt, Einleitung in die Theorie der Polyeder. Progr. d. Fürstenschule Meifsen 1890.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wird es nicht auffallen, dafs fast alle Mathematiker, die sich mit dem Problem der Aufzählung der Polyedertypen befafst haben, soweit sie eben die Flächenzahl zum Einteilungsprinzip nahmen, nur die allgemeinen Polyeder zu finden trachteten. Die in den folgenden 3 Abschnitten behandelten Vielflache sind daher, wo nicht anders bemerkt ist, nur die allgemeinen. Statt dieser kann man natürlich ebensogut die Trigonalpolyeder ableiten, und in der That ist die Lösung des Problems auch in dieser Form versucht worden, welcher wir uns zunächst zuwenden wollen.

II. Die Methode von Möbius und Cayley und die ihr reciproke.

Wir bezeichnen im folgenden ein Trigonalpolyeder mit n Ecken kurz durch das Symbol Π_n, ein allgemeines, von n Ebenen gebildetes Vielflach dagegen mit P_n, und wollen zeigen, dafs sich jedes Π_n, ebenso wie jedes P_n durch gewisse Operationen aus dem Tetraeder $\Pi_4 \equiv P_4$ ableiten läfst. Hierzu ist zu erläutern, wie wir jedes Π_{n+1} aus einem Π_n, jedes P_{n+1} aus einem P_n erhalten. Die zu diesem Zwecke nötigen Operationen an den Π_n und P_n sind einander polar zugeordnet: an Stelle von Ebene und Punkt des einen Falles tritt im andern Falle Punkt und Ebene, während einer Kante, d. h. einer Geraden wieder eine solche zugeordnet ist. Wir werden deshalb die Operationen am Trigonalpolyeder und allgemeinen Vielflach gleichzeitig verfolgen und in der bekannten Weise neben einander setzen. Die Methode der Ableitung der Π_{n+1} aus den Π_n ist von Möbius und Cayley unabhängig von einander gefunden worden. 1858 stellte die Pariser Akademie die mathematische Preisaufgabe: „*Perfectionner en quelque point important la théorie géométrique des polyèdres*“. Möbius, offenbar in der Absicht, sich an der Bewerbung um den Preis zu beteiligen, begann in demselben Jahre seine Untersuchungen über Polyeder; seine Ableitung der Trigonalpolyeder entstammt ohne Zweifel, wie die veröffentlichten Diarien[14]) zeigen, den Jahren 1858 und 1859. Der Inhalt dieser Arbeit von Möbius deckt sich fast vollständig mit dem Inhalt einer Abhandlung von Cayley,[15]) welche von diesem am 2. Okt. 1860 der Literary and Philosophical Society of Manchester vorgelegt wurde und 1862 im Druck erschien. Die Methode der Ableitung der allgemeinen (n + 1)-flache aus den n-flachen durch Abschneiden von Ecken derselben ist, als sehr naheliegend, ohne Zweifel älter.[16]) Eine ausführliche Darstellung hat sie als Methode der „Fundamentalkonstruktionen“ in Eberhards Morphologie S. 16 ff. gefunden.

Den Ausgangspunkt für das Folgende bilden die Gleichungen 5), welche bekanntlich geschrieben werden können:

$$3e_3 + 2e_4 + e_5 = 12 + e_7 + 2e_8 + \ldots.$$
$$3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12 + f_7 + 2f_8 + \ldots.$$

und von denen die erste für die Trigonalpolyeder, die zweite für die allgemeinen Vielflache charakteristisch ist. Aus diesen Gleichungen folgt zunächst:

Aufser dem Tetraeder giebt es kein Π mit nur dreikantigen Ecken.

Drei-, vier- und fünfkantige Ecken können nicht gleichzeitig fehlen. Fehlen die drei- und vierkantigen Ecken, so hat das Π wenigstens 12 fünfkantige Ecken.

Aufser dem Tetraeder giebt es kein P mit nur dreiseitigen Grenzflächen.

Drei-, vier- und fünfseitige Flächen können nicht gleichzeitig fehlen. Fehlen die drei- und vierseitigen Flächen, so hat das P wenigstens 12 fünfseitige Flächen.

[14]) A. F. Möbius, Gesammelte Werke. Bd. II. S. 522 u. ff.

[15]) Cayley, On the △-faced polyacrons, in reference to the problem of the enumeration of polyhedra. Memoirs of the Lit. and Philos. Society of Manchester. 3. Series. Vol. I. 1862.

[16]) Sie findet sich z. B. bei Kirkman, On the enumeration of x-edra having triedral summits, and an (x — 1)-gonal base. Philosoph. Transact. 1856. S. 399. Ferner zur Erzeugung der halbregulären Körper bei Kästner, De corporibus regularibus abscissis et elevatis. Commentationes Societat. Reg. Scient. Gottingensis XII. 61—98. (1796.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir teilen demgemäfs die Π_n in drei Klassen: Erstens die Π_n', welche dreikantige Ecken haben; zweitens die Π_n'', welche keine dreikantigen, wohl aber vierkantige Ecken besitzen, und drittens die Π_n''' ohne drei- und vierkantige Ecken.

Hiernach haben wir für die P_n drei Klassen: Erstens die P_n', welche Dreiecke zu Grenzflächen haben; zweitens die P_n'' ohne Dreiecke, aber mit Vierecken, und drittens die P_n''' ohne drei- und vierseitige Grenzflächen.

Es sind nun die Methoden abzuleiten, mittels deren wir die Π_{n+1} bez. P_{n+1} aus den Π_n bez. P_n mittels gewisser Operationen, die zu erläutern sind, konstruieren.

1) Sind alle Π_n', Π_n'', Π_n''' bekannt, so finden wir aus ihnen alle Π_{n+1}', indem wir je auf ein Dreieck LMN (s. Figur 6a) von Π_n ein Tetraeder aufsetzen, so dafs Π_{n+1}' die neue Ecke O erhält, d. h. eine Ecke mehr wie Π_n. Waren die Ecken L, M, N in Π_n bez. λ-, μ-, ν-kantig, so werden sie in Π_{n+1}' bez. $\lambda+1$-, $\mu+1$-, $\nu+1$-kantig. Ein Π_{n+1}' ergiebt sich aber, da Π_{n+1} sicher mindestens eine dreikantige Ecke, nämlich O besitzt.[17])

2) Es sind nun die Π_{n+1}'' zu finden. Sind KLN und LMN (s. Figur 7a) zwei aneinanderstofsende Dreiecke des Π_n, so schalten wir diese aus, und setzen auf die Kontur KLMN die vierseitige Pyramide mit der Spitze O. Waren in Π_n die Ecken K, L, M, N, bez. $\varkappa$-, λ-, μ-, ν-kantig, so sind sie in Π_{n+1} bez. $\varkappa+1$-, λ-, $\mu+1$-, ν-kantig. Waren also L und N dreikantig, so bleiben sie es auch in Π_{n+1}, Da nun das neue Π_{n+1}'' keine dreikantigen Ecken enthalten darf, so ergiebt sich, dafs mittels dieser zweiten Operation die Π_{n+1}'' aus folgenden Π_n zu konstruieren sind:

a) aus allen Π_n'' und Π_n'''. b) aus den Π_n' mit einer einzigen dreikantigen Ecke K. c) aus den Π_n' mit zwei dreikantigen Ecken in der gegenseitigen Lage K und M der Figur 7a, denn nach dem eben Gesagten verschwinden in den Fällen b) und c) diese dreikantigen Ecken und das Π_{n+1} ist in der That ein Π_{n+1}''.[18])

1) Sind alle P_n', P_n'', P_n''' bekannt, so finden wir aus ihnen alle P_{n+1}', indem wir irgend eine, etwa von den Flächen L, M, N (s. Figur 6b) gebildete Ecke durch eine Ebene, d. h. durch ein Dreieck abschneiden. Waren die Flächen L, M, N, bez. λ-, μ-, ν-seitig, so werden sie in P_{n+1}' bez. $\lambda+1$-, $\mu+1$-, $\nu+1$-seitig und das P_{n+1} ist sicher ein P_{n+1}', denn es besitzt mindestens ein Dreieck, nämlich das Schnittdreieck.

2) Für die Aufsuchung der P_{n+1}'' gilt folgendes. Seien zunächst K, L, M, N vier Flächen von P_n in der in Figur 7b gezeichneten gegenseitigen Lage, so schneiden wir P_n durch einen vierseitigen Schnitt, so dafs die gemeinsame Kante von L und N wegfällt. Waren in P_n die Flächen K, L, M, N, bez. $\varkappa$-, λ-, μ-, ν-seitig, so sind sie in P_{n+1} bez. $\varkappa+1$-, λ-, $\mu+1$-, ν-seitig. Sind also L und N Dreiecke, so bleiben sie bei dieser Operation als solche erhalten. An Stelle der Dreiecke K und M dagegen treten Vierecke. Daraus ersehen wir, dafs die P_{n+1}'' aus folgenden P_n zu konstruieren sind:

a) aus allen P_n'' und P_n'''. b) aus den P_n' mit einem einzigen Dreieck K. c) aus den P_n' mit zwei Dreiecken in der gegenseitigen Lage K und M der Figur 7b.

[17]) Auch kann kein Π_{n+1}' existieren, welches man nicht durch diese Operation erhält. Denn entfernt man aus irgend einem Π_{n+1}' eine dreikantige Ecke O durch Weglassung der Dreiecke OMN, ONL, OLM (Fig. 6a) und Ersetzung durch das Dreieck MLN, so findet man eins der Π_n, aus welchem umgekehrt sich das fragliche Π_{n+1}' ergeben mufs. Der analoge Schlufs gilt bei der entsprechenden Erzeugung der P_{n+1}' aus den P_n.

[18]) Natürlich ist bei diesen Π_n' die Operation nur an den dreikantigen Ecken auszuführen, da ja diese verschwinden sollen, bei den Π_n'' und Π_n''' aber an jedem Dreieckspaare. Das Analoge gilt für die entsprechenden Operationen an den P_n.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) Es sind schliefslich noch die $\Pi_n'''_{+1}$ zu finden. Es seien JKN, KNL, LNM drei Dreiecke eines Π_n in der in Figur 8a gezeichneten Lage. Wir schalten diese drei Dreiecke aus und setzen auf die Kontur JKLMN eine fünfseitige Pyramide mit der Spitze O. Waren in Π_n die Ecken J, K, L, M, N, bez. ι-, $\varkappa$-, λ-, μ-, ν-kantig, so werden sie in Π_{n+1} bez. $\iota+1$-, $\varkappa$-, λ-, $\mu+1$-, ν—1-kantig, d. h. die Ecke N hat in Π_{n+1} eine Kante weniger wie in Π_n. Wir ersehen dann leicht, dafs für die Konstruktion der $\Pi_n'''_{+1}$ zwei Möglichkeiten vorhanden sind; sie ergeben sich nämlich: a) Aus allen Π_n''' durch Ersetzung von drei wie in Figur 8a aneinanderstofsenden Dreiecken durch die betreffende fünfseitige Pyramide, wenn die gemeinsame Ecke N der drei Dreiecke mindestens sechskantig ist.[19]) b) Aus gewissen Π_n'' durch dieselbe Operation, wenn N wenigstens sechskantig und J und M zwei vierkantige Ecken, alle anderen von Π_n'' aber mindestens fünfkantig sind. Auch ist die Operation an den Π_n'' nur für diese vierkantigen Ecken durchzuführen, nicht anderswo, da gerade die vierkantigen Ecken zum Verschwinden zu bringen sind, damit ein $\Pi_n'''_{+1}$ entstehe. Schon Cayley bemerkt, dafs diese dritte Operation zuerst auf Π_{11} anzuwenden ist, für die Herstellung der Π_{11} aus den Π_{10} aber die beiden ersten Operationen vollkommen genügen. (S. die Konstruktion der $P_n'''_{+1}$ nebenan.)

3) Konstruktion der $P_n'''_{+1}$. Es seien J, K, L, M, N fünf Flächen von P_n in der durch Figur 8b gekennzeichneten Lage. Wir schneiden von dem Polyeder P_n durch eine Ebene und zwar durch einen fünfseitigen Schnitt die drei Ecken (JKN), (KNL) und (LMN) ab. Waren in P_n die Flächen J, K, L, M, N, bez. ι-, $\varkappa$-, λ-, μ-, ν-seitig, so sind sie in P_{n+1} bez. $\iota+1$-, $\varkappa$-, λ-, $\mu+1$-, ν-seitig. Die $P_n'''_{+1}$ ergeben sich also a) aus allen P_n''' durch Abschneiden von drei auf einander folgenden Ecken (JKN), (KNL), (LMN) einer Fläche N, wenn dieselbe mindestens sechsseitig ist. b) Aus gewissen P_n'' in derselben Weise, wenn (mit Rücksicht auf Fig. 8b) N wenigstens sechsseitig, J und M vierseitig, alle anderen Flächen von P_n aber mindestens fünfseitig sind. Dieser Fall tritt zum ersten Male auf bei einem P_{11}''. Seien (Figur 9) die Flächen J, K, L, M, N vollständig gezeichnet, so ergiebt sich sofort, dafs die Flächen α und β keine Kante gemeinsam haben können, weil sonst γ ein Viereck würde. Dasselbe gilt von γ und δ, bezüglich δ und β, weil sonst α, bez. ε Vierecke wären. Es sind also α, β, γ, δ, ε Fünfecke und durch ein weiteres Fünfeck wird das Vielflach geschlossen. Wir erhalten ein P_{11}'' und aus diesem durch den schraffierten Schnitt das einzige P_{12}''', das Pentagonaldodekaeder.

Wir können nun zum Ende, wie ersichtlich, mittels des Schlusses von n auf $n+1$ den Satz aussprechen: Da man jedes Π_{n+1} (oder P_{n+1}) durch eine der drei Operationen aus mindestens einem der Π_n (oder P_n) erhalten kann, so lassen sich successive durch die beschriebenen Operationen alle Π_n und P_n aus dem Tetraeder $\Pi_4 = P_4$ ableiten.[20]) Aber diese Methoden sind nicht tauglich, um irgendwelche Schlüsse aus der Anzahl z. B. der P_n auf die Anzahl der P_{n+1} zu gestatten und zwar aus dem Grunde, weil dasselbe Individuum P_{n+1} sich mittels Konstruktion aus verschiedenen allomorphen Typen der P_n ergiebt.[21]) Dies wird mit wachsendem n um so störender, als die Zahl der Individuen, auf welche die Operationen anzuwenden sind, beträchtlich zunimmt, so dafs auch die Zahl der erhaltenen isomorphen Typen sich rasch vermehrt. Cayley und Möbius haben die Trigonalpolyeder bis $e = 8$ abgeleitet,[22]) die allge-

[19]) Fünfkantig darf N nicht sein, weil das neu entstehende Trigonalpolyeder sonst eine vierkantige Ecke enthielt, d. h. ein $\Pi_n''_{+1}$ würde.

[20]) Möbius, Werke, Bd. II, S. 530 und Eberhard, Morphologie, S. 17.

[21]) Das Neunflach No. 18c Tafel A ergiebt sich sowohl aus dem Achtflach Fig. 23, als auch aus dem Achtflach Fig. 33 auf Tafel I mittels der daselbst punktiert gezeichneten dreiseitigen Schnitte. — „Die Mehrdeutigkeit in der Reduktion eines Polyeders auf eine Fundamentalkonstruktion bildet das wesentlichste Hindernis für die Ausführung des an sich naheliegenden Gedankens, von den Fundamentalkonstruktionen aus die Systematisierung der verschiedenen Polyedertypen zu versuchen.“ Eberhard, Morphologie S. 19.

[22]) Cayley schreibt von seiner Methode, nachdem er mittels derselben die achteckigen Trigonalpolyeder abgeleitet hat bez. weiterer Verwendung: *„for although perfectly practicable, it would be no commensurate advantage in doing so.“*

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

meinen Polyeder sind, soweit unsere Kenntnis der Litteratur reicht, nicht systematisch nach dieser ersten Methode, die wir ausführlich vorgeführt haben, abgeleitet worden, sondern mittels anderer in den nächsten Abschnitten zu besprechender Verfahren.

Die Anzahl der allomorphen Typen der allgemeinen Sieben- und Achtflache P_7 und P_8 ist gleich der von Möbius und Cayley bestimmten Zahl der Π_7 und Π_8, nämlich 5 bez. 14. Die allgemeinen Neunflache und Zehnflache wurden vom Verfasser mittels dieser ersten Methode abgeleitet und es ergaben sich 50 bez. 232 allomorphe Typen, wie sie auf den Tafeln A, B und C sich gezeichnet finden.[23]) Diese erste Methode hat den Vorteil, dafs nicht leicht ein mögliches Vielflach übersehen wird; den Nachteil, wie schon bemerkt, dafs man viele Typen auf vielerlei Weise wiederholt erhält, und was ganz wesentlich ist: dafs zur Auffindung der Vielflache einer bestimmten Flächenzahl n die Kenntnis der (n — 1)-flache nötig ist. Die folgenden Methoden gestatten eine von den (n — 1)-flachen unabhängige Ableitung der n-flache. Ehe wir uns zu diesen wenden, geben wir eine, nach fallender Anzahl der Dreiecke geordnete tabellarische Zusammenstellung der auf Tafel I gezeichneten Sieben- und Achtflache, der Neunflache auf Tafel A und der Zehnflache auf den Tafeln A, B, C. Das nicht gezeichnete P_4 ist das Tetraeder, das P_5 ist das dreiseitige Prisma, die beiden P_6 sind der Würfel und ein dem Siebenflach Figur 17 (Tafel I) analog gebautes Sechsflach aus zwei Fünfecken, zwei Vierecken und zwei Dreiecken. Aus den Tabellen ersieht man die Art und Zahl der Begrenzungsflächen. In der ersten Kolonne findet sich die Nummer, welche das Vielflach auf der Tafel trägt und die letzte Kolonne giebt die Zahl der allomorphen Typen an, die in den Figuren durch angehängte Buchstabenindices a, b . . . markiert sind.

Die Sieben-, Acht- und Neunflache. (Tafel I und Tafel A).

No.	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	all. T.
P_7' 1	3	—	3	1	—	1
2	2	3	—	2	—	1
3	2	2	2	1	—	1
4	1	3	3	—	—	1
P_7'' 5	—	5	2	—	—	1
P_8' 1	4	—	—	4	—	1
2	3	1	2	1	1	1
3	3	1	1	3	—	1
4	2	4	—	—	2	1
5	2	3	1	1	1	1
6	2	2	3	—	1	1
7	2	2	2	2	—	2
8	2	1	4	1	—	1
9	2	—	6	—	—	1
10	1	4	1	2	—	1
11	1	3	3	1	—	1
P_8'' 12	—	6	—	2	—	1
13	—	4	4	—	—	1

No.	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	all.T.
P_9' 1	4	—	2	2	—	1	1
2	4	1	—	2	2	—	1
3	4	—	2	1	2	—	1
4	3	2	2	—	1	1	2
5	3	2	1	2	—	1	2
6	3	1	3	1	—	1	1
7	3	2	1	1	2	—	2
8	3	1	3	—	2	—	1
9	3	2	—	3	1	—	2
10	3	1	2	2	1	—	2
11	3	—	3	3	—	—	2
12	2	5	—	—	—	2	1
13	2	4	1	—	1	1	1
14	2	4	—	2	—	1	1
15	2	3	2	1	—	1	2
16	2	2	4	—	—	1	1
17	2	3	2	—	2	—	2
18	2	3	1	2	1	—	3

No.	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	all.T.
19	2	2	3	1	1	—	3
20	2	1	5	—	1	—	1
21	2	3	—	4	—	—	1
22	2	2	2	3	—	—	3
23	2	1	4	2	—	—	2
24	1	5	1	—	2	—	1
25	1	4	2	1	1	—	3
26	1	4	1	3	—	—	1
27	1	3	3	2	—	—	1
28	1	2	5	1	—	—	1
P_9'' 29	—	7	—	—	2	—	1
30	—	6	—	3	—	—	1
31	—	5	2	2	—	—	1
32	—	4	4	1	—	—	1
33	—	3	6	—	—	—	1

[23]) S. die Abhandlung des Verf.: „Elemente der vierdimensionalen Geometrie“ in dem Jahresberichte des Vereins für Naturkunde zu Zwickau. 1893. S. 60. Die hier beigefügten Tafeln A bis C stammen aus dem Jahre 1893. Weitere Bemerkungen hierzu s. später bei der Methode von O. Hermes. Derselbe hat mittels der dort zu besprechenden Methode die allgemeinen Neun-, Zehn-, Elf- und Zwölfflache abgeleitet und eine tabellarische Übersicht der Neun- und Zehnflache in der Abhandlung „Verzeichnis der einfachsten Vielflache“ (Programm des Kölln. Gymn. Berlin 1896) gegeben. Weiteres hierüber sagt die Einleitung des zitierten Programmes. Eine vollständige Darstellung aller allgemeinen Neun- und Zehnflache durch Figuren habe ich bisher nirgends gefunden. In der Tabelle von Hermes (Progr. S. 14) sind 51 Neun- und 231 Zehnflache verzeichnet. Es ist aber das Neunflach No. 22 isomorph mit No. 20 jener Tabelle, und zwar ist eins das Spiegelbild des andern, und von den Zehnflachen fehlt das auf unserer Tafel C mit 56c bezeichnete.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Zehnflache. (Tafel A, B und C.)

No.	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	all. T.
P_{10}' 1	5	—	1	1	2	1	—	1
2	4	1	2	1	1	—	1	1
3	4	—	4	—	1	—	1	1
4	4	1	1	3	—	—	1	1
5	4	2	—	2	—	2	—	2
6	4	1	2	1	—	2	—	1
7	4	—	4	—	—	2	—	1
8	4	2	—	1	2	1	—	2
9	4	1	2	—	2	1	—	1
10	4	1	1	2	1	1	—	5
11	4	—	3	1	1	1	—	1
12	4	1	—	4	—	1	—	1
13	4	2	—	—	4	—	—	1
14	4	1	1	1	3	—	—	1
15	4	—	3	—	3	—	—	1
16	4	—	2	2	2	—	—	2
17	4	—	1	4	1	—	—	1
18	4	—	—	6	—	—	—	2
19	3	3	2	—	—	1	1	2
20	3	3	1	1	1	—	1	4
21	3	2	3	—	1	—	1	2
22	3	3	—	3	—	—	1	1
23	3	2	2	2	—	—	1	4
24	3	1	4	1	—	—	1	1
25	3	3	1	1	—	2	—	2
26	3	2	3	—	—	2	—	2
27	3	3	1	—	2	1	—	2
28	3	3	—	2	1	1	—	4
29	3	2	2	1	1	1	—	11
30	3	1	4	—	1	1	—	1
31	3	2	1	3	—	1	—	4
32	3	1	3	2	—	1	—	4
33	3	—	5	1	—	1	—	1
34	3	3	—	1	3	—	—	4
35	3	2	2	—	3	—	—	3
36	3	2	1	2	2	—	—	6
37	3	1	3	1	2	—	—	6
38	3	1	2	3	1	—	—	7
39	3	—	4	2	1	—	—	3
40	3	1	1	5	—	—	—	1
41	2	6	—	—	—	—	2	1
42	2	5	1	—	—	1	1	1
43	2	5	—	1	1	—	1	1

No.	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	all. T.
44	2	4	2	—	1	—	1	2
45	2	4	1	2	—	—	1	2
46	2	3	3	1	—	—	1	2
47	2	2	5	—	—	—	1	1
48	2	4	2	—	—	2	—	3
49	2	3	2	1	1	1	—	5
50	2	3	3	—	1	1	—	5
51	2	4	—	3	—	1	—	2
52	2	3	2	2	—	1	—	8
53	2	2	4	1	—	1	—	6
54	2	4	—	2	2	—	—	6
55	2	3	2	1	2	—	—	9
56	2	2	4	—	2	—	—	6
57	2	3	1	3	1	—	—	5
58	2	2	3	2	1	—	—	9
59	2	1	5	1	1	—	—	2
60	2	3	—	5	—	—	—	1
61	2	2	2	4	—	—	—	8
62	2	1	4	3	—	—	—	1
63	2	—	6	2	—	—	—	1
64	1	6	1	—	—	2	—	1
65	1	5	2	—	1	1	—	3
66	1	5	1	2	—	1	—	2
67	1	4	3	1	—	1	—	2
68	1	5	1	1	2	—	—	2
69	1	4	3	—	2	—	—	2
70	1	5	—	3	1	—	—	1
71	1	4	2	2	1	—	—	6
72	1	3	4	1	1	—	—	3
73	1	2	6	—	1	—	—	1
74	1	4	1	4	—	—	—	1
75	1	3	3	3	—	—	—	5
76	1	2	5	2	—	—	—	3
P_{10}'' 77	—	8	—	—	—	2	—	1
78	—	6	2	—	2	—	—	2
79	—	6	1	2	1	—	—	1
80	—	5	3	1	1	—	—	1
81	—	6	—	4	—	—	—	1
82	—	5	2	3	—	—	—	1
83	—	4	4	2	—	—	—	3
84	—	3	6	1	—	—	—	1
85	—	2	8	—	—	—	—	1

III. Die Methode der Stammflächen von Eberhard.[24])

Ein System gestaltlich unabhängiger Grenzflächen eines gegebenen Vielflachs heifst nach Eberhard ein konstituierendes System oder ein Stammsystem, wenn durch die Anzahl, die

[24]) V. Eberhard, Zur Morphologie der Polyeder. 2. Abschnitt: Eine Klassifikation der allgemeinen konvexen Polyeder. S. 29—38.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Form und den gegenseitigen Zusammenhang seiner Elemente der morphologische Charakter des Vielflachs vollkommen und unzweideutig bestimmt ist. Ehe wir hierauf genauer eingehen können, ist es nötig, über den Begriff des Zusammenhangs zweier Grenzflächen klar zu werden. Der Zusammenhang zweier Flächen (α) und (β) kann dreierlei Art sein:

a) Die beiden Flächen (α) und (β) haben eine Seite, d. h. eine Kante des Vielflachs gemein; wir sagen sie seiten sich, und schreiben kurz $(\alpha)\,|\,(\beta)$.[25]) Als Beispiel mögen zwei Nachbarflächen eines Würfels dienen.

b) Es existieren aufserhalb (α) und (β) m Kanten — Scheitelkanten —, welche je eine Ecke von (α) mit je einer Ecke von (β) verbinden. (α) und (β) heifsen dann m-fache Scheitelflächen. Wir bezeichnen dies symbolisch durch $(\alpha)\,\overset{}{-}_{m}\,(\beta)$. Z. B. sind zwei gegenüberliegende Quadrate eines Würfels vierfache Scheitelflächen: $(\alpha)\,\overset{}{-}_{4}\,(\beta)$.

c) Es finden beide Umstände a) und b) gleichzeitig statt: Die m-fachen Scheitelflächen seiten sich; wir bezeichnen dies durch $(\alpha)\,|\,\overset{}{-}_{m}\,(\beta)$. Als Beispiel dienen zwei Dreiecke eines Tetraeders, für welche also die Bezeichnung $(\alpha)\,|\,\overset{}{-}_{1}\,(\beta)$ gilt.

Nach diesen Erläuterungen sprechen wir nun den folgenden Satz aus: „Ein Flächensystem ist dann und nur dann ein Stammsystem eines Vielflachs, wenn erstens von den drei Bestimmungsflächen einer Ecke des Vielflachs mindestens eine dem Flächensystem angehört, und wenn zweitens in jeder Fläche des Systems mindestens eine Ecke liegt, durch welche keine zweite Systemfläche hindurchgeht.“ Der Beweis sei indirekt geführt. Seien (α_1), (α_2), (α_3) drei eine Ecke bildende Flächen, die nicht dem Stammsystem angehören, so könnte man diese Ecke durch einen dreiseitigen Schnitt entfernen und die Flächen (α_1), (α_2), (α_3) also verändern, ohne das Stammsystem zu verletzen; dieses bestimmte aber dann das ursprüngliche Vielflach nicht eindeutig, wäre also kein Stammsystem. Geht aber, zweitens, durch jede Ecke der Fläche (α_1), welche dem Stammsystem angehört, noch eine zweite Fläche des Stammsystems, so könnte man (α_1) aus dem System entfernen, ohne die Eindeutigkeit der Bestimmung des Vielflachs aufzuheben, d. h. (α_1) wäre überflüssig.

Zur Veranschaulichung des Gesagten notieren wir die fünf Stammsysteme des Siebenflaches VII_1 (Figur 19 Tafel I). Es sind die Folgenden:

1) $(\alpha_1)\,|\,\overset{}{-}_{2}\,(\alpha_4);\ (\alpha_1)\,|\,(\alpha_7);\ (\alpha_4)\,\overset{}{-}_{1}\,(\alpha_7)$.
2) $(\alpha_1)\,|\,\overset{}{-}_{2}\,(\alpha_2);\ (\alpha_2)\,|\,\overset{}{-}_{1}\,(\alpha_4);\ (\alpha_4)\,|\,\overset{}{-}_{2}\,(\alpha_1)$.
3) $(\alpha_2)\,|\,\overset{}{-}_{1}\,(\alpha_4);\ (\alpha_2)\,|\,\overset{}{-}_{1}\,(\alpha_6);\ (\alpha_4)\,|\,\overset{}{-}_{1}\,(\alpha_6)$.
4) $(\alpha_3)\,|\,(\alpha_4);\ (\alpha_4)\,|\,(\alpha_5);\ (\alpha_3)\,\overset{}{-}_{1}\,(\alpha_5);\ (\alpha_7)\,\overset{}{-}_{1}\,(\alpha_3);\ (\alpha_7)\,\overset{}{-}_{1}\,(\alpha_4);\ (\alpha_7)\,\overset{}{-}_{1}\,(\alpha_5)$.
5) $(\alpha_7)\,|\,(\alpha_2);\ (\alpha_2)\,|\,\overset{}{-}_{1}\,(\alpha_4);\ (\alpha_4)\,|\,(\alpha_5);\ (\alpha_5\,\overset{}{-}_{1}\,(\alpha_7)$.

Es ist hieraus ersichtlich, wie ein und dasselbe Vielflach durch mehrere von einander verschiedene Stammsysteme bestimmt werden kann. Die allgemeine Methode, mittels derer alle Stammsysteme eines gegebenen Vielflachs gefunden werden können, wollen wir hier unerörtert lassen, da sie für unsern Zweck — die Auffindung der Vielfläche einer bestimmten gegebenen Flächenzahl n — unwesentlich ist.[26]) Wir haben vielmehr zu zeigen, wie man die allomorphen Typen der Vielfläche mittels ihrer Stammsysteme findet, nachdem diese allgemein abgeleitet sind. Wir behandeln also zunächst die zwei- und dreiflächigen Stammsysteme, um am Ende das allgemeine Prinzip zu formulieren.

1. Zweiflächige Stammsysteme.

Besteht das System nur aus zwei Flächen (p) und (q),[27]) so sind zwei Fälle möglich: entweder seiten sich (p) und (q) oder nicht. Im letzteren Falle ist $p + q$, d. h. die Summe der Ecken beider Flächen identisch mit der Zahl aller Ecken des n-flachs, d. h. es ist $p + q = 2n - 4$, oder, da (p) und (q) vollkommen gleichberechtigt sind, $p = q = n - 2$. In dem Falle $(p)\,|\,(q)$

[25]) Aus typographischen Gründen haben wir die Bezeichnungen etwas einfacher als bei Eberhard gewählt.

[26]) S. die betr. Regel bei Eberhard, Morphologie S. 32.

[27]) Der Buchstabe dient im folgenden zur Bezeichnung der Fläche, giebt aber zugleich die Zahl ihrer Kanten an.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aber ist $p + q = 2n - 2$, da die zwei Flächen zwei Ecken gemeinsam haben, und aus demselben Grunde wie vorher: $p = q = n - 1$. Beispiel: Für $n = 10$ ergeben sich die beiden Vielflache No. 77 (Taf. C) und No. 41 (Taf. B).

2. Dreiflächige Stammsysteme.

Hier sind bezüglich der gegenseitigen Lage der drei Flächen (p), (q), (r) bereits fünf Fälle zu unterscheiden: a) Die drei Flächen liegen isoliert, d. h. seiten sich nicht. b) Zwei Flächen (p) und (q) seiten sich, die dritte (r) liegt isoliert. c) Eine Fläche, etwa (p), seitet sich mit jeder der beiden andern. d) Jede der drei Flächen seitet sich mit jeder der beiden andern. e) Die drei Flächen haben eine Ecke gemein. Wir behandeln nun diese fünf Fälle der Reihe nach allgemein und erläutern wenigstens einige derselben durch das Beispiel des Neun- und Zehnflachs.

a) Die drei sich nicht seitenden Flächen (s. Fig. 10 Taf. I) mögen gemäfs den Formeln zusammenhängen:

$$(p) \overset{}{-}_{x} (q),\ (q) \overset{}{-}_{y} (r),\ (r) \overset{}{-}_{z} (p),$$

wo die Anzahlen x, y, z der Scheitelkanten zu bestimmende Unbekannte sind. Es gilt dann, da die drei Flächen keine Ecke gemein haben, die Gleichung $p + q + r = 2n - 4$. Von (p) gehen im ganzen $x + z$ Kanten aus, nämlich von jeder Ecke eine, also ist $x + z = p$. Ebenso finden wir $x + y = q$, $y + z = r$, und aus diesen Gleichungen ergiebt sich für die Unbekannten

$$2x = p + q - r,\ 2y = -p + q + r,\ 2z = p - q + r,$$

wobei die p, q, r der obigen Gleichung entsprechend zu wählen sind. Beispiel: Ist $n = 10$, so ist $p + q + r = 16$. Wir setzen noch, da die drei Flächen gleichwertig sind, $p \geqq q \geqq r$ voraus. Es sind dann für p, q, r alle zulässigen Lösungen ihrer Gleichung zu nehmen, der Art, dafs die Summe zweier der Gröfsen immer grösser ist, als die dritte allein, damit die Werte für x, y, z gröfser als Null werden, weil doch zwischen den Flächen (p), (q), (r) sicher Scheitelkanten existieren müssen. Als mögliche Lösungen erscheinen dann:

$p = 7,\ q = 6,\ r = 3,$ und damit $x = 5,\ y = 1,\ z = 2,$
$p = 7,\ q = 5,\ r = 4,$ und damit $x = 4,\ y = 1,\ z = 3,$
$p = 6,\ q = 6,\ r = 4,$ und damit $x = 4,\ y = 2,\ z = 2,$
$p = 6,\ q = 5,\ r = 5,$ und damit $x = 3,\ y = 2,\ z = 3.$

Es sind dies die Zehnflache No. 70, No. 79, No. 81 und No. 82 der Tafel C.

b) Der Zusammenhang der Flächen (p), (q), (r) (Taf. I Fig. 11) sei gegeben durch

$$(q) \,|\, \overset{}{-}_{x_1} (p),\ (q) \overset{}{-}_{y} (r),\ (q) \overset{}{-}_{x_2} (p),\ (r) \overset{}{-}_{z} (p),$$

wo also die y Scheitelkanten von (q) und (r) die x_1 von den x_2 Scheitelkanten von (p) und (q) trennen. Es ist dann $p + q + r = 2n - 2$, $p = 2 + x_1 + x_2 + z$, $q = 2 + x_1 + x_2 + y$ $r = y + z$. Daraus folgt: $2(x_1 + x_2) = p + q - r - 4$, $2z = p - q + r$, $2y = -p + q + r$.

c) Gelten für den Zusammenhang der Flächen (p), (q), (r) die Beziehungen (Taf. I Fig. 12)

$$(q) \,|\, \overset{}{-}_{x_1} (p),\ (q) \overset{}{-}_{y} (r),\ (q) \overset{}{-}_{x_2} (p),\ (r) \,|\, \overset{}{-}_{z_1} (p),\ (r) \overset{}{-}_{z_2} (p),$$

so ist $p + q + r = 2n$, $p = 4 + x_1 + x_2 + z_1 + z_2$, $q = 2 + x_1 + x_2 + y$, $r = 2 + z_1 + z_2 + y$, und daraus folgt: $2(x_1 + x_2) = p + q - r - 4$, $2y = -p + q + r$, $2(z_1 + z_2) = p - q + r - 4$. Beispiel. Wir leiten die möglichen Neunflache ab, für welche also die Ausgangsgleichung die Form hat $p + q + r = 18$. Hier sind aber nicht, wie in dem früher behandelten Beispiel, die drei Flächen gleichwertig, insofern p eine Ausnahmestellung einnimmt. Dagegen können wir unbeschadet der Allgemeinheit $q \geqq r$ setzen. Als möglich zur Befriedigung der Gleichungen erscheinen dann die im folgenden zusammengestellten Lösungen. (Die Figuren befinden sich auf Tafel A.)

$\alpha)$ $p = 8,\ q = 7,\ r = 3,\ x_1 + x_2 = 4,\ y = 1,\ z_1 + z_2 = 0.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dies ergiebt unter spezieller Annahme der Werte für die x die Vielflache:

$x_1 = 4, \quad x_2 = 0.$ Fig. No. 13.
$x_1 = 3, \quad x_2 = 1.$ No. 4b.
$x_1 = 2, \quad x_2 = 2.$ No. 4a.

β) $p = 8, q = 6, r = 4, x_1 + x_2 = 3, y = 1, z_1 + z_2 = 1.$
Wir erhalten die folgenden Neunflache:

$x_1 = 3, \quad x_2 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 0.$ Fig. No. 14.
$x_1 = 3, \quad x_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 1.$ No. 15b.
$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 0.$ No. 5b.
$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 1.$ No. 5a.

γ) $p = 7, q = 7, r = 4, x_1 + x_2 = 3, y = 2, z_1 + z_2 = 0.$
Hier ergeben sich nur die beiden Lösungen:

$x_1 = 3, \quad x_2 = 0.$ No. 24 und $x_1 = 2, \quad x_2 = 1.$ No. 17b.

δ) $p = 8, q = 5, r = 5, x_1 + x_2 = 2, z_1 + z_2 = 2.$
Wir erhalten die fünf Lösungen:

$x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad z_1 = 2, \quad z_2 = 0.$ No. 15a.
$x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 1.$ No. 6.[28])
$x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 2.$ No. 16.
$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad z_1 = 2, \quad z_2 = 0.$ No. 6.
$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 1.$ No. 1.

ε) Ist $p = 7, q = 6, r = 5,$ also $x_1 + x_2 = 2, y = 2, z_1 + z_2 = 1,$
so ergeben sich die drei Lösungen:

$x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 0.$ Fig. No. 18b.
$x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 1.$ No. 19c.
$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 0.$ No. 10b.

ζ) Für $p = 6, q = 7, r = 5, x_1 + x_2 = 2, y = 3, z_1 + z_2 = 0,$
ergeben sich die beiden folgenden Lösungen:

$x_1 = 2, \quad x_2 = 0.$ No. 25c, und $x_1 = x_2 = 1.$ No. 19a.

Die Grundfläche, auf welche das ganze Vielflach zu projizieren ist, um die Ansicht desselben gemäfs Fig. 12 Taf. I zu erhalten, ist das in den Figuren 25c und 19a nur einmal vorhandene Sechseck. In derselben Weise sind die Figuren der folgenden Vielflache umgezeichnet zu denken.

η) Aus $p = 6, q = 6, r = 6$ ergiebt sich $x_1 + x_2 = 1, y = 3, z_1 + z_2 = 1,$
und wir erhalten die beiden Neunflache:

$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 0.$ Fig. No. 21.
$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 1.$ No. 22b.

Als letzte zulässige Lösung der Grundgleichung finden wir schliefslich:

ϑ) $p = 5, q = 7, r = 6, x_1 + x_2 = 1, y = 4, z_1 + z_2 = 0,$
woraus sich für $x_1 = 1, x_2 = 0,$ das einzige Neunflach Fig. No. 25a ergiebt. Durch die so bestimmten 22 dreiflächigen Stammsysteme haben sich also 21 allomorphe Typen der Neunflache von dem vorausgesetzten Zusammenhange der drei Stammflächen ergeben. Wir fahren nun in der allgemeinen Ableitung der dreiflächigen Stammsysteme fort, indem wir d) zwischen den drei Flächen den Zusammenhang gemäfs den Symbolen festsetzen (s. Fig. 13 Taf. I):

$(q)\,|_{x_1}\,(p),\ (q)\,|_{y_1}\,(r),\ (q)\,_{y_2}\,(r),\ (q)\,_{x_2}\,(p),\ (r)\,|_{z_1}\,(p),\ (r)\,_{z_2}\,(p).$

[28]) Es ergiebt sich ein dem Neunflach No. 6 im Legendre'schen Sinne symmetrisches Polyeder, welches durch Spiegelung aus diesem erhalten werden kann. Wir haben dieses Neunflach zum Vergleich auf Tafel I in Fig. 15 gezeichnet und in Fig. 16 das Neunflach No. 1 hinzugefügt, um die Lage der Kanten x und z in der Figur zu zeigen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es gilt dann die Gleichung: $p + q + r = 2n + 2$, denn die Eckensumme $p + q + r$ enthält von den $2n - 4$ Ecken des Vielflachs die sechs gemeinsamen Ecken der drei Flächen doppelt gezählt. Ferner ist $p = 4 + x_1 + x_2 + z_1 + z_2$, $q = 4 + x_1 + x_2 + y_1 + y_2$, $r = 4 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2$ und daraus ergeben sich die Werte $2(x_1 + x_2) = p + q - r - 4$, $2(y_1 + y_2) = -p + q + r - 4$, $2(z_1 + z_2) = p - q + r - 4$.

e) Haben schliefslich die drei Flächen (p), (q), (r) eine Ecke gemein, so möge der Zusammenhang derselben mit dem im vorigen Falle übereinstimmen, nur ist jetzt $x_2 = y_2 = z_2 = 0$. Die Gleichungen selbst werden aber andere, weil die allen drei Flächen gemeinsame Ecke dreifach, die drei andern Ecken der gemeinsamen Kanten aber wieder nur doppelt gezählt sind, d. h. es ist hier $p + (q - 2) + (r - 3) = 2n - 4$, oder $p + q + r = 2n + 1$. Dazu kommen die Gleichungen $p = 3 + x + z$, $q = 3 + x + y$, $r = 3 + y + z$, welche durch Auflösung ergeben:[29]) $2x = p + q - r - 3$, $2y = -p + q + r - 3$, $2z = p - q + r - 3$.

Beispiel. Ist $n = 9$, also $p + q + r = 19$, so ergeben sich, da man wegen der Gleichwertigkeit der drei Flächen $p \geqq q \geqq r$ voraussetzen kann, die folgenden vier Stammsysteme der angemerkten vier Neunflache:

$p = 8$,	$q = 7$,	$r = 4$,	$x = 4$,	$y = 0$,	$z = 1$.	Fig. No. 13.
$p = 8$,	$q = 6$,	$r = 5$,	$x = 3$,	$y = 0$,	$z = 2$.	No. 15 b.
$p = 7$,	$q = 7$,	$r = 5$,	$x = 3$,	$y = 1$,	$z = 1$.	No. 7 b.
$p = 7$,	$q = 6$,	$r = 6$,	$x = 2$,	$y = 1$,	$z = 2$.	No. 9 b.

Hiermit sind die dreiflächigen Stammsysteme des n-flachs erledigt, und wir hätten zu den **vier- und mehrflächigen Systemen** fortzuschreiten. Aus dem vorherigen geht aber klar hervor, dafs die weiteren Betrachtungen den folgenden Weg einzuschlagen haben, den wir in gröfster Allgemeinheit kurz andeuten.

Sind (p), (q), (r), (s) . . . . die Stammflächen, unter denen λ sich seitende Flächenpaare vorkommen, d. h. existieren auf dem n-flach λ Kanten, in denen sich Stammflächen seiten, und ist μ die Zahl der Ecken, in denen drei Stammflächen zusammenstofsen, so ist die Beziehung zwischen den Gröfsen p, q, r, s . . . . gegeben in

$$6) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad p + q + r + s + \; . \; . \; . = 2n - 4 + 2\lambda - \mu.$$

Es sind dann ferner, wie bisher, alle möglichen Zusammenhangsweisen der Stammflächen der Reihe nach festzusetzen und die Werte p, q, r, s . . . durch die Zahlen der Scheitelkanten auszudrücken, aus letzteren Gleichungen alsdann die zulässigen Werte für die Anzahl der Scheitelkanten zu berechnen. Diese Werte in Verbindung mit der Gleichung 6) geben die möglichen n-flache durch deren Stammsysteme.

Es ist nun leicht ersichtlich, dafs die Methode schon für vier Stammflächen recht kompliziert wird, ja, im Grunde genommen immer mehr auf ein blofses Probieren hinausläuft. Sind z. B. die vier Stammflächen isoliert, welcher Fall analog dem unter a) für die dreiflächigen Systeme zu untersuchen ist, so ergeben sich für die sechs Gröfsen x, y, z, u, v, w der Scheitelkanten zwischen den vier Flächen offenbar nur vier Gleichungen, und es können von vorn herein zwei der Gröfsen immer willkürlich gewählt werden. Dann wird es aber von Fall zu Fall schwieriger, die Garantie zu übernehmen, dafs keine möglichen Kombinationen in dem Zusammenhang der Flächen und in den Zahlen der Scheitelkanten übersehen werden. Ein weiterer Nachteil der Methode der Stammsysteme besteht darin, dafs sich eben diese und erst durch sie die Vielflache ergeben, so dafs also sämtliche Stammsysteme abgeleitet sein müssen, ehe behauptet werden kann, dafs kein Vielflach unentdeckt geblieben ist. So ergeben sich schon für die fünf möglichen Siebenflache 22 Stammsysteme, und zwar bis zu den vierflächigen, obgleich diese letzteren keine Formen des Siebenflaches mehr liefern, die nicht bereits durch die zwei- und dreiflächigen Systeme bekannt geworden wären. Der Wert dieser zweiten Methode besteht also wesentlich darin, dafs mittels derselben die n-flache ohne vorherige Kenntnis der $(n-1)$-flache gefunden werden können. Eine Berechnung der Anzahl der n-flache ist natürlich ausgeschlossen. Dabei bleibt noch die

[29]) Hiernach sind die bei Eberhard, Morphologie S. 35 irrtümlich angegebenen Werte zu korrigieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Frage unbeantwortet: Wievielflächig kann ein Stammsystem des n-flachs im Maximum sein? Von ihrer Beantwortung hängt es aber ab, wie weit wir für ein bestimmtes n die Untersuchung der Stammsysteme zu führen haben, um sicher zu sein, die endgültige Anzahl der n-flache gefunden zu haben. Der Nachteil, dafs schon für die einfachen Systeme dieselben Vielflache immer wiederholt mit gefunden werden, ist bei der nächsten Methode, der wir uns nun zuwenden wollen geringer, wenn er auch nicht ganz wegfällt. Die Methode der Stammflächen ist von Eberhard nur zur Ableitung der allgemeinen Siebenflache verwendet worden. (Morphologie S. 35—38).

IV. Die Methode von Kirkman und Hermes; Schlufsbemerkungen.

Da die Vielflache räumliche Gebilde sind, so läfst sich nicht leugnen, dafs die erste Methode der Erzeugung der n-flache aus den (n — 1)-flachen durch Schnitte an diesen Gebilden selbst für den ersten Augenblick als die naheliegendste zu gelten beanspruchen kann; sie ist sozusagen der Natur abgelauscht und dem Krystallographen z. B. ganz geläufig. Die zweite Methode ist eine künstlichere, dafür aber von dem bereits hervorgehobenen Vorteile. Die letzte zu besprechende Methode liegt für die einfachsten Formen ebenfalls sehr nahe, es läfst sich aber bezweifeln, ob sie für kompliziertere Gestalten noch praktische Verwendung finden kann. Sie ist in ihren wesentlichen Grundzügen in den bereits 1855 erschienenen, leider wie es scheint wenig bekannt gewordenen Schriften des Engländers Kirkman enthalten[30]) und ist neuerdings in den Arbeiten von O. Hermes nochmals ausführlich entwickelt und dargestellt worden.[31]) Kirkman hat unseres Wissens auch als erster versucht, für die Anzahl der Vielflache, die gewissen Bedingungen genügen, Formeln aufzustellen, die allerdings äufserst komplizierter Natur sind. Wir haben, da die Programme von Hermes jedermann leicht zugänglich sind, nur nötig, einen kurzen Ueberblick über die befolgte Methode zu geben, und die Untersuchungen Kirkmans damit zu vergleichen. Im ganzen dürfen wir uns alsdann darauf beschränken, historisch die Resultate mitzuteilen. Den Ausgangspunkt bilden bei beiden Mathematikern, wie die Entstehungszeit ihrer verschiedenen Arbeiten schliefsen läfst, die sogenannten Grund-n-flache, d. h. n-flache, welche wenigstens ein (n — 1)-eck als Grenzfläche enthalten; wir wollen aber, der Kürze wegen, zunächst die folgenden Bemerkungen ganz allgemein halten. Wird, wie in unsern Darstellungen des Sieben-, Acht-, Neun- und Zehnflachs durchweg geschehen ist, unter den isomorphen Typen eines Vielflachs derjenige als bevorzugt ausgewählt, dessen eine Fläche von der Maximalzahl der Seiten die übrigen derart an Grösse übertrifft, dafs diese Fläche gleichsam als Grundfläche für das Vielflach gelten kann, so ist die Anzahl der Seitenflächen und Deckflächen durch die Zahl der Kanten der Grundfläche vollkommen bestimmt. Seitenflächen sind nämlich diejenigen, welche mit der Grundfläche eine Kante gemein haben, die übrigen noch vorhandenen Flächen heifsen Deckflächen. Unterscheiden wir ferner noch Grundkanten, Seitenkanten, d. h. solche, welche einen Endpunkt an der Grundfläche haben, Deckkanten, die nicht an die Grundfläche grenzen, und unter diesen die Zwischenkanten als solche, welche zwischen den Deckflächen, diese verbindend, liegen, so ersieht man leicht die folgenden Beziehungen. Ist die Grundfläche des n-flachs ein m-eck, so existieren m Seitenflächen und damit n — m — 1 Deckflächen. Da das n-flach ferner m Grundkanten besitzt, so hat es auch m Seitenkanten und es resultieren somit 3 n — 2 m — 6 Deckkanten. Wir können dann die n-flache nach der Zahl der Grundkanten oder, was auf dasselbe hinauskommt, nach der Zahl der Deckflächen in Ordnungen bringen, und zwar möge die Ordnungszahl gleich der Zahl der Deckflächen sein.

So bedeutet X_3 ein Zehnflach mit drei Deckflächen, d. h. ein auf einem Sechseck aufgebautes Zehnflach. Allgemein ist N_λ ein n-flach mit λ Deckflächen, d. h. ein n-flach über einem $(n - \lambda - 1)$-eck, und N_0 ist dann ein Grund-n-flach ohne Deckfläche über einem (n — 1)-eck auf-

[30]) Bes. in der Abhandlung: On the Representation and Enumeration of Polyedra. Memoirs of the Lit. and Philosophical Society of Manchester. 2. Series, vol. XII 1855. S. auch die in Anm. 16 angeführte Arbeit.

[31]) S. das in Anm. 23 zitierte Programm und die Abhandlung: „Ueber Anzahl und Form von Vielflachen." Progr. Kölln. Gym. Berlin 1894.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gebaut. Für jedes Vielflach läfst sich dann leicht eine Schreibweise angeben, aus welcher sich die Figur selbst sofort ablesen läfst: Zunächst wird die Grundfläche notiert, alsdann die Seitenflächen, immer in einem bestimmten Sinne genommen, und dann die Deckflächen in demselben Cyklus und zwar so, dafs die erstgewählte Deckfläche auf die letzte Seitenfläche folgt; dabei ist die Verbindung der Deckflächen durch Zwischenkanten als charakteristisch für das Vielflach mit anzumerken. Es würden z. B. die Zehnflache X_2 Fig. 79 und X_3 Fig. 60 auf Tafel C, sowie das Zehnflach X_2 Fig. 38 a auf Tafel B in der folgenden Weise zu schreiben sein:

$$\Big(7;\ 4,\ 6,\ 4,\ 4,\ 6,\ 4,\ 4;\ 5-4\Big),\quad \Big(6;\ 6,\ 6,\ 4,\ 6,\ 6,\ 4;\ 3-4-3\Big),$$

und

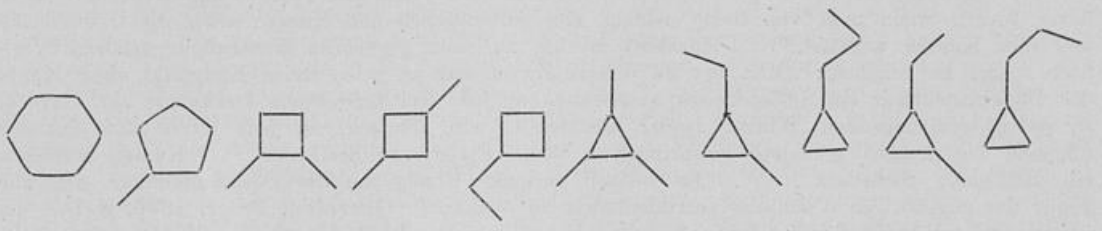
$$\Big(7;\ 6,\ 6,\ 3,\ 5,\ 6,\ 5,\ 4;\ 3\underset{3}{-}3\Big).$$

Durch die Zahl m der Grundkanten eines n-flachs war nun die Zahl der Deckflächen und Deckkanten vollkommen bestimmt, und wir brauchen, um alle N_λ für einen bestimmten Wert von λ zu finden, nur alle möglichen Deckflächen- und Deckkantensysteme aufzustellen. Wir bezeichnen nach Hermes mit Kantenfigur eines n-flachs kurz das System von Flächen und Kanten, welches übrig bleibt, wenn man von dem Vielflach alle Seitenflächen und Kanten sowie die Grundfläche und ihre Kanten wegläfst.[32]) Umgekehrt ist das zu einer gegebenen Kantenfigur gehörige Vielflach sofort zu zeichnen: „Man hat zu diesem Zweck nur an jeden freien Endpunkt einer Kante der Deckkantenfigur ein Seitendreieck anzusetzen, an jede frei vortretende Deckkante ein Viereck, an jeden einspringenden Winkel zweier Deckkanten ein Fünfeck, an jede durch auf einander folgende Deckkanten gebildete einspringende offene Figur von drei, vier . . . Kanten bezüglich ein Sechseck, Siebeneck . . . . Es bedarf geringer Übung um die Deckkantenfigur sich zur Figur des zugehörigen Vielflachs vervollständigt zu denken." (Hermes, Progr. 1896, S. 6). Es ist also ersichtlich, dafs die Aufzählung oder richtiger Auffindung der Vielflache einer bestimmten Flächenzahl n zurückgeführt ist auf die Auffindung aller möglichen Kantenfiguren; und diese Aufgabe ist für die Vielflache von nicht zu grofser Flächenzahl allerdings nicht schwer, wenn ihre Lösung auch grofser Aufmerksamkeit bedarf, damit kein möglicher Fall übersehen wird. Wir erläutern das Gesagte an den Grund-n-flachen und den Achtflachen mit einer Deckfläche. Bei einem Grund-n-flach ist die Zahl der Deckkanten $k - 2(n-1)$, d. h. $3n - 6 - 2(n-1) = n-4$. Es existieren unter den Seitenflächen mindestens zwei Dreiecke, weil der Zug der Deckkanten nicht geschlossen sein darf, er also mindestens zwei freie Ecken hat. Ist der Deckkantenzug verzweigt, so wächst die Zahl der Dreiecke bis zu dem Maximum $\frac{n-2}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. (S. die Siebenflache Fig. 17, 18, 19, und die Achtflache Fig. 22, 23 24, 25, auf Tafel I). Für die Minimalzahl 2 der Dreiecke, d. h. bei unverzweigtem Kantenzug ist zu unterscheiden, wieviel freie Ecken der Grundfläche zwischen den beiden Dreiecken liegen. Bei keiner freien Ecke ergiebt sich nur ein bestimmtes Grundflach von der Form der Fig. 41, Tafel B. Ist eine freie Ecke vorhanden, so kann diese mit jeder einzelnen der $n-5$ Zwischenecken des Deckkantenzuges verbunden sein; aber verschiedene Typen ergeben sich nur, wenn wir die freie Ecke mit der ersten Hälfte der Zwischenecken verbinden, denn alsdann treten die Spiegelbilder der bisherigen Vielflache auf. (S. die Zehnflache Fig. 42, 44 b, 45 b, Taf. B). Wir finden also $\frac{n-4}{2}$ oder $\frac{n-5}{2}$ derartige n-flache, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Die weitere Behandlung der Grund-n-flache mit zwei Dreiecken findet sich bei Hermes Progr. 1894, S. 12 ff. und führt für deren Anzahl zu den Werten $2^{\frac{n-8}{2}} \cdot \left(2^{\frac{n-6}{2}}+1\right)$ oder $2^{\frac{n-7}{2}} \cdot \left(2^{\frac{n-7}{2}}+1\right)$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

[32]) In den Fig. 17 bis 35 der Tafel I sind die Kantenfiguren der Sieben- und Achtflache ersichtlich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Formeln geben für die in Frage kommenden Grundflache dieselbe Anzahl, welche Kirkman S. 409 ff. der in Anm. 16 zitierten Abhandlung anführt. Die Anzahl der $(n+1)$-flache ist bei Kirkman eine Funktion der Zahl der n-flache, und es werden z. B. alle Grundelfflache aus den Zehnflachen abgeleitet, auch diejenigen mit drei, vier und fünf Dreiecken, mit Zuhilfenahme von Symmetrieverhältnissen, während bei Hermes nur noch die Resultate für den Fall von drei Dreiecken angeführt sind; (S. 17). Es ist mir aber nicht gelungen, die schwerfälligen Kirkmanschen Gleichungen in die uns gewohnten algebraischen Zeichen umzusetzen.[33]) Wir betrachten nun weiter die Vielflache mit einer Deckfläche, deren Grundfläche also ein $(n-2)$-eck ist. Die Deckfläche ist dann ein Polygon von $n-2$, $n-3$, $n-4$, ... 5, 4 oder 3 Seiten. Von den $3n-6$ Kanten des Vielflachs sind $n-2$ Grundkanten und ebensoviel Seitenkanten. Hat demnach die Deckfläche μ Seiten, so besitzt sie noch $3n-6-2(n-2)-\mu$, d. h. $n-2-\mu$ freie Kanten, welche in den verschiedensten Gruppierungen, vereinzelt oder auch sämtlich zu offenen Systemen vereinigt und an verschiedene konvexe Ecken der Deckfigur verteilt vorkommen können. Ist z. B. $n=8$, so ist die Deckfläche ein 6-, 5-, 4- oder 3-eck mit bez. 0, 1, 2 oder 3 freien Kanten und es sind für die Gestalt der Deckfläche mit ihren freien Kanten die folgenden Anordnungen möglich:



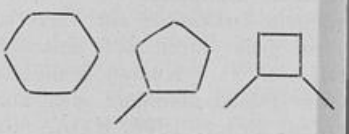
Aus diesen Deckkantenfiguren — ausgenommen die beiden letzten — lassen sich in der früher geschilderten Weise die Achtflache Fig. 26—33 auf Tafel I konstruieren. Die letzte und vorletzte Figur dagegen führen, wie man sich leicht überzeugt, auf die Achtflache Fig. 25 und Fig 23, nur dafs dann jedesmal das vorkommende Sechseck als Grundfläche erscheint. Die Mehrdeutigkeit der Konstruktion desselben n-flachs tritt also auch bei dieser Methode störend auf, und besonders, wenn wir noch die Kantenfiguren mit mehr als einer Deckfläche mit in Betracht ziehen. Wir verweisen jedoch hierfür auf die Abhandlung von Hermes, besonders auf das bereits erwähnte übersichtliche Verzeichnis der Neun- und Zehnflache und die zur Erläuterung beigefügten Abbildungen der zugehörigen Kantenfiguren auf der am Schlusse befindlichen Tafel,[34]) und werden im folgenden nur kurz über den Inhalt der zweiten Abhandlung Kirkmans (s. Anm. 30), die die Methode der Ableitung der beliebigen allgemeinen n-flache zeigt, berichten. Er beginnt mit allgemeinen Sätzen für die Anzahl der Ecken und Kanten eines allgemeinen n-flachs, wie sie aus den Eulerschen Formeln folgen, und erläutert eine Darstellung der Polyeder durch Eckenausdrücke, die eine gewisse Ähnlichkeit mit der von Möbius besitzt. Die Sätze über die Grund-n-flache werden auch hier ausführlich angeführt. Die Ecken, in denen bei einem Grund-n-flach der Deckkantenzug verzweigt ist, bezeichnet er als „ridge-summits“ und beweist den Satz: Ein Grund-n-flach mit k Dreiecken besitzt $k-2$ solcher „ridge-summits“, was für uns fast selbstverständlich ist. Den Deckkantenzug bezeichnet er als „ridge-line“; von deren Verlaufe hänge bei gegebener Zahl der Dreiecke und „ridge-summits“ die Varietät des Vielflachs ab. Nachdem er die n-flache auf $(n-1)$-seitiger Basis erledigt hat, wendet er sich zu denen auf $(n-m-1)$-seitiger Basis, welche m

[33]) Es existieren nach Kirkman ein Grundelfflach mit 5 Dreiecken, 19 mit 4 Dreiecken, 42 mit 3 Dreiecken und 20 mit 2 Dreiecken, deren Gestalten auf S. 410 der Abhandlung angegeben sind. Diese Zahlen stimmen mit denen bei Hermes, soweit sie sich daselbst finden, überein. Laut einer briefl. Mitteilung an den Verf. war Herr Prof. Hermes bereits im Jahre 1863 im Besitz der Figuren der Vielflache ohne Deckflächen bis einschl. der Zwölfflache.

[34]) Die Zahl der allgemeinen Elf- und Zwölfflache ist nach den weiteren noch nicht veröffentlichten Untersuchungen des Herrn Prof. Hermes, vorbehaltlich einer nochmaligen Durchsicht, 1250 bez. 7533. (briefl. Mitteilung).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

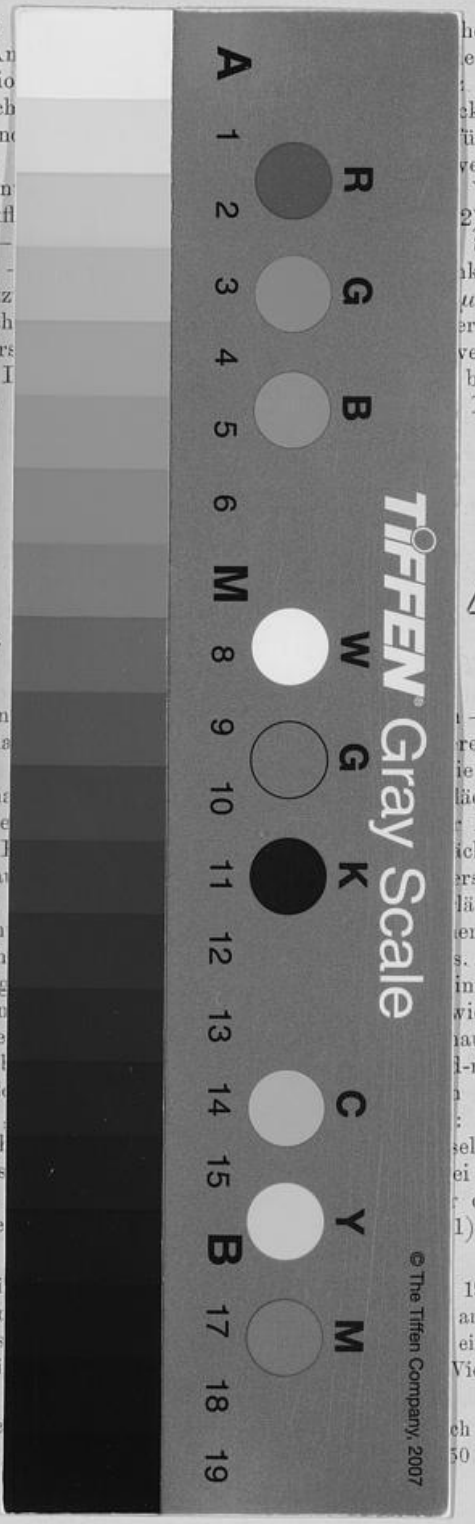
Diese Formeln geben
Kirkman S. 409 ff. der in An
ist bei Kirkman eine Funktio
den Zehnflachen abgeleitet, auch
Symmetrieverhältnissen, währen
ecken angeführt sind; (S. 17).
Gleichungen in die uns gewohn
die Vielflache mit einer Deckfl
ist dann ein Polygon von n —
Kanten des Vielflachs sind n -
Deckfläche μ Seiten, so besitz
Kanten, welche in den versch
Systemen vereinigt und an vers
Ist z. B. n = 8, so ist die I
Kanten und es sind für die
ordnungen möglich:



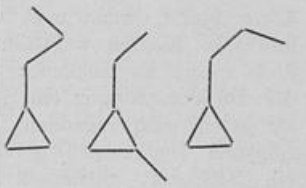
Aus diesen Deckkanten
geschilderten Weise die Achtfl
letzte Figur dagegen führen,
Fig 23, nur dafs dann jedesm
deutigkeit der Konstruktion de
besonders, wenn wir noch die
Wir verweisen jedoch hierfür a
übersichtliche Verzeichnis der
bildungen der zugehörigen Kan
folgenden nur kurz über den Inh
der Ableitung der beliebigen allg
für die Anzahl der Ecken un
Formeln folgen, und erläutert e
Ähnlichkeit mit der von Möb
ausführlich angeführt. Die Ec
zweigt ist, bezeichnet er als
Dreiecken besitzt k — 2 solch
Deckkantenzug bezeichnet er als
ecke und „ridge-summits" die
seitiger Basis erledigt hat, we

[33]) Es existieren nach Ki
3 Dreiecken und 20 mit 2 Dreiecke
stimmen mit denen bei Hermes, s
Vert. war Herr Prof. Hermes berei
einschl. der Zwölfflache.

[34]) Die Zahl der allgemeine
suchungen des Herrn Prof. Hermes,



he dieselbe Anzahl, welche
e Anzahl der (n + 1)-flache
B. alle Grundelfflache aus
ken, mit Zuhilfenahme von
für den Fall von drei Drei-
verfälligen Kirkmanschen
Wir betrachten nun weiter
2)-eck ist. Die Deckfläche
Seiten. Von den 3 n — 6
kanten. Hat demnach die
μ, d. h. n — 2 — μ freie
er auch sämtlich zu offenen
verteilt vorkommen können.
bez. 0, 1, 2 oder 3 freien
Kanten die folgenden An-



— lassen sich in der früher
ren. Die letzte und vor-
ie Achtflache Fig. 25 und
läche erscheint. Die Mehr-
Methode störend auf, und
iche mit in Betracht ziehen.
rs auf das bereits erwähnte
läuterung beigefügten Ab-
en Tafel,[34]) und werden im
s. Anm. 30), die die Methode
innt mit allgemeinen Sätzen
wie sie aus den Eulerschen
ausdrücke, die eine gewisse
l-n-flache werden auch hier
der Deckkantenzug ver-
Ein Grund-n-flach mit k
selbstverständlich ist. Den
ei gegebener Zahl der Drei-
die n-flache auf (n — 1)-
1)-seitiger Basis, welche m

19 mit 4 Dreiecken, 42 mit
angegeben sind. Diese Zahlen
einer briefl. Mitteilung an den
Vielflache ohne Deckflächen bis

ch nicht veröffentlichten Unter-
50 bez. 7533. (briefl. Mitteilung).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Flächen haben, die nicht an die Basis grenzen. Diese nennt er Kronenflächen (crown-faces, kurz crowns) und leitet hier die Typen des Achtflachs ab, in wesentlich derselben Weise, wie wir es bereits oben gethan haben.

Wir kommen **zum Schlufs** nochmals auf die Frage nach der Anzahl der Vielflache einer bestimmten Zahl n von Grenzflächen zurück. Das Problem der Auffindung der n-flache ist, wie aus den vorstehenden drei Kapiteln ersichtlich wird, von allen bisher genannten Autoren zunächst auf die allgemeinen Vielflache resp. deren reciproke Gebilde, die Trigonalpolyeder, beschränkt worden. In der That lassen sich die singulären Polyeder, d. h. diejenigen, bei denen mindestens durch eine Ecke mehr als drei Ebenen gehen, durch gewisse elementare Konstruktionen aus den allgemeinen ableiten. Denken wir uns in Fig. 18 (Taf. I) zunächst die Kante k_1 sich immer mehr verkürzend, bis schliefslich ihre Endpunkte zusammenfallen und bringen dann auf dieselbe Weise die Kanten k_2 und k_3 zum Verschwinden, so erhalten wir das singuläre Siebenflach Fig. 4. Dasselbe singuläre Siebenflach ergiebt sich aber auch aus Fig. 17 (Taf. I) durch Verschwinden der daselbst ebenfalls mit k_1, k_2, k_3 bezeichneten Kanten, so dafs wir mit Eberhard[35]) den Satz aussprechen können: „Jedes singuläre konvexe Polyeder stellt einen gemeinsamen Grenzfall mehrerer allomorphen allgemeinen Polyeder dar." Der allgemeine Beweis hierfür ergiebt sich leicht, wenn wir, umgekehrt, bei einem gegebenen singulären Polyeder die mehrkantigen Ecken in dreikantige auflösen: es ist eine t-kantige Ecke gleichwertig mit t — 2 dreikantigen. Es lassen sich also successive die Typen aller singulären n-flache aus den allgemeinen ableiten; aber es scheint nicht, als ob diese Methode zu ihrer Auffindung sehr zu empfehlen ist, und eine Abhängigkeit der Anzahl der singulären Typen von der Anzahl der allgemeinen dürfte auf diesem Wege kaum gefunden werden können, da eben mehrere allgemeine allomorphe Vielflache dasselbe singuläre ergeben können.[36]) Von den Polyedern besonderen Charakters hat Kirkman auf eine originelle Weise die autopolaren n-flache bis n = 8 abgeleitet, und aufser den betreffenden Pyramiden — jede Pyramide ist autopolar — ein Sechsflach, 5 Siebenflache und 15 Achtflache gefunden.[37]) Die weiteren Untersuchungen desselben Autors über singuläre Polyeder findet man in der umfangreichen Abhandlung „On the Theory of the Polyedra"[38]), aber schon die Anfangsworte — „*The following memoir contains a complete solution of the problem of the classification and enumeration of the P—edra Q—acra. The actual construction of the solid is a task impracticable from its magnitude; but it is here shown, that we can enumerate them with an accurate account of their symmetry, to any values of P and Q.*" — weisen darauf hin, dafs es sich im wesentlichen um Untersuchungen über die Symmetrie der Vielflache handelt, wie wir sie in erschöpfender Weise und klassischer Darstellung auch von Camille Jordan in der früher zitierten Abhandlung besitzen. Wir dürfen daher unsere Betrachtungen mit der schon in der Einleitung gemachten Bemerkung schliefsen, dafs die Frage Steiners nach der Zahl der n-flächigen Polyeder bis heute unbeantwortet geblieben ist und wir hatten bereits Gelegenheit genommen hinzuzufügen, dafs sie unserer Meinung nach auch nie beantwortet werden wird, in dem wörtlichen Sinne, wie sie der grofse deutsche Geometer gestellt hat. Den Grund hierfür finden wir in den Resultaten der Untersuchungen, welche in Eberhards Morphologie enthalten sind, Untersuchungen, die den Forschungen auf dem Gebiete der Gestaltenlehre einen vollkommen neuen Weg gewiesen haben. Wir hoffen demnächst an anderer Stelle hierauf weiter eingehen zu können.

[35]) V. Eberhard, Morphologie S. 19.

[36]) Herr Prof. Hermes hat, laut briefl. Mitteilung die singulären Typen für n = 7 und 8 mittels einer der vorher für die allgemeinen Vielflache besprochenen analogen Methode an Zahl zu 29 und 248 gefunden.

[37]) On autopolar polyedra. Philos. transact. 1857 S. 214.

[38]) Philos. Transactions, 1862 S. 121—165.

Alle Rechte vorbehalten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf