

Wenn ein aus einem doppelbrechenden ein- oder zweiaxigen Krystall nicht gerade senkrecht zur optischen Axe geschnittenes planparalleles Blättchen in einen Polarisationsapparat gebracht wird, so erscheint es bei senkrecht einfallendem monochromatischem Licht mehr oder minder intensiv gefärbt oder auch ganz dunkel, je nach der Lage der Polarisations Ebenen von Polarisator und Analysator zu einander und der Orientierung des Blättchens zu ihnen.

Wir wollen im folgenden versuchen, diese Erscheinungen zu analysieren und auf Grund mathematischer Betrachtungen das Augenblicksbild der Wellenlinie zu entwerfen, welche von einer Reihe Äthermoleküle gebildet wird, die auf einer senkrecht durch den Krystall gelegten Geraden aufeinanderfolgen.

Wir betrachten zunächst eine ebene Lichtwelle natürlichen einfarbigen Lichtes, die parallel mit der Grenzfläche des Krystalles in diesen eintritt. Dieselbe wird wegen der doppelten Brechung in zwei ebene, der ersteren parallele Wellen zerlegt, bei einaxigen Krystallen in eine ordentliche und eine ausserordentlich gebrochene, bei zweiaxigen in zwei ausserordentlich gebrochene, die sich mit ungleicher Geschwindigkeit durch den Krystall fortpflanzen und sich von der einfallenden dadurch unterscheiden, dass sie senkrecht zu einander polarisiert sind. Die Schwingungsebenen beider sind im Falle eines einaxigen Krystalls der Hauptschnitt und die darauf senkrechte Ebene, im Falle eines zweiaxigen die Halbierungsebene des Winkels, welcher von den durch die Flächennormale und die optischen Axen gelegten Ebenen gebildet wird.*) Die Schwingungen selbst geschehen in der Wellenebene, d. h. parallel zur Grenzfläche des Blättchens.

*) Beer, Höhere Optik S. 345.

Wenn wir nun das Licht, bevor es auf den Krystall fällt, durch einen Nikol polarisieren, so werden im allgemeinen durch den Krystall zwei ebene, senkrecht zu einander linear polarisierte Wellen hindurchgehen; aber diese werden von den vorigen sich dadurch unterscheiden, dass sie im allgemeinen ungleiche Intensität besitzen, (jedoch so, dass die Summe beider gleich der Intensität der einfallenden Welle ist,) indem nämlich das durch den Nikol linear polarisierte Licht nach dem Satz vom Parallelogramm in zwei Komponenten nach den beiden Schwingungsebenen des Krystalls zerlegt wird. Fällt indessen die Schwingungsebene des aus dem Nikol austretenden Lichtes in die Richtung einer der Schwingungsebenen des Krystallblättchens, so haben wir nur eine Komponente, und das aus dem Krystall kommende Licht ist wie das einfallende nur nach einer Richtung linear polarisiert.

Wir betrachten erst diesen speziellen Fall.

Fällt nun die Schwingungsebene des Lichts im zweiten Nikol auch noch in dieselbe Ebene, so wird das Licht, da seine Schwingungsebene nach dem Austritt aus dem ersten Nikol keine Modifikation erlitten hat, ungeschwächt in das Auge des Beobachters gelangen, abgesehen natürlich von dem durch Absorption und Reflexion verloren gegangenen Licht, und es wird sich von dem ursprünglichen Licht nur durch seine Polarisation unterscheiden. Bildet sie aber einen Winkel zwischen 0° und 90° mit der Schwingungsebene des aus dem Krystall kommenden Lichtes, so wird das Licht, indem nur eine der Komponenten, in die es beim Eintritt in den Nikol zerlegt wird, zur Wirkung kommt, zum teil ausgelöscht. Bei der 90° Stellung schliesslich erscheint das Gesichtsfeld ganz dunkel.

Nehmen wir nun den allgemeinen Fall, dass die Schwingungsebene des aus dem ersten Nikol austretenden Lichtes mit den Schwingungsebenen des Krystallblättchens einen Winkel zwischen 0° und 90° bildet, dass also das Licht im Blättchen in zwei zu einander senkrecht polarisierte ebene Wellen zerlegt wird, so müssen wir zunächst bemerken, dass beide Wellen wegen der ungleichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Krystall infolge der ungleichen

Elasticität des Äthers in den beiden Schwingungsebenen nach ihrem Austritt sich nicht in gleichen Schwingungszuständen befinden, sondern einen Gangunterschied besitzen, der von dem Blättchen einerseits (d. h. von seiner Dicke, seiner physischen Beschaffenheit und seinem Schnitt) und von der Wellenlänge des angewandten Lichtes andererseits abhängt. Die Intensitäten beider Wellenbewegungen, die durch die Quadrate der Amplituden gemessen werden, sind durch die Neigung der Schwingungsebene des Lichts im polarisierenden Nikol zu den Schwingungsebenen im Blättchen bestimmt. Lassen wir nun das in zwei Teilbewegungen zerlegte Licht in den zweiten Nikol so eintreten, dass die Schwingungsebene des letzteren mit einer der Schwingungsebenen der Teilwellen zusammenfällt, so wird nur diese einen Lichteffect geben und das Gesichtsfeld ihrer Amplitude entsprechend erhellt sein. — Bildet die Schwingungsebene des Nikols aber mit denen im Krystallblättchen einen Winkel zwischen 0° und 90° , so wird wegen einer neuen Zerlegung nach der Schwingungsebene des zweiten Nikols von jeder der Wellen nur ein Teil zur Geltung kommen. Diese beiden neuen, auf dieselbe Schwingungsebene reducierten und mit einem von dem Krystall herrührenden Gangunterschied behafteten Wellen können jetzt mit einander interferieren und sich entweder gegenseitig unterstützen, oder zum teil vernichten, oder im ungünstigsten Fall, wenn die Amplituden beider gleich gross sind, (was nur eintreten kann, wenn die Schwingungs- resp. Polarisationssebenen der beiden Nikols zu einander senkrecht stehen), und die eine Wellenbewegung der anderen um eine ungerade Zahl von halben Wellenlängen voraus ist, sich ganz aufheben.

Wir haben hiermit die Erscheinungen beschrieben und erklärt, welche bei allen möglichen Lagen des Blättchens zu den Nikols und dieser zu einander stattfinden können. Die mathematische Ableitung soll erst erfolgen, wenn wir die Bewegung der einzelnen Äthermoleküle besprochen und ihre Bahnen gefunden haben und daraufhin das Augenblicksbild der Wellenlinie konstruiert haben.

Wir wollen jetzt fragen, in welcher Weise die Äthertheilchen auf einer senkrecht durch den Krystall gelegten

Geraden, die wir als Strahl bezeichnen wollen, durch die Wellenbewegung afficiert werden. Dabei betrachten wir gleich den allgemeinen Fall, dass die Schwingungsebene des aus dem ersten Nicol austretenden Lichtes nicht in die Richtung einer der Schwingungsebenen des Krystallblättchens fällt, denn in diesem speciellen Fall würden, da das Licht dann keine Zerlegung erleidet, die Oscillationen alle in derselben Ebene stattfinden und das Augenblicksbild der Wellenlinie in und hinter dem Krystall einfach das eines eben polarisierten Strahles bleiben. Die Bahn eines jeden Teilchens ist in diesem Falle eine Gerade und die durch

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

ausgedrückte Bewegung eine sogenannte harmonische, die von einem Punkte beschrieben wird, der mit einer seinem Abstände von der Ruhelage proportionalen Kraft in dieselbe zurückgedrückt wird. — Es möge also die Wellenbewegung, die, bevor sie in den Krystall eintritt, wegen der Polarisation durch den ersten Nicol in einer Ebene vor sich geht, so in den Krystall eintreten, dass sie eine Zerlegung nach zwei auf einander senkrechten Richtungen erfährt. Es fragt sich nun, wie die beiden entstehenden Teilbewegungen, die sich mit ungleicher Geschwindigkeit durch den Krystall fortpflanzen, gleichzeitig auf die auf dem Strahl liegenden Ätherteilchen wirken, und welche Bahnen diese infolgedessen beschreiben. Wir bemerken zuvor, dass wegen der gleichen Oscillationsdauer in beiden Wellenbewegungen jedes Teilchens eine geschlossene Bahn beschreiben muss. Für das an der Grenzfläche des Krystalls liegende Teilchen ist klar, dass es, da es gleichzeitig von beiden Bewegungen ergriffen wird, wegen der gleichen Oscillationsdauer notwendig eine Bahn durchläuft, die nach Richtung und Grösse die Diagonale desjenigen Rechtecks ist, welches von den Geraden gebildet wird, die es unter dem Einfluss jeder der Teilbewegungen einzeln durchlaufen würde, d. h. die Diagonale des von den beiden doppelten Amplituden gebildeten Rechtecks. (Fig. 1). Im nächsten Punkte des Strahles wird wegen der verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit beider Wellenbewegungen die eine Teilbewegung das Teilchen schon

sollicitiert und ihm einen kleinen Ausschlag erteilt haben, wenn die andere einsetzt, und während der ganzen Dauer einer Oscillation wird in jedem Moment die eine Teildeviation der anderen um ein kleines Stück voraus sein, wobei zu beachten ist, dass jede der Teilbewegungen eine harmonische ist, bei der die Geschwindigkeit mit der Entfernung von der Ruhelage abnimmt. Infolgedessen wird das Teilchen eine solche Bahn beschreiben, dass es in jedem Punkte von der Diagonalen nach der einen oder andern Seite hin abweicht. Die Bahn wird eine langgezogene Ellipse. (Fig. 2). Bei dem folgenden und jedem weiteren Teilchen wird die eine Bewegung der andern um mehr und mehr voraus sein und die Bahn sich zu einer immer weniger gestreckten Ellipse gestalten, deren grosse Axe mit der Erweiterung der Ellipse sich von der Lage der Diagonale fort nach der Richtung der Teilbewegung mit der grösseren Amplitude bewegt. (Fig. 3). Kommen wir dann zu einem Punkte des Strahles, wo beide Teilbewegungen einen solchen Gangunterschied haben, dass das Teilchen gerade am Ende der von der einen Teilbewegung beschriebenen geradlinigen Bahn angekommen ist, wenn die andere Bewegung beginnt, so erhalten wir für dies Teilchen als Bahn eine Ellipse mit den beiden Amplituden als Halbaxen (Fig. 4), die im Falle gleicher Amplituden in einen Kreis übergeht. Bei den noch weiter liegenden Teilchen auf dem Strahl werden beide Wellen mit einem immer grösseren Gangunterschied wirken. Das Teilchen wird von der zweiten Bewegung erst afficiert, wenn es in Folge der ersten Teilbewegung die Gerade schon über den grössten Ausschlag hinaus durchlaufen hat, also sich auf dem Rückwege befindet. Die Bahn wird wieder eine Ellipse, die sich bei den nachfolgenden Teilchen mehr und mehr abflacht, und deren grosse Axe sich der andern Diagonale des von beiden Teildeviationen gebildeten Rechteckes nähert. (Fig. 5). So geht es fort. Jedem Teilchen auf dem Strahl entspricht als Bahn eine Ellipse, die gegen die des vorhergehenden Teilchens gedreht und erweitert oder abgeflacht erscheint, und die in den Grenzlagen, wo die grosse Axe in die Diagonale fällt, zu einer Geraden wird, und zwar zu der Diagonale selbst. Hat

die grosse Axe den von den beiden Diagonalen gebildeten Winkel einmal hin und zurück durchlaufen, so kehren für die folgenden Teilchen auf dem Strahl dieselben Verhältnisse wieder. Die Bahnen selbst wiederholen sich schon, wenn die grosse Axe den Winkelraum einmal überstrichen hat, treten also während des Verlaufes jede zweimal auf, aber mit verschiedener Durchlaufungsrichtung, wie wir sehen werden. Damit wir zu einem Teilchen kommen, welches die der Bewegung des ersten Teilchens analoge macht, müssen wir auf dem Strahl um soviel fortgeschritten sein, dass die eine Teilbewegung der andern um eine ganze oder ein ganzes Vielfache einer Schwingung voraus ist.

Durch eine leichte Überlegung erkennt man ferner, dass, wenn etwa die der grösseren Amplitude entsprechende Welle schneller fortschreitet, das dem ersten Teilchen zunächst liegende seine Bahn so durchläuft, dass sein Radiusvektor von der positiven Richtung derjenigen Axe, in welcher der grössere Ausschlag erfolgt, nach der des kleineren bewegt, wenn wir diejenige Richtung als die positive bezeichnen, nach der jede Teilbewegung beim Beginn zuerst gerichtet ist. (Fig. 6). Überhaupt dreht sich der Radiusvektor stets in dem Sinne, dass er sich von der positiven Richtung derjenigen Axe, in welcher diejenige Oscillation erfolgt, die der anderen um weniger als eine halbe Schwingung voraus ist, nach der positiven Richtung der andern Axe hin bewegt. Dabei bemerken wir, dass, wenn die eine Oscillation die andere um mehr als eine halbe Schwingung übertrifft, die letztere der ersteren um weniger als eine halbe Schwingung voraus ist.

Die vorstehenden Betrachtungen sind nur der Anschauung entnommen. Wir könnten sie durch eine graphische Darstellung ergänzen, wie sie bei Müller-Pouillet für die Lissajous'schen Figuren ausgeführt ist. Aber wir werden auf Grund der mathematischen Betrachtungen später eine genauere Konstruktionsart kennen lernen. Vorläufig sollen die Betrachtungen nur dazu dienen, uns ein angenähertes Bild des ganzen Bewegungsvorganges zu verschaffen.

Ob die Bahnen wirklich Ellipsen sind oder nur ellipsenähnliche Figuren, können wir noch nicht entscheiden. Erst

die mathematische Entwicklung, zu der wir uns jetzt wenden, kann uns darüber Gewissheit geben.

Zum Zweck unserer Untersuchungen führen wir ein rechtwinkliges Axensystem ein, so dass die beiden Schwingungsebenen im Krystall die xy und xz -Ebene werden; senkrecht dazu nehmen wir als yz -Ebene die Grenzfläche des Krystalls. Die Koordinaten y und z sind dann die Teildeviationen, und die Gleichungen für die beiden Wellenbewegungen sind

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1} \right)$$

$$z = a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_2} \right)$$

wo a_1 und a_2 die Amplituden beider Teilbewegungen sind und λ_1 und λ_2 die entsprechenden Wellenlängen.

Um nun für ein Teilchen, das durch sein x gegeben ist, die Bahn zu bestimmen, müssen wir eine Beziehung zwischen y und z herstellen, die t nicht enthält, d. h. wir müssen aus beiden Gleichungen t eliminieren. Das geschieht auf folgende Weise. Wir schreiben die Gleichungen in der Form

$$\arcsin \frac{y}{a_1} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1} \right)$$

$$\arcsin \frac{z}{a_2} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_2} \right).$$

Durch Subtraktion fällt t fort, und es wird

$$\arcsin \frac{y}{a_1} - \arcsin \frac{z}{a_2} = 2\pi x \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\arcsin \frac{y}{a_1} = Y \quad \arcsin \frac{z}{a_2} = Z,$$

so haben wir

$$Y - Z = 2\pi x \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = A$$

$$\sin Y = \sin(A + Z)$$

$$\sin Y = \sin A \sqrt{1 - \sin^2 Z} + \cos A \sin Z.$$

Isolieren wir hierin das erste Glied der rechten Seite und quadrieren, so erhalten wir

$$\sin^2 A (1 - \sin^2 Z) = \sin^2 Y + \cos^2 A \sin^2 Z - 2 \cos A \sin Y \sin Z$$

oder

$$\sin^2 Y + \sin^2 Z - 2 \cos A \sin Y \sin Z = \sin^2 A$$

Setzen wir hierin für Y, Z und A die entsprechenden Werte ein, so kommt

$$\frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} - 2 \cos 2\pi x \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \frac{yz}{a_1 a_2} = \sin^2 2\pi x \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right).$$

Hierin ist x zunächst als konstant zu denken. Dann stellt die Gleichung eine Ellipse dar in den Koordinaten y und z mit dem Mittelpunkt in der x-Axe; denn die Gleichung ist in den Variablen vom zweiten Grade und das charakteristische Binom

$$\left(\frac{\cos 2\pi x \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)}{a_1 a_2} \right)^2 - \frac{1}{a_1^2} \frac{1}{a_2^2}$$

ist negativ. Jedes Teilchen auf dem Strahl beschreibt also eine elliptische Bahn, deren Lage und Gestalt von den einzelnen Konstanten abhängt, und die in speziellen Fällen in eine Gerade und selbst in einen Kreis übergehen kann.

Wir werden die verschiedenen Fälle gleich näher untersuchen. Zuvor bemerken wir, dass für variables x die Gleichung die Fläche darstellt, aus der durch senkrechte Schnitte zur x-Axe alle jene elliptischen Bahnen erhalten werden. Wollen wir ein Augenblicksbild der Wellenlinie haben, so brauchen wir nur die bezüglichen Lagen, die die Teilchen in ihren Bahnen für einen Moment haben, mit einander auf der Fläche zu verbinden.

Um nun die Bahnellipsen für die verschiedenen Teilchen auf dem Strahl, also für verschiedene Werte von x zu discutieren, setzen wir $\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \nu$, dann haben wir kürzer

$$\frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} - 2 \cos 2\pi \nu x \frac{yz}{a_1 a_2} = \sin^2 2\pi \nu x.$$

Da mit λ die Wellenlänge bezeichnet wird, so ist $\frac{1}{\lambda}$ die Anzahl der Wellenlängen auf der Längeneinheit, also $\nu = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}$ der Unterschied in der Anzahl der Wellen-

längen beider Wellenlinien, die auf die Längeneinheit gehen, oder mit andern Worten, es fallen auf die Längeneinheit von der einen Bewegung ν Wellen mehr als von der andern; dann müssen aber auf dem Strahle nach $\frac{1}{\nu}$ Wellenlänge und jedem ganzen Vielfachen von $\frac{1}{\nu}$ beide Wellenbewegungen mit gleichen Phasen an den betreffenden Punkt herantreten. Denn wenn die eine Welle auf dem Wege eins a Schwingungen macht, so macht die andere $a + \nu$, und nach $\frac{1}{\nu}$ Weg hat die eine $\frac{a}{\nu}$, die andere $\frac{a}{\nu} + 1$ Schwingungen vollführt, befindet sich also in demselben Schwingungszustand wie die erstere. Daraus ergibt sich, dass nach $\frac{1}{\nu}$ Weg dieselben Bahnen wiederkehren müssen, und das zeigt sich auch bei der Betrachtung der Gleichung, denn $\cos 2\pi\nu x$ und $\sin 2\pi\nu x$ ändern sich nicht, wenn wir zu x $\frac{1}{\nu}$ addieren.

Wir wollen nun die Bahnen derjenigen Teilchen untersuchen, die den Punkten

$$\frac{n}{s} \frac{1}{\nu} + \frac{r}{\nu}$$

entsprechen, wo unabhängig von einander

$$n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$r = 0, 1, 2, 3 \dots$$

und s eine beliebige ganze Zahl > 1 ist, die angiebt, wie viele Punkte wir zwischen $x = 0$ und $x = \frac{1}{\nu}$ nehmen.

Es soll also die Untersuchung auf die in folgender Tabelle angegebenen Punkte erstreckt werden:

$$\begin{array}{l} n = 0 : x = 0 ; \quad \frac{1}{\nu} ; \quad \frac{2}{\nu} ; \dots \frac{r}{\nu} \\ n = 1 : x = \frac{1}{\nu} \frac{1}{s} ; \frac{1}{\nu} \frac{1+s}{s} ; \frac{1}{\nu} \frac{1+2s}{s} ; \dots \frac{1}{\nu} \frac{1+rs}{s} \\ n = 2 : x = \frac{1}{\nu} \frac{2}{s} ; \frac{1}{\nu} \frac{2+s}{s} ; \frac{1}{\nu} \frac{2+2s}{s} ; \dots \frac{1}{\nu} \frac{2+rs}{s} \\ \dots \dots \dots \end{array}$$

2) Für $x = \frac{1}{2\nu} ; \frac{3}{2\nu} ; \frac{5}{2\nu} \dots$ allg. $x = \frac{1+2r}{2\nu}$
wird

$$\cos 2\pi\nu \frac{(1+2r)}{2\nu} = \cos(1+2r)\pi = \cos\pi = -1$$

$$\sin 2\pi\nu \frac{(1+2r)}{2\nu} = \sin(1+2r)\pi = \sin\pi = 0,$$

also wird unsere Gleichung

$$\frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} + \frac{2yz}{a_1 a_2} = 0, \text{ oder } \left(\frac{y}{a_1} + \frac{z}{a_2}\right)^2 = 0.$$

Wir bekommen wieder eine Doppellinie durch den Anfangspunkt der Koordinaten mit der Richtung $\operatorname{tg} \varphi' = -\frac{a_2}{a_1}$.

3.) Für $x = \frac{1}{4\nu} ; \frac{5}{4\nu} ; \frac{9}{4\nu} \dots$ allg. $x = \frac{1+4r}{4\nu}$
wird

$$\cos 2\pi\nu \frac{(1+4r)}{4\nu} = \cos(1+4r)\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin 2\pi\nu \frac{(1+4r)}{4\nu} = \sin(1+4r)\frac{\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = +1.$$

Als Gleichung haben wir dann

$$\frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} = 1,$$

eine Ellipse, deren Axen $2a_1$ und $2a_2$ mit der Richtung der Koordinaten-Axen zusammenfallen. (Fig. 4).

4.) Für $x = \frac{1}{8\nu} ; \frac{9}{8\nu} ; \frac{17}{8\nu} \dots$ allg. $x = \frac{1+8r}{8\nu}$
bekommen wir die Gleichung

$$\frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} - 2\cos\frac{\pi}{4} \frac{yz}{a_1 a_2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$$

und wegen $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ wird sie

$$\frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} - \sqrt{2} \frac{yz}{a_1 a_2} = \frac{1}{2}.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf zwei zu einander senkrechte Durchmesser, die nicht konjugiert und folglich keine Hauptachsen sind. (Fig. 3). Wollen wir die Hauptachsen bestimmen und ihre Neigung gegen die Koor-

dinaten Axen finden, so müssen wir durch Änderung des Koordinatensystems die Gleichung so transformieren, dass sie die charakteristische Form der Hauptaxengleichung annimmt.

Um dies nicht bei jedem Specialfall wiederholen zu müssen, wollen wir es für die allgemeine Gleichung

$$\frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} - 2\cos 2\pi\nu x \frac{yz}{a_1 a_2} - \sin^2 2\pi\nu x = 0$$

ausführen. Dabei haben wir x als Parameter anzusehen. Zur Abkürzung setzen wir

$$\frac{1}{a_1^2} = A \quad \frac{1}{a_2^2} = B \\ - \frac{\cos 2\pi\nu x}{a_1 a_2} = C \quad - \sin^2 2\pi\nu x = D$$

dann bekommt die Gleichung die Form

$$Ay^2 + Bz^2 + 2Cyz + D = 0.$$

Wenn wir die neuen Axen mit η und ζ bezeichnen und den Winkel, den dies Koordinatensystem, welches wieder rechtwinklig ist, mit den vorigen Axen bildet, φ nennen, so haben wir die Transformationsformeln

$$y = \eta \cos \varphi - \zeta \sin \varphi \\ z = \eta \sin \varphi + \zeta \cos \varphi$$

Durch die Substitution dieser Werte von y und z wird die allgemeine Gleichung

$$A(\eta^2 \cos^2 \varphi + \zeta^2 \sin^2 \varphi - 2\eta\zeta \sin \varphi \cos \varphi) \\ + B(\eta^2 \sin^2 \varphi + \zeta^2 \cos^2 \varphi + 2\eta\zeta \sin \varphi \cos \varphi) \\ + 2C[(\eta^2 - \zeta^2) \sin \varphi \cos \varphi + \eta\zeta(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)] + D = 0$$

oder nach Potenzen von η und ζ geordnet

$$\eta^2 [A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi + 2C \sin \varphi \cos \varphi] \\ + \zeta^2 [A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi - 2C \sin \varphi \cos \varphi] \\ + 2\eta\zeta [C(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - (A - B) \sin \varphi \cos \varphi] + D = 0.$$

Da nun die Gleichung der Ellipse, die auf ihre Hauptaxen bezogen ist, ein Glied, in dem das doppelte Produkt der Variablen vorkommt, nicht mehr enthalten kann, so muss der Koeffizient von $\eta\zeta$ verschwinden, also es muss

$$2C(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - 2(A - B) \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

sein oder

$$2C \cos 2\varphi = (A - B) \sin 2\varphi.$$

Das giebt uns für den Winkel zwischen der y -Axe und der grossen Axe der Ellipse die Beziehung

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2C}{A-B} = \frac{2a_1a_2 \cos 2\pi\nu x}{a_1^2 - a_2^2}$$

Andererseits können wir aus der Gleichung φ eliminieren, indem wir schreiben

$$\begin{aligned} A \sin \varphi \cos \varphi + C \sin^2 \varphi &= C \cos^2 \varphi + B \sin \varphi \cos \varphi \\ \text{oder} \quad \frac{A \cos \varphi + C \sin \varphi}{\cos \varphi} &= \frac{C \cos \varphi + B \sin \varphi}{\sin \varphi} = k \end{aligned}$$

und daraus bilden

$$\begin{aligned} (A - k) \cos \varphi + C \sin \varphi &= 0 \\ C \cos \varphi + (B - k) \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Die Elimination von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ aus diesen beiden Gleichungen liefert die in k quadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} A - k & C \\ C & B - k \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad k^2 - (A + B)k + AB - C^2 &= 0, \\ \text{aus der sich als Wurzeln sofort} \end{aligned}$$

$$k_1 = \frac{A + B}{2} - \sqrt{\left(\frac{A - B}{2}\right)^2 + C^2}$$

$$k_2 = \frac{A + B}{2} + \sqrt{\left(\frac{A - B}{2}\right)^2 + C^2}$$

die Koeffizienten der Gleichung in den neuen Koordinaten ergeben.

Die Hauptaxengleichung wird somit

$$k_1 \eta^2 + k_2 \zeta^2 + D = 0$$

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad \frac{\eta^2}{-\frac{D}{k_1}} + \frac{\zeta^2}{-\frac{D}{k_2}} &= 1 \end{aligned}$$

Die beiden halben Hauptachsen sind also

$$\sqrt{-\frac{D}{k_1}} \quad \text{und} \quad \sqrt{-\frac{D}{k_2}}.$$

Durch den Winkel φ ausgedrückt folgen aus der transformierten Gleichung hierfür direkt die Werte

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{-D}{A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi + 2C \sin \varphi \cos \varphi}} \\ &= \sqrt{\frac{-D}{a_1^2 \sin^2 \varphi + a_2^2 \cos^2 \varphi - 2a_1 a_2 \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\pi \nu x}} \end{aligned}$$

*) cf. Clebsch-Lindemann Vorles. über Geom. I, 1 S. 90.

und

$$= \frac{\sqrt{\frac{D}{A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi}}}{a_1 a_2 \sin 2\pi \nu x} \\ = \frac{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \varphi + a_2^2 \sin^2 \varphi - 2 a_1 a_2 \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\pi \nu x}}{a_1 a_2 \sin 2\pi \nu x}.$$

Wir können über das ganze System von Ellipsen noch einige Eigenschaften aussagen, die bei der Konstruktion von Nutzen sind, und die wir hier gleich anschliessen wollen.

Zunächst denken wir uns alle Ellipsen auf die yz -Ebene senkrecht projiziert, dann werden sie ein einfach unendliches konzentrisches ebenes Kurvensystem mit dem Parameter x bilden. (Fig. 11).

Wir können nun nach der Enveloppe aller Ellipsen fragen. Zur Lösung dieser Aufgabe haben wir die Gleichung des Systems nach dem Parameter x zu differenzieren, die daraus entstehende Gleichung mit der ursprünglichen zu verbinden und aus beiden x zu eliminieren.

Wir haben

$$f(y, z; x) = \frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} - 2 \cos 2\pi \nu x \frac{yz}{a_1 a_2} - \sin^2 2\pi \nu x = 0 \\ \frac{df}{dx} = 2 \sin 2\pi \nu x \frac{2\pi \nu yz}{a_1 a_2} - 2 \sin 2\pi \nu x \cos 2\pi \nu x 2\pi \nu = 0 \\ = \frac{yz}{a_1 a_2} - \cos 2\pi \nu x = 0.$$

Indem wir den aus der letzten Gleichung sich ergebenden Wert von $\cos 2\pi \nu x$ in $f(y, z; x) = 0$ einsetzen, bekommen wir

$$\frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} - \frac{2y^2 z^2}{a_1^2 a_2^2} = 1 - \frac{y^2 z^2}{a_1^2 a_2^2}$$

oder

$$\frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} - \frac{y^2 z^2}{a_1^2 a_2^2} - 1 = 0$$

und in Faktoren zerlegt

$$\left(\frac{y^2}{a_1^2} - 1\right) \left(\frac{z^2}{a_2^2} - 1\right) = 0$$

das sind aber zwei Paare von Linien

$$y = \pm a_1 \text{ und } z = \pm a_2,$$

je zwei Parallelen zu der y - und z -Axe im Abstände der Amplituden. Das war vorauszusehen, wenn wir beachten,

dass beide Komponenten der Wellenbewegung während einer Schwingung jede für sich das Teilchen um die Weite der Amplitude nach beiden Seiten aus der Gleichgewichtslage bringen. — Dass die Parallelen die Tangenten der Ellipsen sind, folgt aus der Definition der Enveloppe.

Übertragen wir das Resultat auf die räumlich verteilten Ellipsen, deren Gesamtheit jene gewundene Fläche bildet, auf die sich die Wellenlinie aufträgt, so erkennen wir, dass diese Fläche von einem rechtwinkligen Parallelepipet mit den Grundkanten $2a_1$ und $2a_2$ umschlossen wird. Die Seitenflächen $y = \pm a_1$ und $z = \pm a_2$ berühren die Fläche in je einer Kurve, die wir finden, wenn wir die Gleichung nach y oder z auflösen, dann $\frac{dy}{dz}$ resp. $\frac{dz}{dy}$ bilden

und den Ausdruck gleich null setzen. Das giebt

$$y = a_1 \cos 2\pi \nu x \text{ und } z = a_2 \cos 2\pi \nu x$$

also auch zwei Wellenlinien, sogenannte Kosinussoiden.

Einen weiteren Vorteil zur Konstruktion der Ellipsen gewährt uns, wenn wir wieder alle Bahnen senkrecht auf die xy -Ebene projiziert denken, und x als Parameter betrachten, die Kenntnis der Lage der Brennpunkte. Aus der Eigenschaft, dass sämtliche Ellipsen von vier festen Geraden berührt werden, schliessen wir, dass das System einem Kegelschnittbüschel angehört, und demnach für den Ort der Brennpunkte sich eine Kurve ergibt, die im allgemeinen vom dritten Grade ist, die sich hier aber, wo die Geraden parallel sind, auf den zweiten Grad reduciert.

Nach der Plückerschen Definition sind die Brennpunkte eines Kegelschnittes die Schnittpunkte der von den imaginären Kreispunkten an den Kegelschnitt gelegten Tangenten

$$(y - y')^2 + (z - z')^2 = 0$$

oder $(y - y') \pm (z - z')i = 0$ oder $y \pm zi - (y' \pm z'i) = 0$. Diese Gleichung haben wir mit der allgemeinen Bedingungs-

gleichung für eine Tangente an einen Kegelschnitt*)

$$A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33}\zeta^2 + 2A_{23}\eta\zeta + 2A_{31}\zeta\xi + 2A_{12}\xi\eta = 0$$

zu verbinden, wo

*) Salmon-Fiedler I Art. 113.

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_{22} \cdot a_{33} - a_{23}^2 & A_{23} &= a_{31}a_{12} - a_{11}a_{23} \\ A_{22} &= a_{33} \cdot a_{11} - a_{31}^2 & A_{31} &= a_{12}a_{23} - a_{22}a_{31} \\ A_{33} &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 & A_{12} &= a_{23}a_{31} - a_{33}a_{12} \end{aligned}$$

und $a_{11}, a_{22}, \dots$ die Koeffizienten in der allgemeinen Kegelschnittgleichung sind. In unserm Fall ist

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\frac{\sin^2 2\pi\nu x}{a_2^2} & A_{23} &= 0 \\ A_{22} &= -\frac{\sin^2 2\pi\nu x}{a_1^2} & A_{31} &= 0 \\ A_{33} &= \frac{\sin^2 2\pi\nu x}{a_1^2 a_2^2} & A_{12} &= -\frac{\sin^2 2\pi\nu x \cos 2\pi\nu x}{a_1 a_2} \end{aligned}$$

da in unserer Gleichung

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{a_1^2} & a_{23} &= 0 \\ a_{22} &= \frac{1}{a_2^2} & a_{31} &= 0 \\ a_{33} &= -\sin^2 2\pi\nu x & a_{12} &= -\frac{\cos 2\pi\nu x}{a_1 a_2}. \end{aligned}$$

Indem wir in die obige Bedingungsgleichung die Koeffizienten $1, \pm i, - (y' \pm z'i)$ der imaginären Geraden einsetzen, bekommen wir

$$\begin{aligned} A_{11} - A_{22} + A_{33}(y'^2 - z'^2) \mp 2A_{33}y'z'i \mp 2A_{23}y'i \\ + 2A_{23}z' - 2A_{31}y' \mp 2A_{31}z'i \pm 2A_{12}i = 0. \end{aligned}$$

Wenn wir hierin reellen und imaginären Teil getrennt gleich null setzen, erhalten wir zwei Gleichungen, die zwei Systeme von Curven zweiten Grades darstellen:

$$\begin{aligned} A_{33}(y'^2 - z'^2) + 2A_{23}z' - 2A_{31}y' + A_{11} - A_{22} &= 0 \\ A_{33}y'z' + A_{23}y' + A_{31}z' - A_{12} &= 0, \end{aligned}$$

aus denen sich als Resultat der Elimination des Parameters x der Ort der Brennpunkte ergibt. (Eigentlich haben wir zwei Gleichungen für die Tangenten aus den unendlich fernen imaginären Kreispunkten an das System der Kegelschnitte und demgemäss zwei Bedingungsgleichungen, aus denen wir, um eine Beziehung zwischen den Variablen y' und z' herzustellen, den Parameter x zu eliminieren hätten, aber beide Gleichungen unterscheiden sich nur im Vorzeichen von i , und dieser Unterschied fällt fort, wenn wir reellen und imaginären Teil einzeln gleich null setzen.)

In unserm Falle brauchen wir die Elimination nicht erst auszuführen, da schon aus der ersten Gleichung (wir setzen hier y und z für y' und z')

$$\frac{\sin^2 2\pi vx}{a_1^2 a_2^2} (y^2 - z^2) + \sin^2 2\pi vx \left(\frac{a_2^2 - a_1^2}{a_1^2 a_2^2} \right) = 0$$

sich x forthebt. Wir erhalten unmittelbar als Ort der Brennpunkte:

$$y^2 - z^2 + a_2^2 - a_1^2 = 0,$$

d. h. eine gleichseitige Hyperbel, die durch die Punkte $y = \pm a_1$ $z = \pm a_2$ hindurchgeht und die y -Axe in den Punkten $y = \pm \sqrt{a_1^2 - a_2^2}$ schneidet, wenn $a_1 > a_2$, oder die z -Axe in $z = \pm \sqrt{a_2^2 - a_1^2}$ schneidet für $a_2 > a_1$. (Fig. 7).

Durch die vorausgehenden Betrachtungen haben wir ein Mittel gewonnen, sämtliche elliptische Bahnen zu konstruieren. Diese Ellipsen, welche in Wirklichkeit alle senkrecht über einander gelagert sind, haben wir zu ihrer Untersuchung senkrecht auf die yz -Ebene projiziert und x als Parameter betrachtet. Würden wir dementsprechend die Konstruktion ausführen, so würden wir ein sehr unübersichtliches Bild erhalten. (Fig. 11). Um die Zeichnung übersichtlich und doch genau zu machen, werden wir die einzelnen Ellipsen in kongruente Rechtecke eingeschlossen nebeneinander so zeichnen, dass wir doch in der Art der Nebeneinanderlagerung erkennen, wie die einzelnen Bahnen aufeinanderfolgen, und welche charakteristische Merkmale sie verknüpfen.*) (Fig. 12).

Zur Konstruktion der einzelnen Ellipsen aus ihren Elementen bemerken wir, dass eigentlich schon die Angabe der Grösse der beiden Axen und ihrer Neigung gegen die y -Axe genügt. Aber wir sehen, dass die Ausdrücke, welche die Grösse der Hauptaxen darstellen, für die Zeichnung zu kompliziert sind. Wir müssen deshalb versuchen, auf einem indirekten Wege zum Ziele zu gelangen. In der That genügt es, die Berührungspunkte der Ellipsen mit den Seiten des umgeschriebenen Rechtecks und ihre Brennpunkte zu kennen, um die Konstruktion ausführen zu können, denn die Summe der Verbindungslinien beider Brennpunkte

*) In Fig. 13 ist eine anschauliche Zeichnung entworfen, die ein Bild von der Übereinanderlagerung der Ellipsen giebt.

mit einem dieser Berührungspunkte (Fig. 8) liefert direkt die grosse Axe, und da die Excentricität $e = \sqrt{a_1^2 - a_2^2}$ aus den Brennpunkten bekannt ist, so ergibt sich daraus auch die kleine Axe. Die Berührungspunkte mit den Seiten des Rechtecks sind aber, wie wir früher (S. 17) gefunden haben, gegeben durch

$$y = a_1 \cos 2\pi v x$$

$$z = a_2 \cos 2\pi v x,$$

und die Brennpunkte sind gegeben als Schnittpunkte der als Ort der Brennpunkte gefundenen gleichseitigen Hyperbel $y^2 - z^2 + a_2^2 - a_1^2 = 0$ mit einer durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden geraden Linie, deren Neigungswinkel φ gegen die y -Axe gegeben ist durch

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2C}{A - B} = \frac{2a_1 a_2 \cos 2\pi v x}{a_1^2 - a_2^2}.$$

Für jeden Wert von x können wir somit die beiden Paare von Punkten, die Berührungspunkte und die Brennpunkte konstruieren. (Fig. 9 und 10). — Bei der Ausführung der Zeichnung werden wir am geeignetsten erst $y = a_1 \cos 2\pi v x$

und daraus mit Benutzung dieses Wertes $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_2 y}{a_1^2 - a_2^2}$ konstruieren, wodurch dann für die grosse Axe der betreffenden Ellipse die Neigung gegen die y -Axe gefunden ist.

Statt der Berührungspunkte mit den Seiten des aus den gemeinsamen Tangenten gebildeten Rechtecks hätten wir auch die Durchschnittspunkte der Ellipsen mit der

$$y\text{-Axe} : y = \pm a_1 \sin 2\pi v x$$

$$z\text{-Axe} : z = \pm a_2 \sin 2\pi v x$$

benutzen können, um aus ihren Abständen von den Brennpunkten die grosse Axe zu finden.

Da die Hyperbel $y^2 - z^2 + a_2^2 - a_1^2 = 0$ sowie das dem System von Ellipsen umschriebene Rechteck für alle Ellipsen dieselben sind, so werden wir beide in einer Schablone mit einander verbinden und als Rahmen für die Zeichnung jeder Ellipse zu Grunde legen.

Mit den voraufgehenden Betrachtungen sind wir von unserer speciellen Untersuchung der Bahnen der Äthertheilchen im Strahle abgewichen, indem wir alle Fälle zusammenfassend unsere Aufgabe allgemein behandelten

und im Anschluss an die Bestimmung der Elemente gleich einige Angaben für die Konstruktion der Ellipsen machten. Jetzt müssten wir, um den Faden wieder aufzunehmen, uns zu der Diskussion der weiteren Fälle wenden, aber wir erkennen sofort, dass für $n > \frac{s}{8}$, wie schon in dem letzten

behandelten Falle $n = \frac{s}{8}$, die Bahnen der Ätherteilchen sämtlich Ellipsen sind, da der Koeffizient von yz sich weder auf 0 noch auf 1 reduziert. Wir brauchen also nicht weiter zu gehen. Es genügt zu bemerken, dass die Ellipsen, je mehr sich n den Werten 0, $\frac{s}{2}$ oder s nähert, eine mehr und mehr gestreckte Gestalt annehmen. Das ersehen wir daraus, dass die Tangente des Winkels φ , den die grosse Axe der Ellipse mit der y -Axe bildet, sich von 0 den Werten $\frac{a_2}{a_1}$ resp. $-\frac{a_2}{a_1}$ nähert, und dass folglich die Brennpunkte, die als Schnittpunkte der grossen Axen mit der den Ort der Brennpunkte bestimmenden Hyperbel $y^2 - z^2 + a_2^2 - a_1^2 = 0$ gegeben sind, mehr und mehr auseinanderrücken. (Fig. 10). Mit Annäherung von n an 0 oder $\frac{s}{2}$ wird sich nämlich $\nu x = \frac{n}{s} + r$ dem Werte einer ganzen Zahl (r) oder einem Bruch $\left(\frac{1}{2} + r\right)$ mit dem Nenner 2 annähern und folglich $\cos 2\pi \nu x$ dem Werte $+1$ oder -1 , und deswegen wird

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_1 a_2 \cos 2\pi \nu x}{a_1^2 - a_2^2}$$

sich dem Werte $\pm \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 - a_2^2}$, also $\operatorname{tg} \varphi$ dem Werte $\frac{a_2}{a_1}$ oder $-\frac{a_2}{a_1}$ nähern.

Die vorstehenden Erörterungen sind ein Teil der allgemeineren Untersuchung, wie sich die Brennpunkte der einzelnen aufeinanderfolgenden Ellipsen aneinanderreihen. Diese Untersuchung brauchen wir aber nicht weiter auszuführen, denn es ergibt sich aus dem Vorstehenden wie auch aus der allgemeinen Anschauung, dass von den Werten

$x = 0$ resp. $x = \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \frac{3}{\nu} \dots$ bis zu den Werten
 $x = \frac{1}{4\nu}$ resp. $\frac{5}{4\nu}, \frac{9}{4\nu} \dots$ die Brennpunkte von
 den äussersten auf der Hyperbel zu erreichenden Punkten
 $y = \pm a_1$ $z = \pm a_2$ im ersten und dritten Quadranten
 nach den Punkten $y = \pm \sqrt{a_1^2 - a_2^2}$, $z = 0$ auf der y -Axe
 sich hinbewegen und für $x = \frac{1}{4\nu}, \frac{5}{4\nu}, \frac{9}{4\nu} \dots$ bis
 $x = \frac{1}{2\nu}, \frac{3}{2\nu}, \frac{5}{2\nu}$ auf der Hyperbel von ihrem Durchschnitt
 mit der y -Axe bis zu den äussersten Werten im vierten und
 zweiten Quadranten $y = \pm a_1$ $z = \mp a_2$ weiterwandern,
 und dass für die Werte $\frac{1}{2\nu}, \frac{3}{2\nu}, \frac{5}{2\nu} \dots$ bis zu $\frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu},$
 $\frac{3}{\nu} \dots$ sich alles in umgekehrter Reihenfolge wiederholt.

Wir erkennen auch sofort, dass je weniger die beiden
 Amplituden a_1 und a_2 von einander abweichen, die beiden
 Hyperbelzweige dem Koordinatenanfangspunkt um so näher
 liegen, was auch aus der Gleichung $y^2 - z^2 + a_2^2 - a_1^2 = 0$
 hervorgeht, und dass für $a_1 = a_2$ die Hyperbel in zwei durch
 den Koordinatenanfangspunkt gehende Gerade $\frac{z}{y} = \pm 1$,
 zerfällt. Dann wandern aber auch die Brennpunkte der
 Ellipsen auf diesen Geraden und treffen für $x = \frac{1}{4\nu}, \frac{5}{4\nu} \dots$
 im Punkte $y = 0$ $z = 0$ zusammen; dann gehört aber
 dazu als Bahn ein Kreis. Das letzere hätten wir auch aus
 der im Falle 3) für $x = \frac{1}{4\nu}, \frac{5}{4\nu} \dots$ sich ergebenden
 Gleichung $\frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} = 1$ folgern können. Andererseits
 hätten wir aus der Formel für die Neigung der Axen

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_1a_2\cos 2\pi\nu x}{a_1^2 - a_2^2}$$

sehen können, dass der Winkel φ bei $a_1 = a_2$ wegen $\operatorname{tg} 2\varphi = \infty$
 für alle Ellipsen $45^\circ \pm \frac{\pi}{2}$ beträgt.

Bis jetzt haben wir immer $a_1 > a_2$ angenommen. Gehen wir jetzt zu $a_1 < a_2$ über, so bekommen wir als Ort der Brennpunkte der Ellipsen eine gleichseitige Hyperbel $z^2 - y^2 + a_1^2 - a_2^2$ deren Hauptaxe jetzt in die Richtung der z -Axe fällt. Da alle Verhältnisse für diesen Fall in derselben Weise wiederkehren mit blosser Vertauschung der Koordinatenachsen, so können wir die weitere Ausführung beiseite lassen.

Bisher waren die Betrachtungen rein geometrischer Natur, wir haben das mechanische Element noch unberücksichtigt gelassen. Dem wollen wir uns jetzt zuwenden.

Es war bereits früher bei der Beschreibung der Bewegung, wie sie sich aus der Anschauung ergab, darauf hingewiesen, dass jedem Punkte nach seiner Lage auf dem Strahl eine Bahn entspricht, der eine gewisse Durchlaufungsrichtung zugehört; ferner, wenn wir von einem Teilchen ausgehend zu einem entfernter gelegenen gelangen, welches seine Bewegung in derselben Weise wie das erstere vollführt, d. h. in einer kongruenten Bahn mit derselben Bewegungsrichtung, dass die zwischen beiden gelegenen Teilchen von diesen verschiedene Bahnen beschreiben, die sich aber alle einmal in umgekehrter Reihenfolge wiederholen, so dass jede Ellipse zweimal auftritt, dass aber zwei solche Ellipsen doch noch verschieden sind in Bezug auf die Durchlaufungsrichtung. Um dies auch durch die mathematische Analyse nachzuweisen und die Kriterien für die Richtung der Bewegung anzugeben, gehen wir zu unsern anfänglichen Gleichungen zurück, die uns die Grösse des Ausschlages eines Teilchens nach der y - und z -Axe gaben; denn es wäre nicht möglich, aus der allgemeinen Gleichung der Bahn einen Aufschluss über die Bewegung zu erlangen, da diese den charakteristischen Bestandteil, die Zeit t , nicht enthält.

Wollen wir die Richtung einer Bewegung in einer Bahn um den Koordinatenanfangspunkt nur nach der Seite hin untersuchen, ob dieselbe rechtsherum, wie die des Zeigers einer Uhr, oder entgegengesetzt geschieht, so werden wir am geeignetsten Polarkoordinaten einführen und nach der Drehrichtung des Radius vektor fragen, d. h. untersuchen wie der Winkel zwischen φ und der y -Axe, den wir ϑ

nennen, sich ändert, ob die Winkelgeschwindigkeit positiv oder negativ ist. Das erfahren wir, wenn wir $\frac{d\vartheta}{dt}$ bilden.

Dazu erhalten wir:

$$y = \varrho \cos \vartheta = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1} \right)$$

$$z = \varrho \sin \vartheta = a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_2} \right).$$

Hieraus erhalten wir durch Differenziation nach t

$$\frac{dy}{dt} = \cos \vartheta \frac{d\varrho}{dt} - \varrho \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = a_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1} \right) \cdot \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{dz}{dt} = \sin \vartheta \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = a_2 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_2} \right) \cdot \frac{2\pi}{T}$$

Die Elimination von $\frac{d\varrho}{dt}$ giebt, wenn wir gleich nach $\frac{d\vartheta}{dt}$ auflösen

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \left[a_2 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_2} \right) \cos \vartheta - a_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1} \right) \sin \vartheta \right] \frac{2\pi}{T\varrho}.$$

Ersetzen wir noch $\cos \vartheta$ und $\sin \vartheta$ durch ihre Werte

$$\cos \vartheta = \frac{a_1}{\varrho} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1} \right)$$

$$\sin \vartheta = \frac{a_2}{\varrho} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_2} \right),$$

so kommt schliesslich

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2\pi a_1 a_2}{T\varrho^2} \sin 2\pi x \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \frac{2\pi a_1 a_2 \sin 2\pi v x}{T\varrho^2},$$

indem wir unserer früheren Bezeichnung gemäss $\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = v$

setzen. Soll nun die Drehung positiv sein, worunter wir diejenige verstehen, die die positive y -Axe nach einer Drehung von 90° in die positive z -Axe überführt (wir denken dabei, um mit der üblichen Vorstellung im Einklang zu bleiben, die beiden Axen so gerichtet, dass die positive Drehrichtung der des Uhrzeigers entgegengesetzt ist), so

muss $\frac{d\vartheta}{dt} > 0$ sein, oder da $\frac{2\pi a_1 a_2}{T\varrho^2}$ positiv ist, so haben

wir die Bedingung $\sin 2\pi v x > 0$. Diese kommt der andern

gleich, dass $\frac{1 + 2r}{2v} > x > \frac{2r}{2v}$.

Entsprechend erhalten wir für negative Drehung die Bedingung

$$\sin 2\pi\nu x < 0$$

oder

$$\frac{2 + 2r}{2\nu} > x > \frac{1 + 2r}{2\nu}.$$

Damit haben wir gleich in der allgemeinsten Weise gefunden, dass für die Teilchen die auf dem Strahle von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2\nu}$ liegen, die Drehrichtung positiv, für die

von $x = \frac{1}{2\nu}$ bis $x = \frac{1}{\nu}$ negativ ist, von $\frac{1}{\nu}$ bis $\frac{3}{2\nu}$ wieder positiv und so fort, dass also jedesmal nach einem Zwischenraum von $\frac{1}{2\nu}$ die Drehungsrichtung in die entgegengesetzte

übergeht. Für die Punkte $x = \frac{1}{2\nu}, \frac{1}{\nu}, \frac{1}{3\nu} \dots$ ist der Formel zufolge die Drehgeschwindigkeit des Radius vektor null. Das stimmt aber auch damit überein, dass für diese Punkte die elliptische Bahn in eine durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Gerade übergeht und demnach von einer Rechts- oder Linksdrehung nicht gesprochen werden kann. Jede Gerade wird doppelt durchlaufen und zwar in jeder der beiden Richtungen einmal, so dass die Elemente nicht wie bei den Ellipsen durch eine besondere Durchlaufungsrichtung gekennzeichnet sind.

Durch die vorausgehenden Betrachtungen haben wir unser früheres Resultat noch ergänzt. Wir kennen jetzt für jedes Teilchen auf dem Strahl, das durch sein x gegeben ist, nicht nur die Bahn, die es unter dem Einfluss der beiden ihn sollicitierenden senkrecht zu einander erfolgenden Wellenbewegungen beschreibt, sondern auch die Richtung, in der es dieselbe durchläuft.

Um den jeweiligen Ort eines durch sein x gegebenen Teilchens zu einer Zeit t zu finden, haben wir in die Gleichungen, die sein y und z bestimmen, den gegebenen Wert von t einzusetzen. Indem wir nach einander für alle Werte x die Grössen y und z für denselben Zeitpunkt berechnen und die entsprechenden Punkte im Raume

konstruieren und mit einander verbinden, gewinnen wir ein Augenblicksbild der Wellenlinie. Dies wechselt aber von Moment zu Moment. Am besten können wir uns eine Vorstellung davon machen, wenn wir beachten, dass zu jedem Teilchen in seiner ihm vorgeschriebenen Bahn für jeden Zeitpunkt eine Lage des Radius vektor gehört. Alle diese Radien vektoren stehen auf dem Strahl senkrecht und bilden eine allgemeine Linienfläche, die in ähnlicher Weise wie eine gewöhnliche Schraubenfläche gebaut ist, indem der Radius vektor eines jeden Teilchens gegen den des vorhergehenden verschoben und im Sinne der Rotationsbewegung des Teilchens zurückgedreht ist. Während alle Radien um den Strahl als Axe sich drehen, bleiben nur die zu den Punkten $x = \frac{r}{v}$ gehörigen in ihrer Lage fest.

Es kann hier gleich bemerkt werden, dass, wenn eine Reihe aufeinanderfolgender Teilchen eine rechtsdrehende Bewegung hat, jedes folgende gegen das vorhergehende in der entgegengesetzten Richtung verrückt erscheint, so dass der Anblick eines solchen Stückes der Wellenlinie der eines links drehenden Strahles ist. (Vergl. die graphische Darstellung).

Die Schraubenfläche der Radien vektoren, deren Gestalt bei einer Drehung um die x-Axe von Moment zu Moment sich ändert, und die in Abständen von $\frac{1}{2v}$ auf den Strahl zwischen Rechts- und Linksdrehung wechselt, schneidet nun auf der Fläche

$$\frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} - 2\cos 2\pi vx \frac{yz}{a_1 a_2} = \sin^2 2\pi vx,$$

die die Gesamtheit aller Bahnen darstellt, in jedem Zeitpunkt die Wellenlinie aus.

Diese kann aber auch noch auf andere Weise erhalten werden, nämlich als Durchschnitt unserer Fläche der elliptischen Bahnen mit einem zur x-Axe parallelen Cylinder

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \frac{t}{T} = \lambda_1 \arcsin \frac{y}{a_1} - \lambda_2 \arcsin \frac{z}{a_2}$$

den wir durch Elimination von x aus den Gleichungen

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1} \right)$$

$$z = a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_2} \right)$$

erhalten.

Wenn wir nun noch einmal auf die Resultate unserer Betrachtungen über die Bewegung der Ätherteilchen im Krystall zurückblicken, so haben wir folgendes:

Jedem Teilchen auf dem Strahl entspricht eine von den benachbarten verschiedene elliptische Bahn, welche gegen die der benachbarten gedreht ist, und der eine bestimmte Durchlaufungsrichtung zukommt. Diese Bahnen wiederholen sich in gewissen Abständen auf dem Strahl. Alle haben das Gemeinsame, dass sie in derselben Zeit T durchlaufen werden, und dass sie sämtlich aus denselben Komponenten erzeugt werden. Diese Gleichheit der Komponenten für alle Bahnen bewirkt weiter, dass alle Ellipsen, wenn wir sie als ebenes Bündel mit dem Parameter x auffassen, vier gemeinsame Tangenten

$$y = \pm a_1 \text{ und } z = \pm a_2$$

haben, und wenn wir sie räumlich übereinandergelagert denken, vier gemeinsame sie berührende Ebenen in denselben Abständen haben. Die Verschiedenheit der Bahnen in Lage und Gestalt liegt an dem von Punkt zu Punkt wechselnden Phasenunterschied der beiden komponierenden Oscillationsbewegungen.

Bisher haben wir die Lichtbewegung im Krystall untersucht. Es fragt sich nun, was eintritt, wenn das Licht durch die zweite Grenzfläche des Krystalls wieder in ein homogenes Mittel tritt. Es ist klar, dass von dieser Grenzfläche an gerechnet beide senkrecht zu einander polarisierte Wellen wieder mit gleicher Geschwindigkeit, aber mit einem Gangunterschied behaftet fortgehen werden. Infolge dessen werden für alle Teilchen auf dem Strahl dieselben Schwingungsverhältnisse obwalten, d. h. die Teilchen werden ausser der gleichen Schwingungsdauer T , die sie auch sonst besitzen, jetzt auch kongruente und gleichliegende Bahnen haben, die sie in gleichem Sinne durchlaufen, da die Phasendifferenz der komponierenden Oscillationen dieselbe bleibt

in allen Punkten des Strahles; nur wird jedes Teilchen seine Bahn um soviel später als das vorhergehende beginnen, als die Lichtbewegung an Zeit nötig hat, um sich von einem Teilchen auf dem Strahl zum nächsten fortzupflanzen. Um die Bahnen der nachfolgenden zu kennen, kommt es also nur darauf an, die Bahn des an der zweiten Grenzfläche des Krystalls liegenden Teilchens zu kennen, von dem an der Unterschied in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit beider Wellen aufhört. Je nach der Lage dieses Teilchens auf dem Strahl, d. h. seiner Entfernung von der ersten Grenzfläche des Krystalls, kann entweder eine Gerade oder eine jener behandelten Ellipsen mit Rechts- oder Linksdrehung auftreten. Diese ist dann die Basis für einen Cylinder mit der x-Axe als Axe, auf dem die Bahnen aller nachfolgenden Teilchen übereinandergelagert sind, und auf dem sich die Wellenlinie herumlegt und mit veränderlicher Zeit fortbewegt.

Während früher die Fläche, in der alle elliptischen Bahnen übereinandergelegt waren,

$$\frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} - 2\cos 2\pi\nu x \frac{y z}{a_1 a_2} - \sin^2 2\pi\nu x = 0$$

mit variablem x war, hat sie jetzt zwar dieselbe Gleichung, aber dem x ist ein konstanter Wert beizulegen, der von dem an der Grenzfläche gelegenen Teilchen abhängt. Dann stellt die Gleichung in der That einen zur x-Axe parallelen elliptischen Cylinder dar. Das aus dem Krystall austretende Licht wird dieser Eigenschaft halber, dass alle Teilchen gleiche elliptische Schwingungen machen, elliptisch polarisiert genannt; in den speciellen Fällen, wo die Ellipse zu einer Geraden oder einem Kreise wird, haben wir linear resp. kreisförmig polarisiertes Licht.

Die Ellipsen sind das Resultat zweier senkrecht zu einander erfolgenden Oscillationen, deren Amplituden a_1 und a_2 sind. Wir können nun fragen, durch welche nach zwei andern gegebenen Richtungen zu nehmenden Amplituden können wir die ersteren ersetzen, d. h. welche Abstände vom Ruhepunkte aus würde ein Teilchen auf diesen Richtungen erreichen, wenn jede der neuen Komponenten einzeln wirkte.

Diese Frage entsteht, wenn eine neue Zerlegung der Lichtbewegung bei dem Eintritt in einen andern doppelbrechenden Krystall geschieht, in welchem die Schwingungsebenen mit den vorigen einen gewissen Winkel α bilden. (Fig. 14). Namentlich werden wir dazu geführt bei unserer Untersuchung des Augenblicksbildes der Wellenlinie in und hinter dem analysierenden Nikol und bei der unmittelbar damit zusammenhängenden Frage nach den Intensitätsverhältnissen des Lichtes hinter dem Nikol. Denn bei beiden kommt es auf die Grösse der Amplituden an.

Aber die Antwort ist leicht zu geben, denn wir wissen, dass die Tangenten an die Ellipse, die den Komponentenrichtungen parallel sind, auf den letzteren die Amplituden abschneiden. Wir brauchen also nur zu untersuchen, welches die Abstände der zu den gegebenen Richtungen parallelen Tangenten an die betreffende durch ihr x gegebene Ellipse vom Koordinatenanfangspunkt sind.

Die neuen Komponentenrichtungen, die wieder senkrecht zu einander sind, mögen, wie schon gesagt, um den Winkel α gegen die vorigen gedreht sein, dann ist die Gleichung einer zu ihnen parallelen Linie in der Hesseschen Normalform

$$y \cos \alpha + z \sin \alpha - p_\alpha = 0$$

resp.

$$y \cos(90^\circ + \alpha) + z \sin(90^\circ + \alpha) - q_\alpha = 0$$

da die vom Koordinatenanfangspunkt auf diese Linien gefällten Lote p_α und q_α einen Winkel α resp. $90^\circ + \alpha$ mit der y -Axe einschliessen sollen. Diese Gleichungen haben wir einzeln mit der Bedingungsgleichung für die Berührung einer Geraden mit einem Kegelschnitt

$$A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33}\zeta^2 + 2A_{23}\eta\zeta + 2A_{31}\xi\zeta + 2A_{12}\xi\eta = 0$$

zu verbinden, wo ξ, η, ζ die Koeffizienten in der Gleichung der Linie sind

$$\xi = \cos \alpha \text{ resp. } = -\sin \alpha$$

$$\eta = \sin \alpha \quad \text{»} \quad = \cos \alpha$$

$$\zeta = -p_\alpha \quad \text{»} \quad = -q_\alpha$$

und $A_{11}, A_{22} \dots$ die dem betreffenden Kegelschnitt eigentümlichen Konstanten, die wir schon früher angegeben haben. (S. 18).

Die Bedingungsgleichung wird demnach

$$\frac{\sin^2 2\pi\nu x}{a_2^2} \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 2\pi\nu x}{a_1^2} \sin^2 \alpha + \frac{2\sin^2 2\pi\nu x \cos 2\pi\nu x}{a_1 a_2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin^2 2\pi\nu x}{a_1^2 a_2^2} p_\alpha^2$$

oder

$$\frac{\cos^2 \alpha}{a_2^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{a_1^2} + \frac{2\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\pi\nu x}{a_1 a_2} = \frac{p_\alpha^2}{a_1^2 a_2^2}$$

und daraus folgt

$$p_\alpha = \pm \sqrt{a_1^2 \cos^2 \alpha + a_2^2 \sin^2 \alpha + 2a_1 a_2 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\pi\nu x}.$$

Entsprechend wird für die andere Komponente

$$q_\alpha = \pm \sqrt{a_1^2 \sin^2 \alpha + a_2^2 \cos^2 \alpha - 2a_1 a_2 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\pi\nu x}.$$

Diese Grössen p_α und q_α sind direkt die geforderten Amplituden.

Haben wir den besonderen Fall, dass der Winkel α gleich φ ist, welcher die Neigung der grossen Hauptaxe gegen die y-Axe angiebt, so müssen die Grössen p und q diese Hauptachsen selbst werden. — In der That vergleichen wir die durch den Winkel φ ausgedrückten Hauptachsen, wie wir sie früher gefunden haben, nämlich

$$\sqrt{-\frac{D}{k_1}} = \frac{a_1 a_2 \sin 2\pi\nu x}{\sqrt{a_1^2 \sin^2 \varphi + a_2^2 \cos^2 \varphi - 2a_1 a_2 \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\pi\nu x}}$$

$$\sqrt{-\frac{D}{k_2}} = \frac{a_1 a_2 \sin 2\pi\nu x}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \varphi + a_2^2 \sin^2 \varphi + 2a_1 a_2 \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\pi\nu x}}$$

mit den Ausdrücken für p_α und q_α , wenn wir dort φ für α setzen, so sehen wir, dass sie identisch sind, denn es ist, da $D = -\sin^2 2\pi\nu x$ ist,

$$k_1 a_1^2 a_2^2 = a_1^2 \sin^2 \varphi + a_2^2 \cos^2 \varphi - 2a_1 a_2 \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\pi\nu x = q_\varphi^2,$$

$$k_2 a_1^2 a_2^2 = a_1^2 \cos^2 \varphi + a_2^2 \sin^2 \varphi + 2a_1 a_2 \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\pi\nu x = p_\varphi^2,$$

und folglich $k_1 k_2 a_1^4 a_2^4 = p_\varphi^2 q_\varphi^2$,

es ist aber (cf. pag. 15)

$$\begin{aligned} k_1 k_2 &= \left(\frac{A+B}{2} \right)^2 - \left(\frac{A-B}{2} \right)^2 - C^2 \\ &= AB - C^2 \\ &= \frac{1}{a_1^2 a_2^2} - \frac{\cos^2 2\pi\nu x}{a_1^2 a_2^2} \\ &= \frac{\sin^2 2\pi\nu x}{a_1^2 a_2^2}, \end{aligned}$$

also ist

$$\sin^2 2\pi\nu x \, a_1^2 a_2^2 = p_\varphi^2 q_\varphi^2,$$

und daraus folgt

$$\pm \frac{a_1 a_2 \sin 2\pi\nu x}{q_\varphi} =$$

$$\pm \frac{a_1 a_2 \sin 2\pi\nu x}{\sqrt{a_1^2 \sin^2 \varphi + a_2^2 \cos^2 \varphi - 2a_1 a_2 \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\pi\nu x}} = p_\varphi.$$

Die entsprechende Formel für q_φ folgt unmittelbar daraus. Wir haben damit für die Hauptachsen zugleich die einfacheren Ausdrücke

$$\sqrt{a_1^2 \cos^2 \varphi + a_2^2 \sin^2 \varphi + 2a_1 a_2 \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\pi\nu x}$$

und

$$\sqrt{a_1^2 \sin^2 \varphi + a_2^2 \cos^2 \varphi - 2a_1 a_2 \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\pi\nu x}.$$

Wir wollen noch bemerken, dass die Ausdrücke p_α und q_α für den Fall ($x = 0$ oder) $x = \frac{r}{\nu}$, wo $\cos 2\pi\nu x = 1$ ist, die Werte annehmen

$$p_\alpha = \pm (a_1 \cos \alpha + a_2 \sin \alpha)$$

$$q_\alpha = \pm (a_1 \sin \alpha - a_2 \cos \alpha).$$

Durch die im vorhergehenden gefundenen Formeln sind wir nun in den Stand gesetzt, die Amplituden für irgend zwei senkrecht genommene Richtungen, und folglich für jeden einzelnen auch zu bestimmen.

Da im analysierenden Nikol und hinter ihm die Schwingungen des Lichtes nur nach einer Richtung vor sich gehen, weil die senkrecht dazu erfolgenden vernichtet werden, so können wir, wenn uns der Brechungsquotient für den Nikol und damit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts in ihm und die Wellenlänge bekannt sind, die Wellenlinie ohne weiteres angeben, sie ist einfach die eines linear polarisierten Strahles mit der bestimmten Amplitude.

Aber wir können noch weiter die Intensitätsverhältnisse des austretenden Lichts bei verschiedenen Lagen der Polarisations Ebenen beider Nikols zum Krystall angeben, wenn wir die durch Reflexion und Absorption verloren gegangenen Lichtmengen unberücksichtigt lassen. Die Intensität wird gemessen durch das Quadrat der Amplitude, resp. die Quadratsumme der Amplituden. Sie ist bei der

ursprünglichen durch den ersten Nicol polarisierten Welle a^2 , in dem Krystall $a_1^2 + a_2^2 = a^2$, was aus der Zerlegung an der Grenzfläche folgt. Nach einer nochmaligen Zerlegung ist sie, wie aus den Formeln für p_α und q_α hervorgeht, $p_\alpha^2 + q_\alpha^2 = a_1^2 + a_2^2 = a^2$. Die Intensität bleibt also konstant, wie auch die Schwingungsebenen des Krystalls gegen die des polarisierenden Nikols gedreht sein mögen, wenn nicht eine der beiden Schwingungen vernichtet wird. Einzeln genommen sind die Amplituden der komponierenden Wellenbewegungen weder konstant noch gleich gross, sondern von dem Winkel α abhängig, wie man sofort aus den Werten für p_α und q_α erkennt. In bestimmten Fällen kann für gewisse Lagen sogar eine der Amplituden ganz verschwinden. Es sind nämlich p_α und q_α noch von x abhängig, und wir können beide erst, nachdem uns x gegeben ist, bezüglich ihrer Grösse in den verschiedenen Lagen untersuchen.

Da keine der Amplituden kleiner als 0 und grösser als $a_1^2 + a_2^2 = a^2$ sein kann, im allgemeinen aber diese Grenzen nicht erreicht werden, sondern nur für gewisse Werte von x , so haben wir, indem wir x als konstant betrachten, zunächst nach den Lagen zu fragen, in denen die grössten und kleinsten Werte erreicht werden. Dazu haben wir p_α und q_α nach α zu differenzieren und zu fragen, für welche Werte von α diese Ableitungen verschwinden. Diese geben dann die Maxima und Minima. Wir bilden also

$$2p_\alpha \frac{dp_\alpha}{d\alpha} = -2a_1^2 \cos\alpha \sin\alpha + 2a_2^2 \sin\alpha \cos\alpha \\ - 2a_1 a_2 \sin^2\alpha \cos 2\pi\nu x + 2a_1 a_2 \cos^2\alpha \cos 2\pi\nu x.$$

Die Bedingung eines Maximums oder Minimums ist folglich für p_α :

$$2a_1 a_2 \cos 2\alpha \cos 2\pi\nu x - (a_1^2 - a_2^2) \sin 2\alpha = 0 \\ \text{oder} \quad \frac{2a_1 a_2 \cos 2\pi\nu x}{a_1^2 - a_2^2} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha,$$

für q_α :

$$-2a_1 a_2 \cos 2\alpha \cos 2\pi\nu x + (a_1^2 - a_2^2) \sin 2\alpha = 0 \\ \text{oder} \quad \frac{2a_1 a_2 \cos 2\pi\nu x}{a_1^2 - a_2^2} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

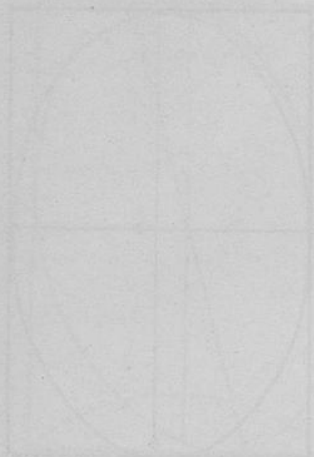
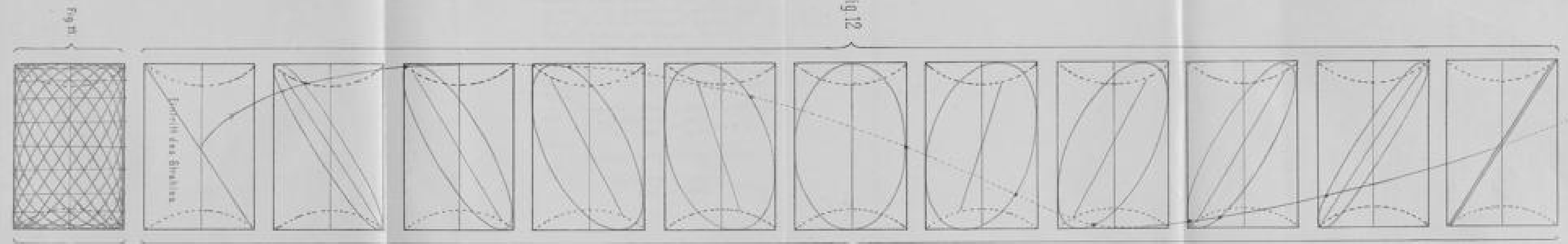
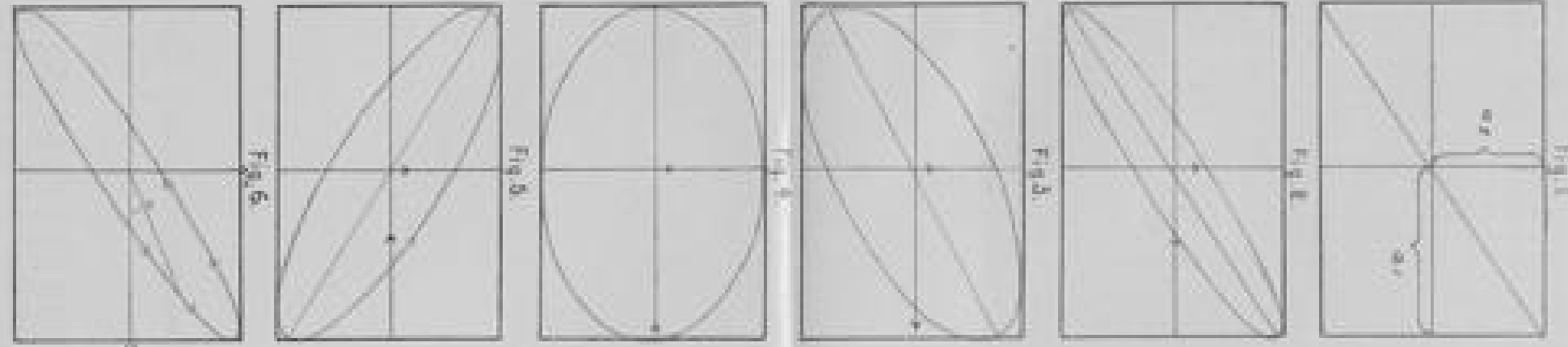
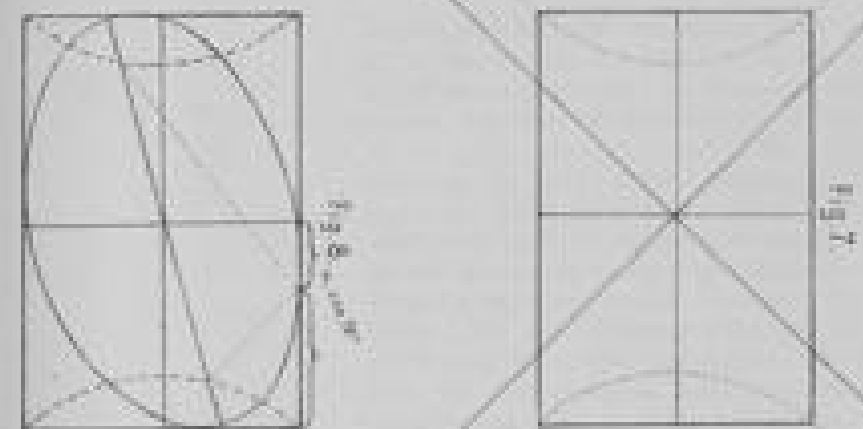
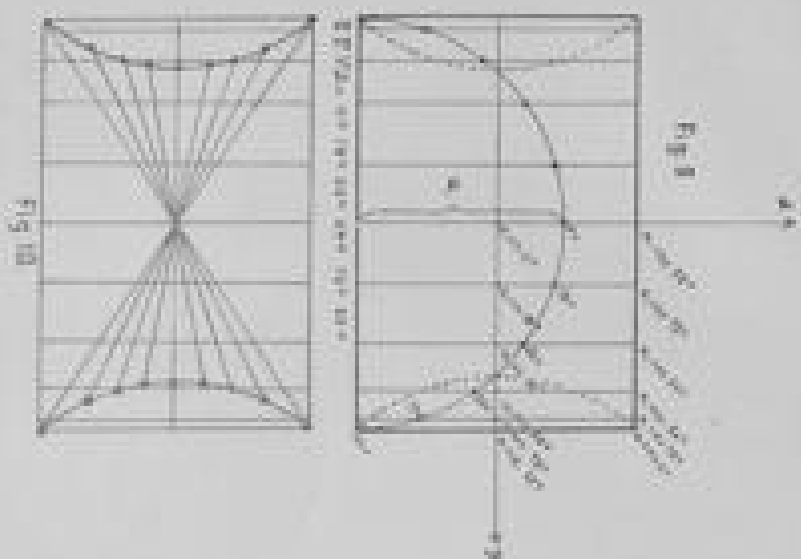
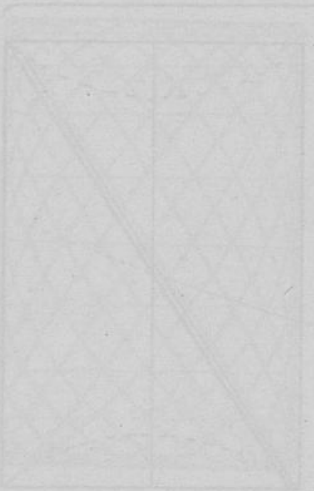


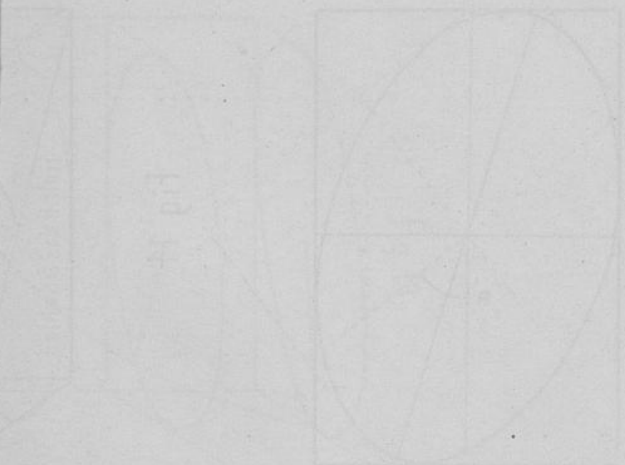
Fig. 15











Die drei ersten
Figuren zeigen
die Construction

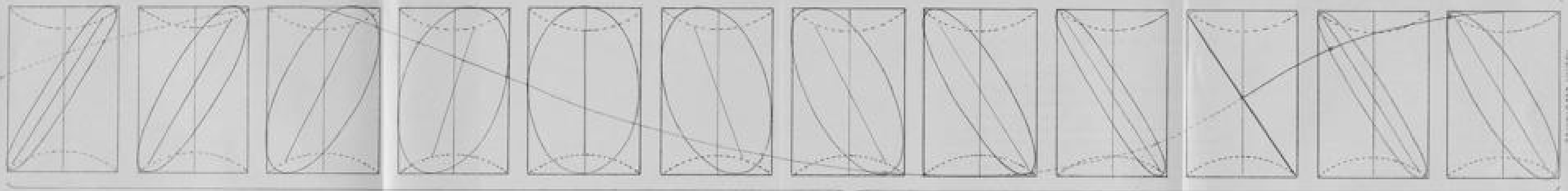


Fig. 12

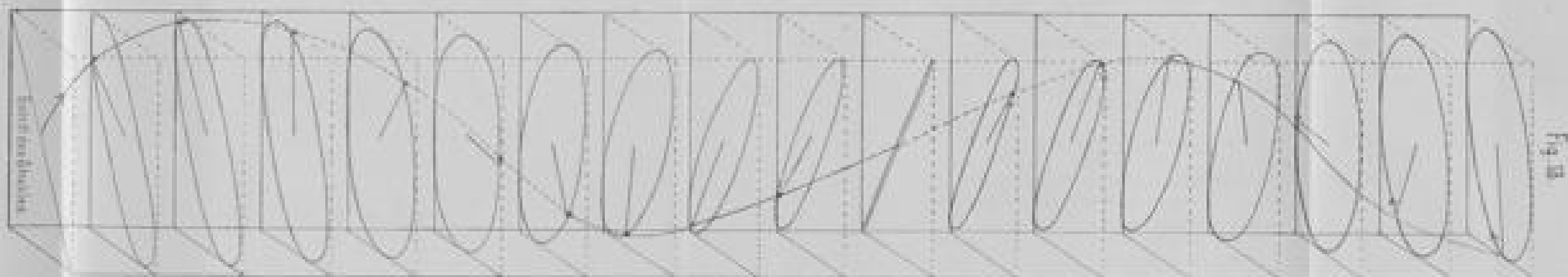
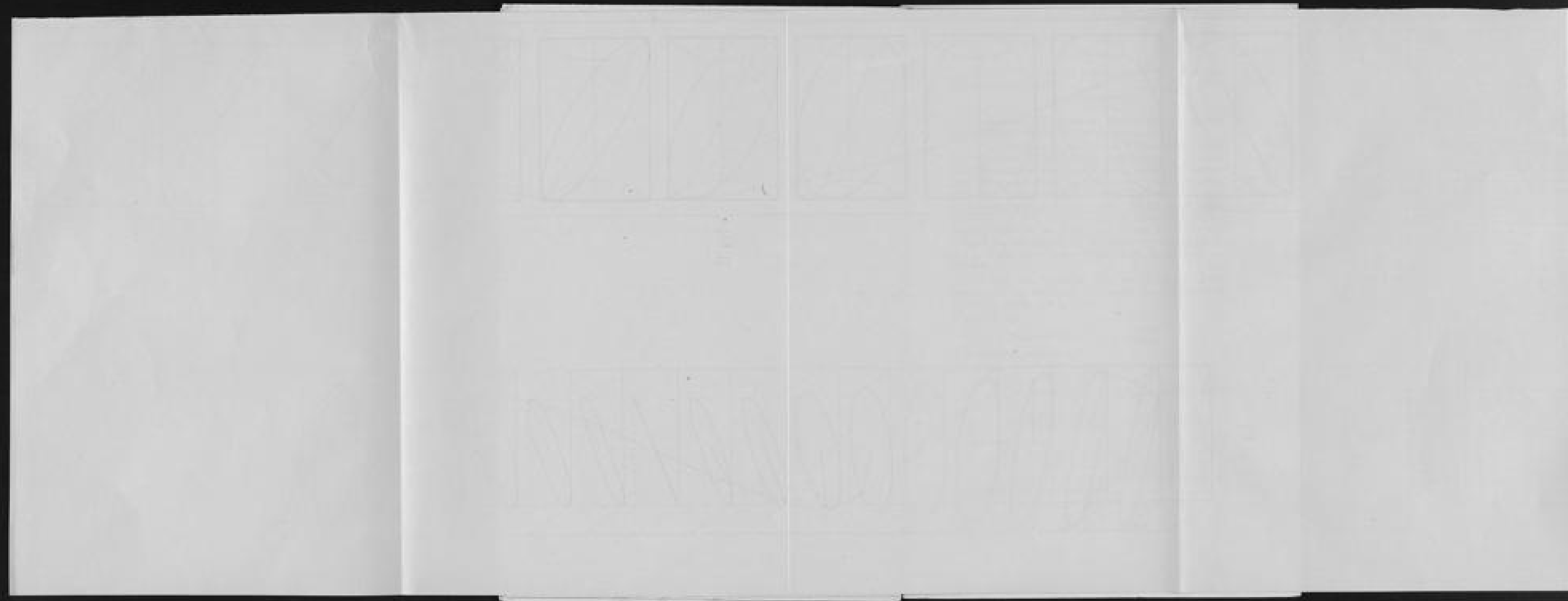


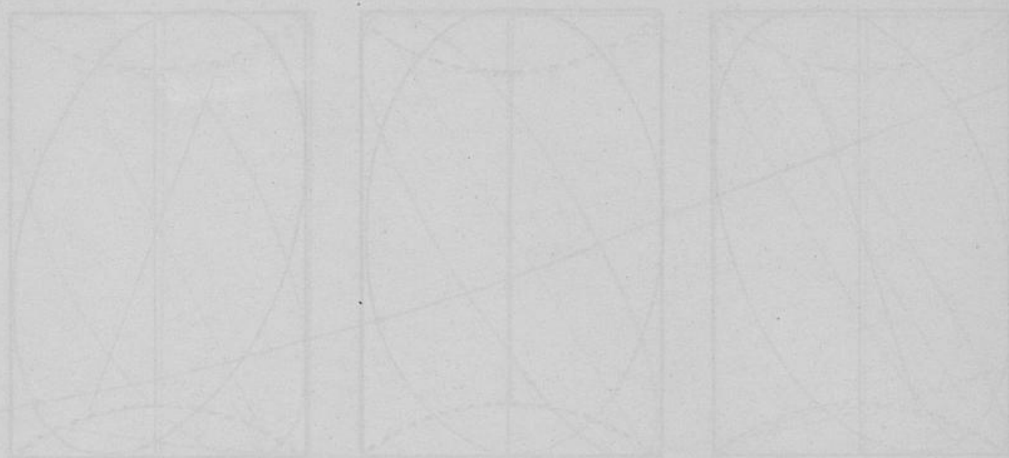
Fig. 13



Fig. 14

— Kreisbogen
— Kreisbogen
— Kreisbogen





1012



Da nun früher für die Richtungen der Haupttaxen der Ellipsen gefunden war

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_1a_2\cos\pi\nu x}{a_1^2 - a_2^2},$$

so sind die Lagen, für welche die Maxima und Minima eintreten, mit den Haupttaxen übereinstimmend.

Es könnte scheinen, als läge eine Widersinnigkeit darin, dass für p_α und q_α dieselbe Bedingung herauskommt. Aber dieser Widerspruch verschwindet sofort, wenn wir beachten, dass, wenn auch die Tangenten zweier Winkel dieselben sind, doch diese noch um 180° oder Vielfache davon verschieden sein können, also die halben Winkel um 90° oder Vielfache von 90° , so dass, wenn in einer Lage die Bedingung erfüllt ist, sie es auch für die um 90° davon verschieden ist, und folglich die Bedingung gleichzeitig für p_α und q_α wegen ihrer rechtwinkligen Lage zu einander erfüllt ist.

Ob nun ein Maximum oder ein Minimum eintritt, können wir am leichtesten entscheiden durch Betrachtung der Werte von p_α und q_α selbst.

Indem wir

$$2a_1a_2\cos 2\pi\nu x = (a_1^2 - a_2^2) \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

in p_α einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} p_{\alpha=2\varphi}^2 &= (a_1^2\cos^2\alpha + a_2^2\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \\ &\quad + 2\sin^2\alpha \cos^2\alpha (a_1^2 - a_2^2) \\ &= a_1^2\cos^2\alpha (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + a_2^2\sin^2\alpha (\cos^2\alpha \\ &\quad + \sin^2\alpha) \\ &= \frac{a_1^2\cos^2\alpha - a_2^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{a_1^2 - a_2^2\operatorname{tg}^2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}. \end{aligned}$$

Ebenso wird:

$$q_{\alpha=2\varphi}^2 = \frac{a_2^2\cos^2\alpha - a_1^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{a_2^2 - a_1^2\operatorname{tg}^2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Da die Nenner für p_α und q_α dieselben sind, so ist für p_α die Bedingung des Maximums

$$\begin{aligned} &a_1^2 - a_2^2\operatorname{tg}^2\alpha > a_2^2 - a_1^2\operatorname{tg}^2\alpha \\ \text{wenn} &-45^\circ < \alpha < 45^\circ \\ \text{oder} &135^\circ < \alpha < 225^\circ \end{aligned}$$

ist, denn für diese Winkel ist der Nenner positiv. Wir haben also

$$a_1^2 - a_2^2 > - (a_1^2 - a_2^2) \operatorname{tg}^2 \alpha$$

oder $\operatorname{tg}^2 \alpha > -1$,

eine Bedingung, die stets erfüllt ist, so dass, wenn α zwischen den oben angegebenen Grenzen liegt, p_α stets Maximum ist; dass q_α dann immer Minimum ist, folgt unmittelbar aus $p_\alpha^2 + q_\alpha^2 = a_1^2 + a_2^2 = a^2$.

Liegt α zwischen 45° und 135°

oder 225° und 315°

so ist die Bedingung dafür, dass p_α Maximum sei, da nun die Nenner von p_α und q_α negativ sind,

$$a_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - a_1^2 > a_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - a_2^2$$

oder $-(a_1^2 - a_2^2) > (a_1^2 - a_2^2) \operatorname{tg}^2 \alpha$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha < -1$$

was unmöglich ist; es kann zwischen diesen Winkeln p_α nie Maximum sein, sondern ist stets Minimum. Es hat mit q_α seine Rolle jetzt vertauscht, was ja schon daraus ersichtlich ist, dass q_α nichts weiter ist als $p_{90^\circ + \alpha}$.

Mit den vorausgehenden Ableitungen sind wir an den Schluss unserer Betrachtungen gelangt. Wir können auf Grund der letzten wie der vorhergehenden Formeln angeben, erstens welcher Art das aus dem Krystall kommende Licht ist, ob elliptisch, kreisförmig oder linear polarisiert, und zweitens, wie wir die Polarisationssebene des zweiten Nikols zu richten haben, um ein Maximum oder ein Minimum der Lichtintensität zu erhalten, und wann durch den Nikol alles Licht durchgelassen wird, und wann es ganz ausgelöscht wird. Wir wollen aber, ehe wir abschliessen, noch einige spezielle Fälle betrachten.

Wenn uns eine Krystallplatte von der Dicke gegeben ist, dass $\cos 2\pi \nu x = 1$ ist, also wenn sie eine Dicke hat $x = \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \frac{3}{\nu} \dots$ allg. $\frac{r}{\nu}$, so haben wir für die Maximal- und Minimalintensität

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 2\varphi &= \frac{2a_1 a_2 \cos 2\pi \nu x}{a_1^2 - a_2^2} \\ &= \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 - a_2^2} \end{aligned}$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{2a_1a_2}{a_1^2 - a_2^2}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} - \operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_1}$$

Folglich haben wir für die Maximal- und Minimalintensität

$$1) \operatorname{tg}\varphi = \frac{a_2}{a_1} \quad 2) \operatorname{tg}\varphi = -\frac{a_1}{a_2}$$

Für die Amplituden der Lichtbewegungen nach diesen beiden Richtungen ergibt sich daraus

$$p_{\varphi}^2 = \frac{a_1^2 - a_2^2 \operatorname{tg}^2\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{a_1^4 - a_2^4}{a_1^2 - a_2^2} = a_1^2 + a_2^2$$

$$q_{\varphi}^2 = \frac{a_2^2 - a_1^2 \operatorname{tg}^2\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi} = a_1^2 \frac{a_2^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} = 0,$$

und für $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a_1}{a_2}$ ergibt sich umgekehrt

$$p_{\varphi}^2 = 0 \quad q_{\varphi}^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

Wenn wir also den Nikol so orientieren, dass seine Schwingungsebene in die durch $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1}{a_2}$ bestimmte Richtung gebracht wird, so erhalten wir die Lichtintensität $a_1^2 + a_2^2$ und das ist die des eintretenden Lichtes. Daraus können wir schliessen, dass das Licht beim Durchgang durch den Krystall und den Nikol seine Schwingungsebene nicht geändert hat, und dass das aus dem Krystall kommende Licht linear polarisiert ist. Das folgt aber direkt nach den früheren Ableitungen aus $\cos 2\pi\nu x = 0$, also für $x = \frac{r}{\nu}$.

Drehen wir andererseits den Nikol so, dass seine Schwingungsebene senkrecht zu der vorigen Lage zu stehen kommt, so haben wir die Intensität 0, oder das Licht ist ganz ausgelöscht.

Nehmen wir statt der planparallelen Platte einen Keil, so wird dieser helle resp. dunkle Streifen an den durch $x = \frac{r}{\nu}$ bestimmten Stellen zeigen.

Ist die Krystallplatte von der Dicke, dass $\cos 2\pi\nu x = 0$ ist, also von der Dicke $x = \frac{1}{4\nu}, \frac{5}{4\nu} \dots$ allgemein $x = \frac{1 + 4r}{4\nu}$, so wird $\operatorname{tg} 2\varphi = 0$, also $\varphi = 0^\circ$ oder $\varphi = 90^\circ$; folglich für $\varphi = 0^\circ$

$$p_{\varphi}^2 = \frac{a_1^2 - a_2^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} = a_1^2$$

$$q_{\varphi}^2 = \frac{a_2^2 - a_1^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} = a_2^2$$

und für $\varphi = 90^\circ$

$$p_{\varphi}^2 = \frac{a_1^2 - a_2^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\frac{a_1^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi} - a_2^2}{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} - 1} = a_2^2$$

$$q_{\varphi}^2 = \frac{a_2^2 - a_1^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\frac{a_2^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi} - a_1^2}{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} - 1} = a_1^2.$$

Die Lichtintensität wird also selbst in der Minimalstellung nie zu null, so lange a_1 und a_2 von null verschieden sind, und den Fall können wir nach früheren Betrachtungen ausschliessen, da dann die Art des Lichtes durch den Krystall nicht modifiziert wird und die Erscheinungen dieselben sind, als wäre gar kein Krystall eingeschaltet. Sind a_1 und a_2 verschieden, so haben wir elliptisch polarisiertes Licht. Für $a_1 = a_2$ tritt der Fall kreisförmig polarisierten Lichtes ein. Die Lichtintensität des aus dem Krystall kommenden Lichtes ist nach allen Richtungen hin, also auch in der Maximal- und Minimalstellung dieselbe.

Was eintritt für $0 < \cos 2\pi\nu x < 1$, kann aus den früheren Formeln und Betrachtungen leicht abgeleitet werden. Wir haben stets elliptisch polarisiertes Licht, die Maximal- und Minimalstellungen der Intensität sind durch φ und die Intensitäten selbst durch $p_{\alpha=\varphi}$ und $q_{\alpha=\varphi}$ gegeben. Beim Drehen des zweiten Nikols vermehrt und vermindert sich die Helligkeit des Gesichtsfeldes kontinuierlich

und erreicht bei einer ganzen Umdrehung zwei Maxima und zwei Minima der Helligkeit, ohne jemals ganz zu verschwinden.

Um unsere Entwicklungen auf bestimmte Beispiele anzuwenden, nehmen wir zunächst einen einaxigen Krystall und zwar eine aus diesem parallel zur optischen Axe geschnittenen Quarzplatte von $\frac{1}{100}$ mm Dicke. Für die Fraunhofersche Linie B mit der Wellenlänge $\lambda = 0,000687$ sind die Brechungsindices der beiden in der Richtung der Plattennormale sich fortpflanzenden Wellen nach Rudberg

$$n_1 = 1,5409 \text{ folgl. } \lambda_1 = \frac{\lambda}{1,5409}$$

$$n_2 = 1,5499 \quad \text{»} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{1,5499}$$

$$\text{also } \nu = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{0,009}{\lambda} = 13,1003.$$

Lassen wir das entsprechende rote Licht senkrecht auf die Platte so fallen, dass nach der Polarisation durch den ersten Nicol seine Schwingungsebene einen solchen Winkel mit den Schwingungsebenen des Krystalls bildet, dass bei der Zerlegung die Komponenten im Verhältnis $a_1 : a_2 = 3 : 2$ stehen, so haben wir für die Richtungen der Maximal- und Minimalintensität unsere Gleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\varphi &= \frac{2a_1a_2\cos 2\pi\nu x}{a_1^2 - a_2^2} = \frac{2\frac{a_1}{a_2}\cos 2\pi\nu x}{\frac{a_1^2}{a_2^2} - 1} \\ &= \frac{2\frac{3}{2}\cos 2\pi\nu x}{\frac{9}{4} - 1} = \frac{12\cos 2\pi\nu x}{5} \\ &= \frac{12\cos 2\pi \cdot 13,1003 \cdot 0,01}{5} \\ &= \frac{12\cos 2\pi \cdot 0,131003}{5} \end{aligned}$$

$$= \frac{12}{5} \cos 2\pi \cdot \frac{0.131003 \cdot 360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi}$$

$$= \frac{12}{5} \cos 47^\circ 9' 40''$$

$$\text{also } 2\varphi = 58^\circ 30' + h\pi; h = 0 \ 1 \ 2 \dots$$

$$\varphi_1 = 29^\circ 15'$$

$$\varphi_2 = 119^\circ 15'$$

Wegen $-45^\circ < \varphi_1 < 45^\circ$ tritt für die Richtung $\varphi_1 = 29^\circ 15'$ das Maximum, für $119^\circ 15'$ das Minimum der Intensität ein. Da $\cos 2\pi\nu x$ nicht $= 1$ ist, so ist das Minimum grösser als 0. Das erkennen wir schon daraus, dass

$$\begin{aligned} \varphi_1 = 29^\circ 15' &< \operatorname{tg} \frac{a_2}{a_1} \\ &< \operatorname{tg} \frac{2}{3} \text{ ist.} \end{aligned}$$

Um aus dem Krystall linear polarisiertes Licht zu erhalten, müssten wir dessen Dicke gleich $\frac{r}{\nu}$ machen, also

$$\text{etwa} = \frac{1}{13,1003} \text{ mm oder } \frac{2}{13,1003} \text{ mm etc.}$$

Als zweites Beispiel nehmen wir einen zweiaxigen Krystall. Es sei aus Gyps ein Blättchen von $\frac{1}{4}$ mm Dicke parallel der Ebene der optischen Axen geschnitten, nach welcher Richtung der Gyps sehr gut spaltbar ist; dies sei so in den Polarisationsapparat gebracht, dass die Schwingungsebene des ersten Nikols gerade die Schwingungsebene im Blättchen halbiert, so dass also bei der Zerlegung die beiden Komponenten a_1 und a_2 gleich werden. Wir wissen, dass in diesem Falle die Richtungen der Maximal- und Minimalintensität für das aus dem Krystall tretende Licht stets dieselben sind (cf. S. 22), welche Dicke der Krystall auch hat, denn φ ist nicht mehr von x abhängig. Dieser Winkel φ ist gleich 45° resp. 135° . Aber wir wissen nicht, wie gross im Einzelfall die Intensitäten des austretenden Lichtes nach diesen beiden Richtungen sind. Diese finden wir durch die Formel

$$p^2 = a_1^2 \cos 2\alpha + a_2^2 \sin^2 \alpha + 2a_1 a_2 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\pi\nu x$$

wo wir $\alpha = 45^\circ$ zu setzen haben. Die Ausrechnung mit

Einsetzung der besonderen Werte giebt, da die beiden in Betracht kommenden Brechungsindices

$$n_1 = 1,520717$$

$$n_2 = 1,530483$$

sind, und folglich die entsprechenden Wellenlängen, wenn wir gelbes Licht ($\lambda = 0,000589$) nehmen,

$$\lambda_1 = \frac{0,000589}{1,520717}$$

$$\lambda_2 = \frac{0,000589}{1,530483}$$

$$\text{sind und } \nu = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{0,009766}{0,000589} = 16,581,$$

$$p^2 = \cos^2 45^\circ (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos 2\pi \frac{16,581}{4})$$

$$p^2 = 2\cos^2 45^\circ (1 + \cos 2\pi \cdot 4,145)$$

wenn wir $a_1 = a_2 = 1$ nehmen.

$$p^2 = 2 \cdot (0,7071)^2 \left(1 + \cos 2\pi \cdot \frac{4,145 \cdot 360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi} \right)$$

$$= 2 \cdot (0,7071)^2 (1 + \cos 52^\circ 12')$$

$$= 2 \cdot (0,7071)^2 (1 + 0,6129)$$

$$= 1,612$$

Für q^2 haben wir folglich

$$q^2 = (p^2 + q^2) - p^2 = 2 - 1,612 = 0,388.$$

Damit aus dem Krystall kreisförmig polarisiertes Licht austritt, muss seine Dicke

$$x = \frac{1}{16,581} \text{ oder } = \frac{2}{16,581} \cdot \cdot \cdot \text{ sein.}$$

Berichtigungen.

Seite 6 Zeile 13 von unten lies Teilchen statt Teilchens.

» 8 » 19 » oben » sich bewegt statt bewegt.

» 10 » 6 » » » $\sin^2 2\pi x$ statt $\sin 2\pi x$.

» 14 » 3 » unten » $\sin 2\varphi$ statt $\sin^2 \varphi$.

» 16 » 2 » oben » $2C \sin \varphi \cos \varphi$ statt $2 \sin \varphi \cos \varphi$.

» 16 » 3 » » » $+ 2a_1 a_2 \sin \varphi \dots$ statt $- 2a_1 a_2 \sin \varphi \dots$

» 25 » 23 » unten » $\frac{3}{2\nu}$ statt $\frac{1}{3\nu}$.

» 31 » 16 » » » jede einzelne statt jeden einzelnen.

Einsetzung der
Betracht komm

sind, und folg
wir gelbes Lieh

sind und $\nu = \frac{1}{\lambda}$

$$p^2 = \cos$$

$$p^2 = 2\cos$$

wenn wir $a_1 =$

$$p^2 = 2$$

$$= 2$$

$$= 2$$

$$= 1,0$$

Für q^2 haben v

$$q^2 = (p^2$$

Damit aus
austritt, muss s

$$x =$$

Seite 6 Zeile

» 8 »

» 10 »

» 14 »

» 16 »

» 16 »

» 25 »

» 31 »

© The Tiffen Company, 2007

TIFFEN® Gray Scale



enden in

n, wenn

$$\frac{1}{\lambda}$$

$$60 \cdot 60)$$

38.

tes Licht

3.

gt.

$$\cos \varphi.$$

$$2a_1a_2\sin \varphi \dots$$

einzelnen.

Handlung des Deutschen Volksrechts

— 1830 —

— 1830 —

Handlung des Deutschen Volksrechts

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —

— 1830 —