

ENTWURF EINES
ARITHMETISCHEN LEHRGANGES
FÜR HÖHERE SCHULEN

TEIL II

VON

DR. FRIEDRICH HAACKE

OBERLEHRER

BEILAGE ZUM PROGRAMM
DES KÖNIGL. GYMNASIUMS ZU WOHLAU
OSTERN 1905



DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG
1905

Progr.-Nr. 252.

960 253
1
(1905)

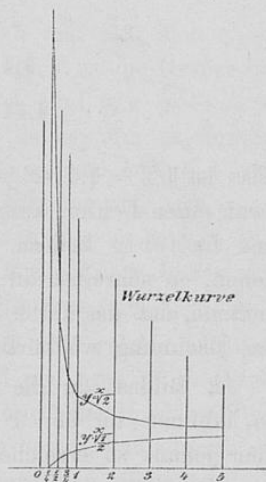
253 b.



§ 17. Irrationales. Der Grenzbegriff.

1. Aufgabe. Die Zahl 2 soll in zwei gleiche Faktoren zerlegt werden.

Auflösung: Ist ein Faktor x , so soll $x^2 = 2$, $x = \sqrt{2}$ sein. Zunächst erkennst du, daß x keine ganze Zahl sein kann, aber zwischen den zwei ganzen Zahlen 1 und 2 liegen muß. Dann kann ich dir zeigen, daß x auch kein Bruch sein kann. Denn wäre x dem unkürzbaren Bruch $\frac{m}{n}$ gleich, so wäre 2 gleich dem ebenfalls unkürzbaren Bruche $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m \cdot m}{n \cdot n}$, was offenbar nicht möglich ist, da eine ganze Zahl einem Bruche nicht gleich sein kann. Aber die Unlösbarkeit dieser Aufgabe ist von ganz anderer Art, als die, zu der die Aufgabe $x = 3 - 5$ führt. Es läßt sich nämlich zunächst zeigen, daß x , obgleich es weder ganzzahlig noch gebrochen sein kann, doch als absolute Zahl existiert.



Ich denke mir die vorliegende Aufgabe durch die gleichwertige geometrische Aufgabe ersetzt: Wie lang ist die Seite eines Quadrates, dessen Inhalt 2 qcm beträgt, oder wie groß ist die Hypotenuse eines gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten 1 cm messen? Diese Aufgabe ist durch Konstruktion lösbar und liefert eine Strecke, deren Länge durch $\sqrt{2}$ cm ausgedrückt werden muß. Denkst du dir die Zeichnung

ausgeführt, so hast du die genaue Länge von $\sqrt{2}$ cm; führst du sie mit möglichster Genauigkeit wirklich aus, so kannst du die Maßzahl dieser Strecke d. h. den Zahlenwert $\sqrt{2}$ mittels des Maßstabes mit einem Fehler ermitteln, der um so kleiner ist, je genauer deine Zeichnung war.

Nun gibt es noch einen zweiten rein arithmetischen Weg, der $\sqrt{2}$ zwar niemals genau ermittelt, aber vor der Zeichnungslösung den Vorteil hat, daß du auf ihm dem x beliebig nahe kommen kannst. Du kannst, wenn du eine Quadratzahlentabelle besitzt oder dir mit einigem Rechnungsaufwand eine solche in den hier nötigen Grenzen herstellst, setzen:

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$

$$1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422.$$

Also ist $\sqrt{2} = 1,4142$. Setzest du für $\sqrt{2}$ $1,4142$, so begehst du zwar einen Fehler, kannst aber dessen Größe vorher bestimmen und beliebig ändern. Willst du das noch besonders hervorheben, so schreibst du: $\sqrt{2} = 1,4142 \dots$, durch die Punkte andeutend, daß das durch die unterstrichene Ziffer angedeutete Ende der Rechnung willkürlich verschoben werden kann.

2. Bildest du die Reihe der Zahlen: $0,9; 0,99; 0,999; \dots$ so kommst du der 1 immer näher, sogar beliebig, ohne sie aber jemals zu erreichen. Das drückt man durch die Gleichung aus: $\lim 0,9 = 1$.

Wenn sich die Glieder der Zahlenreihe $a_1, a_2, \dots, a_n$ einem bestimmten festen Zahlenwerte a beliebig annähern, sodaß die Differenz $a - a_n$, wenn n beliebig groß genommen wird, beliebig klein wird, so sagt man, die Reihe $a_1, a_2, \dots$ hat die Zahl a zur Grenze. Die Gleichung, die du im Rechenunterrichte lernst: $0,6 = \frac{2}{3}$, muß also korrekt so geschrieben werden $\lim 0,6 = \frac{2}{3}$. Unter einer Grenze versteht man eine Zahl

oder eine Größe, der man sich mit irgend welchen Zahlen- oder Größenreihen beliebig nähern kann, ohne sie jemals zu erreichen. Zeichnet man um und in einen Kreis regelmäßige Vielecke, deren Seitenzahlen recht groß sein sollen, so besteht zwischen dem Kreisumfang und dem Umfängen der Vielecke ein Unterschied, der um so kleiner wird, je größer die Seitenzahl genommen wird, und der beliebig klein werden kann, weil man die Seitenzahl beliebig groß wählen darf. Daher ist der Kreisumfang die Grenze für den Umfang des Sehnepolygons (obere Grenze) und für den Umfang des Tangentenpolygons (untere Grenze). Die Bedeutung des Wertes „Grenze“ wird besonders deutlich, wenn du es durch das Wort „mathematisches Ideal“ ersetzt.

3. Der Grenzensatz. Zwei Zahlen g_1, g_2 , die zwischen denselben beiden Zahlen a, b liegen, deren Unterschied beliebig klein gemacht werden kann, sind gleich.

Ist $a < g_1 < b$ und ebenso $a < g_2 < b$ und läßt sich $a - b$ beliebig verkleinern, so ist $g_1 = g_2 = g$, und g ist die Grenze der zwei Zahlen a und b . Denn wäre $g_1 > g_2$ und $g_1 - g_2 = d$, so brauchtest du nur $a - b < d$ werden zu lassen, um es unmöglich machen, daß g_1 und g_2 beide noch von a und b eingeschlossen werden. Eine genügende Verkleinerung von $a - b$ würde dann das Heraustreten entweder von g_1 oder von g_2 oder von beiden aus dem Zwischenraum $a - b$ zur Folge haben und dies soll nach der Voraussetzung ausgeschlossen sein.

4. Die Begriffe rational und irrational sind relativ. In dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 1 und 1 cm ist die Hypotenuse irrational, d. h. durch die Katheten und beliebig kleine Teile derselben unmeßbar; aber auch die Katheten sind durch die Hypotenuse und beliebig kleine Teile derselben unmeßbar (inkommensurabel). Denn ist die Hypotenuse, also $\sqrt{2}$ cm die Maßeinheit, so ist die Kathete $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ derartiger Maßeinheiten.

5. Außer den ganzen und den gebrochenen Zahlen liegen also auch die irrationalen Zahlen in der natürlichen Zahlenreihe und wir kommen zu dem sehr merkwürdigen Ergebnis, daß es keineswegs möglich ist, an jeden Punkt dieser Reihe mit einem Bruche zu gelangen. Die Zahl derjenigen Stellen der Zahlenreihe,

die durch ganze und gebrochene Zahlen nicht erreichbar ist, ist viel größer als die Zahl der von den rationalen Zahlen besetzten Stellen.

Die Definition der drei direkten Rechnungsarten durch Reihen gibt uns sofort das Mittel, ebensogut mit irrationalen Zahlen als Grenzen von Brüchen zu rechnen, wie das im vorigen § für Brüche nachgewiesen wurde.

§ 18. Erweiterung der Subtraktion. Negatives. Signierte Größen und Zahlen.

1. Die Subtraktion hat bezüglich ihrer Ausführbarkeit eine Bedingung mehr als die Addition. Zur Addierbarkeit genügt die Gleichartigkeit der Summanden. Beim Subtrahieren muß noch der Subtrahend kleiner sein als der Minuend, sonst kann die Subtraktion nur teilweise vollzogen werden und es bleibt eine Gruppe von Einheiten zurück, die da fortgenommen werden soll, wo nichts mehr existiert, wovon fortgenommen werden könnte. Eine Differenz $p - a$, deren Subtrahend $a > p$ ist, läßt sich auf die einfachste Form bringen $p - a = 0 - a_1$, wenn $a = p + a_1$ ist. Die Unmöglichkeit, die Differenz $p - a = p - (p + a_1)$ auszuführen, ergibt sich am klarsten aus der Form $0 - a_1 = -a_1$. In dieser Form heißt die unmögliche Differenz auch negative Größe oder Zahl und stellt die Forderung: es soll die Größe a_1 oder es sollen a_1 Einheiten weggenommen werden, ohne daß ein Minuend da ist, von dem abgezogen werden könnte. Erwägst du, daß wir bis jetzt schon öfter 0 mit Vorteil als Zahl aufgefaßt haben, so ist damit $0 - a_1$ wenigstens eine formell richtige Differenz mit Subtrahend (aktiver) und Minuend (passiver Größe oder Zahl) geworden.

Der Differenz mit dem Minuenden 0 stellen wir die Summe $0 + a_1$ mit dem Augenden 0 zur Seite. Neben die negative Größe oder Zahl $-a_1$ tritt dadurch die positive Zahl $+a_1$; beide nennt man signierte Größen oder Zahlen und stellt ihnen die bisher betrachteten Größen oder Zahlen als absolute entgegen. Der absolute Wert einer Größe oder Zahl a kann auch besonders durch $|a|$ hervorgehoben werden.

Die absolute Größe oder Zahl ist selbstgenugsam und gilt

an und für sich auch außerhalb jeder Rechnung. Sobald du aber schreibst $+a$ oder $-a$, gibst du durch das Rechenzeichen zu erkennen, daß mit a gerechnet, daß a addiert oder subtrahiert werden soll und daß a eben nur in einem Rechnungszusammenhang Bedeutung hat.

Die Einführung der signierten Zahlen und Größen scheint zunächst zwecklos zu sein, da die negative Zahl unmöglich ist und die positive Zahl nur als ihr, freilich mögliches Gegenbild auftritt, das ohne das Negative überflüssig wird. Es gilt also: 1) Fälle zu finden, in denen der zunächst unmögliche Sachverhalt auf einen möglichen hindeutet oder in einen möglichen verwandelt, also mit ihm in einen gesetzmäßigen Zusammenhang gebracht werden kann; 2) zu zeigen, daß die Ausführung der arithmetischen und der algebraischen Operationen die Einführung der negativen Größen fast automatisch und unabweislich verlangt.

2. Signierte Strecken und Winkel. Trägt man auf einem nach rechts gerichteten Strahle OX und auf seinem Gegenstrahle OX' von seinem Ausgangspunkte O die Strecke $\bar{a}$ ab bis A und A' , so ist $OA = OA' = |\bar{a}|$. Will man die Strecke $\bar{a}$ in einen möglichst einfachen Rechenzusammenhang bringen, also zur signierten Größe machen, so trägt man auf OX' , dem Gegenstrahl von OX , $\bar{g}$ ab bis L . Dann kann man die Strecke LO , die Grundstrecke, als einen zu OA zugehörigen Augenden und als einen zu OA' zugehörigen Minuenden betrachten. Es ergibt sich, wenn man L als Ausgangspunkt der Zählung betrachtet, $LA = LO + OA = \bar{g} + \bar{a}$, $LA' = LO - OA' = \bar{g} - \bar{a}$. Wenn man aber, zu O als Ausgangs- und Anfangspunkt des Strahles OX zurückkehrend, OA mit $+OA = +\bar{a}$ und OA' mit $-OA' = -\bar{a}$ bezeichnet, so ist das an sich unsinnig, weil $+OA$ einen zugehörigen ersten Summanden und $-OA'$ einen Minuenden verlangt; aber es wird sinnvoll in dem weiteren Zusammenhange, der die Vertauschung des Ausgangspunktes O mit einem beliebig weit nach links liegenden Punkte L ermöglicht. Ist $LO > OA'$, was sich durch passende Wahl der Lage von L stets erreichen läßt, so läßt sich die Strecke $OA' = \bar{a}$ auf LO abtragen. Unmöglich könnte die Subtraktion nur werden, wenn der Punkt L nicht beliebig weit zurückweichen könnte. In dem Falle wären

Abstände links von L isoliert negativ, also unmöglich; denn es gäbe keinen Rechnungszusammenhang, der ihnen den nötigen Minuenden verschaffte.

Also werden signierte Strecken, die im ursprünglichen Rechnungszusammenhange unmöglich waren, in einem weiteren Zusammenhange (Verschiebung des Zählungsausgangspunktes) möglich.

In dem hier erörterten Sinne heißt OX der positive, OX' der negative Strahl, weil man in der Richtung des ersten addiert, in der des zweiten subtrahiert.

Wie man bei horizontalen Strecken, der Richtung des Schreibens entsprechend, nach rechts addiert und nach links subtrahiert, so wird man bei vertikalen Strecken (OY) der Richtung des Körpers entsprechend nach oben (OY) addieren und nach unten (OY') subtrahieren. Man wird an dieser natürlichen Bestimmung festhalten, falls nicht besondere Gründe (Fallrichtung) andere Festsetzungen geeigneter erscheinen lassen.

Bei der Winkelzählung gilt als Anfangsschenkel OX . Die Winkel läßt man entstehen dadurch, daß man OX um O links herum um einen Bruchteil oder ein Vielfaches des Vollwinkels dreht. Die Existenz der signierten Winkel liegt noch viel offener da, denn man kann den Strahl OX als Repräsentanten sowohl des Nullwinkels als eines beliebigen Vielfachen des Vollwinkels ansehen. Für die Konstruktion von $\pm \bar{\alpha}$ hat man OX , das beim absoluten Winkel $\bar{\alpha}$ nur erster Schenkel war, als Vollwinkel (V) zu betrachten und erhält: $+\bar{\alpha} = (V) + \alpha$; $-\bar{\alpha} = (V) - \alpha$.

3. Andere signierte Größen und Maßzahlen; Vermögen und Schulden, Wärme- und Kältegrade.

$a \mathcal{M}$, die in meinem Besitze sind, sind eine absolute Größe. Kann ich sie mit einem außerdem schon vorhandenen Grundbestande von $g \mathcal{M}$ in Rechnungszusammenhang bringen, so werden sie zu $+a \mathcal{M}$. $a \mathcal{M}$, die ich zu bezahlen habe, sind $-a \mathcal{M}$, denn sie müssen mit einem (vorhandenen oder zu erwartenden) Grundbestande von $g \mathcal{M}$ in Subtraktionszusammenhang gebracht werden. Wenn oder so lange das unmöglich ist, sind $-a \mathcal{M}$ eine unmögliche Größe. Auch hier werden sie möglich nur durch

Verschiebung des Nullniveau; nur so lange und so weit die Verschiebung des Zählungsausganges angeht, treten die $-a \mathcal{M}$ in einen möglichen Rechnungszusammenhang. Sonst repräsentieren sie die dauernde Forderung, daß $a \mathcal{M}$ von einem (nicht vorhandenen) Vermögen von $g \mathcal{M}$ abgezogen werden müßten. Vom Standpunkt des Gläubigers kehren sich die Zeichen um; $-a \mathcal{M}$ des Schuldners sind $+a \mathcal{M}$ des Gläubigers und $+a \mathcal{M}$ des Schuldners sind $-a \mathcal{M}$ des Gläubigers: signierte Größen sind relativ.

Die gebräuchliche Thermometerskala beginnt mit dem Gefrierpunkt des Wassers als Nullpunkt der Zählung; aber dadurch, daß die Gradstriche nicht bloß nach oben ausgeführt, sondern auch nach unten fortgesetzt werden, wird eine Temperaturangabe in absoluten Zahlen vom Eispunkt aus zweideutig, denn 10^0 können 10^0 sowohl über als unter dem Eispunkt bedeuten. Reicht bei einem Thermometer die Teilung bis 40^0 unter den Eispunkt und will man doch eine einheitliche Zählung festhalten, so ist der unterste Teilstrich der natürliche Nullpunkt dieses Thermometers (natürlich in mathematischem und nicht in physikalischem Sinne). Die Angabe $\pm 4^0$ bedeutet dann, daß ^{zu} dem Grundintervall 40^0 ^{addiert} _{von} ^{subtrahiert} 4^0 werden sollen. Die von dem ursprünglichen Nullpunkt (Eispunkt) aus unmögliche Zählung deutet auf eine von dem neuen Ausgangspunkte mögliche Zählung hin. Sache der Physik ist es, zu entscheiden, wie weit nicht bloß bei einem speziellen Instrument, sondern überhaupt den negativen Graden eine reale (physikalische) Bedeutung zukommt und ob sie nicht von einem gewissen Zahlenwerte ab schlechthin unmöglich, undeutbar und unsinnig bleiben.

4. Also gibt es Fälle, die von der Größengattung ganz unabhängig sind, wo die an sich unmögliche negative Größe auf einen möglichen Rechnungszusammenhang hinweist und in ihn eintreten kann.

Die Einführung der signierten statt der absoluten Größen verhindert alsdann die Zweideutigkeit des Resultats, die mit der absoluten Größe verbunden gewesen wäre.

§ 19. Signierte Größen und Zahlen in Gleichungen.

1. Ein Thermometer zeigt zu Anfang Dezember eine Temperatur von a° . Wieviel Grad über 0° steht es Ende Dezember, wenn es wöchentlich durchschnittlich um i° fiel? $4i + x = a$, $x = a - 4i$. Ist $a = 8$ und gibst du dem i der Reihe nach die Zahlenwerte 1, 2, 3, 4, ..., so erhältst du $x = 4, 0, -4, -8$. Die Frage der Aufgabe kannst du zunächst durch eine absolute Lösungszahl oder, indem du auch die Existenz einer beliebigen Zahl von Graden unterhalb des Eispunktes voraussetzest, durch eine positive Lösungszahl beantworten. Beide sind an die Bedingung $4i \leq a$ geknüpft. Ist $4i > a$, so wird $x = a - 4i$ negativ und $|x| = 4i - a$; also tritt an die Stelle der ursprünglichen Gleichung $4i + |x| = a$, die Gleichung $4i - |x| = a$.

Das erste, was dir die negative Lösung verrät, ist die Unlösbarkeit der gestellten Aufgabe. Zugleich aber weist sie dich auf die Ursache dieser Unlösbarkeit hin und zeigt dir, wie du durch einen Zeichenwechsel eine neue, in absoluten Zahlenwerten lösbare Parallelgleichung und Parallelaufgabe erhältst. Also ist die negative Lösung nicht bloß eine „falsche“ Lösung, sondern auch die absolute Lösung der Parallelaufgabe: Wieviel Grad unter Null etc.

Also wieder ist das Resultat: In dem gegebenen Rechnungszusammenhang ist die negative Lösung eine falsche Lösung, aber sie deutet auf einen andern Rechnungszusammenhang, in dem sie richtig wird.

Andrerseits kann man die Fragestellung schon dahin deuten: Die Frage, wieviel Grad über Null, läßt als Lösung schon eine signierte Größe vermuten. Sie schränkt aber die Aufgabe ungebührlich ein, dadurch daß sie aus dem gesamten Bereich der signierten Größen die negativen ausscheidet.

Da die volle Fragestellung lauten müßte: Wieviel Grad über oder unter Null etc., so müssen, wenn absolute Größen als Antwort verlangt werden, zwei Gleichungen als Lösung gegeben werden: 1) $4i + |y| = a$, 2) $4i - |z| = a$ oder 1) $a - 4i = |y|$, 2) $4i - a = |z|$. Je nach den gegebenen Zahlenwerten von a und i hat nur eine, aber auch immer eine der beiden Gleichungen eine Lösung. Beide Gleichungen vereinigt die Typusgleichung

$4i + x = a$, in der x signiert gedacht wird. Nennt man die Gleichung 1) die positive, 2) die negative, so deutet eine absolute Lösung der $+$ Gleichung auf richtige, eine absolute Lösung der $-$ Gleichung auf falsche Fragestellung.

Eine subtraktive (negative) Zahl soll also nicht an sich selbst und unter allen Umständen, sondern nur in einem gewissen Gleichungszusammenhange abgezogen werden. Da aus der Lösung $x = -3$ die Lösung $-x = 3$ folgt, so ergibt sich, daß man, wenn man in der ursprünglichen Gleichung x subtrahiert statt es zu addieren und addiert statt es zu subtrahieren, kurz wenn man die Zeichen der Glieder, die x enthalten umkehrt, eine absolute Lösung erhält.

2. Wieviel $\mathcal{M}$ besitzt jemand nach i Tagen, wenn er täglich $a \mathcal{M}$ ausgibt und jetzt $b \mathcal{M}$ hat? Die Lösungsgleichung $ai + x = b$, $x = b - ai$ kann negativ sein. Dann ist die Aufgabe ihrem Wortlaut nach unlösbar. Denke ich mir aber, daß A außer den $b \mathcal{M}$ noch anderweitiges Vermögen $g \mathcal{M}$ hat, so erhält die signierte Lösung Realität; sie bedeutet ein Erheben über oder ein Sinken unter das Niveau von $g \mathcal{M}$ um den Betrag der $x \mathcal{M}$. Auch hier deutet die signierte Lösung aus der Enge der ungeeigneten Fragestellung auf ein weiteres verwandtes Gebiet, innerhalb dessen auf eine richtig erweiterte Frage eine Antwort in absoluten Zahlen zu erwarten ist.

3. Ein Mehlvorrat beträgt jetzt a kg. Täglich werden b kg verbraucht. Nach wieviel Tagen beträgt er i kg? $a - bx = i$, $x = \frac{a-i}{b}$. x als absolute Lösung ist nur vorhanden, wenn $i \leq a$ ist; wird $i > a$, so ist die Aufgabe in absoluten Zahlen unlösbar. Lasse ich aber x als signierte, additive oder subtraktive Größe gelten, so ist die zunächst nicht vorhandene Grundgröße in einer beliebigen Anzahl von Tagen zu beschaffen, die von der Vergangenheit bis zur Gegenwart verstrichen sind. Die negative Lösung verlangt, daß ich den absoluten Wert der Lösung von dieser Tageszahl abziehen, also in Vergangenheit gehen, die positive Lösung, daß ich addieren, also dem Wortlaut der Aufgabe entsprechend den gesuchten Tag in der Zukunft suchen soll.

Die positive Lösung ist absolute Lösung der Gleichung

$a - b|y| = i$. Die negative Lösung ist absolute Lösung der Gleichung $a + b|z| = i$. Beide absolute Gleichungen vereinigen sich in der signierten Gleichung $a - bx = i$.

4. Ein Radfahrer, der auf einer Fahrt von Breslau nach Berlin stündlich a km zurücklegt, ist von Berlin noch b km entfernt. Wieviel km ist er nach c Stunden von Berlin entfernt? Bei der Aufstellung der Gleichung muß du dich entscheiden, ob du den gesuchten Standpunkt des Radfahrers vor oder hinter Berlin annehmen willst. Nimmst du ihn vor Berlin an, so erhältst du die Gleichung $ac + x = b$, also $x = b - ac$.

Ist $b > ac$, so ist x eine absolute Zahl; die Aufgabe hat eine wörtliche (eigentliche) Lösung. Ist $b < ac$, so existiert x nur als signierter und zwar negativer Wert, dadurch anzeigend, daß die Gleichung nur durch den Zeichenwechsel von x eine absolute Lösung erhält $|y| = ac - b$; daß also deine ursprüngliche Annahme über den Standort des Radfahrers falsch war und daß er sich hinter Berlin befindet.

5. a Arbeiter fertigen ein Werk in b Tagen. Wieviel Arbeiter müssen hinzugezogen werden, damit die Arbeit in c Tagen fertig wird? Aus $ab = (a + x)c$ folgt $x = \frac{a(b-c)}{c}$. Gelten nur absolute Zahlen, so folgt immer eine Lösung aus einer

Gleichung des Gleichungspaares
$$\begin{aligned} ab &= c(a + |y|) \\ ab &= c(a - |z|), \end{aligned}$$
 während die andere lösungslos bleibt. Werden signierte x zugelassen, so repräsentiert je nach der Fragestellung (mehr — weniger Arbeiter) eine der signierten Gleichungen $ab = c(a + x)$ oder $ab = c(a - x)$ die beiden absoluten Gleichungen.

Die Bedingung für die Einführung signierter Zahlen ist gegeben: die a Arbeiter bilden den Grundstock, ^{zu} dem neue Arbeiter ^{zutreten} ^{weggehen}.

6. In allen fünf Fällen setzt die genaue Beantwortung des Wortlautes der Fragen einen absoluten oder positiven Wert von x voraus. Die Rechnung führt von selbst darauf, daß die Fragestellung für die Aufgabe zu eng ist und daß die Annahme eines allgemeinen, signierten x diesen Fehler wieder gut macht.

Die für die reale Bedeutung einer signierten Größe notwendige Grundgröße ist in allen Fällen vorhanden; sie ist:

- 1) eine genügende Anzahl von Graden unter 0^0 ,
- 2) eine genügende Anzahl von $\mathcal{M}$ als Vermögen,
- 3) eine genügende Anzahl von Tagen bis zur Gegenwart,
- 4) der augenblickliche Abstand von Berlin in km,
- 5) der vorhandene Grundstock von Arbeitern.

Da die Signierung nicht an der Einheit, sondern an der Maßzahl hängt, so ist die Verwendung signierter Größen durch die Art der Einheit nicht beschränkt und man kann, wenn man den Maßzahlen die Größenbenennung beilegt, so gut von negativen Menschen wie von negativen Metern reden. Alle Arten Größen also können als signierte behandelt werden, wenn ihre Anzahl sich denken läßt als sich erhebend über oder sinkend unter einen gewissen Grundwert, ein gewisses Niveau von Einheiten derselben Art. Sonst haben signierte Größen so wenig eine reale Bedeutung, wie ihn eine Bruchlösung hat, wenn die zugehörige Einheit unteilbar (ein Individuum, ein Atom) ist.

§ 20. Rechnen mit signierten Zahlen.

1. Die Rechnungen an und mit signierten Zahlen erledigen sich durch die Erwägung, daß jede signierte Zahl ein isolierter Addend und Subtrahend, also eine isolierte aktive Zahl ist, der zunächst der zugehörige Augend und Minuend, also die passive Zahl fehlt. Läßt diese sich in dem Rechnungszusammenhange, auf den die signierte Zahl hindeutet, auffinden, so erhält dieser reale Bedeutung, und die für das Rechnen mit möglichen Differenzen aufgestellten Regeln gelten auch für unmögliche Differenzen. Da das „Signum“ $\pm$ nur an der Maßzahl und nicht an der Größe haftet, so ist es am einfachsten und dabei genügend die Richtigkeit der bisher aufgestellten Regeln an der einfachsten Größe, der Strecke und deren Maßzahlen zu zeigen. Es diene uns also als Repräsentant der signierten Größe die vom Anfangspunkte O eines Strahles OX aus aufgetragene Strecke, die zu einer im Gegenstrahle OX' aufgetragenen Strecke $OL = \bar{g}$ addiert oder von ihr subtrahiert wird. Als Repräsentant würde

sich ebenso jede andere Einheit (Kugeln, Menschen, Atome) eignen; der Vorzug, den die Strecke diesen Einheiten gegenüber hat, liegt darin, daß sie einfach darstellbar und vorstellbar ist.

An der Zählungsart jeder der drei Reihen (dem Funktionsgesetz) wird durch das Vorschalten der Strecke $OL = \bar{g}$ oder anders gesprochen durch die Verlegung des Anfangspunktes der Zählung oder des Niveaus der Zählung nichts geändert. Deshalb müssen die Resultate, die uns die Reihen bisher für das Rechnen mit absoluten Größen lieferten, auch für signierte Größen gelten.

2. Die Aggregatenreihe und Aggregate signierter Größen. Die Zahl a unterscheidet sich von $+a$ nur dadurch, daß man sich bei $+a$ noch den Gegenstrahl mit der beliebigen Grundstrecke $LO = \bar{g}$ vorgelegt denken muß. $+a$ wird dadurch zur $g + a$ ten Stelle der Aggregatenreihe, deren Anfangspunkt L ist; ebenso wird die Zahl $-a$ die $g - a$ te Zahl der bei L beginnenden Aggregatenreihe; und du erhältst sie demgemäß, wenn du von L erst g Schritte vorwärts und dann a Schritte rückwärts machst. Die Einführung der signierten Größen und Zahlen erweitert die frühere Betrachtung also nur insofern, als dem Strahle OX auf dem Gegenstrahle eine beliebig große Strecke OL vorgelegt und zum Ausgangspunkt der Zählung L gewählt wird; sie verlegt die Summenreihe vom Strahl auf die Gerade und gestattet damit grenzenloses Vor- und Rückwärtszählen in beliebig kleinen Schritten.

Es ist:

$$a) \quad a - b = +a - b = -b + a = + (a - b) = - (b - a),$$

denn

$$g + (a - b) = g + a - b = g - b + a = g - (b - a).$$

$$b) \quad g + (-a) = g - a = g - (+a),$$

denn

$$g + (i - (i + a)) = g + i - i - a = g - a.$$

$$c) \quad g - (-a) = g + a = g + (+a),$$

denn

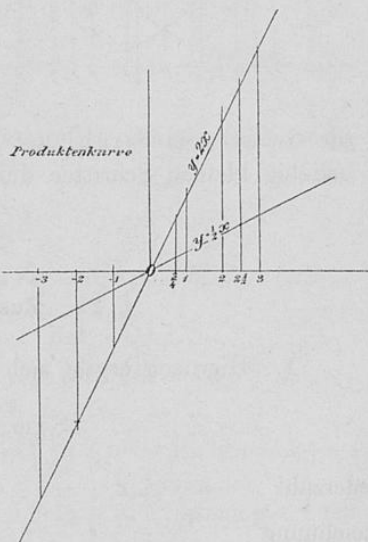
$$g - (i - (i + a)) = g - i + i + a = g + a.$$

Daraus ergibt sich

Das erste Zeichengesetz signierter Größen: Beim Aggregieren signierter Größen gibt das Zusammentreffen gleicher Vorzeichen plus entgegengesetzter Vorzeichen minus.

Da auch das Aggregieren signierter Größen nur ein Vor- und Rückwärtszählen mit Zuhilfenahme von OX' ist, so gilt das Vertauschungsprinzip und das Gruppierungsgesetz auch für signierte Zahlen.

3. Die Produktenreihe und Produkte signierter Größen. Die absoluten Schritte der Produktenreihe $+p$ gehen nach rechts, die der Produktenreihe $-p$ nach links; nach derselben Richtung sind auch die positiven Schritte gerichtet, während die negativen Schritte der Produktenreihe $+p$ nach links, die negativen Schritte der Produktenreihe $-p$ nach rechts gehen. Also ist der ate Schritt der Produktenreihe p auch der ate



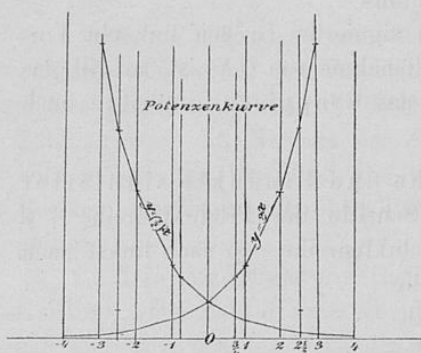
$+ate$ Schritt der Produktenreihe $+p$ und auch der $-ate$ Schritt der Produktenreihe $-p$. Der $-ate$ Schritt der Produktenreihe p ist auch der ate Schritt der Produktenreihe $-p$.

Das zweite Zeichengesetz signierter Größen. Auf der zweiten Stufe (beim Multiplizieren und Dividieren) gibt das Zusammentreffen gleicher Vorzeichen plus ungleicher Vorzeichen minus.

Der einzige Unterschied der Produkte absoluter und signierter Größen und Zahlen liegt in den Vorzeichen. Diese ändern an der Gültigkeit der drei Multiplikationsgesetze nichts.

4. Die Potenzenreihe und Potenzen signierter Größen. Es ergab sich schon früher (§ 16, 7), daß die Potenzenreihe eine Fortsetzung jenseits des 0ten Gliedes haben muß.

Die signierten Größen geben uns jetzt die Möglichkeit, die Schrittzahlen, durch die man diese Glieder erreicht, zu bezeichnen. Da die Potenzenreihe p diejenige Reihe ist, die mit p als erstem



Glieder jedes folgende vorhergehende durch Multiplikation mit p Division entstehen läßt, so ist das 0te Glied $p^0 = 1$, das -1 te Glied $p^{-1} = \frac{1}{p}$, das $-a$ te Glied $p^{-a} = \frac{1}{p^a} = \left(\frac{1}{p}\right)^a$.

Also auch die Potenzenreihe erweitert durch Zulassung signierter Exponenten ihr Gebiet vom Strahl auf die Gerade, deren Punkte sie in beliebig kleinen Schritten durchlaufen kann.

§ 21. Zusammenfassung.

1. Hiernach ergibt sich als schließliches Resultat:

Summenreihe.

$$\begin{array}{l} \text{Gliederzahl} \quad -n \dots -2 \dots -1 \dots 0 \dots \frac{p}{q} \dots 1 \dots 1 + \frac{p}{q} \dots 2 \dots 2 + \frac{p}{q} \dots m \\ \text{Bezeichnung} \quad \left\{ \begin{array}{l} -n \dots -2 \dots -1 \dots 0 \dots \frac{p}{q} \dots 1 \dots \frac{q+p}{q} \dots 2 \dots \frac{2q+p}{q} \dots m \end{array} \right. \\ \text{Zahlenwert} \end{array}$$

Produktenreihe $+ p$.

$$\begin{array}{l} \text{Schrittzahl} \quad -a \dots -\frac{m}{n} \dots -1 \dots 0 \dots 1 \dots \frac{m}{n} \dots a \\ \text{Produktenreihe} \quad p \dots a \dots p \dots \frac{m}{n} \dots p \dots 1 \dots p \dots 0 \dots p \dots 1 \dots p \dots \frac{m}{n} \dots p \dots a \\ \text{Zahlenwert} \quad -pa \dots -\left(\frac{pm}{n}\right) \dots -p \dots 0 \dots p \dots \left(\frac{pm}{n}\right) \dots \left(\frac{1}{p} + \dots + \frac{a}{p}\right) \end{array}$$

Produktenreihe $-p$.

Schrittzahl	$a \quad \dots \quad \frac{m}{n} \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad -1 \quad \dots \quad -2 \quad \dots \quad \frac{m}{n} \quad \dots \quad -a$
Produktenreihe	$-p \cdot a \dots -\frac{pm}{n} \dots -p \cdot 1 \dots -p \cdot 0 \dots -p \cdot 1 \dots -p \cdot 2 \dots \left(-p \cdot \frac{m}{n}\right) \dots -p \cdot a$
Zahlenwert	$-(p \cdot a) \dots -\left(\frac{pm}{n}\right) \dots -p \cdot 0 \quad \dots \quad +p \quad \dots + (p \cdot 2) \dots + \left(\frac{pm}{n}\right) \quad \dots + (p \cdot a)$

Potenzenreihe p .

Schrittzahl	$-a \quad \dots \quad -\frac{m}{n} \quad \dots \quad -2 \quad \dots \quad -1 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad \frac{m}{n} \quad \dots \quad a$
Potenzenreihe	$p^{-a} \dots p^{-\frac{m}{n}} \dots p^{-2} \dots p^{-1} \dots p^0 \dots p^1 \dots p^{\frac{m}{n}} \dots p^a$
Zahlenwert	$\frac{1}{p^a} \quad \dots \quad \frac{1}{\sqrt[n]{p^m}} \quad \dots \quad \frac{1}{p^2} \quad \dots \quad \frac{1}{p} \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad p \quad \dots (\sqrt[n]{p})^m \dots \left(\frac{1}{p} \dots \frac{a}{p}\right)$

Mithin erhältst du, wenn a, b, p absolut und ganzzahlig sind, folgende allgemeine Erklärungen:

Produkt.

$$pa = \frac{1}{p} + \dots + \frac{a}{p}; \quad p \cdot 1 = p; \quad p \cdot 0 = 0; \quad p \cdot -a = -(pa);$$

$$p \frac{a}{b} = \frac{pa}{b}; \quad p \cdot v_a = v_r; \quad pA_a = A_r.$$

Potenz.

$$p^a = \frac{1}{p} \dots \frac{a}{p}; \quad p^1 = p; \quad p^0 = 1; \quad p^{-a} = \left(\frac{1}{p}\right)^a; \quad p^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{p^a}; \quad p^{\frac{v_a}{b}} = 1 \pm v_r,$$

je nachdem $p \geq 1$; $p^{\frac{A_a}{b}} = A_r$, wenn $p > 1$; $p^{\frac{A_a}{b}} = v_r$, wenn $p < 1$ ist.

2. Jedes Aggregat $a - b - c + d$ läßt sich in eine Summe signierter Zahlen verwandeln: $a + (-b) + (-c) + d$. Jeder Quotient $a:b:c:\dots$ läßt sich in ein Produkt $a \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \dots$ verwandeln. Jede Wurzel läßt sich in eine Potenz verwandeln.

Damit verringert sich die Zahl der acht Rechnungsarten auf vier: Addition, Multiplikation, Potenzierung und Logarithmierung.

Diese Vereinfachung war schon aus den §§ 11 und 14 ersichtlich, aus denen sich für Multiplikation und Division und für Potenzierung und Radizierung dieselben Gesetze ergaben.

3. In den nächsten Nummern von § 20 sollen $a, b, c \dots$ unter α), signierte ganze oder gebrochene oder irrationale Zahlen unter β) ganze absolute Zahlen bedeuten.

4. Rechengesetze der Addition [Subtraktion].

a) Vertauschungsgesetz:

$$\alpha) \quad a + b + c + d = a + d + c + b$$

$$\beta) \quad a - \frac{g}{h} - c + b + \frac{e}{f} - d \dots = a + b - c - d + \frac{e}{f} - \frac{g}{h} \dots$$

b) Gruppierungsgesetz:

$$\alpha) \quad a + b + c + d + e + f = a + (b + c) + (d + e) + f$$

$$\beta) \quad a + b - c - d + \frac{e}{f} - \frac{g}{h} = a + b - (c + d) + \left(\frac{e}{f} - \frac{g}{h}\right).$$

5. Rechengesetze der Multiplikation [Division].

a) Vertauschungsgesetz:

$$\alpha) \quad a \cdot b \cdot c \cdot d = a \cdot d \cdot c \cdot b.$$

$$\beta) \quad a : \frac{g}{h} : c \cdot (-b) \cdot \frac{e}{f} : d = a \cdot (-b) : c : d \cdot \frac{e}{f} : \frac{g}{h}.$$

b) Gruppierungsgesetz:

$$\alpha) \quad a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = a \cdot (b \cdot c) \cdot (d \cdot e) \cdot f.$$

$$\beta) \quad a \cdot (-b) : c : d \cdot \frac{e}{f} : \frac{g}{h} = a \cdot -b : (c \cdot d) \cdot \left(\frac{e}{f} : \frac{g}{h}\right).$$

c) Verbindungsgesetz:

$$\alpha) \quad (a + b + c + \dots)m = am + bm + cm + \dots$$

$$\beta) \quad \left(a + \frac{b}{c} - d + \dots\right) \frac{m}{n} = a \frac{m}{n} + \frac{b}{c} \cdot \frac{m}{n} - d \cdot \frac{m}{n} + \dots$$

6. Klammergesetz.

$$+ (+) = +; \quad - (-) = +; \quad + (-) = -; \quad - (+) = -$$

$$+ \cdot + = +; \quad - \cdot - = +; \quad + \cdot - = -; \quad - \cdot + = -$$

7. Rechengesetze der Potenzierung [Radizierung].

a) Vertauschungsgesetz der Exponenten:

$$\alpha) \quad \left((a^m)^n\right)^p = \left((a^n)^p\right)^m.$$

$$\beta) \quad \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \left(\sqrt[p]{a}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

b) Gruppierungsgesetz der Exponenten:

$$\alpha) \quad \left((a^m)^n \right)^p = (a^{mn})^{pq}.$$

$$\beta) \quad \left(\sqrt[p]{\sqrt[q]{a^m}} \right)^q = (a^{mq})^{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q}}.$$

c) Verbindungsgesetz der Exponenten:

$$\alpha) \quad p^b + c + d + \dots = p^b \cdot p^c \cdot p^d \cdot p^e \dots$$

$$\beta) \quad \frac{a^c + \frac{a}{e} - \frac{f}{g} + h \dots}{b} = \left(\frac{a}{b} \right)^c \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{d}{e}} : \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{f}{g}} \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^h \dots$$

d) Verbindungsgesetz der Grundzahlen.

$$\alpha) \quad (a \cdot b \cdot c \cdot d \dots)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m \cdot d^m.$$

$$\beta) \quad a \cdot \frac{b}{c} \cdot d \cdot \frac{e}{f}^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \left(\frac{b}{c} \right)^{\frac{m}{n}} \cdot d^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{e}{f} \right)^{\frac{m}{n}}.$$

8. Die Logarithmen treten mit ihren Gesetzen aus dem Rahmen der Gesetze der übrigen Rechnungsarten heraus. Sie lassen sich der Potenzierung nicht so zur Seite stellen wie die Radizierung, oder wie das Teilen und das Messen dem Multiplizieren zur Seite steht.

§ 22. Lineare Gleichungen.

1. Eine Gleichung, die die Form $a = a$ hat, oder die sich in diese Form durch die Ausführung der darin vorgeschriebenen Rechnungen verwandeln läßt, heißt identisch oder analytisch. Geht eine Gleichung nur dann in eine identische über, wenn man einer oder mehreren der darin enthaltenen allgemeinen Größen gewisse Werte beilegt, so heißt sie eine Bestimmungsgleichung.

2. Eine Gleichung, die mehrere Unbekannte $x, y, \dots, z$ enthält, heißt eine Funktionsgleichung, denn du kannst in ihr allen Unbekannten bis auf eine beliebige Werte beilegen, d. h. sie als Argument betrachten; erst dadurch wird der Wert der letzten Unbekannten (z) bestimmt, diese also zur Funktion der anderen Unbekannten. Beispiele für derartige Gleichungen sind die von uns sog. Funktionsgesetze der Rechnungsarten.

3. Die Auflösung der Gleichungen folgt nach dem Gesetz:

Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man mit beiden Seiten gleiche Rechnungen vornimmt.

4. Ein Glied einer Gleichung isolieren heißt es als positives Glied auf eine Seite einer Gleichung allein stellen. Eine Gleichung heißt geordnet oder auf 0 gebracht, wenn sämtliche Glieder nach fallenden Potenzen der Unbekannten auf der einen Seite stehen. $ax + b = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$. Isoliert man das bekannte Glied, so erhält man die Normalform der Gleichung: $ax = b$; $ax^2 + bx = c$.

5. Die lineare Gleichung mit einer Unbekannten läßt sich auf die Form bringen $x = a$ und ist damit aufgelöst.

6. Eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten x, y ist eine Funktionsgleichung, die zu jedem beliebigen Werte der einen Unbekannten x einen und nur einen zugehörigen Wert der anderen Unbekannten y als Funktion hinzugebt.

Man kann aber die zunächst unbegrenzte Zahl der Lösungspaare x, y einer solchen Gleichung begrenzen, wenn man den Unbekannten gewisse Bedingungen auferlegt. Besteht die Bedingung darin, daß die Unbekannten x, y ganzzahlig sein sollen, so erhält man eine Diophantische Gleichung.

Bei 2, 3, 4, ... Gleichungen mit 3, 4, 5, ... Unbekannten stellt man sich nach den Methoden von 7. eine Gleichung mit zwei Unbekannten und damit eine diophantische Gleichung her.

7. Die Normalform eines Systemes von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten ist

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2.$$

Dadurch, daß zur ersten Gleichung eine zweite von ihr unabhängige und ihr nicht widersprechende Gleichung hinzutritt, wird die Aufgabe der Bestimmung der Unbekannten zu einer bestimmten; die Unbekannten werden einwertig bestimmt. Die Aufgabe wird auf 4. zurückgeführt dadurch, daß man aus den gegebenen Gleichungen eine Gleichung entwickelt, die die eine Unbekannte nicht mehr enthält (dadurch daß man diese eliminiert).

Eliminationsmethoden:

- a) Substitutions-, b) Komparations-, c) Multiplikations-, d) Bézoutsche Methode (Methode der unbestimmten Koeffizienten).

§ 23. Das Imaginäre; die signierte Zahl der zweiten Ordnung.

1. Aufgabe: Die signierte Zahl -4 soll in zwei gleiche Faktoren zerlegt werden. Ist ein Faktor x , so soll sein: $x^2 = -4$, also $x = \sqrt{-4}$. Die Aufgabe ist, wenn überhaupt, dann durch den absoluten Wert der Zahl 2 lösbar, denn dem absoluten Werte nach ist $2^2 = 4$. Die Ausführbarkeit scheitert aber an dem Vorzeichen ($+\cdot+ = -\cdot- = +$), an der Unverträglichkeit der Vorzeichen $\sqrt{}$ und $-$. Diese Unverträglichkeit, also die Unmöglichkeit eine negative Zahl in zwei gleiche Faktoren zu zerlegen, drückt man durch: $\sqrt{-}$ oder kürzer durch Γ oder i aus. Dann folgt aus $x^2 = -4$, $x = \Gamma 2 = i2$. Das Zeichen Γ kann man als neues (zusammengesetztes) Vorzeichen ansehen, das neben die bisherigen Vorzeichen $+$ und $-$ tritt. Eine mit diesem Zeichen versehene Zahl, also eine Zahl, deren Quadrat subtrahiert werden soll, deren Quadrat eine Negativzahl ist, heißt imaginär, eine Zahl, deren Quadrat addiert werden soll, heißt reell, und ein Binom, dessen eines Glied eine reelle, dessen zweites Glied eine imaginäre Zahl ist, heißt komplex.

Imaginäre Zahlen können $+$ und $-$ sein.

Die Gerade mit dem Punkt O dient uns jetzt auch zur Darstellung der imaginären Zahlen.

2. Aufgabe: Es soll die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ gezeichnet werden. Setzt man der Reihe nach

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$$

so ist

$$y = 5; 4,9; 4,6; 4; 3; 0; \Gamma 3,3; \Gamma 4,9; \Gamma 6,1; \dots$$

Stellt man die x als Punkte der Horizontalen dar, so sind die y die Werte der zugehörigen Lote. Diese liegen nach Pythagoras für $x = 0, \dots, 5$ auf einem Kreise und für $x \geq 5$ auf einer anderen Kurve, die man die gleichseitige Hyperbel nennt, deshalb muß man die gleichseitige Hyperbel die imaginäre Fortsetzung des Kreises nennen; ersetzt man den bisher signierten Wert von y durch den absoluten Wert, so nehmen die Gleichungen beider Kurven verschiedene Form an: Kreisgleichung $x^2 + |y|^2 = 25$, Hyperbelgleichung $x^2 + (\Gamma |y|)^2 = 25$ oder $+x^2 - |y|^2 = 25$. Daraus folgt dann wieder rückwärts, daß man, wenn

imaginäre y zugelassen werden, von der Gleichung $x^2 - y^2 = 25$ ausgehend, den Kreis die imaginäre Fortsetzung der gleichseitigen Hyperbel nennen muß. Denn in dieser Gleichung ist y reell, wenn $x \geq 5$ ist, imaginär, wenn $x \leq 5$ ist. Versteht man also jetzt unter $|y|$ wieder den absoluten Wert, so ist die Hyperbelgleichung $x^2 - |y^2| = 25$ und die Kreisgleichung $x^2 - (\Gamma|y|)^2 = 25$ oder $x^2 + |y^2| = 25$. Eine Zahl ist also nicht an sich, sondern nur durch ihre Beziehung auf eine andere Zahl imaginär; sie läßt sich also durch Veränderung der Aufgabe reell machen; dann aber werden die bisherigen reellen Zahlen imaginär. Die Begriffe reell und imaginär sind also ebenso wie rational und irrational (§ 17, 4), positiv und negativ (§ 18, 3) relative Begriffe.

3. Die Einheit ist an sich so wenig imaginär oder reell, wie sie positiv oder negativ ist, sondern erst der Rechnungszusammenhang macht ihre Maßzahl dazu, d. h. zu einer Zahl, die subtrahiert oder addiert werden soll oder deren Quadrat addiert oder subtrahiert werden soll.

§ 24. Quadratische Gleichungen.

1. Die Aufgabe $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen: $x_1 = +2$, $x_2 = -2$. Dasselbe gilt für jede rein quadratische Gleichung, x heißt dann eine zweiwertige Zahl. Allgemein läßt sich zeigen, daß das x der Gleichung $x^n = a$ n wertig ist (Moivres Satz).

2. Die rein quadratische Gleichung.

Aufgabe: Ein Quadrat mißt a qem; wie groß ist seine Grundseite?

Aus $x^2 = a$ folgt $x = \pm \sqrt{a}$. Die rein quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, die denselben absoluten Betrag, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben.

3. Die gemischt quadratische Gleichung.

Die allgemeine Form der gemischt quadratischen Gleichung ist:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Um sie aufzulösen, verwandelst du (durch Multiplikation oder Division mit a) das erste Glied in ein vollständiges Quadrat

und erhältst: $(ax)^2 + b \cdot ax + ca = 0$. Setzt man hierin $ax = x'$, so erhält man $x'^2 + bx' + ca = 0$, d. h. wir können als allgemeine Form der quadratischen Gleichung annehmen:

$$x^2 + ax + b = 0.$$

4. Lösungsmethoden der gemischt quadratischen Gleichung.

a) Methode der quadratischen Ergänzung.

Aufgabe: Welches sind die Wurzeln der Gleichung $x^2 - 8x + 12 = 0$? Du bringst die Gleichung auf die Normalform und ergänzest die x -Glieder zu einem vollen Quadrate:

$$(x^2 - 8x + 4^2) = 16 - 12; \quad (x - 4)^2 = 4;$$

$$x - 4 = \pm 2; \quad x_1 = 6; \quad x_2 = 2.$$

b) Zerlegungsmethode. Du suchst die linke Seite der Gleichung in das Produkt zweier linearer Faktoren zu zerlegen. Die geordnete Gleichung heißt:

$$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

α) Da $12 = 6 \cdot 2$, $8 = 6 + 2$ ist, so ist: $(x - 6)(x - 2) = 0$. Ist aber ein Produkt 0, so ist einer seiner Faktoren 0. Also ist $x_1 = 6$, $x_2 = 2$.

β) Ergänzest du die x -Glieder zum Quadrat, so ist

$$(x - 4)^2 - 16 + 12 = 0; \quad (x - 4)^2 - 2^2 = 0;$$

$$(x - 4 + 2)(x - 4 - 2) = 0; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 6.$$

c) Geometrische Methode. Aufgabe: Die Summe zweier benachbarter Rechtecksseiten sei s (8) cm, der Inhalt i (12) qcm. Wie groß sind die Seiten? Aus $x + y = s$, $xy = i$ folgt: $x(s - x) = i$. Für die geometrische Lösung muß das absolute Glied isoliert werden. i als Fläche muß als Quadrat oder Rechteck gegeben sein; also entweder in der Form $i = \sqrt{i}^2$ oder in der Form $i = i_1 \cdot i_2$. Im zweiten (allgemeinen) Falle hast du eine Gleichung zwischen zwei Streckenprodukten. Die Faktoren des einen x , $s - x$, sind dann Abschnitte der einen und die Faktoren des zweiten i_1, i_2 Abschnitte der zweiten von zwei sich schneidenden Sehnen. Diese selbst sind, je nachdem sie sich innerhalb oder außerhalb des Kreises schneiden, gleich der Summe oder gleich der Differenz der Abschnitte. Da die Sehnen bekannt sein müssen und in unserer Aufgabe die Faktorensummen $x + s - x = s$; $i_1 + i_2$ bekannt sind, so hast du den Sehnenschnittpunkt

in den Kreis zu legen. Der Bequemlichkeit wegen machst du s zum Durchmesser trügst $i_1 + i_2$ als Sehne in den erhaltenen Kreis ein und ziehst durch den Teilpunkt der Sehne $i_1 + i_2$ den Durchmesser. Einer von dessen beiden Abschnitten ist x .

Folgt aus der Aufgabe die quadratische Gleichung $x^2 - ax - bc = 0$, so schreibst du $x(x - a) = bc$. Die Sehnenabschnitte x , $x - a$, b , c müssen äußere werden, damit die Sehnen (a und $b - c$) bekannt sind. Kreisdurchmesser a , Sehne $b - c$. Absolute Lösung: der große Sehnenabschnitt; signierte Lösungen: der große Sehnenabschnitt ist die positive, der kleine die negative Lösung.

Ganz analog ist die Lösung der Gleichung $x^2 + ax - bc = 0$; aus der Gleichung $x(x + a) = bc$ folgt, daß der kleine Sehnenabschnitt die absolute und zugleich die positive Lösung, der große die negative Lösung gibt.

Die Gleichung $x^2 + ax + bc = 0$ ist, da die Summe dreier Rechtecke nicht Null sein kann, geometrisch nur dann lösbar, wenn man auch signierte Flächen und eventuell imaginäre Strecken zuläßt.

d) Trigonometrische Lösungsmethode. Aufgabe: Von einem Dreieck sind gegeben die Summen zweier Seiten ($a + b$), die Höhe auf die dritte Seite (h_c) und deren Gegenwinkel (γ). Wie groß die übrigen Winkel? — Bilde:

$$\frac{a+b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{h_c} = \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\sin \beta} = \frac{2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2}}{\cos^2 \frac{\delta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}}.$$

Isoliere das lineare Glied:

$$\cos^2 \frac{\delta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{2h_c \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2}}{a+b}.$$

Adaptiere für logarithmische Rechnung, indem du eines der beiden Aggregatenglieder ausklammerst (am vorteilhaftesten das bekannte Glied):

$$\frac{\cos^2 \frac{\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} - 1 = \frac{2h_c \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2}}{(a+b) \sin^2 \frac{\gamma}{2}}.$$

Setze:

$$\cos^2 \frac{\delta}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}$$

Dann ist:

ctg

Da $\text{ctg } \eta > 0$, so

Lösungswinkel

$90^\circ + \frac{\eta'}{2}$. Ist $\frac{\delta''}{2}$

$\sin \frac{\gamma}{2}$. Der zwe

geben: $\cos \frac{\delta''}{2} =$

$= \text{tg } \frac{\eta'}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$;

δ'' im dritten

oder dritten

der zweite

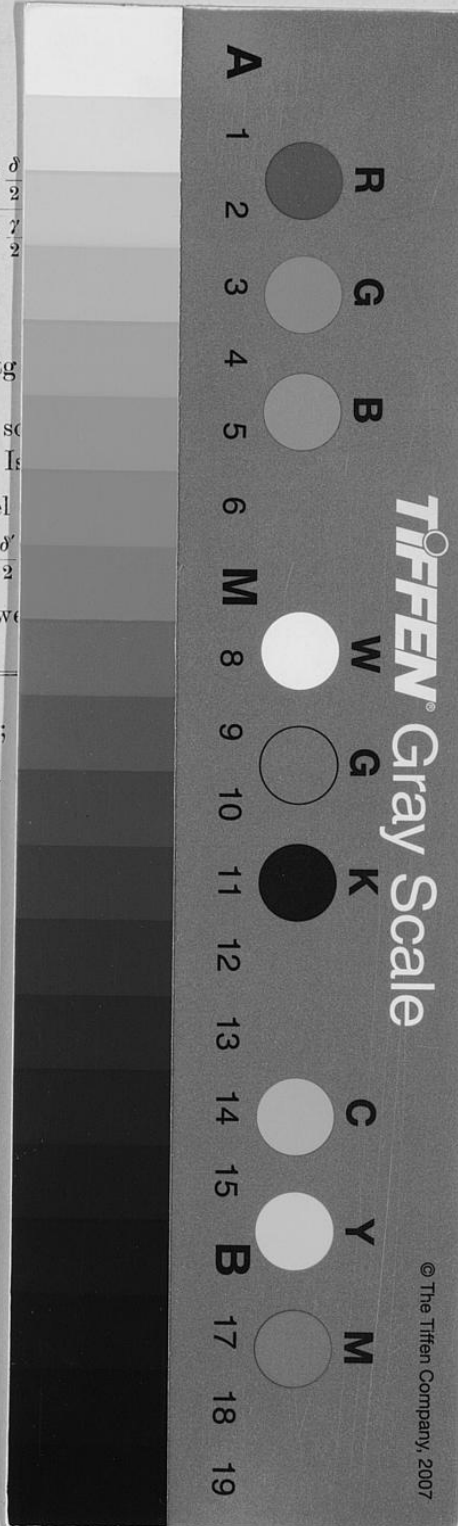
sind $\frac{\eta'}{2}$ und

$\frac{\delta''}{2} = \text{ctg } \frac{\eta'}{2}$

gleichung ge-

$(180 - \frac{\delta''}{2})$

im zweiten,



© The Tiffen Company, 2007

Setze:

$$\frac{\cos^2 \frac{\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\eta}{2}; \text{ also } \cos \frac{\delta}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Dann ist:

$$\operatorname{ctg} \eta = \frac{h_c \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{a+b} \text{ und } \cos \frac{\delta}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Da $\operatorname{ctg} \eta > 0$, so ist η entweder ein Winkel im ersten oder dritten Quadranten. Ist η' der spitze Lösungswinkel, so ist der zweite Lösungswinkel $180 + \eta'$. Die beiden Werte für $\frac{\eta}{2}$ sind $\frac{\eta'}{2}$ und $90^\circ + \frac{\eta'}{2}$. Ist $\frac{\delta'}{2}$ der spitze Lösungswinkel $\frac{\delta}{2}$, so ist $\cos \frac{\delta'}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\eta'}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$. Der zweite Lösungswinkel δ'' ist durch die Gleichung gegeben: $\cos \frac{\delta''}{2} = \operatorname{ctg} \frac{90 + \eta'}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = -\operatorname{tg} \frac{\eta'}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$; $\cos \left(180 - \frac{\delta''}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{\eta'}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$; also liegt $180 - \frac{\delta''}{2}$ im ersten und $\frac{\delta''}{2}$ im zweiten, δ'' im dritten oder vierten Quadranten.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.