

ENTWURF EINES
ARITHMETISCHEN LEHRGANGES
FÜR HÖHERE SCHULEN

TEIL I

VON

DR. FRIEDRICH HAACKE

OBERLEHRER

BEILAGE ZUM PROGRAMM
DES KÖNIGL. GYMNASIUMS ZU WOHLAU
OSTERN 1904



DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG
1904

Progr.-Nr. 252.

9w0
7.
(1904)

252.



Einleitung.

Der vorliegende Entwurf weicht in vielen Punkten von den mir bekannten Darstellungen der elementaren Arithmetik und Algebra ab; sind diese Abweichungen zugleich Verbesserungen, so ist damit die Berechtigungsfrage des Entwurfes entschieden.

Die Lehrpläne verlangen, daß der Rechenunterricht „mit dem darauf folgenden arithmetischen Unterricht im Einklang stehe und diesen vorzubereiten und zu unterstützen“ habe. Die dadurch hervorgerufene Arithmetisierung des Rechenunterrichts hat ihn von der Stufe des rein technischen Könnens auf die des begründeten Wissens gehoben. Man kann und muß aber auch dem arithmetischen Unterrichte die Aufgabe stellen von der Methodik des Rechenunterrichts nicht ohne Grund abzuweichen, er muß gleich dem Rechenunterricht möglichst anschaulich bleiben und die abstrakten Zahlenbetrachtungen müssen sich immer wieder den „Dingen“ zukehren und von ihnen Leben und Kraft gewinnen. Deshalb muß die Wortgleichung ein Hauptziel des arithmetischen Unterrichts sein. Die Fertigkeit in der Lösung angesetzter Gleichungen braucht im allgemeinen nur soweit zu reichen, als es die möglichen geometrischen und sonstigen Anwendungen verlangen. Vor allem darf der Unterricht niemals die Wahrheit aus dem Auge verlieren, daß die Umformung arithmetischer Ausdrücke, die früher zum Teil zu einer wahren arithmetischen Akrobatenkunst gesteigert wurde, den Schüler nur zur Lösung von Gleichungen befähigen soll. Deshalb müssen die arithmetischen Aufgaben so bald als möglich den algebraischen Platz machen. Auch in der Algebra ist der bildende Wert des Rechnens mit allgemeinen Zahlzeichen häufig überschätzt worden; ich glaube, daß wir in der Mathematik Wich-

tigeres zu tun haben als umfangreiche Buchstabengleichungen lösen zu lassen.

Die Arithmetik muß auf die Größenlehre als ihr anschauliches Fundament gegründet werden. Der Schüler darf nie vergessen, daß Zahlen zählbare Dinge, also Größen voraussetzen und daß die Arithmetik nicht von diesen überhaupt, sondern nur von ihrer speziellen Artung absieht, daß sie die Gesetze aufstellt, die für die Rechnung mit jeglicher Art von Größen gelten. Die Bewahrheitung der arithmetischen Gesetze muß also an irgend einer Größengattung erfolgen und da die Raumgrößen sich als die einfachsten diesem Zweck am besten fügen, so ist hiermit der Grund zu einer möglichst engen Verbindung zwischen der Zahlen- und der Raumlehre gelegt.

Nicht bloß der Unterricht und die Wissenschaft entwickeln sich an typischen Beispielen, sondern auch das Lehrbuch gewinnt an Lebendigkeit, Anschaulichkeit und Brauchbarkeit, wenn es auf solchen Problemen fußt. Die vorliegende Darstellung hat davon zum Teil aus Mangel an Raum noch absehen müssen.

Jede Rechnungsart hat selbständige Bedeutung, aus ihr ergibt sich erst die Gliederung der Rechnungsarten in direkte und indirekte und ihr Aufbau in drei Stufen. Deshalb stelle man die Rechnungsarten derselben Stufe unabhängig nebeneinander. Dann entsprechen den Rechnungsarten der zweiten Stufe genau die der dritten Stufe: Multiplizieren—Potenzieren, Teilen—Radizieren, Messen—Logarithmieren. Die einfacheren Verhältnisse der zweiten Stufe werden dadurch eine willkommene Hilfe für das Verständnis der komplizierteren Verhältnisse auf der dritten. Wenn man aber, unter vorzeitiger Verwendung des Vertauschungsgesetzes, der Multiplikation nur eine Umkehrung, die Division, zubilligt, so verwischt sich dieser Zusammenhang und zugleich verliert sie ihre anschauliche und selbständige Bedeutung. Für den klar denkenden Schüler darf es doch keine Division schlechtweg geben, sondern immer entweder ein Teilen oder ein Messen. Dagegen erscheint es mir angebracht, die beiden Rechnungsarten der ersten Stufe durch den Begriff des Aggregierens zu vereinigen.

Im Interesse des eindringenden Verständnisses scheint es

mir zu liegen auch die Beweise der Gesetze möglichst direkt von der selbständigen Bedeutung jeder Rechnungsart herzunehmen und dadurch auch hier dem Formalismus entgegenzuarbeiten, der, wie mir scheint, dadurch entsteht, daß man die Richtigkeit der Divisionsgesetze nicht auf die Begriffe des Teilens und des Messens, sondern auf den Begriff der Multiplikation und ebenso die Wurzel- und Logarithmengesetze statt auf den Begriff der Faktorenzerlegung auf den der Potenzierung begründet.

Möglichst früh muß der Funktionsbegriff zum Leitmotiv werden. Er muß davon überzeugen, daß die Größen und ihre Maßzahlen nicht starr zu sein brauchen, sondern gesetzmäßig veränderlich sein können, er muß das arithmetische Material aus toter Starrheit zum vollen Leben wecken.

Die Kraft der Beweise verliert an Strenge nichts, wenn man sie statt an den allgemeinen, an bestimmten Zahlen führt. Die Wahrheit des Vertauschungsgesetzes der Multiplikation wird an der Gleichung $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ so gut wie an der Gleichung $a \cdot b = b \cdot a$ nachgewiesen. Durch den Beweis an bestimmten Zahlzeichen wird dem Schüler, abgesehen von der größeren Bestimmtheit, die ja im Wesen dieser Zahlen liegt, viel klarer bewußt bleiben, in welchem Umfange das Gesetz bewiesen ist, daß ihm die Beweislast für $-5 \cdot -3$ z. B. noch obliegt. Das hindert natürlich nicht, daß der Beweis auch mit allgemeinen Zahlzeichen geführt werden kann. Notwendig scheint es mir nicht zu sein.

Es kommt darauf an, daß möglichst viel direkt und anschaulich eingesehen wird; deshalb habe ich zwei Rechenprinzipien aufgestellt, deren Richtigkeit dem Schüler m. E. unmittelbar einleuchten muß, also nicht bewiesen werden braucht.

Die Erweiterungen der Rechnungsarten werden meist an verschiedene Regeln angeknüpft, deren Gültigkeitsbereich durch die fragliche Erweiterung ausgedehnt werden soll; so leitet man die Bedeutung von a^1 , a^0 , a^{-p} aus der Regel $a^m : a^n = a^{m-n}$ und die Bedeutung von $\sqrt[m]{a^n}$ aus der Regel $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^m}$ ab, während doch umgekehrt aus der erweiterten Definition die Allgemeingültigkeit jener Rechenregeln erst folgen sollte.

Das gewöhnliche Verfahren verschleiert die wahre Sachlage außerdem auch dadurch, daß man die Gründe für die einheitliche Erweiterung eines einheitlichen Begriffes von verschiedenen Quellen ableitet, statt auch in der Begründung die Einheitlichkeit zu ihrem Rechte kommen zu lassen. Die gebräuchliche Darstellung überzeugt den Schüler erst nachträglich von der Zweckmäßigkeit der Erweiterung des ursprünglichen engen Begriffes dadurch, daß für sämtliche Definitionen dieselben Gesetze gelten, während doch umgekehrt die Gültigkeit derselben Gesetze aus der einheitlich begründeten Erweiterung der Definition folgen sollte. Es darf eben die Erweiterung nicht „zweckmäßig“, sondern sie muß „notwendig“ sein. Jede Rechnungsart bedeutet eine besondere Art, innerhalb der Zahlenreihe fortzuschreiten, zu zählen. Das Gesetz, das die Art des Fortschreitens, also die Zählungsweise bestimmt, nenne ich das Funktionsgesetz. Es setzt die Abhängigkeit des Ergebnisses (Funktion) von der aktiven Zahl (Argument) fest. Der einheitliche Grund für die allgemeinen Definitionen der Rechnungsarten liegt also in der Zählungsweise, die das jeweilige Funktionsgesetz vorschreibt, die Multiplikation wird zu einer arithmetischen und die Potenzierung zu einer geometrischen Reihe, wie denn auch das gemeine Rechnen die Multiplikation auf die Einmaleinsreihen stützt. So wird das Funktionsgesetz für jede Rechnungsart maßgebend, auf dieses Gesetz allein muß die allgemeine Definition basiert werden. Ein wichtiges Anschauungsmittel für die Erkenntnis dieser funktionellen Abhängigkeit ist die graphische Darstellung, die dem Schüler die Notwendigkeit der Definitionserweiterung buchstäblich vor Augen führt. Auch die Bedeutung des Interpolierens als Näherungsrechnung wird dadurch völlig klargelegt.

Der Begriff des Negativen ist so schwer, daß es mir richtig scheint, den Schüler erst spät damit bekannt zu machen. So leicht es ist, ihm das Rechnen mit negativen Zahlen zu lehren, so schwer ist es ihm eine klare Vorstellung oder gar Anschauung davon zu vermitteln. Unsere Aufgabensammlungen nehmen darauf noch wenig Rücksicht. Ich kenne keine, die ihr Gleichungsmaterial daraufhin anordnet. Und doch könnte man nicht bloß verlangen, daß die dem Untertertianer vor-

gelegten Gleichungen zu absoluten Resultaten führten, sondern daß auch die Probe in absoluten Zahlen möglich sei. Vielleicht ist nichts so sehr geeignet, zu arithmetischem Formalismus zu führen (und der ist schlimmer als Rechenformalismus), wie das vorzeitige Rechnen mit negativen Zahlen, gerade weil das Schema so sehr leicht auch für den größten Dummkopf zu erlernen ist. Ich habe mich in der Lehre vom Negativen und vom Imaginären an Dühring gehalten, was meines Wissens für die Schule zum ersten Male geschieht. Die Unhaltbarkeit vieler der gebräuchlichen Darstellungen des Negativen ergibt sich am besten, wenn man versucht sie aus dem Gebiete des rein Zahlenmäßigen in das Gebiet der Größen überzuführen. Dann stimmt die Sache nicht mehr.

Die Zahl der Rechengesetze ist möglichst einzuschränken. Die Erkenntnis ihrer Wiederkehr auf den verschiedenen Stufen kann durch charakteristische Namengebung gefördert und auch äußerlich markiert werden. Eine wesentliche Vereinfachung erhält man dadurch, daß man aus der Größenlehre die Tatsache in die Zahlenlehre übernimmt, daß die sog. Faktorenvertauschung nur eine Multiplikatorenvertauschung ist und daß der Multiplikand 1, die unbenannte Einheit, nicht mit vertauschbar ist. Dadurch erhält man die Möglichkeit, für die vier Rechnungsarten der ersten und zweiten Stufe (Aggregieren, Multiplizieren, Teilen, Messen) mit denselben drei Gesetzen, dem Vertauschungs-, Gruppierungs- und Verbindungsgesetze auszukommen. Die beiden ersten Gesetze regeln das Operieren innerhalb derselben Stufe, und das dritte Gesetz vermittelt den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Stufen. Aus den „Gesetzen“ folgen dann leicht die „Regeln“ z. B. bei der Bruchrechnung. Ich habe versucht auch die Potenz- und Wurzelregeln diesen drei Gesetzen unterzuordnen.

Den Begriff der Teilbarkeit habe ich als Grundbegriff aufgefaßt und seine Einführung nicht erst der Division vorbehalten.

Bei der von mir gewählten Stoffanordnung vollzieht sich zunächst das Rechnen mit absoluten ganzen Zahlen auf dem ganzen Gebiete, daran habe ich die Erweiterungen angeschlossen, die das Rechnen mit Brüchen, Irrationalzahlen und

mit signierten Zahlen zur Folge hat. Der ganze Aufbau scheint mir dadurch an Übersichtlichkeit und Klarheit zu gewinnen.

Ein klares Verständnis des Wesens des Unbeschränkt-kleinen und Unbeschränktgroßen und des Grenzbegriffes ist weder in der Planimetrie (Kreisberechnung) noch in der Stereometrie (Körperberechnung) noch in der Physik, ja vielleicht auf keinem mathematischen Gebiete zu entbehren; überall muß der Schüler mit diesen Begriffen umzugehen wissen. Weshalb bleibt man nun immer noch auf halbem Wege stehen und tut nicht den letzten fast selbstverständlichen Schritt, weshalb macht man den Schüler auch des Gymnasiums nicht mit den Elementen der Infinitesimalrechnung und mit ihren einfachsten Anwendungen bei der Bestimmung der Grenzwerte der Funktionen, der Lehre von den Tangenten, der Ausmittlung unbestimmter Ausdrücke u. a. bekannt? Bleibt man wirklich bei den Elementen stehen, so mutet man damit dem Schüler keine prinzipiellen Schwierigkeiten weiter zu, dafür aber eröffnet man ihm einen Einblick in eine der fruchtbarsten Methoden, die der rechnende Geist jemals ersonnen hat. Führe ich zu Gunsten der Einführung der Infinitesimalrechnung in den Gymnasiallehrplan noch den Umstand an, daß man mit Erfolg das Verständnis ihrer Grundlehren jedem Feldmesser zumutet, der bisher mit Primanerbildung das Gymnasium verließ, daß jeder Techniker, Baumeister, ja jeder Arzt, vielleicht jeder, der später in irgendwelche Beziehungen zum „modernen“ Leben tritt, ihre Lehren nicht entbehren kann, so glaube ich trotzdem vor dem Vorwurfe sicher zu sein, ihre Einführung in den Unterrichtsbetrieb nur aus praktischen Gründen zu befürworten. Aus Bildungsgründen und aus praktischen Erwägungen scheint mir ihre Aufnahme in den Lehrplan in kürzerer oder späterer Zukunft als wirklicher Abschluß der elementaren Mathematik notwendig zu sein. Es gibt wohl kaum ein Gebiet der Schulmathematik, abgesehen von der Trigonometrie, wo ein geringfügiger theoretischer Aufwand einen derartigen Zuwachs von Können und Wissensmacht im Gefolge hat. Man bedenke mit wie geringer Mühe und entsprechendem Zeitaufwande dann z. B. eine einwandfreie Ableitung der Körper- und Flächenberechnungen zu haben ist. Mutet man nach der jetzigen Methode dem Primaner die unbesehene Hinnahme des Cavalie-

rischen Satzes nicht zu, so wird die Körperberechnung eben doch eine Differentiation und Integration. Erwägt man ferner, auf welche solide Grundlage die Betrachtungen der analytischen Geometrie und der Mechanik gestellt werden, so muß man m. E. zu dem Schlusse kommen: Die Einführung der Infinitesimalrechnung in den Lehrplan erleichtert und konzentriert das Primanerpensum und gibt ihm den krönenden Abschluß. Mag man dafür, wenn es nicht anders geht, die Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitslehre wieder fallen lassen, deren Lehren gewiß interessant und wichtig sind, aber aus dem Rahmen des sonstigen arithmetischen Pensums herausfallen. Ich setze allerdings auch hier voraus, daß das Integral nicht als rein formale Umkehrung des Differentiales, sondern direkt als Grenzwert einer Summe vom Elementarsummanden d. h. als bestimmtes Integral eingeführt wird.

Die Darstellungsform des nun folgenden Entwurfes ist im Interesse möglicher Kürze sehr viel abstrakter gehalten, als ich es in einem für die Hand des Schülers bestimmten Leitfadens für richtig halten würde.

§ 1. Erklärungen.

1. Zwei Größen oder Zahlen heißen gleich, wenn die eine für die andere, ungleich, wenn die eine für einen Teil der andern gesetzt werden kann. Das Urteil, daß zwei Größen oder Zahlen ^{gleich} ^{ungleich} sind, heißt eine Gleichung ^{Ungleichung}.

2. Die Zeichen, die angeben, wie aus zwei oder mehreren Größen oder Zahlen eine neue gebildet werden soll, heißen Rechnungszeichen; eine Verbindung mehrerer Größen oder Zahlen durch Rechnungszeichen heißt ein Ausdruck. Die Reihenfolge des Rechnens entspricht der des Lesens, geht also von links nach rechts. Soll mit oder an einem Ausdruck weiter gerechnet werden, so ist er in Klammern einzuschließen (doch s. § 4). Jeder Ausdruck kann doppelt aufgefaßt werden: 1) als Aufgabe, formeller Ausdruck; 2) als die durch Ausführung der Rechnungen gewonnene Zahl, Wert des Ausdrucks.

3. Eine Größe oder Zahl, die nur einen bestimmten Wert hat, heißt konstant, eine Größe oder Zahl, die beliebig viele Werte annehmen darf, heißt veränderlich oder variabel.

4. Eine Funktion f der Größen oder Zahlen x, y, z ist eine Größe oder Zahl, die mit $x, y, z, \dots$ sachlich oder rechnerisch so verknüpft ist, daß zu jeder bestimmten Wertgruppe $x_1, y_1, z_1, \dots$ dieser Größen oder Zahlen ein oder mehrere Werte von f gehören. Diese heißen Argumente der Funktion oder die unabhängigen Veränderlichen, während die Funktion auch abhängige Veränderliche heißt (Jahreszahl und Bewohnerzahl einer Stadt, Datum und Tageslänge, Temperatur und Spannkraft eines Dampfes).

5. Eine Zahl y heißt eine mathematische Funktion einer andern Zahl x , wenn beide durch eine Gleichung ($y=f(x)$; $f(xy)=0$) miteinander verbunden sind, so daß zu jedem bestimmten Werte der zweiten Zahl (x) ein oder mehrere bestimmte Werte der ersten Zahl (y) gehören.

6. Zur Veranschaulichung einer Funktionsabhängigkeit ersetzt man die (beliebige) Einheit gewöhnlich durch die einfachste, also durch die Streckeneinheit (cm, mm etc.), zeichnet die Argumentenwerte 0, 1, 2, ... auf einem horizontalen nach rechts gerichteten Strahl OX (der Abscissenachse) und die zugehörigen Funktionswerte als zugeordnete Lote (Ordinaten). Graphische Darstellung. Das Abscissen- und das Ordinatenmaß kann verschieden sein.

7. Diejenige Größe oder Zahl, an der man rechnet, heißt passive Zahl (p) und steht voran, diejenige Zahl, mit der man rechnet, heißt aktive Zahl (a) und steht dahinter.

8. Man unterscheidet die Größenlehre von der Lehre von den Zahlen, der Arithmetik; derjenige Teil der Arithmetik, der von den Gleichungen handelt, heißt Algebra.

9. Eine unbegrenzt große Größe oder Zahl soll durch A , eine unbegrenzt kleine Zahl durch v bezeichnet werden.

§ 2. Grundeigenschaften der Größen und Zahlen.

1. Man unterscheidet mathematische (gedachte) und reale (wirkliche) Größen.

2. Alle wirklichen Größen (Himmelskörper; Atome des Weltalls) sind in bestimmter, begrenzter Anzahl vorhanden (Gesetz der bestimmten Anzahl); alle mathematischen Größen sind in unbegrenzter Anzahl vorhanden; denn man kann sich zu der tatsächlichen (begrenzten) Anzahl z. B. der Himmelskörper, mag dieselbe auch über alle Vorstellung groß sein, immer noch beliebig viele hinzudenken. Also ist auch die abstrakte (gedachte) Zahlenreihe unbegrenzt, während jede reale Zahlenreihe begrenzt ist.

3. Jede physische Größe ist nur in eine bestimmte, begrenzte Anzahl von Teilen teilbar, die man Individuen, Moleküle, Atome etc. nennt; jede mathematische Größe ist beliebig

teilbar. Man kann z. B. jedes Atom, mag dasselbe auch über alle Vorstellung klein sein, sich noch weiter geteilt denken. Wie weit man aber auch die Teilung weiter geführt denkt, so wird man immer eine bestimmte, wenn auch noch so kleine Größe übrig behalten, sich aber andererseits dem Nichts, der Ungröße, der Null beliebig nähern können, ohne sie aber jemals zu erreichen: für das Unbeschränktkleine ist die untere Grenze Null.

§ 3. Die Grunddefinitionen der acht Rechnungsarten, ihr Gültigkeitsbereich und ihre Funktionsgesetze.

1. Ist eine Verwechslung zwischen Zahlen und Größen möglich, so sollen die Größen durch einen horizontalen Strich ($\bar{a}, \bar{b}, \dots$) von den Zahlen ($a, b, \dots$) unterschieden werden. Die Größeneinheit soll durch $\bar{e}$ oder $\bar{1}$ bezeichnet werden.

2. Das Funktionsgesetz einer Rechnungsart gibt an, wie sich das Resultat r (Funktion) mit der aktiven (a) Größe oder Zahl ändert.

3. Die Größe $\bar{a}$ zur Größe $\bar{p}$ addieren heißt: Die Größe $\bar{r}$ suchen, deren Teile $\bar{p}$ und $\bar{a}$ sind (heißt: $\bar{a}$ und $\bar{p}$ zu einer Größe $\bar{r}$ vereinigen, zusammenfassen). $\bar{p} + \bar{a} = \bar{r}$. Augend $\bar{p}$, Addend $\bar{a}$, Summanden ($\bar{p}, \bar{a}$), Summe ($\bar{r}$). Es lassen sich auch Summen mit mehreren Addenden bilden.

4. Die Größe $\bar{a}$ von der Größe $\bar{p}$ subtrahieren heißt: Die Größe $\bar{r}$ suchen, die der eine Teil von $\bar{p}$ ist, wenn der andere Teil $\bar{a}$ ist (heißt: $\bar{a}$ von $\bar{p}$ abtrennen, abziehen): $\bar{p} - \bar{a} = \bar{r}$. Minuend $\bar{p}$, Subtrahend $\bar{a}$, Differenz ($\bar{r}$). Es lassen sich auch Differenzen mit mehreren Subtrahenden bilden.

Die Subtraktion ist nur ausführbar, wenn der Minuend größer ist als die Gesamtheit der Subtrahenden. Sonst bleibt eine Größe übrig, die da fortgenommen werden soll, wo nichts mehr existiert, von dem fortgenommen werden könnte.

5. Zahlen $p, a_1, a_2, a_3, \dots$ addieren heißt eine Zahl r suchen, die die Gesamtheit der Einheiten jener Zahlen enthält (Addieren heißt „vorwärts“ zählen). $p + a_1 + a_2 + \dots = r$.

Die Zahl a von der Zahl p subtrahieren heißt die Zahl r suchen, die a Einheiten weniger als p enthält (Subtrahieren

heißt „rückwärts“ zählen). Ist $a = p$, so nennt man das Resultat, obgleich es „Nichts“ ist, trotzdem Zahl: Null.

$p - a = r$ bedeutet auch $r + a = p$.

Subtraktionsprobe: Differenz + Subtrahend = Minuend.

6. Größen oder Zahlen $a, b, c, \dots$ aggregieren heißt sie durch Addition oder Subtraktion verbinden. $a + b - c - d + e = r$ Glieder ($a, b, c, d, \dots$), Aggregat (Binom, Trinom, Polynom) (r).

Ein Glied eines Polynoms, das ^{addiert} subtrahiert werden soll, heißt positiv (addiert).
negativ (subtrahiert).

Funktionsgesetz des Aggregierens. Nimmt ein positives Glied eines Größenaggregates um $\bar{i}$ zu, so nimmt das negatives Glied um $\bar{i}$ ^{zu} ab. Ist $\bar{p} \pm \bar{x} = \bar{y}$, so ist $\bar{p} \pm (\bar{x} + \bar{i}) = \bar{y} + \bar{i}$.

Nimmt ein ^{positives} negatives Glied eines Zahlenaggregates um 1 zu, so nimmt das Aggregat um 1 ^{zu} ab. Ist $p \pm x = y$, so ist $p \pm (x + 1) = y \pm 1$.

7. Die Größe $\bar{p}$ mit der Zahl a multiplizieren oder vervielfältigen heißt die Summe $\bar{r}$ aus a gleichen Summanden $\bar{p}$ bilden. $\bar{p} \cdot a = \frac{1}{\bar{p}} + \dots + \frac{a}{\bar{p}} = \bar{r}$. Multiplikand ($\bar{p}$), Multiplikator (a), Produkt ($\bar{r}$). Es lassen sich auch Produkte mit mehreren Multiplikatoren bilden: $\bar{p} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots = \bar{r}$. Die Multiplikation ist nur dann ausführbar, wenn der Multiplikator ganzzahlig und mindestens gleich 2 ist.

Will man in dem Zahlenprodukte $p \cdot a$ hervorheben, daß nur a eine reine Anzahl, p die p -fache Einheit bedeutet, so schreibt man: $p \cdot a = \bar{1} \cdot p \cdot a$. Dadurch wird p zum Multiplikator. Die zwei Multiplikatoren p, a nennt man auch Faktoren.

Funktionsgesetz der Multiplikation. Nimmt der Multiplikator um 1 zu, so nimmt das Produkt um den Multiplikanden zu; das Produkt ändert sich also gleichförmig, wenn der Multiplikator sich gleichförmig ändert. Ist $p \cdot x = y$, so ist $p(x \pm 1) = y \pm p$.

Bei der graphischen Darstellung, die mit der Abszisse 2 beginnt, bilden also die Produktpunkte Punkte einer Geraden, deren Verlängerung durch O geht.

8. Die Größe $\bar{p}$ durch die Zahl a teilen, heißt sie in a gleiche Summanden $\bar{r}$ zerlegen. $\frac{\bar{p}}{a} = \bar{r}$ oder $\bar{p}/a = \bar{r}$ bedeutet also auch $\frac{1}{\bar{r}} + \dots + \frac{a}{\bar{r}} = \bar{p}$ oder $\bar{r} \cdot a = \bar{p}$. Dividend ($\bar{p}$), Divisor a , Quotient $\bar{r}$. Divisionsprobe: Quotient $\cdot$ Divisor = Dividend. Es lassen sich auch Quotienten mit mehreren Divisoren bilden: $\bar{p}/a_1/a_2/\dots = \bar{r}$. Das Teilen ist nur ausführbar, wenn der Divisor ganzzahlig und mindestens 2 ist.

Funktionsgesetz des Teilens. Nimmt der Divisor zu, so nimmt der Quotient ab, aber seine Abnahme wird bei gleichmäßigem Wachstum des Divisors immer schwächer. Ist $\frac{\bar{p}}{x} = \bar{y}$, so ist $\frac{\bar{p}}{x+1} < \bar{y}$ und $\frac{\bar{p}}{x} - \frac{p}{x+1} < \frac{\bar{p}}{x-1} - \frac{\bar{p}}{x}$. Ver- n -facht sich der Divisor, so sinkt der Quotient auf den n ten Teil. Ist $\frac{\bar{p}}{x} = \bar{y}$, so ist $\frac{\bar{p}}{nx} = \frac{\bar{y}}{n}$.

In der graphischen Darstellung liegen die Quotientenpunkte auf einer Kurve, die mit der Abscisse 2 beginnend, sich der Abscissenachse immer mehr annähert, ohne sie jemals zu erreichen.

Ist in dem Zahlenquotienten $\frac{p}{a}$ p kein Vielfaches von a , so teilt man zur Berechnung die Einheit in a gleiche Teile und setzt einen dieser Teile p mal. Auch bei dieser Ausführung sind nämlich a gleiche Teile r vorhanden, deren Summe p beträgt. Der a te Teil der Einheit $\frac{1}{a}$ heißt auch Brucheinheit, Stammbruch, Untereinheit; $\frac{p}{a}$ heißt als p faches von $\frac{1}{a}$ auch abgeleiteter Bruch und kann als benannte Zahl aufgefaßt werden; der Divisor heißt Nenner, der Dividend Zähler.

Im Gegensatze dazu heißt eine Vielheit, die man zu einem Ganzen zusammengefaßt denkt, auch Ober- oder Gruppeneinheit. Ober- und Untereinheiten heißen im Gegensatze zur Haupt- oder Grundeinheit auch abgeleitete Einheiten.

Auch jedes formelle (unausgerechnete) Produkt kann als benannte Zahl aufgefaßt werden. Der Multiplikand bestimmt die Sorte, indem er angibt, das Wievielfache der Haupteinheit

Obereinheit werden soll. Die Anzahl der Obereinheiten bestimmt der Multiplikator. Bei dieser Auffassung des Produktes setzt man den Multiplikator auch vor den Multiplikanden und nennt ihn dann auch Koeffizienten. $p \cdot a = ap$ bedeutet a Stück von der Sorte p .

9. Die Größe $\bar{p}$ durch die Größe $\bar{a}$ messen heißt sie in gleiche Teile $\bar{a}$ zerlegen und deren Anzahl r bestimmen. Vorderglied ($\bar{p}$), Hinterglied ($\bar{a}$), Verhältnis (r).

$\bar{p} : \bar{a} = r$ bedeutet auch $\frac{1}{\bar{a}} + \dots + \frac{r}{\bar{a}} = \bar{p}$; $\bar{a} \cdot r = \bar{p}$. Verhältnissprobe: Hinterglied $\times$ Verhältnis = Vorderglied.

Verhältnisse mit mehreren Hintergliedern sind unmöglich.

Das Messen ist nur dann genau ausführbar, wenn $\bar{p}$ ein Vielfaches von $\bar{a}$ ist.

Das Hinterglied, mit dem man mißt, heißt auch das Maß, die Maßeinheit, die Einheit, die Sorte, wenn es eine allgemein bekannte und anerkannte Größe ist. Dann heißt das Verhältnis auch die Maßzahl des Vordergliedes. Größen und ihre Maßzahlen bezeichnet man durch denselben Buchstaben: $\bar{a}, a$.

Funktionsgesetz des Messens. Nimmt das Hinterglied $\bar{a}$ eines Verhältnisses $\bar{p} : \bar{a}$ zu, so nimmt das Verhältnis ab; nimmt das Maß zu, so nimmt die Maßzahl ab. Ist $\bar{p} : \bar{x} = y$, so ist $\bar{p} : (\bar{x} + \bar{i}) < y$. Ver- n -facht sich das Hinterglied (Maß), so sinkt die Maßzahl auf den n ten Teil: Ist $\bar{p} : \bar{x} = y$, so ist $\bar{p} : (\bar{x} \cdot n) = \frac{y}{n}$.

Mit dem Messen schließt die Größenlehre ab.

10. Vervielfältigen, Teilen, Messen sind drei koordinierte Rechnungsarten. Das Multiplizieren verwandelt Summen von Gruppeneinheiten in eine Vielheit von Haupteinheiten. $3 \cdot 4 = 12$ bedeutet 4 Dreier sind 12 Einer.

Das Teilen und Messen zerlegt eine Vielheit von Haupteinheiten in gleiche Summanden (Gruppeneinheiten). Beim Teilen ist außer der Vielheit die Anzahl der Summanden gegeben und der Summand gesucht. Beim Messen ist außer der Vielheit der Summand gegeben und die Anzahl der Summanden gesucht.

Teilen und Messen sind also die zum zusammenfassenden Multiplizieren zugehörigen zerlegenden Rechnungsarten und heißen deshalb Umkehrungen der Multiplikation. Ver-

vielfältigen, Teilen, Messen bilden die Rechnungsarten der zweiten Stufe.

11. Die Zahl p mit der Zahl a potenzieren heißt das Produkt r aus a gleichen Faktoren p bilden: $p^a = \underbrace{p \cdot \dots \cdot p}_a = r$. Grundzahl (p), Exponent (a), Potenz (r). Es gibt auch Potenzen mit mehreren Exponenten $p^{a_1 a_2}$. Das Potenzieren ist nur dann ausführbar, wenn Grundzahl und Exponent ganzzahlig und mindestens gleich 2 sind.

Funktionsgesetz des Potenzierens. Nimmt der Exponent um 1 zu, so ver- p -facht sich die Potenz. Nimmt also der Exponent gleichmäßig zu, so nimmt die Potenz um so ungleichmäßiger zu, je größer die Grundzahl ist und je mehr der Exponent zunimmt.

Ist $p^x = y$, so ist $p^{x+1} = y \cdot p$ und $p^{x+1} - p^x > p^x - p^{x-1}$.

12. Die Zahl p mit der Zahl a radizieren heißt sie in a gleiche Faktoren r zerlegen. Radikand (p), Exponent (a), Wurzel (r). Es gibt auch Wurzeln mit mehreren Exponenten

$$\sqrt[a_1]{\sqrt[a_2]{\sqrt[a_3]{p}}}.$$

$\sqrt[a]{p} = r$ bedeutet auch $\underbrace{\frac{1}{r} \cdot \dots \cdot \frac{1}{r}}_a = p$ oder $r^a = p$. Wurzelprobe: $\text{Wurzel}^{\text{Exponent}} = \text{Radikand}$.

Das Radizieren ist nur dann ausführbar, wenn der Exponent ganzzahlig und mindestens gleich 2 ist. Es ist genau nur dann ausführbar, wenn auch der Radikand ganzzahlig und so beschaffen ist, daß auch die Wurzel ganzzahlig wird.

Funktionsgesetz des Radizierens. Nimmt der Exponent zu, so nimmt die Wurzel ab, aber ihre Abnahme wird bei gleichmäßigem Wachstum des Exponenten immer schwächer.

Ist $\sqrt[x]{p} = y$, so ist $\sqrt[x+1]{p} < y$ und $\sqrt[x]{p} - \sqrt[x+1]{p} < \sqrt[x-1]{p} - \sqrt[x]{p}$.

13. Die Zahl p mit der Zahl a logarithmieren heißt sie in gleiche Faktoren a zerlegen und deren Anzahl r bestimmen.

$\sqrt[a]{p} = r$ bedeutet auch $\underbrace{\frac{1}{a} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a}}_r = p$ oder $a^r = p$. Logarithmand (p), Grundzahl (a), Logarithmus (r).

Logarithmenprobe: $\text{Grundzahl}^{\text{Logarithmus}} = \text{Logarithmand}$.

Das Logarithmieren ist nur dann ausführbar, wenn die Basis ganzzahlig und mindestens 2, und der Logarithmand ganzzahlig und so beschaffen ist, daß auch der Logarithmus ganzzahlig wird. Es ist angenähert ausführbar, wenn die Basis ganzzahlig und mindestens 2 ist.

Funktionsgesetz des Logarithmierens. Nimmt die Basis zu, so nimmt der Logarithmus ab.

14. Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren sind drei koordinierte Rechnungsarten. Das Potenzieren verwandelt Produkte aus Gruppeneinheiten in eine Vielheit von Haupteinheiten. Das Radizieren und Logarithmieren zerlegt eine Vielheit von Haupteinheiten in gleiche Faktoren (Gruppeneinheiten). Beim Radizieren ist außer der Vielheit die Anzahl der Faktoren gegeben und der Faktor gesucht. Beim Logarithmieren ist außer der Vielheit der Faktor gegeben und die Anzahl der Faktoren gesucht.

Radizieren und Logarithmieren sind die zum zusammenfassenden Potenzieren zugehörigen zerlegenden Rechnungsarten, also die Umkehrungen des Potenzierens.

Alle drei Rechnungsarten bilden die Rechnungsarten der dritten Stufe.

15. Während die zweite Stufe Summen bildet und in Summanden zerlegt, bildet die dritte Stufe Produkte und zerlegt in Faktoren.

Dem Multiplizieren entspricht das Potenzieren.

„ Teilen	„	„ Radizieren.
„ Messen	„	„ Logarithmieren.

§ 4. Klammerregeln.

1. In jedem zusammengesetzten Ausdruck geht die Rechnung der höheren Stufe der der niederen Stufe voraus.

2. Bei gleichstufigen Rechnungen gilt die Reihenfolge des Lesens, man rechnet also von links nach rechts.

3. Jede andere Reihenfolge muß durch Klammern angedeutet werden, falls diese nicht durch die Natur des Rechnungszeichens (Bruchstrich, Wurzel-, Logarithmenzeichen) überflüssig gemacht werden.

Der Ausdruck $2 + \sqrt[3]{3^2 \sqrt[3]{27}}$ verlangt 1) die Berechnung 3^2 und von $\sqrt[3]{27}$, 2) die Multiplikation beider Ergebnisse, 3) die Logarithmierung des Produktes, 4) die Addition des Logarithmus zu 2.

§ 5. Rechengesetze.

1. Es gibt drei Hauptgesetze: das Vertauschungs-, das Gruppierungs-, das Verbindungsgesetz. Die beiden ersten regeln das Rechnen innerhalb einer Rechenstufe, das dritte regelt das Rechnen auf verschiedenen Stufen.

2. Das Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz) bestimmt über die Vertauschbarkeit der Bestandteile eines Ausdrucks. Es nimmt für die erste und zweite Stufe die wichtige Form an:

Die Reihenfolge, in der man aggregiert (vor- und rückwärts zählt), und die Reihenfolge in der man vervielfältigt und teilt, hat auf das Resultat keinen Einfluß.

3. Das Gruppierungsgesetz (Assoziativgesetz) bestimmt über die Möglichkeit die Bestandteile eines Ausdruckes in Gruppen zusammenzufassen und solche Gruppen in ihre Bestandteile zu zerlegen.

4. Das Verbindungsgesetz (Distributivgesetz) bestimmt wie mit und an Ausdrücken niederer Stufe auf der höheren Stufe gerechnet wird; es verbindet die Rechnungsstufen miteinander.

5. Die meisten arithmetischen Lehrsätze lassen sich durch Gleichungen ausdrücken, deren linke Seite die Voraussetzung, deren rechte die Behauptung enthält. Da die Seiten einer Gleichung vertauschbar sind so ist es auch Voraussetzung und Behauptung des Lehrsatzes: Die arithmetischen Sätze sind umkehrbar.

§ 6. Rechengesetze des Aggregierens.

1. Vertauschungsgesetz. Beim Aggregieren ist die Reihenfolge der Glieder beliebig. (S. § 5. 2.)

2. Es ist $a + (b + c) = a + b + c$, denn nach Addition der Größe b zu a fehlt zum Resultat noch die Größe c . — $a + (b - c) =$

$a + b - c$, denn nach Addition der Größe b zu a erhältst du ein um c zu großes Resultat, da du nicht b , sondern $b - c$ addieren sollst. — $a - (b + c) = a - b - c$, denn nach Subtraktion der Größe b von a erhältst du ein um c zu großes Resultat, da du $b + c$ wegnehmen sollst. Ebenso ist

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Daraus folgt das

Gruppierungsgesetz: Beim Aggregieren darf man beliebige Unteraggregate bilden und lösen (darf man die Glieder beliebig gruppieren), mit der Bestimmung, daß nach einem $\pm$ bleiben die Vorzeichen der Gruppe sich umkehren.

§ 7. Rechengesetze des Multiplizierens.

1. Es ist

$$\begin{aligned}\bar{p} \cdot 2 \cdot 3 &= (\frac{1}{\bar{p}} + \frac{2}{\bar{p}}) + (\frac{3}{\bar{p}} + \frac{4}{\bar{p}}) + (\frac{5}{\bar{p}} + \frac{6}{\bar{p}}) \\ &= (\frac{1}{\bar{p}} + \frac{3}{\bar{p}} + \frac{5}{\bar{p}}) + (\frac{2}{\bar{p}} + \frac{4}{\bar{p}} + \frac{6}{\bar{p}}) = \bar{p} \cdot 3 \cdot 2.\end{aligned}$$

Also gilt das

Vertauschungsgesetz: Beim Multiplizieren ist die Reihenfolge der Faktoren beliebig.

$$\bar{p} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots = \bar{p} \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot a_3 \dots$$

2. Es ist

$$\begin{aligned}\bar{p} \cdot (2 \cdot 3) \cdot 4 &= [\frac{1}{\bar{p}} + \frac{2}{\bar{p}} + \frac{3}{\bar{p}} + \frac{4}{\bar{p}} + \frac{5}{\bar{p}} + \frac{6}{\bar{p}}] \\ &+ [\frac{7}{\bar{p}} + \frac{8}{\bar{p}} + \frac{9}{\bar{p}} + \frac{10}{\bar{p}} + \frac{11}{\bar{p}} + \frac{12}{\bar{p}}] + [\frac{13}{\bar{p}} + \dots + \frac{18}{\bar{p}}] + [\frac{19}{\bar{p}} + \dots + \frac{24}{\bar{p}}] \\ &= \bar{p} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4) = [\frac{1}{\bar{p}} + \frac{2}{\bar{p}}] + [\frac{7}{\bar{p}} + \frac{8}{\bar{p}}] + [\frac{13}{\bar{p}} + \frac{14}{\bar{p}}] + [\frac{19}{\bar{p}} + \frac{20}{\bar{p}}] \\ &+ [\frac{3}{\bar{p}} + \frac{4}{\bar{p}}] + [\frac{9}{\bar{p}} + \frac{10}{\bar{p}}] + [\frac{15}{\bar{p}} + \frac{16}{\bar{p}}] + [\frac{21}{\bar{p}} + \frac{22}{\bar{p}}] \\ &+ [\frac{5}{\bar{p}} + \frac{6}{\bar{p}}] + [\frac{11}{\bar{p}} + \frac{12}{\bar{p}}] + [\frac{17}{\bar{p}} + \frac{18}{\bar{p}}] + [\frac{23}{\bar{p}} + \frac{24}{\bar{p}}] = \bar{p} \cdot (2 \cdot 4) \cdot 3;\end{aligned}$$

also gilt das

Gruppierungsgesetz: Beim Multiplizieren darf man beliebige Multiplikatorengruppen bilden und lösen (darf man die Multiplikatoren beliebig gruppieren):

$$\bar{p} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = \bar{p} \cdot (a_1 \cdot a_3 \cdot a_4) \cdot a_2.$$

3. Es ist

$$(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 - \bar{p}_3) \cdot 3 = (\overset{1}{\bar{p}_1} + \overset{1}{\bar{p}_2} - \overset{1}{\bar{p}_3}) + (\overset{2}{\bar{p}_1} + \overset{2}{\bar{p}_2} - \overset{2}{\bar{p}_3}) \\ + (\overset{3}{\bar{p}_1} + \overset{3}{\bar{p}_2} - \overset{3}{\bar{p}_3}) = \bar{p}_1 \cdot 3 + \bar{p}_2 \cdot 3 - \bar{p}_3 \cdot 3$$

und es ist

$$\bar{p}(3 + 4 - 2) = (\overset{1}{\bar{p}} + \overset{2}{\bar{p}} + \overset{3}{\bar{p}}) + (\overset{1}{\bar{p}} + \overset{2}{\bar{p}} + \overset{3}{\bar{p}} + \overset{4}{\bar{p}}) - (\overset{1}{\bar{p}} + \overset{2}{\bar{p}}) \\ = \bar{p} \cdot 3 + \bar{p} \cdot 4 - \bar{p} \cdot 2;$$

also gilt das

Verbindungsgesetz: Statt ^{ein} mit einem Aggregat zu multiplizieren, kann man auch ^{jedes} mit jedem Glied multiplizieren.

Statt Produkte mit einem gemeinsamen Multiplikator zu aggregieren, kann man das Aggregat der Multiplikatoren und den gemeinsamen Multiplikator multiplizieren.

4. In der Arithmetik tritt an die Stelle der Größe $\bar{p}$ die Größeneinheit $\bar{e}$. Diese verschmilzt mit dem ersten Multiplikator vermöge der Gleichung: $\bar{e} \cdot 4 = 4 \text{ Einer} = \bar{4} = 4$. Du verzichtest der Einfachheit wegen auf eine besondere Bezeichnung der Einheit und schreibst nur die Multiplikatoren, die du dann auch Faktoren nennst (s. S. 11). Statt in der Aufgabe: 4 Einer oder 1 Vierer soll verdreifacht werden, zu schreiben $\bar{e} \cdot 4 \cdot 3$ oder $\bar{1} \cdot 4 \cdot 3$ oder $\bar{4} \cdot 3$ schreibst du kurz $4 \cdot 3$. Du mußt aber immer beachten, daß in dem Multiplikanden 4 die Einheit mit enthalten ist, daß bei Anwendung eines der drei Multiplikationsgesetze die Einheit vom Multiplikanden abgetrennt zu denken ist und daß damit der Multiplikand zu einem Multiplikator wird und erst dann Faktor genannt und als solcher vertauscht werden darf. Wenn also das Vertauschungsgesetz die Gleichung $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$ aufstellt, so heißt das entweder: Statt die Einheit erst zu verdrei- und dann zu vervierfachen, kannst du sie auch erst vervier- und dann verdreifachen oder es heißt, statt 1 Vierer zu verdreifachen, kannst du auch 1 Dreier vervierfachen; aber es kann nicht bedeuten: 1 Dreier $\cdot 4 = 4 \cdot 1$ Dreier, da du mit einer Größe, auch wenn ihre Einheit unbestimmt ist, nicht multiplizieren kannst. Nach dieser Fest-

setzung erhältst du folgende drei vereinfachten arithmetischen Multiplikationsgesetze:

1. Beim Multiplizieren ist die Reihenfolge der Faktoren beliebig: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = a_3 \cdot a_1 \cdot a_2$.

2. Beim Multiplizieren darf man beliebige Faktorengruppen bilden und lösen: $a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) \cdot a_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)$.

3. a) Statt ein Aggregat zu multiplizieren, kann man auch jedes Glied multiplizieren. Statt Produkte mit einem gemeinsamen Faktor zu aggregieren, kann man auch das Aggregat der nicht gemeinsamen Faktoren mit dem gemeinsamen Faktor multiplizieren: $(a + b - c + d)e = ae + be - ce + de$.

3. b) Bekanntlich rechnest du durch mehrfache Anwendung von § 7, 3a und § 6, 2 so: $234 \cdot 56 = 234 \cdot 50 + 234 \cdot 6 = 200 \cdot 50 + 30 \cdot 50 + 4 \cdot 50 + 200 \cdot 6 + 30 \cdot 6 + 4 \cdot 6$ und $59 \cdot 28 = (60 - 1)(30 - 2) = (60 - 1)30 - (60 - 1)2 = 60 \cdot 30 - 1 \cdot 30 - 60 \cdot 2 + 1 \cdot 2$; damit verfährt du nach dem

Erweiterten Verbindungsgesetz: Statt zwei Aggregate zu multiplizieren, kann man auch jedes Glied des einen mit jedem Gliede des andern multiplizieren und muß die Produkte addieren, wenn ihre Bestandteile gleiche Vorzeichen haben; subtrahieren, wenn ihre Bestandteile ungleiche Vorzeichen haben:

$$\begin{aligned}(a + b - c)(d - e - f) &= (a + b - c)d - (a + b - c)e - (a + b - c)f \\ &= (ad + bd - cd) - (ae + be - ce) - (af + bf - cf) \\ &= ad + bd - cd - ae - be + ce - af - bf + cf.\end{aligned}$$

§ 8. Rechengesetze des Teilens.

1. Hauptgesetz des Teilens: $\frac{\bar{p}}{a} \cdot a = \frac{\bar{p} \cdot a}{a} = \bar{p}$. Vervielfältigen und Teilen heben sich gegenseitig auf.

2. Es ist $\bar{p}/2/3 = \bar{p}/3/2$; denn sowohl der dritte vom zweiten, als auch der zweite vom dritten Teile von $\bar{p}$ ist gleich dem sechsten Teile von $\bar{p}$. Also gilt das

Vertauschungsgesetz: Beim Teilen ist die Reihenfolge der Divisoren beliebig:

$$\bar{p}/m/n/p = \bar{p}/n/p/m.$$

2*

3. Es ist $\bar{p}/2/3/4 = \bar{p}/(2 \cdot 3)/4 = \bar{p}/(2 \cdot 3 \cdot 4)$, denn in allen drei Fällen bestimmst du den 24. Teil von $\bar{p}$, weil der dritte vom zweiten Teil der sechste Teil ist; also gilt das

Gruppierungsgesetz: Beim Teilen darf man beliebige Divisorengruppen bilden und lösen (darf man die Divisoren beliebig gruppieren), muß aber dabei die Rechnungszeichen umkehren:

$$\bar{p}/a_1/a_2/a_3/a_4 = \bar{p}/(a_1 \cdot a_2)/(a_3 \cdot a_4).$$

4. $(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 - \bar{p}_3)/3 = \bar{p}_1/3 + \bar{p}_2/3 - \bar{p}_3/3$; denn wenn man jedes Glied eines Aggregats durch seinen dritten Teil ersetzt, wird auch das Aggregat gedrittelt; also gilt das

Verbindungsgesetz: Statt ein Aggregat zu teilen, kann man auch jedes Glied teilen, und statt Quotienten mit demselben Divisor zu aggregieren, kann man auch das Aggregat der Dividenden mit dem Divisor teilen.

§ 9. Rechengesetze des Messens.

1. Vertauschungs- und Gruppierungsgesetz fallen beim Messen fort, weil es keine Vielheit von Hintergliedern geben kann.

2. Verbindungsgesetz. Statt ein Aggregat zu messen, kann man auch jedes Glied messen. Statt Verhältnisse mit demselben Hintergliede zu aggregieren, darf man auch das Aggregat der Vorderglieder mit dem Hintergliede messen: $(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 - \bar{p}_3) : \bar{a} = \bar{p}_1 : \bar{a} + \bar{p}_2 : \bar{a} - \bar{p}_3 : \bar{a}$.

§ 10. Das Dividieren als Vereinigung von Teilen und Messen und seine Rechengesetze.

Wir wollen bei allen weiteren Rechnungen die Größen $\bar{a}$, $\bar{b} \dots$ unter Herausziehen der Einheit ersetzen durch $\bar{e} \cdot a$ oder $\bar{1} \cdot a$ und die Einheit $\bar{e}$, $\bar{1}$ je nach Bedürfnis schreiben oder weglassen, aber immer festhalten, daß sie als passive Zahl wenigstens gedacht werden muß; d. h. wir rechnen von jetzt nicht mehr mit den Größen selbst, sondern nur noch mit ihren Maßzahlen.

Das Produkt hat dann die Form $\bar{r} = \bar{1} \cdot a_1 \cdot a_2$ oder $r = a_1 \cdot a_2$. Die beiden Umkehrungen der Multiplikation, das Teilen und das Messen, lassen sich dann durch die eine Gleichung ausdrücken: $\bar{1} \cdot x \cdot a = \bar{1}r$ oder $x \cdot a = r$. Denkst du dir diese Gleichung in der Form $(\bar{1} \cdot x) \cdot a = \bar{p}$, d. h. suchst du den

Multiplikanden, so ist die Umkehrung ein Teilen, $x (\bar{x})$ ist der a te Teil von $r (\bar{r})$; denkst du sie dir in der Form $(1 \cdot a) \cdot x = \bar{r}$, d. h. suchst du den Multiplikator, so ist sie ein Messen, x bestimmt, wie oft $\bar{a}$ in $\bar{r}$ oder a in r enthalten ist. Also ist das Dividieren ein Teilen, wenn man sich den gegebenen Faktor unbenannt, ein Messen, wenn man ihn sich benannt denkt. Allgemein gilt aber die Erklärung:

Dividieren heißt aus dem Produkt und dem einen Faktor den anderen Faktor bestimmen.

Da die Deutung der Division als Teilung oder als Messung gewöhnlich beliebig ist, so kann man die beiden Zeichen / und : als gleichwertig und als Zeichen des Teilens oder des Messens betrachten. Mithin gelten in der Arithmetik folgende Gleichungen:

Zähler = Vorderglied = Dividend; Nenner = Hinterglied = Divisor; Bruch = Verhältnis = Quotient; und die Divisionsgesetze lassen sich durch die Divisionsprobe: Quotient $\cdot$ Divisor = Dividend beweisen.

Hauptgesetz der Division: $a : b \cdot b = a \cdot b : b = a$, Multiplikation und Division heben sich auf.

Die drei Teilungsgesetze § 8, 1, 2, 3 werden jetzt zu Divisionsgesetzen.

§ 11. Rechengesetze der zweiten Stufe.

1. Unter einem Ausdruck der zweiten Stufe verstehen wir einen Ausdruck, dessen Bestandteile durch Multiplikation und Division verbunden sind.

2. Aus dem zweiten Hauptgesetze des Zählens (§ 5, 2) folgt: $135 \cdot 5 : 9 = 135 : 9 \cdot 5 = 15 \cdot 5 = 75$; also gilt das

Vertauschungsgesetz: Die Reihenfolge, in der man multipliziert und dividiert, ist beliebig $a \cdot b : c : d \cdot e = a \cdot b \cdot e : c : d = 1 : c : a : d \cdot e \cdot b$.

3. Der fünfte Teil vom Zehnfachen ist das Doppelte, das Fünffache ist von der Hälfte das Zehnfache, die Hälfte vom fünften Teil ist der zehnte Teil, der dreißigste Teil ist vom sechsten der fünfte Teil; also ist $340 : 5 = 34 \cdot 10 : 5 = 34 \cdot (10 : 5) = 34 \cdot 2$. — $64 \cdot 5 = 64 \cdot (10 : 2) = 64 \cdot 10 : 2 = 64 : 2 \cdot 10$. — Ebenso berechnet man $3400 : 50$ und $64 \cdot 50$; $34000 : 125$ und $64 \cdot 125$. — $90 : 2 : 5 = 90 : (2 \cdot 5)$ ebenso $900 : 4 : 25$;

$9000:8:125$; $960:6:5 = 960:(6 \cdot 5)$; $560:16:5 = 560:(16 \cdot 5)$;
 $756:28 = 756:7:4$. Also gilt das

Gruppierungsgesetz: Bei Ausdrücken zweiter Stufe (beim Multiplizieren und Dividieren) darf man Faktoren und Divisoren beliebig gruppieren, muß aber nach einem Divisionszeichen die Zeichen umkehren.

$$a \cdot b : c : d \cdot e = a \cdot (b : c) : (d : e) = 1 : (c \cdot d) \cdot (a \cdot b \cdot e).$$

4. Aus diesen Gesetzen folgen die Bruch- oder Divisionsregeln:

a) $\frac{am}{bm} = a \cdot m : b : m = a : b \cdot (m : m) = a : b$. Der Wert eines Quotienten ändert sich nicht, wenn man Dividenten und Divisor mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

$$b) a \cdot b : c = a : c \cdot b = a \cdot (b : c) = a : (c : b).$$

Statt ein Produkt zu dividieren, kann man einen Faktor dividieren und statt durch einen Quotienten zu dividieren kann man mit dem Dividenten dividieren und mit dem Divisor multiplizieren in beliebiger Reihenfolge.

$$c) a : b : c = a : c : b = a : (bc).$$

$$d) a : b \cdot c = a : c : b = a : (b : c).$$

5. Die Rechengesetze der zweiten Stufe unterscheiden sich von denen der ersten Stufe (§ 6) nur dadurch, daß in ihnen an die Stelle von $+$ und $-$ $\cdot$ und $:$ tritt.

§ 12. Rechengesetze des Potenzierens.

1. Es ist $2^{3^2^4} = 2^{2^4^3} = \dots$, denn immer soll 2 24 Mal als Faktor gesetzt werden. Also gilt das

Vertauschungsgesetz: Beim Potenzieren ist die Reihenfolge der Exponenten beliebig $p^{a_1^{a_2^{a_3}}} = p^{a_2^{a_3^{a_1}}} = \dots$ (Aber es ist nicht $p^a = a^p$, außer wenn $p = 2$, $a = 4$ ist).

2. Es ist $2^{2^{3^4}} = (2^{2 \cdot 3})^4 = (2^{2 \cdot 4})^3 = 2^{2 \cdot 4 \cdot 3}$, denn jedesmal sollst du 2 24 Mal als Faktor setzen. Also gilt das

Gruppierungsgesetz: Beim Potenzieren darf man die Exponenten beliebig gruppieren, muß sie aber innerhalb der Gruppe durch das Multiplikationszeichen verbinden.

$$p^{a_1 a_2 a_3} = (p^{a_1 a_2})^{a_3} = (p^{a_2 a_3})^{a_1} = p^{a_1 a_2 a_3}.$$

3. Verbindungsgesetze.

a) mit der ersten Stufe:

α) Es ist $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$; aber es ist nicht $(a \pm b)^n = a^n \pm b^n$. — Ein Aggregat potenziert man nach § 7, 3b.

β) Es ist $2^{3+4-5} = \frac{2^3 \cdot 2^4}{2^5}$, denn beidemale fallen von sieben Faktoren 2, fünf Faktoren 2 weg, also gilt der Satz:

Statt mit einem Aggregat zu potenzieren, kann man mit jedem Gliede potenzieren und muß die Potenzen in den Zähler oder Nenner eines Bruches schreiben, je nachdem die Glieder positiv oder negativ waren. Statt Potenzen mit derselben Grundzahl durch Multiplikation und Division zu verbinden kann man die Exponenten durch Addition und Subtraktion verbinden und muß dann mit dem Exponentenaggregate die Grundzahl potenzieren:

$$p^{a_1 + a_2 - a_3 + a_4} = \frac{p^{a_1} p^{a_2} p^{a_4}}{p^{a_3}}.$$

b) mit der zweiten Stufe.

Statt einen Ausdruck zweiter Stufe zu potenzieren, kann man jeden seiner Bestandteile potenzieren. Statt Potenzen mit gleichen Exponenten durch Multiplikation und Division zu verbinden kann man dasselbe mit ihren Grundzahlen tun

$$(p_1 \cdot p_2 : p_3 : p_4)^a = \frac{p_1^a \cdot p_2^a}{p_3^a \cdot p_4^a} \quad (\S 7, 2 \text{ u. } 1).$$

4. Da beim Potenzieren die aktive und die passive Zahl nicht vertauschbar ist, so fallen die beiden Umkehrungen des Potenzierens nicht zusammen.

§ 13. Rechengesetze des Radizierens.

1. Hauptgesetz des Radizierens. $(\sqrt[3]{16})^2 = \sqrt[3]{16^2} = 16$. Potenzieren und Radizieren heben sich gegenseitig auf.

2. Es ist $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{p}}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[4]{p}}} = \dots$; denn in jedem dieser Ausdrücke sollst du p in 24 gleiche Faktoren zerlegen. Also gilt das

Vertauschungsgesetz: Beim Radizieren ist die Reihenfolge der Exponenten beliebig $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{p}}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[4]{p}}}$.

3. Es ist aber auch $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{p}}} = \sqrt[2 \cdot 3]{\sqrt[4]{p}} = \sqrt[2 \cdot 3 \cdot 4]{p} = \sqrt[24]{p}$; denn jeder dieser Ausdrücke verlangt die Zerlegung von p in 24 gleiche Faktoren. Also gilt das

Gruppierungsgesetz: Beim Radizieren darf man die Exponenten beliebig gruppieren, muß sie aber innerhalb jeder Gruppe durch das Multiplikationszeichen verbinden:

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{p}}} = \sqrt[2 \cdot 3]{\sqrt[4]{p}} = \sqrt[2 \cdot 3 \cdot 4]{p} = \sqrt[24]{p}.$$

3. Verbindungsgesetze.

a) mit der ersten Stufe.

Ein Aggregat läßt sich nur radizieren, wenn es sich als eine Potenz vom Grade des Wurzelexponenten darstellen läßt. Aber es ist nicht: $\sqrt[n]{a \pm b} = \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$.

b) mit der zweiten Stufe.

Es ist $\sqrt[2]{\frac{4 \cdot 9 \cdot 16}{25}} = \frac{\sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{9} \cdot \sqrt[2]{16}}{\sqrt[2]{25}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{5}$; denn $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{5}$ ist einer der beiden gleichen Faktoren, in die die Quadratwurzel $\frac{4 \cdot 9 \cdot 16}{25}$ zu zerlegen verlangt. Also:

Statt einen Ausdruck zweiter Stufe zu radizieren, kann man auch jeden seiner Bestandteile radizieren. Statt Wurzeln mit demselben Exponenten zu multiplizieren und zu dividieren, kann man dasselbe mit ihren Radikanden tun.

$$\sqrt[p_1 \cdot p_2 : p_3 \cdot p_4]{a} = \frac{\sqrt[p_1]{a} \sqrt[p_2]{a} \sqrt[p_4]{a}}{\sqrt[p_3]{a}}.$$

§ 14. Gemeinsame Potenz- und Wurzelgesetze.

1. Statt 8^2 in 3 gleiche Faktoren zu zerlegen kannst du das auch mit 8 tun, wenn du nachher den Faktor mit sich selbst multiplizierst: $\sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2$. Allgemein: $\sqrt[a_1]{\sqrt[a_2]{p^{a_3}}} = \sqrt[a_1]{\sqrt[a_2]{p^{a_3}}} = (\sqrt[a_1]{\sqrt[a_2]{p}})^{a_3}$; denn in jedem dieser Ausdrücke zerlegst du p in $a_1 \cdot a_2$ gleiche Faktoren und setzt einen Faktor a_3 -mal als Faktor. Also gilt das

Vertauschungsgesetz: Beim Potenzieren und Radizieren ist die Exponentenfolge beliebig.

2. Gruppierungsgesetz: Beim Potenzieren und Radizieren kann man die Exponenten beliebig gruppieren, muß aber in jeder Gruppe gleichartige Exponenten durch Multiplikations- und ungleichartige Exponenten durch Divisionszeichen verbinden.

$\sqrt[a_1]{\sqrt[a_2]{(p^{a_3})^{a_4}}} = \sqrt[a_1]{\sqrt[a_2]{p^{a_3 a_4}}} = \sqrt[a_1 \cdot a_2]{p^{a_3 a_4}}$, denn jedesmal soll p in $a_1 \cdot a_2$ gleiche Faktoren zerlegt und jeder Faktor $a_3 \cdot a_4$ mal als Faktor gesetzt werden.

Aus den Gesetzen in § 12, 13, 14 ergeben sich die Potenz- und Wurzelregeln. $p_1^a \cdot p_2^a = (p_1 p_2)^a$; $p_1^a : p_2^a = (p_1 : p_2)^a$;

$$p^{a_1+a_2} = p^{a_1} \cdot p^{a_2}; \quad p^{a_1-a_2} = p^{a_1} : p^{a_2}; \quad (p^{a_1})^{a_2} = (p^{a_2})^{a_1} = p^{a_1 a_2};$$

$$\sqrt[a_1]{p^{a_2}} = (\sqrt[a_1]{p})^{a_2} = p^{a_2/a_1}; \quad \sqrt[a_1]{p^{a_2}} = \sqrt[a_1]{p^{a_2}} = \sqrt[a_1]{p^{a_2} \cdot a_3}; \quad \sqrt[a_1]{\sqrt[a_2]{p}} = \sqrt[a_1]{\sqrt[a_2]{p}} = \sqrt[a_1 a_2]{p};$$

$$\sqrt[a_1]{p_1} \cdot \sqrt[a_1]{p_2} = \sqrt[a_1]{p_1 p_2}; \quad \sqrt[a_1]{p_1} : \sqrt[a_1]{p_2} = \sqrt[a_1]{p_1 : p_2}.$$

§ 15. Rechengesetze des Logarithmierens.

1. Hauptgesetz der Logarithmierung: Potenzierung und Logarithmierung heben sich gegenseitig auf:

$$10^{\underbrace{\Lambda}_{10} 100} = \underbrace{\Lambda}_{10} 10^{100} = 100; \quad a^{\underbrace{\Lambda}_a p} = \underbrace{\Lambda}_a a^p = p.$$

2. Für die aktiven Zahlen des Logarithmus gelten das Vertauschungs- und das Gruppierungsgesetz; doch haben sie fürs Rechnen keine Bedeutung.

$$3. \underbrace{\Lambda}_b c \underbrace{\Lambda}_c a = \underbrace{\Lambda}_b a \text{ z. B. } \underbrace{\Lambda}_e 10 \underbrace{\Lambda}_{10} p = \underbrace{\Lambda}_e p.$$

4. Logarithmenregeln:

- a. $\bigwedge_a p_1 p_2 = \bigwedge_a p_1 + \bigwedge_a p_2$; denn $\frac{\bigwedge_a p_1 + \bigwedge_a p_2}{a^a} = \frac{\bigwedge_a p_1}{a^a} \frac{\bigwedge_a p_2}{a^a} = p_1 p_2$.
- b. $\bigwedge_a p_1 : p_2 = \bigwedge_a p_1 - \bigwedge_a p_2$.
- c. $\bigwedge_a p_1^{p_2} = p_2 \bigwedge_a p_1$.
- d. $\bigwedge_a \sqrt[p_2]{p_1} = \frac{1}{p_2} \bigwedge_a p_1$.

§ 16. Erste Erweiterung der Definitionen der direkten Rechnungsarten. Summen-, Produkten-, Potenzenreihe.

1. Bisher kam es uns hauptsächlich auf das Resultat des Zählens an. Jetzt wollen wir die Tätigkeit des Zählens und seine Regeln betrachten.

Zugleich wollen wir zusehen, ob diese neue Methode uns nicht unsere bisherigen Resultate in neuem Lichte erscheinen lassen und ihre Erweiterung gestatten wird.

2. Eine nach einem bestimmten Gesetze fortschreitende Folge von Zahlen heißt eine Reihe (0, 4, 8, 12, ...), die Zahlen heißen ihre Glieder, der Abstand (die Differenz) zweier Glieder heißt ein Schritt (4). Zwischen je 2 Glieder einer Reihe kann man beliebig viel Glieder, Unterglieder ($\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$) einschieben. Dabei muß aber das Gesetz der Reihe gewahrt bleiben. Die eingeschobenen Glieder bilden zwischen je 2 Gliedern Unterreihen, die die Hauptreihe ungeändert lassen, namentlich ihre Stellenbezeichnung. Das bisherige erste Glied (4) bleibt das erste, das zweite Glied (8) bleibt zweites usw. Selbstverständlich kannst du aber die Einschubglieder auch zu Hauptgliedern machen und erhältst dann eine formell neue Reihe mit veränderter Stellenbezeichnung ($0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1 \dots$).

Der Einschub soll uns die Möglichkeit geben in jeder Reihe, also bei jeder Zählungsart jeder Zahl beliebig nahe zu kommen und er soll uns von den Beschränkungen frei machen, denen wir bisher in der Wahl der aktiven und zum Teil auch der passiven Zahlen unterworfen waren.

3. Die einfachste Reihe ist die natürliche Zahlenreihe,

(die Aggregatenreihe) $0, 1, 2, 3 \dots$, die unter Zufügung der Unterglieder die Form annimmt:

Schrittzahl	$0 \frac{1}{n}$	$\frac{m}{n}$	1	2	a	$\frac{n}{m}$
Zahlenwert	$0 \frac{1}{n}$	$\dots \frac{m}{n}$	$\dots 1$	$\dots 2$	$\dots a$	$\dots \frac{n}{m}$

Ihre Schritte sind gleich groß und gleich der Einheit, darum ist ein Unterschritt $\frac{1}{n}$.

Da in dieser Reihe Schrittzahl und Zahlenwert übereinstimmen, so benützen wir ihre Zahlenwerte, um in andern Reihen Stellen oder Schrittzahlen anzugeben. Dadurch wird die Aggregatenreihe zur Vergleichs- oder Normalreihe.

Das Aggregat $a + b - \frac{c}{a}$ ist das Glied der Aggregatenreihe, auf das du stößest, wenn du in der Zahlenreihe erst a Schritte, dann b Schritte vorwärts und schließlich c Unterschritte ($\frac{1}{a}$) rückwärts machst.

4. In den Einmaleins-Reihen ($0, 4, 8, 12, \dots$) ist die Differenz zweier auf einmal folgender Glieder konstant, also sind die Schritte gleich groß. Jedes Glied einer solchen Reihe, abgesehen vom 0ten und 1ten ist ein Produkt im Sinne von § 3, 7. Der Multiplikand (4) benennt die Reihe (Viererreihe) und bestimmt die Größe des ersten Schrittes und damit die Differenz je zweier Schritte, der Multiplikator (3) bestimmt die Schrittzahl, die du zur Erreichung des Zahlenwertes des Produkts (12) hast ausführen müssen. Deshalb nennen wir die Einmaleinsreihen Produktenreihen und erklären:

Das Produkt $p \cdot a$ ist das a te Glied der Produktenreihe (p).

Das Gesetz dieser Reihe ist das Funktionsgesetz des Produktes $p(x \pm 1) = px \pm p$ (§ 3, 7); die Schritte der Produktenreihe sind gleich groß und gleich einer Vielheit (p), ihre Glieder sind das p -fache der entsprechenden Glieder der natürlichen Zahlenreihe; sie nehmen mit dem Multiplikator gleichmäßig zu und ab. Verfolgt man die Reihe rückwärts, so ergibt sich $p \cdot 1 = p, p \cdot 0 = 0$.

Schiebst du in die Produktenreihe p zwischen das 0te und 1ste Glied Unterglieder ein, so müssen deren Stellen durch echte Brüche bezeichnet werden. Um den Zahlenwert dieser

Glieder zu ermitteln, setze $p \cdot \frac{1}{n} = x$, dann ist $p \cdot \frac{2}{n} = 2x$, ...
 $p \cdot \frac{m}{n} = mx$... $p \cdot \frac{n}{n} = p \cdot 1 = p = nx$; also ist $x = \frac{p}{n}$. Dar-
 aus folgt: $p \cdot \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$; $p \cdot \frac{m}{n} = \frac{p}{n} \cdot m$. Also erhältst du folgen-
 des Schema:

Multiplikator oder Schrittzahl	$0 \quad \frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{m}{n} \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad a \quad \dots \quad \frac{n}{n}$
Produktenreihe	$p \cdot 0 \quad p \cdot \frac{1}{n} \dots p \cdot \frac{m}{n} \dots p \cdot 1 \dots \quad p \cdot a \quad \dots p \cdot \frac{n}{n}$
Zahlenwerte	$0 \quad \frac{p}{n} \dots \frac{p}{n} \cdot m \dots p \quad \dots \quad (\frac{1}{p} + \dots + \frac{a}{p}) \dots \frac{p}{n} \cdot n.$

Also ist: $p \cdot 0 = 0$; $p \cdot 1 = p$; $p \cdot a = (\frac{1}{p} + \dots + \frac{a}{p})$; $p \cdot \frac{m}{n} = \frac{p}{n} \cdot m$;
 $p \cdot v_x = v_y$; $p \cdot A_x = A_y$.

Die bisherigen Produktengesetze (§ 7), die nach § 8 und 11 auch Quotientengesetze sind, gelten auch für den erweiterten Produktenbegriff, der die beiden bisherigen Begriffe Produkt und Quotient in sich vereinigt.

Die neue Erklärung des Produktes $p \cdot a$ als a tes Glied der Produktenreihe p führt uns zu folgendem Ergebnis:

- 1) Sie enthält die alte Erklärung als speziellen Fall.
- 2) Die bisher aufgestellten Gesetze behalten ihre Gültigkeit.
- 3) Du kannst jede Zahl als Multiplikand und jede Zahl als Multiplikator wählen und kannst in jeder Produktenreihe p jedem Zahlenwerte beliebig nahe kommen.
- 4) Das $\frac{m}{n}$ te Glied der Produktenreihe p ist zugleich das m te Glied der Produktenreihe $\frac{p}{n}$.
- 5) Das geometrische Bild der Produktenreihe p (S. 43) ist ein Strahl, der durch den Koordinatenanfang geht; das Produkt im engeren Sinne wird durch die Punkte mit den Abscissen 2, 3 desselben Strahles dargestellt.

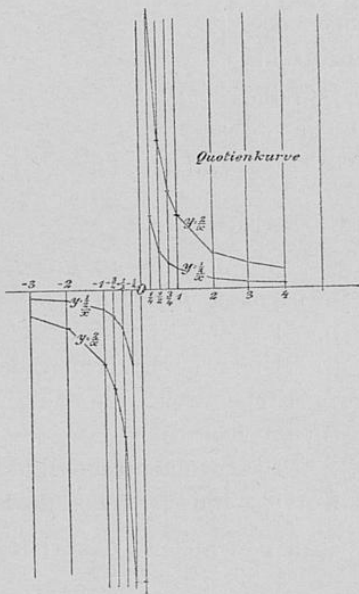
6. Das Funktionsgesetz des Teilens $\frac{p}{x} = \frac{p}{x} \cdot n$ (§ 3, 8) lehrt

dir die Division durch Brüche. Dividierst du 12 durch $\frac{4}{3}$, so ist das Resultat 3 mal so groß als wenn du 12 durch 4 dividierst; also ist: $p : \frac{m}{n} = \frac{p}{m} \cdot n$.

Das geometrische Bild des Quotienten mit abnehmendem Divisor ist eine Kurve, die mit nach oben gewandter Konkavität sich der y -Achse immer mehr annähert, ohne sie jedoch jemals zu erreichen. Das bedeutet:

Ein Quotient mit dem Divisor Null und einem von Null verschiedenen Dividenten ist sinnlos; durch Null darf man nicht dividieren. $\frac{a}{0}$ existiert nicht; weil jede Zahl mit 0 multipliziert immer nur Null gibt.

Die Quotientenkurve schmiegt sich immer tiefer in den Achsenwinkel, je kleiner der Divident ist. Ist der Divident Null, so fällt die Quotientenkurve mit den Achsen zusammen: $\frac{0}{0}$ ist unbestimmt, weil jede Zahl mit 0 multipliziert 0 gibt.



7. Das Funktionsgesetz der Potenz $p^{x+1} = p^x \cdot p$ und $p^{x-1} = p^x : p$ (§ 3. 11) führt zu der Reihe:

Reihe	$p^a \dots$	p^2	p^1	p^0	
Zahlenwert	$(\frac{1}{p} \dots \frac{1}{p})$	$(p \cdot p)$	p	1	$\frac{1}{p}, (\frac{1}{p})^2 \dots$

Verstehst du also unter der

Potenzreihe p die Reihe, deren 0tes Glied 1 ist und in der der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder p ist, so sei: die Potenz p^a das a te Glied der Potenzreihe p .

Die Zahlen $\frac{1}{p}, (\frac{1}{p})^2 \dots$ sind als Glieder der Potenzreihe auch Potenzen von p , ohne daß sie aber vorläufig als solche bezeichnet werden können. Schiebst du zwischen irgend zwei Glieder, z. B. zwischen das 0. und 1. Glied $n-1$ Unterglieder

ein so heißen sie: $\frac{1}{p^n} \dots p^{\frac{m}{n}} \dots p^{\frac{n-1}{n}}$. Ist der Zahlenwert von $\frac{1}{p^n} x$, so ist $p^{\frac{m}{n}} = x^m$, $p^{\frac{n}{n}} = p^1 = p = x^n$; also ist $x = \sqrt[n]{p}$; also ist

$p^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p}$, $p^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{p})^m$. Mithin erhältst du folgendes allgemeine Schema:

Exponent oder Schrittzahl	$0 \frac{1}{n} \dots \frac{m}{n} \dots 1 \dots a \dots \frac{n}{m} \dots$
Potenzenreihe	$p^0 \frac{1}{p^n} \dots \frac{m}{p^n} \dots p^1 \dots p^a \dots \frac{n}{p^m} \dots$
Zahlenwert	$\dots (\frac{1}{p})^a \dots (\frac{1}{p})^2, \dots \frac{1}{p}, \dots 1 \sqrt[n]{p} \dots (\sqrt[n]{p})^m \dots p \dots (\frac{1}{p} \dots \frac{a}{p}) \dots (\sqrt[n]{p})^n \dots$

Also ist:

$p^0 = 1$; $p^1 = p$; $p^a = (\frac{1}{p} \dots \frac{a}{p})$; $p^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{p})^m$; $p^{\frac{1}{n}} = 1 \pm v_y$,
je nachdem $p \geq 1$ ist; $p^{A_x} = A_y$, wenn $p > 0$, $p^{A_x} = 1$, wenn
 $p = 1$, $p^{A_x} = v_y$, wenn $p < 1$ ist.

Die neue Erklärung der Potenz als Reihenglied führt uns zu Ergebnissen, die den Ergebnissen 1—4 von Nr. 5 genau entsprechen.

Das geometrische Bild der Potenzenreihe (S. 44) ist eine Kurve, die die y -Achse im Punkt 1 schneidet und die mit nach oben gerichteter Konkavität, wenn $p \geq 1$ ist, von der x -Achse an die sich immer mehr entfernt; wenn $p = 1$ ist, ist das Bild eine Parallele zur x -Achse in der Entfernung 1.

7. Das Funktionsgesetz des Radizierens (§ 3,12) $\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{p}}$; $\sqrt[n]{\sqrt[n]{p}} = (\sqrt[n]{p})^{\frac{1}{n}}$ lehrt dir das Radizieren durch Brüche. Radizierst du 64 mit $\frac{3}{2}$, so ist das Resultat das gleiche, wie wenn du 64 mit 3 radizierst und die Wurzel mit 2 potenzierst: $\sqrt[n]{p} = (\sqrt[m]{p})^{\frac{n}{m}}$.

Das geometrische Bild der Wurzel ist eine Kurve, die sich bei abnehmendem Exponenten der y -Achse immer mehr nähert, ohne sie jemals zu erreichen (mit Null darf man nicht radizieren) und die mit wachsendem Exponenten der 1 immer näher kommt:

$$\sqrt[n]{p} = \begin{cases} A_y, & \text{wenn } p > 1 \\ 1, & \text{wenn } p = 1 \\ v_y, & \text{wenn } p < 1. \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{p} = 1 \pm v_y, \text{ je nachdem } p \geq 1 \text{ ist.}$$



$$p^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p}, \quad p$$

Schema:

Exponent oder
Schrittzahl

Potenzreihe

Zahlenwert

Also ist

$$p^0 = 1;$$

je nachdem

$$p = 1, \quad p^{4x} =$$

Die neu

zu Ergebnis
entsprechen.

Das ge

Kurve, die d

oben gericht

sich immer

Parallele zu

7. Das l

$$\sqrt[n]{p} = (\sqrt[n]{p})^n$$

du 64 mit 3

mit 3 radizi

Das ge

sich bei ab

nähert, ohne

radizieren) u

näher komm

$$p^{4x} \sqrt[n]{p} =$$

Wurzelbegriffes.

des allgemeine

$$\dots a \dots \frac{n}{m} \dots$$

$$\dots p^a \dots \frac{n}{m} \dots$$

$$\dots \left(\frac{1}{p} \dots \frac{a}{p}\right) \dots \left(\sqrt[n]{p}\right)^n \dots$$

$$p^{Vx} = 1 \pm v_y,$$

$$p^{4x} = 1, \quad \text{wenn}$$

lied führt uns

Nr. 5 genau

S. 44) ist eine

die mit nach

der x -Achse

die

das Bild eine

$$x \cdot \sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{x \sqrt[n]{p}};$$

ne. Radiziert

e wenn du 64

$$: \sqrt[n]{p} = (\sqrt[n]{p})^n.$$

e Kurve, die

immer mehr

arf man nicht

der 1 immer

A

1

2

3

4

5

6

M

8

9

10

11

12

13

14

15

B

17

18

19

R

G

B

W

G

K

C

Y

M

TIFFEN® Gray Scale

© The Tiffen Company, 2007