

Ein Attraktionsproblem.



Von
F. Oskar Otto,
Oberlehrer an der Realschule zu Werdau.



1896. Progr. No. 592.

9we
72 (1896)

5926



Bestimmung

der freien Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse einer nach einem festen Centrum hin gerichteten Kraft von der Form:

$$P = \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^3} + \frac{C}{r^4}.$$

§ 1.

Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung.

Wird ein materieller Punkt durch irgend einen anfänglichen Stoss in Bewegung gesetzt, und wirkt dann beständig eine (konstante oder variable) Kraft auf ihn, welche stets durch einen festen Punkt — das Kraftcentrum — hindurchgeht, so nennt man bekanntlich seine Bewegung eine Centralbewegung.

Es gilt bei einer solchen der bekannte Satz, dass der materielle Punkt mit dem Kraftcentrum beständig in ein und derselben Ebene bleiben muss, — und zwar ist das diejenige Ebene, welche durch das Kraftcentrum und die Anfangsgeschwindigkeit bestimmt ist.

Bei der uns vorliegenden Centralbewegung nehmen wir diese Ebene der Bahn als Ebene der XY -Koordinaten an und wählen das feste Kraftcentrum zum Anfangspunkt O unseres Koordinatensystemes. Der jeweilige Abstand des Koordinatenursprungs O von dem materiellen Punkte mit der Masse m heisse r ; dieser Radius vector r verbleibt beständig in der Ebene der Bahn und ist seiner Natur nach stets eine reelle und positive Grösse:

$$(1) \quad r \geq 0.$$

Die von unserem Kraftcentrum auf m ausgeübte Kraft sei eine attraktive, also nach O hin gerichtete und ihrer absoluten Grösse nach gleich

$$(2) \quad P = f(r) = \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^3} + \frac{C}{r^4}.$$

Zu Anfang der Bewegung, nämlich zur Zeit $t = t_0$, besitze der Punkt die Geschwindigkeit $v = v_0$, und der zugehörige Fahrstrahl r sei $r = r_0$. Diesen Radius vector r_0 wählen wir unbeschadet der Allgemeinheit so, dass er mit der positiven X-Achse zusammenfällt, so dass also $r_0 = x_0$ und $y_0 = 0$ ist.

Der Winkel, welchen zur Zeit t der Radius vector r mit der positiven X-Achse bildet, heisse φ , und derjenige, den die Bahntangente mit OX bildet, heisse τ . — Zu Anfang ist also $\varphi = \varphi_0 = 0$, und τ_0 giebt uns die Anfangsrichtung der Geschwindigkeit an.

Wir setzen überdies voraus, dass die Anfangsgeschwindigkeit v_0 sowohl wie r_0 und die Koeffizienten A, B und C reelle und endliche Grössen sein sollen.

Zwischen den rechtwinkligen und den Polar-Koordinaten bestehen nun immer die Relationen:

$$(3) \quad \begin{array}{lll} x = r \cos \varphi; & y = r \sin \varphi; & x^2 + y^2 = r^2 \\ x_0 = r_0 & ; & y_0 = 0 \quad ; \quad \varphi_0 = 0 \end{array}$$

Durch Differentiation erhält man daraus:

$$(4) \quad \begin{cases} dx = \cos \varphi \, dr - r \sin \varphi \, d\varphi \\ dy = \sin \varphi \, dr + r \cos \varphi \, d\varphi, \end{cases}$$

woraus hervorgeht, dass

$$(5) \quad dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = ds^2,$$

unter ds das Element der Bahnkurve verstanden.

Die jeweilige Geschwindigkeit v ist definiert durch die Gleichung:

$$(6) \quad v^2 dt^2 = ds^2,$$

und die Komponenten derselben in Richtung der X- und Y-Achse sind

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v \sin \tau.$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) gewinnt man

$$(7) \quad v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Die allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung lauten nun:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \mathcal{X}; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \mathcal{Y}, \quad \text{wobei}$$

$$\mathcal{X} = \varepsilon P \cos(X, P), \quad \mathcal{Y} = \varepsilon P \cos(Y, P), \quad \text{also}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon \frac{P}{m} \cos \varphi = \varepsilon \frac{P}{m} \frac{x}{r} = \frac{\varepsilon}{m} \left(\frac{Ax}{r^3} + \frac{Bx}{r^4} + \frac{Cx}{r^5} \right) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \varepsilon \frac{P}{m} \sin \varphi = \varepsilon \frac{P}{m} \frac{y}{r} = \frac{\varepsilon}{m} \left(\frac{Ay}{r^3} + \frac{By}{r^4} + \frac{Cy}{r^5} \right). \end{cases}$$

Hierbei ist $\varepsilon = \pm 1$ zu setzen, je nachdem die Kraft P eine abstossende oder anziehende ist. In unserem Falle ist also $\varepsilon = -1$.

Unsere Kraft P ist nun eine Funktion der Entfernung $P = f(r)$; sie besitzt sonach eine Kräftefunktion $F(r)$, welche ich erhalte durch die Gleichung:

$$(9) \quad \begin{aligned} F(r) &= \int f(r) dr = \int (Ar^{-2} + Br^{-3} + Cr^{-4}) dr \\ &= \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r^3}. \end{aligned}$$

Setze ich $\varepsilon F(r) = -F(r) = U$, so werden unsere Bewegungsgleichungen (8) zu

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned}$$

Nun gilt bei der Centralbewegung der Flächensatz:

$$(10) \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \text{const.}$$

und ebenso der Satz von der Erhaltung der Kraft:

$$(11) \quad m \frac{v^2}{2} = U + h = -F(r) + h,$$

unter h eine Integrationskonstante verstanden.

Nennen wir das von O auf die jeweilige Bahntangente gefällte

Perpendikel p und bezeichnen die Flächenkonstante mit c , so schreibt sich die Gleichung (10) auch folgendermassen:

$$r^2 d\varphi = x dy - y dx = c dt = p. ds.$$

$$v = \frac{c}{p}.$$

Die Integrationskonstanten c und h sind durch die Anfangswerte leicht zu bestimmen:

$$(12) \quad \begin{cases} c = r_0 v_0 \sin \tau_0 = p_0 v_0 \\ h = \frac{m v_0^2}{2} + \frac{A}{r_0} + \frac{B}{r_0^2} + \frac{C}{r_0^3}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (7) und (11) gewinnt man

$$(13) \quad U + h = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right),$$

woraus unter Berücksichtigung von (10) erhalten wird, dass die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung des Fahrstrahls r gleich ist:

$$(14) \quad \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (U + h) - \frac{c^2}{r^2}}$$

oder, da $d\varphi = \frac{c}{r^2} dt$, dass das Zeitdifferential

$$(15) \quad \begin{cases} dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (U + h) - \left(\frac{c}{r} \right)^2}} \\ d\varphi = \pm \frac{c dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m} (U + h) - \left(\frac{c}{r} \right)^2}}. \end{cases} \quad \text{und demnach}$$

Hierbei ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem mit wachsender Zeit r resp. φ entweder zu- oder abnimmt.

Setzen wir nun — und das thut bei der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes der Allgemeinheit keinen Abbruch — die Konstante $m = 1$, so erhalten wir unsere Gleichungen in nachstehender Form:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\varphi = \pm \frac{cdr}{r^2 \sqrt{2h - 2(Ar^{-1} + Br^{-2} + Cr^{-3}) - c^2 r^{-2}}} \\ dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{2h - 2(Ar^{-1} + Br^{-2} + Cr^{-3}) - \frac{c^2}{r^2}}} \\ v^2 = 2h - 2(Ar^{-1} + Br^{-2} + Cr^{-3}), \text{ wobei} \\ c = v_0 p_0 = r_0 v_0 \sin \tau_0 \\ h = \frac{v_0^2}{2} + Ar_0^{-1} + Br_0^{-2} + Cr_0^{-3}. \end{array} \right.$$

Damit haben wir 2 Differentialgleichungen erhalten, mit deren Hilfe sich die Bahn des Mobils bestimmen lassen wird. Die eine giebt uns eine Relation zwischen dem Radius vector r und der Zeit t , die andere zwischen dem Fahrstrahl und dem Polarwinkel φ .

Daraus folgen die Integrale

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{cdr}{r^2 \sqrt{2h - 2Ar^{-1} - (2B + c^2)r^{-2} - 2Cr^{-3}}}$$

$$t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2h - 2Ar^{-1} - (2B + c^2)r^{-2} - 2Cr^{-3}}}$$

oder da ich, ohne dass die Allgemeinheit darunter leidet, $t_0 = 0$ setzen kann:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \pm \int_{r_0}^r \frac{cdr}{r^2 \sqrt{2h - \frac{2A}{r} - \frac{2B + c^2}{r^2} - \frac{2C}{r^3}}} \\ t = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2h - \frac{2A}{r} - \frac{2B + c^2}{r^2} - \frac{2C}{r^3}}} \end{array} \right.$$

Führen wir nun eine neue Variable ϱ ein und setzen

$$(18) \quad \frac{1}{r} = \varrho, \quad \text{also} \quad dr = -\frac{d\varrho}{\varrho^2}, \quad \text{so wird,}$$

da r immer reell und ≥ 0 ist, auch ϱ immer reell und ≥ 0 sein müssen. Für $r=1$ wird $\varrho=1$; für $r=0$ wird $\varrho=\infty$ und umgekehrt. Wenn also r von 0 bis $+\infty$ anwächst, so nimmt ϱ

von $+\infty$ bis 0 ab. Dem Werte r_0 entspreche der Wert q_0 . Dann lauten unsere Integrale (17):

$$(19) \quad \begin{cases} \varphi = \mp \int_{q_0}^q \frac{cdq}{\sqrt{2h - 2Aq - (2B + c^2)q^2 - 2Cq^3}} \\ t = \mp \int_{q_0}^q \frac{dq}{q^2 \sqrt{2h - 2Aq - (2B + c^2)q^2 - 2Cq^3}}. \end{cases}$$

Die beiden Integrale sind wieder elliptisch, denn der Radikand ist vom 3. Grade in q . Bezeichnen wir das Polynom unter dem Wurzelzeichen kurz mit $R(q)$, so werden unsere Formeln (16) zu

$$(20) \quad \begin{cases} \varphi = \mp \int_{q_0}^q \frac{c \cdot dq}{\sqrt{R(q)}} \\ t = \mp \int_{q_0}^q \frac{dq}{q^2 \sqrt{R(q)}} \\ v^2 = 2h - 2[Aq + Bq^2 + Cq^3] = R(q) + c^2q^2 \\ R(q) = 2h - 2Aq - (2B + c^2)q^2 - 2Cq^3. \end{cases}$$

Sollen nun unsere Integrale nicht imaginär werden und q sowohl wie t reelle Werte erhalten, so muss [bei reellen positiven Werten von q] unser Radikand $R(q)$ stets positiv sein.

§ 2.

Ueber die Funktion $R(q)$.

Bevor wir unsere elliptischen Integrale auf die Normalform bringen können und zwar derart, dass reelle Integrale mit reeller Amplitude und reellem Modul entstehen, müssen wir zunächst die Funktion

$$(21) \quad \begin{aligned} R(q) &= 2h - 2Aq - (2B + c^2)q^2 - 2Cq^3 \\ &= -[2Cq^3 + (2B + c^2)q^2 + 2Aq - 2h] \end{aligned}$$

einer genaueren Untersuchung unterwerfen.

Wir betrachten zweckmässig die Gleichung (21) als Gleichung einer ebenen Kurve in einem rechtwinkligen Koordinatensystem

$q =$

mit den Abscissen ϱ . Für die Wurzelwerte $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ der kubischen Gleichung $R(\varrho) = 0$ wird dann diese kubische Kurve die ϱ -Achse schneiden, und die Maximal- resp. Minimalwerte der Ordinaten werden uns dann gegeben sein durch die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\frac{dR(\varrho)}{d\varrho} = 0 = -2A - 2(2B + c^2)\varrho - 6C\varrho^2.$$

Für unendlich grosse positive Werte von ϱ wird die Kurve $R(\varrho)$ selbst

positiv sein, sobald $C \leq 0$ und
negativ „ „ „ $C \geq 0$.

Damit unser Radikal $\sqrt{R(\varrho)}$ reelle Werte ergibt, dürfen wir nun unser ϱ nur innerhalb solcher Intervalle sich bewegen lassen, dass $R(\varrho)$ stets positiv ist. Wir erhalten somit in jedem einzelnen Falle die Grenzen für die Bahnen unseres Mobils, wenn wir die Gleichung (21) auf ihre Nullwerte hin untersuchen.

Als Wurzelwerte der vollständigen kubischen Gleichung

$$(22) \quad \begin{cases} 2C\varrho^3 + (2B + c^2)\varrho^2 + 2A\varrho - 2h = 0 & \text{oder} \\ 2C(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)(\varrho - \varrho_3) = 0 & \text{oder} \\ \varrho^3 + \frac{2B + c^2}{2C}\varrho^2 + \frac{A}{C}\varrho - \frac{h}{C} = 0 \end{cases}$$

liefert bekanntlich die Cardanische Formel:

$$\varrho = -\frac{2B+c^2}{6C} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{1} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\left(2\left(\frac{2B+c^2}{2C}\right)^3 - 9\frac{2A(2B+c^2)}{(2C)^2} - 27\frac{h}{C}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{27D_3}} \\ + \frac{1}{3}\sqrt[3]{1^2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\left(2\left(\frac{2B+c^2}{2C}\right)^3 - 9\frac{2A(2B+c^2)}{(2C)^2} - 27\frac{h}{C}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{27D_3}}$$

unter D_3 das neg. Produkt der quadrierten Wurzeldifferenzen, die sog. kubische Diskriminante, verstanden:

$$(24) \quad D_3 = \frac{1}{27} \left[\frac{2(2B + c^2)^3}{(2C)^3} - 9\frac{2A(2B + c^2)}{(2C)^2} - 27\frac{h}{C} \right]^2 \\ - \frac{4}{27} \left[\left(\frac{2B + c^2}{2C} \right)^2 - 3\frac{A}{C} \right]^3 \\ = -(\varrho_1 - \varrho_2)^2(\varrho_2 - \varrho_3)^2(\varrho_1 - \varrho_3)^2.$$

Von der Beschaffenheit dieser Invarianten hängt wie bekannt die Reellität der Wurzeln q_1, q_2, q_3 ab. Ist nämlich

$D_3 \geq 0$, so wird eine von den 3 Wurzeln (q_1) reell, und die anderen beiden (q_2 und q_3) werden conjugiert imaginär sein. — Für den Specialfall $D_3 = 0$ werden diese beiden komplexen Wurzeln auch reell und ausserdem einander gleich. — Wird im besonderen die Diskriminante D_3 so gleich Null, dass sie in ihren einzelnen Teilen verschwindet, dass also der quadrierte Minuend (die kubische Variante) $= 0$ und gleichzeitig der kubierte Subtrahend (die quadratische Variante) $= 0$, [dann muss $\frac{A}{C}$ $= \frac{1}{3} \left(\frac{2B + c^2}{2C} \right)^2$ und $\frac{h}{C} = -\frac{1}{27} \left(\frac{2B + c^2}{2C} \right)^3$ sein], so erhalten wir 3 reelle und einander gleiche Wurzeln; denn dann ist $R(q) = \left(q + \frac{1}{3} \frac{2B + c^2}{2C} \right)^3 = 0$. Ist aber

$D_3 \leq 0$, so sind alle 3 Wurzeln reell [im Falle $D_3 = 0$ sind wieder 2 derselben einander gleich, und wenn im besonderen wieder die beiden Varianten gleichzeitig verschwinden, alle 3 einander gleich], und zwar werden, wenn q_1 positiv ist, q_2 und q_3 entweder beide negativ oder beide positiv sein und ebenso, wenn q_1 negativ ist. — Ist die kubische Variante $= 0$, so verschwinden in der Cardanischen Formel die Kubikwurzeln, und wir erhalten 3 Wurzeln, die eine arithmetische Proportion bilden.

Mit den Wurzelwerten q_1, q_2, q_3 hängen die Koeffizienten unserer Gleichung (22) durch folgende Formeln zusammen:

$$q_1 q_2 q_3 = \frac{h}{C} ; \quad q_1 + q_2 + q_3 = -\frac{2B + c^2}{2C}$$

$$q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_1 q_3 = \frac{A}{C}.$$

Nach der Beschaffenheit des Absolutgliedes $\left[-\frac{h}{C} \right]$ unserer Gleichung (22) richtet sich das Vorzeichen der einen stets reellen Wurzel q_1 , denn ist das Absolutglied positiv, so ist das Produkt der Wurzeln negativ und umgekehrt.

Wir können sonach folgende Fälle unterscheiden:

I. Hauptfall. $D_3 \leq 0$. Alle Wurzeln q_1, q_2, q_3 sind reell.

Fall A. $\frac{h}{C} > 0$, also h und C von gleichem Vorzeichen.

Eine Wurzel positiv.

A₁: Die beiden anderen Wurzeln auch positiv:

$$q_1(\text{pos}) < q_2(\text{pos}) < q_3(\text{pos}).$$

a) $C > 0$ (also auch $h > 0$)

a₁) q liegt zwischen $-\infty \dots q_1(\text{pos})$

a₂) q " " $q_2(\text{pos}) \dots q_3(\text{pos})$.

b) $C < 0$ (ebenso $h < 0$).

b₁) q liegt zwischen $q_1(\text{pos}) \dots q_2(\text{pos})$.

b₂) q " " $q_3(\text{pos}) \dots +\infty$.

A₂: Die beiden anderen Wurzeln sind negativ:

$$q_1(\text{neg}) < q_2(\text{neg}) < q_3(\text{pos}).$$

a) $C > 0$ (also auch $h > 0$)

a₁) q liegt zwischen $-\infty \dots q_1(\text{neg})$

a₂) q " " $q_2(\text{neg}) \dots q_3(\text{pos})$.

b) $C < 0$ (und $h < 0$)

b₁) q liegt zwischen $q_1(\text{neg}) \dots q_2(\text{neg})$

b₂) q " " $q_3(\text{pos}) \dots +\infty$.

Fall B. $\frac{h}{C} < 0$, also h und C von ungleichem Vorzeichen.

Eine Wurzel negativ.

B₁: Die beiden anderen Wurzeln q sind positiv:

$$q_1(\text{neg}) < q_2(\text{pos}) < q_3(\text{pos}).$$

a) $C > 0$ (also $h < 0$)

a₁) q liegt zwischen $-\infty \dots q_1(\text{neg})$

a₂) q " " $q_2(\text{pos}) \dots q_3(\text{pos})$.

b) $C < 0$ (also $h > 0$)

b₁) q liegt zwischen $q_1(\text{neg}) \dots q_2(\text{pos})$

b₂) q " " $q_3(\text{pos}) \dots +\infty$.

B₂: Die Wurzeln sind sämtlich negativ:

$$\varrho_1(\text{neg}) < \varrho_2(\text{neg}) < \varrho_3(\text{neg}).$$

a) $C > 0$ (also $h < 0$)

$a_1)$ ϱ liegt zwischen $-\infty \dots \varrho_1(\text{neg})$

$a_2)$ „ „ „ $\varrho_2(\text{neg}) \dots \varrho_3(\text{neg})$.

b) $C < 0$ (also $h > 0$)

$b_1)$ ϱ liegt zwischen $\varrho_1(\text{neg}) \dots \varrho_2(\text{neg})$

$b_2)$ ϱ „ „ „ $\varrho_3(\text{neg}) \dots +\infty$.

II. Hauptfall. $D_3 \geq 0$. Eine Wurzel (ϱ_1) ist reell; zwei Wurzeln ($\varrho_2 = p + iq$; $\varrho_3 = p - iq$) conjug. imagin.

Fall A. $\frac{h}{C} > 0$, also h und C von gleichem Vorzeichen

Die Wurzel ϱ_1 ist positiv.

a) $C > 0$ (also auch $h > 0$)

ϱ liegt zwischen $-\infty \dots \varrho_1(\text{pos})$.

b) $C < 0$ (also auch $h < 0$)

ϱ liegt zwischen $\varrho_1(\text{pos}) \dots +\infty$.

Fall B. $\frac{h}{C} < 0$, also h und C von ungleichem Vorzeichen.

Die Wurzel ϱ_1 ist negativ.

a) $C > 0$ (also $h < 0$)

ϱ liegt zwischen $-\infty \dots \varrho_1(\text{neg})$.

b) $C < 0$ (also $h > 0$)

ϱ liegt zwischen $\varrho_1(\text{neg}) \dots +\infty$.

Schliessen wir nun von vornherein alle diejenigen Fälle von unserer Betrachtung aus, in denen das seiner Natur nach stets positive $\varrho = \frac{1}{r}$ nur negative Werte annehmen darf — obgleich auch diese ihre analytische Bedeutung haben — so reduzieren sich die vorstehenden 20 Fälle auf folgende (wobei wir die Wurzelwerte $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$ mit $\alpha < \beta < \gamma$ bezeichnen wollen):

I. Hauptfall. $D_3 \leq 0$.

Fall 1. $D_3 \leq 0$; $C > 0$; $h > 0$; $-\infty < \varrho < \alpha(\text{pos})$

$r > \frac{1}{\alpha}(\text{pos})$ d. h.: Der Punkt m darf sich im ganzen unendlichen

Raum bewegen; nur kann er niemals innerhalb eines Kreises gelangen, der um das Attraktionscentrum mit dem Radius $\frac{1}{\alpha}$ beschrieben werden kann.

Fall 2. $D_3 \leq 0$; $C > 0$; $h > 0$; $\beta(\text{pos}) \dots < \varrho < \dots \gamma(\text{pos})$;
 $\frac{1}{\beta}(\text{pos}) > r > \frac{1}{\gamma}(\text{pos})$ d. h. Unser Mobil darf sich innerhalb eines Kreisringes bewegen, welcher von 2 concentrischen um das Anziehungscentrum gelegten Kreisen mit den Radien $\frac{1}{\beta} > \frac{1}{\gamma}$ begrenzt wird.

Fall 3. $D_3 \leq 0$; $C < 0$; $h < 0$; $\alpha(\text{pos}) < \varrho < \beta(\text{pos})$; $\frac{1}{\alpha} > r > \frac{1}{\beta}$
 d. h. Das Bewegungsgebiet für unseren Massenpunkt ist also wieder ein Kreisring um das feste Kraftcentrum. Die Radien der Grenzkreise sind gegeben durch die reciproken Wurzelwerte $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

Fall 4. $D_3 \leq 0$; $C < 0$; $h < 0$; $\gamma(\text{pos}) < \varrho < +\infty$; $\frac{1}{\gamma} > r > 0$.
 In diesem Falle kann unser materieller Punkt über einen bestimmten durch den reciproken Wurzelwert $\frac{1}{\gamma}$ gegebenen Kreis um 0 nicht hinausgelangen.

Fall 5. $D_3 \leq 0$; $C > 0$; $h > 0$; $\beta(\text{neg}) < \varrho < \gamma(\text{pos})$. Das Bewegungsgebiet ist ein deformierter (durch $\pm \infty$ hindurch gezogener) Kreisring, dessen einer Grenzkreis den positiven Radius $\frac{1}{\gamma}$, dessen anderer den negativen Radius $\frac{1}{\beta}$ besitzt.

Fall 6. $D_3 \leq 0$; $C < 0$; $h < 0$; $\gamma(\text{pos}) \dots < \varrho < \dots +\infty$;
 $\frac{1}{\gamma} > r > 0$. Wie im Falle 4 schliesst ein Kreis um das anziehende Centrum die Bahnkurven ein.

Fall 7. $D_3 \leq 0$; $C < 0$; $h < 0$; $\beta(\text{pos}) < \varrho < \gamma(\text{pos})$;
 $\frac{1}{\beta} > r > \frac{1}{\gamma}$. Es gilt dasselbe wie im Falle 2.

Fall 8. $D_3 \leq 0$; $C < 0$; $h > 0$; $\alpha(\text{neg}) < \varrho < \beta(\text{pos})$. Das Resultat ist ähnlich dem im Falle 5.

Fall 9. $D_3 < 0$; $C < 0$; $h > 0$; $\gamma(\text{pos}) \dots < \varrho < \dots + \infty$; $\frac{1}{\gamma} > r > 0$.

Also wie in den Fällen 4 und 6.

Fall 10. $D_3 \leq 0$; $C < 0$; $h > 0$; $\gamma(\text{neg}) < \varrho < +\infty$, d. h. Der Punkt hat in diesem Falle eine sehr grosse Freiheit der Bewegung; denn der ganze unendliche Raum für positive Radien steht ihm offen und ausserdem im Gebiete der negativen Fahrstrahlen die ganze Ebene ausserhalb eines Kreises mit dem Radius $\frac{1}{\gamma}$.

II. Hauptfall. $D_3 \geq 0$.

Fall 11. $D_3 \geq 0$; $C > 0$; $h > 0$; $-\infty \dots < \varrho < \dots \alpha(\text{pos})$; $-0 \dots + \infty \dots > r > \frac{1}{\alpha}(\text{pos})$. Das im Falle 1 gesagte wäre hier zu wiederholen. •

Fall 12. $D_3 \geq 0$; $C < 0$; $h < 0$; $\alpha(\text{pos}) \dots < \varrho < \dots + \infty$; $\frac{1}{\alpha}(\text{pos}) > r > 0$. Das Bewegungsgebiet unseres Massenpunktes ist mutatis mutandis dasselbe wie im Falle 4, 6 und 9.

Fall 13. $D_3 \geq 0$; $C < 0$; $h > 0$; $\alpha(\text{neg}) < \varrho < \dots + \infty$. Hier würde das nämliche zu sagen sein wie im Falle 10.

Damit hätten wir einen Einblick in die Grenzen des Bewegungsgebietes erhalten; wir können aber schon jetzt noch einiges hinzufügen. — Zunächst über die Grösse der Kraft P und der Geschwindigkeit v auf diesen Grenzgebieten:

Für $r = \infty$ oder $\varrho = 0$ wird

$$P_{(\infty)} = A\varrho^2 + B\varrho^3 + C\varrho^4 = 0$$

und das zugehörige $v_{(r=\infty)}^2 = 2h$ (nach 20-), also

$$v_{(\infty)}^2 = \sqrt{2h} = \text{constans.}$$

Das sagt uns: In unendlicher Ferne hat unsere Kraft die Stärke Null, und der Punkt m bewegt sich dann mit konstanter Geschwindigkeit vorwärts. — Im Falle die Konstante $h < 0$ ist, würde

$v_{(\infty)}$ imaginär werden, so dass für diesen Fall also der Punkt gar nicht in das Unendlich-Weite gelangen kann.

Für $r=0$ oder $q=\infty$ wird nach (20) unser v^2 wegen des Ueberwiegens der 3. Potenz sicher unendlich gross, mindestens vielleicht $-\infty^1$ und unsere Kraft $P=q (Aq + Bq^2 + Cq^3)$ also wenigstens ∞^2 . Sobald also der Punkt m in das anziehende Centrum gelangt, wird er darin verbleiben müssen, da ja die Centralkraft $P \propto 1$ mal grösser ist als das entgegenwirkende Quadrat der Geschwindigkeit.

Für $q=\alpha, \beta$ oder γ , — sobald also unser Mobil auf den durch die reciproken Wurzelwerte $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} > \frac{1}{\gamma}$ bestimmten Grenzkreisen sich befindet, erhält die Kraft P einen der 3 Werte:

$$P_{(\alpha)} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2$$

$$P_{(\beta)} = A\beta^2 + B\beta^2 + C\beta^2$$

$$P_{(\gamma)} = A\gamma^2 + B\gamma^2 + C\gamma^2, \text{ so dass also}$$

$$P_{(\alpha)} < P_{(\beta)} < P_{(\gamma)},$$

und die Geschwindigkeit wird auf diesen Grenzkreisen, da $R(q)$ für diese Werte verschwindet, einen der nachstehenden 3 Werte besitzen:

$$v_{(\alpha)}^2 = c^2 \alpha^2$$

$$v_{(\beta)}^2 = c^2 \beta^2$$

$$v_{(\gamma)}^2 = c^2 \gamma^2,$$

so dass also die Geschwindigkeiten auf den durch die reciproken Wurzelwerte von $R(q)=0$ bestimmten Grenzkreisen der Bewegung proportional sind den Wurzelwerten selbst. — Der sich in einem Ringgebiet bewegendende Punkt m wird eine grössere Geschwindigkeit erlangen auf dem inneren als auf dem äusseren Grenzkreis; er wird im Aphel langsamer sich fortbewegen als im Perihel.

Daran schliesst sich leicht noch einiges über die Bewegungsrichtung auf diesen Grenzgebieten:

Da für die Wurzelwerte α, β, γ von q die Funktion $R(q)$ verschwindet, so thut dies (nach 14) auch die Geschwindigkeitskomponente in Richtung des Radius vectors (die Vektorengeschwindigkeit), also

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos(r, ds) = v \cos(r, v) = 0 \text{ oder}$$

$$\cos(r, v) = 0$$

d. h. Der Winkel, welchen der Radius vector mit der Geschwindigkeit (Tangente der Bahn) bildet, ist gleich $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$, und wir erhalten den Satz: Auf den durch die reciproken Wurzelwerte von $R(\rho) = 0$ bestimmten Grenzkreisen der Bewegung steht der jeweilige Fahrstrahl senkrecht zur Bewegungsrichtung. Die Bahnkurve tangiert also die Grenzkreise, und der Punkt läuft im Falle einer Bewegung im Kreisring nach einer solchen Tangierung wieder in die Ringfläche hinein, sich dem Kraftcentrum nähernd oder sich von ihm entfernend. Die Grenzkreise sind demnach Einhüllende der Bahnkurven und ihre Radien Maxima resp. Minima von r .

Die Formel für die Drehgeschwindigkeit lautet:

$$r \frac{d\varphi}{dt} = v \sin(v, r).$$

[Unter Berücksichtigung des Flächensatzes erhält man daraus $rv \sin(v, r) = c$, woraus für $r = \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ die Formeln für $v_{(\alpha)}^2, v_{(\beta)}^2, v_{(\gamma)}^2$ noch auf eine 2. Weise gewonnen werden.] Dividiert man durch die Gleichung für die Vektorengeschwindigkeit, so ergibt sich nach § 16

$$r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\sin(v, r)}{\cos(v, r)} = \operatorname{tg}(v, r) = \frac{c}{r \sqrt{2h - 2\frac{A}{r} - \frac{2B + c^2}{r^2} - \frac{2C}{r^3}}}$$

Für $r = \infty$ wird dann $\operatorname{tg}(v, r) = \frac{c}{\infty} = 0$, also der Winkel selbst $= 0, \pi, 2\pi \dots$ d. h. In unendlicher Ferne fällt die Tangente an die Bahnkurve mit dem Radius vector zusammen. Die unendlich grossen Fahrstrahlen sind Asymptoten der Bahnkurve; an ihnen entlang bewegt sich der Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit weiter fort. — Aus obiger Gleichung folgt zum 2. Male, dass für Aphel und Perihel die Tangente senkrecht zum Radius vector

steht (endliche Fahrstrahlen vorausgesetzt), da für $r = \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ das Radikal verschwindet, so dass $\operatorname{tg} (v, r) = \frac{c}{0} = \infty$, der Winkel selbst also $= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \dots$.

Es resultiert aber auch für $r = 0$ dasselbe wie für unendliche Ferne: $\operatorname{tg} (v, r) = \frac{c}{\sqrt{2hr^2 - 2Ar - (2B + c^2) - \frac{2C}{r}}} = \frac{c}{\infty} = 0$, so dass also auch im Kraftcentrum der Fahrstrahl r mit der Bahntangente zusammenfällt.

§ 3.

Reduktion der Integrale auf die Legendresche Normalform.

Nachdem wir im § 2 die Funktion $R(q)$ diskutiert, uns einen Einblick in die Art ihrer Nullwerte verschafft und damit ein Urtheil über die Grenzen gewonnen haben, innerhalb deren der materielle Punkt in jedem einzelnen Falle sich bewegen kann, handelt es sich darum, die Differentiale

$$d\varphi = (+) \frac{cdq}{\sqrt{R(q)}} \quad \text{und} \quad dt = (+) \frac{dq}{q^2 \sqrt{R(q)}}$$

auf die sogenannte kanonische Form zu bringen. Das lässt sich durch verschiedene Substitutionen erreichen. — Wir folgen dabei der Ableitung von Weierstrass*).

Fall 1. $D_3 \leq 0$; $C > 0$; $h > 0$; $-\infty \dots < q < \dots \alpha(\text{pos})$
 $\alpha(\text{pos}) < \beta(\text{pos}) < \gamma(\text{pos})$.

Wir benutzen eine Substitution 2. Grades und setzen:

$$\begin{aligned} q &= \gamma - \frac{\gamma - \alpha}{\sin^2 \vartheta}; \\ (25) \quad k^2 &= \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}; & \sin^2 \vartheta &= \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - q} \\ k'^2 &= 1 - k^2 = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}; & \cos^2 \vartheta &= \frac{\alpha - q}{\gamma - q}. \end{aligned}$$

*) Neue Methode, ein ellipt. Differential auf die kanonische Form zu bringen. Cf. Schellbach, Lehre von den ellipt. Integralen und den Thetafunktionen, 13. Abschn. (Berlin 1864.)

Wenn dann ϱ stetig wachsend das Intervall von $-\infty$ bis α (pos) durchmisst, so wächst ϑ von $0 \dots \frac{\pi}{2}$ an; für $\varrho = -\infty$ wird $\vartheta = 0$, für $\varrho = \alpha$ (pos) ist $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, und unser $d\varphi$ erhält die Gestalt

$$d\varphi = A_1 \frac{d\vartheta}{\mathcal{A}\vartheta}$$

wobei die Konstante $A_1 = \frac{2c}{\sqrt{2C(\gamma-\alpha)}}$, und unter $\mathcal{A}\vartheta$ die bekannte Legendresche Abkürzung für die dem cosinus verwandte Funktion

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta} = \mathcal{A}(\vartheta, k) = \mathcal{A}\vartheta \quad (\text{Modul } k \leq 1)$$

zu verstehen ist.

Allen Wurzelgrößen ist hierbei ihr positiver Wert beizulegen (ebenso wie in den folgenden Fällen).

Das Differential dt wird dann

$$dt = \frac{A_1}{c} \frac{d\vartheta}{\mathcal{A}\vartheta} \left[\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\frac{2\gamma(\gamma-\alpha)}{\gamma^4} \sin^2 \vartheta - \frac{(\gamma-\alpha)^2}{\gamma^4}}{\sin^4 \vartheta - \frac{2(\gamma-\alpha)}{\gamma} \sin^2 \vartheta + \left(\frac{\gamma-\alpha}{\gamma}\right)^2} \right]$$

oder, wenn wir den 2. Bruch in Partialbrüche zerlegen:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{A_1}{c\gamma^2} \frac{d\vartheta}{\mathcal{A}\vartheta} + \frac{A_1(\gamma-\alpha)^2}{c\gamma^4} \frac{d\vartheta}{\mathcal{A}\vartheta \left(\sin^2 \vartheta + \frac{\alpha-\gamma}{\gamma} \right)^2} \\ &\quad + \frac{2A_1(\gamma-\alpha)}{c\gamma^3} \frac{d\vartheta}{\mathcal{A}\vartheta \left(\sin^2 \vartheta + \frac{\alpha-\gamma}{\gamma} \right)}. \end{aligned}$$

Setzen wir sodann

$$\frac{\alpha-\gamma}{\gamma} = m = \frac{1}{\lambda}, \text{ also}$$

$$(26) \quad \lambda = \frac{\gamma}{\alpha-\gamma} = \text{einem negat. unechten Bruch, so dass} \\ -1 \dots > \lambda > \dots -\infty, \text{ dann wird}$$

$$dt = \frac{A_1}{c\gamma^2} \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta} + \frac{A_1(\gamma-\alpha)^2}{c\gamma^4} \frac{d\vartheta}{(m+\sin^2\vartheta)^2 \Delta\vartheta} \\ + \frac{2A_1(\gamma-\alpha)}{c\gamma^3} \frac{d\vartheta}{(m+\sin^2\vartheta) \Delta\vartheta}.$$

Bedienen wir uns nun der nachstehenden von Richelot angegebenen Reduktionsformel*):

$$(m+\sin^2\vartheta)^n \sin\vartheta \cos\vartheta \Delta\vartheta \\ = 2n \cdot m(1+m)(1+k^2m) \int_0^{\vartheta} \frac{(m+\sin^2\vartheta)^{(n-1)} d\vartheta}{\Delta\vartheta} \\ (27) \quad + (2n+1)(1+2m+2k^2m+3k^2m^2) \int_0^{\vartheta} \frac{(m+\sin^2\vartheta)^n d\vartheta}{\Delta\vartheta} \\ - (2n+2)(1+k^2+3k^2m) \int_0^{\vartheta} \frac{(m+\sin^2\vartheta)^{(n+1)} d\vartheta}{\Delta\vartheta} \\ + (2n+3)k^2 \int_0^{\vartheta} \frac{(m+\sin^2\vartheta)^{(n+2)} d\vartheta}{\Delta\vartheta}$$

und setzen darin $n = -1$, so resultiert die Formel:

$$(28) \quad 2a' \frac{d\vartheta}{(m+\sin^2\vartheta)^2 \Delta\vartheta} = b' \frac{d\vartheta}{(m+\sin^2\vartheta) \Delta\vartheta} \\ - k^2 \frac{m+\sin^2\vartheta}{\Delta\vartheta} d\vartheta + d \left(\frac{\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \Delta\vartheta}{m+\sin^2\vartheta} \right),$$

wobei

$$(29) \quad \begin{cases} a' = m(1+m)(1+k^2m) = \frac{\alpha\beta(\alpha-\gamma)}{\gamma^3} \\ b' = 1+2m+2k^2m+3k^2m^2 = \frac{3\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma}{\gamma^2} \end{cases}$$

Unser Differential wird dann:

$$dt = \frac{A_1}{c\gamma^2} \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta} + \left(\frac{A_1 b'(\gamma-\alpha)^2}{2c\gamma^4 a'} + \frac{2A_1(\gamma-\alpha)}{c\gamma^3} \right) \frac{d\vartheta}{(m+\sin^2\vartheta) \Delta\vartheta} \\ - \frac{A_1 k^2(\gamma-\alpha)^2}{2c\gamma^4 a'} \frac{(m+\sin^2\vartheta) d\vartheta}{\Delta\vartheta} + \frac{A_1(\gamma-\alpha)^2}{2a'c\gamma^4} d \left(\frac{\sin\vartheta \cos\vartheta \Delta\vartheta}{m+\sin^2\vartheta} \right).$$

*) Durège, Theorie der ellipt. Funktionen, IV. Abschn. Leipzig 1887.

Das 3. Glied lässt sich noch spalten, da

$$(30) \quad \int \frac{(m + \sin^2 \vartheta) d\vartheta}{A\vartheta} = \frac{1 + mk^2}{k^2} \int \frac{d\vartheta}{A\vartheta} - \frac{1}{k^2} \int A\vartheta \cdot d\vartheta.$$

Wenn wir dann zur Abkürzung die Konstanten

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\alpha + \gamma}{\alpha \gamma^2 \sqrt{2C(\gamma - \alpha)}} = \mathfrak{A}_1, & \frac{2(\gamma - \alpha)^2}{\gamma^4 \sqrt{2C(\gamma - \alpha)}} = \mathfrak{B}_1, \\ -\frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)}{\alpha\beta\gamma^2 \sqrt{2C(\gamma - \alpha)}} = \mathfrak{C}_1, & \frac{\alpha - \gamma}{\alpha\beta\gamma \sqrt{2C(\gamma - \alpha)}} = \mathfrak{D}_1 \end{array} \right.$$

nennen, so erhalten wir schliesslich:

$$(32) \quad dt = \mathfrak{A}_1 \frac{d\vartheta}{A\vartheta} + \mathfrak{B}_1 A\vartheta \cdot d\vartheta + \mathfrak{C}_1 \frac{d\vartheta}{(1 + \lambda \sin^2 \vartheta) A\vartheta} + \mathfrak{D}_1 d \left(\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta A\vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right).$$

Integrieren wir jetzt $d\varphi$ und dt von $\vartheta = \vartheta_0$ bis $\vartheta = \vartheta$ (entsprechend der Integration von ϱ_0 bis ϱ), so wird

$$\begin{aligned} \varphi &= A_1 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{A\vartheta} = A_1 \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{A\vartheta} - A_1 \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{A\vartheta} \quad \text{und} \\ t &= \mathfrak{A}_1 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{A\vartheta} + \mathfrak{B}_1 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} A\vartheta d\vartheta + \mathfrak{C}_1 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + \lambda \sin^2 \vartheta) A\vartheta} \\ &\quad + \mathfrak{D}_1 \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta A\vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right]_{\vartheta_0}^{\vartheta}. \end{aligned}$$

Das Glied $A_1 \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{A\vartheta}$ ist ein von der Anfangslage abhängiger

Polarwinkel φ_i und entspricht dem Integralwerte $\int_{\varrho(\min)}^{\varrho_0} \frac{c d\varrho}{V R(\varrho)} = \varphi_i$,

unter $\varrho(\min)$ den Minimalgrenzwert von ϱ verstanden. Setzen wir ebenso die von den Anfangswerten abhängige Zeit

$$\begin{aligned} \int_{\varrho(\min)}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{R(\varrho)}} &= t_i = \mathfrak{A}_1 \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{A\vartheta} + \mathfrak{B}_1 \int_0^{\vartheta_0} A\vartheta d\vartheta \\ &\quad + \mathfrak{C}_1 \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{1 + \lambda \sin^2 \vartheta} A\vartheta + \mathfrak{D}_1 \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta A\vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right]_0^{\vartheta_0}, \end{aligned}$$

so erhalten wir:

$$(33) \quad \begin{cases} \varphi + \varphi_1 = A_1 F(k, \vartheta) \\ t + t_{12} = \mathfrak{A}_1 F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}_1 E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}_1 \Pi_1(k, \lambda, \vartheta) \\ \quad \quad \quad + \mathfrak{D}_1 \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \lambda \vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right]_0^{\vartheta} \end{cases}$$

Hierbei haben wir nach dem Vorgange von Durège die Legendreschen Zeichen für die ellipt. Integrale 2. u. 3. Gattung mit einem Index versehen, um sie von denen zu unterscheiden, die später Jacobi eingeführt hat.

Fall 2. $D_3 \leq 0$; $C < 0$; $h > 0$; $\alpha(\text{pos}) < \beta(\text{pos}) < \gamma(\text{pos})$
 $\beta(\text{pos}) \dots < \varrho < \dots \gamma(\text{pos})$.

Wir machen wieder von einer Substitution 2. Grades Gebrauch:

$$(34) \quad \varrho = \frac{\beta(\gamma - \alpha) - \alpha(\gamma - \beta) \sin^2 \vartheta}{\gamma - \alpha - (\gamma - \beta) \sin^2 \vartheta};$$

$$k^2 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}; \quad \sin^2 \vartheta = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} \cdot \frac{\varrho - \beta}{\varrho - \alpha};$$

$$k'^2 = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}; \quad \cos^2 \vartheta = \frac{\gamma - \varrho}{\varrho - \alpha} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \beta}.$$

Wenn ϱ stetig wachsend von $\beta(\text{pos})$ bis $\gamma(\text{pos})$ zunimmt, so wächst ϑ von $0 \dots \frac{\pi}{2}$ an; es wird $\vartheta = 0$ für $\varrho = \beta$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ für $\varrho = \gamma$, und unser Differential $d\varphi$ wird:

$$d\varphi = \frac{2c}{\sqrt{2C(\gamma - \alpha)}} \frac{d\vartheta}{\lambda \vartheta} = A_2 \frac{d\vartheta}{\lambda \vartheta} \quad \text{und}$$

$$dt = \frac{A_2 d\vartheta}{c \lambda \vartheta \beta^2 - 2\alpha\beta k^2 \sin^2 \vartheta + \alpha^2 k^4 \sin^4 \vartheta},$$

woraus nach Zerlegung in Partialbrüche wird:

$$dt = \frac{A_2 d\vartheta}{c \alpha^2 \lambda \vartheta} + \frac{2k^2 A_2 \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right)}{c \alpha^2 k^4} \frac{\sin^2 \vartheta \cdot d\vartheta}{\left(\sin^2 \vartheta - \frac{\beta}{\alpha k^2} \right)^2 \lambda \vartheta}$$

$$- \frac{A_2 \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 1 \right)}{c \alpha^2 k^4} \frac{d\vartheta}{\left(\sin^2 \vartheta - \frac{\beta}{\alpha k^2} \right)^2 \lambda \vartheta}.$$

Setzen wir nun

$$(35) \quad -\frac{\beta}{\alpha k^2} = -\frac{\beta(\gamma - \alpha)}{\alpha(\gamma - \beta)} = m = \frac{1}{\lambda}, \text{ also} \\ \lambda = -\frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\beta(\gamma - \alpha)} = -\frac{\alpha}{\beta} k^2, \text{ d. h.}$$

gleich einem negat. echten Bruch, der zwischen -0 und $-k^2$ gelegen ist [$-0 \geq \lambda > -k^2$] und beachten, dass

$$(36) \quad \frac{\sin^2 \vartheta}{(m + \sin^2 \vartheta)^2} \frac{d\vartheta}{d\vartheta} = \frac{(m + \sin^2 \vartheta) - m}{(m + \sin^2 \vartheta)^2} \frac{d\vartheta}{d\vartheta} \\ = \frac{1}{(m + \sin^2 \vartheta)} - \frac{m}{(m + \sin^2 \vartheta)^2} \frac{d\vartheta}{d\vartheta},$$

so ergibt sich nach einigen leichten Reduktionen, und wenn man wieder die Formeln (28) und (30) verwertet:

$$(37) \quad \begin{cases} \varphi + \varphi_1 = A_2 F(k, \vartheta) \\ t + t_1 = \mathfrak{A}_2 F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}_2 E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}_2 \Pi_1(k, \lambda, \vartheta) \\ \quad + \mathfrak{D}_2 \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right] \vartheta. \end{cases}$$

Die Konstanten $A_2, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{D}_2$, haben dabei nachstehende Werte:

$$(38) \quad \begin{cases} A_2 = \frac{2c}{\sqrt{2C(\gamma - \alpha)}} & \mathfrak{A}_2 = \frac{\alpha(\gamma - \alpha) + \beta(\gamma + \alpha)}{\alpha^2 \beta \gamma \sqrt{2C(\gamma - \alpha)}} \\ \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{D}_2 = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha \beta \gamma \sqrt{2C(\gamma - \alpha)}} = -\frac{\sqrt{2C(\gamma - \alpha)}}{h} \\ \mathfrak{C}_2 = \frac{(\gamma - \alpha)[\beta^2(\gamma + \alpha) - \alpha^2(\gamma + \beta)]}{\alpha^3 \beta \gamma (\gamma - \beta) \sqrt{2C(\gamma - \alpha)}}. \end{cases}$$

Fall 3. $D_3 \leq 0$; $C < 0$; $h < 0$. $\alpha(\text{pos}) < \beta(\text{pos}) < \gamma(\text{pos})$
 $\alpha(\text{pos}) \dots < \varrho < \dots < \beta(\text{pos})$.

Wir setzen:

$$(39) \quad \begin{aligned} \varrho &= \alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 \vartheta; \\ k^2 &= \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}; & \sin^2 \vartheta &= \frac{\varrho - \alpha}{\beta - \alpha}; \\ k'^2 &= \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}; & \cos^2 \vartheta &= \frac{\beta - \varrho}{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

Einem stetigen Anwachsen des $\angle \vartheta$ von 0 .. $\frac{\pi}{2}$ entspricht ein

stetiges Zunehmen der Variablen ϱ von α (pos) bis β (pos). Für $\varrho = \alpha$ wird $\vartheta = 0$ und für $\varrho = \beta$ wird $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Mit leichter Mühe erhält man so:

$$d\varphi = \frac{c}{\sqrt{-2C(\gamma - \alpha)}} \frac{d\vartheta}{d\vartheta} = A_3 \frac{d\vartheta}{d\vartheta} \quad \text{und}$$

$$dt = \frac{A_3}{c(\gamma - \alpha)^2} \frac{d\vartheta}{\left(\sin^2 \vartheta + \frac{\alpha}{\beta - \alpha}\right)^2 d\vartheta}.$$

Setzen wir nun

$$(40) \quad \frac{\alpha}{\beta - \alpha} = m = \frac{1}{\lambda}, \text{ also } \lambda = \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \text{positiv}$$

und wenden wieder die Reduktionsformeln (28) und (29) an, so erhalten wir schliesslich:

$$(41) \quad \begin{cases} \varphi + \varphi_1 = A_3 F(k, \vartheta) \\ t + t_1 = \mathfrak{A}_3 F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}_3 E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}_3 \Pi_1(k, \lambda, \vartheta) \\ \quad + \mathfrak{D}_3 \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta}{m(1 + \lambda \sin^2 \vartheta)} \right]_0^{\vartheta}, \end{cases}$$

wobei die Konstanten $A_3 \dots \mathfrak{D}_3$ folgende Werte haben:

$$(42) \quad \begin{cases} A_3 = \frac{c}{\sqrt{-2C(\gamma - \alpha)}}; \\ \mathfrak{A}_3 = -\frac{(\beta - \alpha)^2}{2\alpha\beta(\gamma - \alpha)^2 \sqrt{-2C(\gamma - \alpha)}} = -\mathfrak{B}_3 \gamma(\gamma - \alpha); \\ \mathfrak{B}_3 = \mathfrak{D}_3 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{2\alpha\beta\gamma(\gamma - \alpha) \sqrt{-2C(\gamma - \alpha)}}; \\ \mathfrak{C}_3 = \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)(\beta - \alpha)^2}{2\alpha^2\beta\gamma(\gamma - \alpha)^2 \sqrt{-2C(\gamma - \alpha)}}. \end{cases}$$

Fall 4. $D_3 \leq 0$; $C < 0$; $h < 0$; α (pos) $< \beta$ (pos) $< \gamma$ (pos)
 γ (pos) $\dots < \varrho < \dots + \infty$.

Substituieren wir für

$$\varrho = \frac{\gamma - \beta \sin^2 \vartheta}{1 - \sin^2 \vartheta};$$

$$(43) \quad \begin{aligned} k^2 &= \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}; & \sin^2 \vartheta &= \frac{\varrho - \gamma}{\varrho - \beta}; \\ k'^2 &= \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}; & \cos^2 \vartheta &= \frac{\gamma - \beta}{\varrho - \beta}, \end{aligned}$$

so wird, wenn ϱ stetig zunehmend von γ (pos) bis $+\infty$ anwächst, ϑ das Intervall von $0 \dots \frac{\pi}{2}$ durchlaufen, und wir gelangen nach leichter Reduktion zu

$$(44) \quad \begin{aligned} d\varphi &= \frac{c}{V - 2C(\gamma - \alpha)} \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta} = A_4 \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta} \\ dt &= \frac{A_4}{c\beta^2} \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta} + \frac{2A_4 \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right)}{c\beta^2} \frac{\sin^2 \vartheta d\vartheta}{\left(\sin^2 \vartheta - \frac{\gamma}{\beta} \right)^2 \Delta\vartheta} \\ &\quad - \frac{A_4 \left(\frac{\gamma^2}{\beta^2} - 1 \right)}{c\beta^2} \frac{d\vartheta}{\left(\sin^2 \vartheta - \frac{\gamma}{\beta} \right)^2 \Delta\vartheta}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$(45) \quad m = \frac{1}{\lambda} = -\frac{\gamma}{\beta}, \quad \text{also}$$

$\lambda = -\frac{\beta}{\gamma}$ = einem negativen echten Bruch, der seinem absoluten Werte nach niemals grösser als k^2 und nicht kleiner als Null werden kann $[-0 \dots \lambda \dots -k^2]$ und beachten die Identität (36), so gelangen wir nach Anwendung der Reduktionsformeln (28) und (30) am Ende zu folgenden Gleichungen:

$$(46) \quad \begin{cases} \varphi + \varphi_1 = A_4 F(k, \vartheta) \\ t + t_1 = \mathfrak{A}_4 F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}_4 E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}_4 \Pi_1(k, \lambda, \vartheta) \\ \quad + \mathfrak{D}_4 \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \Delta\vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right]_0^{\vartheta}. \end{cases}$$

Dabei sind den Konstanten $A_4 \dots \mathfrak{D}_4$ folgende Werte beizulegen:

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \frac{e}{\sqrt{-2C(\gamma-\alpha)}} \quad ; \quad \mathfrak{A}_4 = \frac{\beta + \gamma}{2\beta^2\gamma\sqrt{-2C(\gamma-\alpha)}} \\
 (47) \quad \mathfrak{B}_4 &= \mathfrak{D}_4 = \frac{\gamma-\alpha}{2\alpha\beta\gamma\sqrt{-2C(\gamma-\alpha)}} \\
 \mathfrak{C}_4 &= \frac{\gamma^2(\alpha+\beta) - \beta^2(\alpha+\gamma)}{2\alpha\beta^3\gamma\sqrt{-2C(\gamma-\alpha)}}.
 \end{aligned}$$

Fall 5. $D_3 \leq 0$; $C > 0$; $h > 0$; $\alpha(\text{neg}) < \beta(\text{neg}) < \gamma(\text{pos})$
 $\beta(\text{neg}) \dots < \varrho < \dots \gamma(\text{pos})$.

Wir machen die nämliche Substitution wie im Falle 2 und setzen:

$$\begin{aligned}
 \varrho &= \frac{\beta(\gamma-\alpha) - \alpha(\gamma-\beta)\sin^2\vartheta}{\gamma-\alpha - (\gamma-\beta)\sin^2\vartheta}; \\
 (48) \quad k^2 &= \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} \quad ; \quad \sin^2\vartheta = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} \cdot \frac{\varrho-\beta}{\varrho-\alpha}; \\
 k'^2 &= \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} \quad ; \quad \cos^2\vartheta = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\beta} \cdot \frac{\gamma-\varrho}{\varrho-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Für $\varrho = \beta(\text{neg})$ wird $\vartheta = 0$;

„ $\varrho = \gamma(\text{pos})$ „ $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Verfahren wir nun genau wie im Falle 2, so erhalten wir wie dort:

$$(49) \quad \begin{cases} \varphi + \varphi_1 = A_5 F(k, \vartheta) \\ t + t_1 = \mathfrak{A}_5 F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}_5 E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}_5 \Pi_1(k, \lambda, \vartheta) \\ \quad + \mathfrak{D}_5 \left[\frac{\sin\vartheta \cos\vartheta}{m + \sin^2\vartheta} \right] \vartheta. \end{cases}$$

Doch ist jetzt

$$\lambda = \frac{1}{m} = -\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\beta(\gamma-\alpha)} = -\frac{\alpha}{\beta} k^2,$$

gleich einem negativen unechten Bruche geworden:

$$-1 \dots \lambda \dots -\infty.$$

Die Konstanten haben die Werte:

$$(50) \quad \begin{cases} A_5 = \frac{2c}{V 2C(\gamma - \alpha)}; & \mathfrak{A}_5 = \frac{\alpha(\gamma - \alpha) + \beta(\gamma + \alpha)}{\alpha^2 \beta \gamma V 2C(\gamma - \alpha)}; \\ \mathfrak{B}_5 = \mathfrak{D}_5 = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha \beta \gamma V 2C(\gamma - \alpha)}; \\ \mathfrak{C}_5 = \frac{(\gamma - \alpha)[\beta^2(\gamma + \alpha) - \alpha^2(\gamma + \beta)]}{\alpha^3 \beta \gamma (\gamma - \beta) V C(\gamma - \alpha)}. \end{cases}$$

Fall 6. $D_3 \leq 0$; $C < 0$; $h < 0$; $\alpha(\text{neg}) < \beta(\text{neg}) < \gamma(\text{pos})$
 $\gamma(\text{pos}) \dots < \varrho < \dots + \infty$.

Die Substitutionen sind wie im Falle 4:

$$(51) \quad \begin{aligned} \varrho &= \frac{\gamma - \beta \sin^2 \vartheta}{1 - \sin^2 \vartheta}; \\ k^2 &= \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}; & \sin^2 \vartheta &= \frac{\varrho - \gamma}{\varrho - \beta}; \\ k'^2 &= \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}; & \cos^2 \vartheta &= \frac{\gamma - \beta}{\varrho - \beta}. \end{aligned}$$

Für $\varrho = \gamma(\text{pos})$ wird $\vartheta = 0$;

$$, \quad \varrho = +\infty \quad , \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}.$$

Wie dort setzen wir

$$\lambda = \frac{1}{m} = -\frac{\beta}{\gamma} \quad (\text{jetzt ist jedoch } \lambda = \text{positiv})$$

und erhalten auf die nämliche Weise wie dort:

$$(52) \quad \begin{cases} \varphi + \varphi_1 = A_6 F(k, \vartheta) \\ t + t_1 = \mathfrak{A}_6 F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}_6 E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}_6 \Pi_1(k, \lambda, \vartheta) \\ \quad + \mathfrak{D}_6 \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \lambda \vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right]_0^{\vartheta}. \end{cases}$$

Die konstanten Werte sind:

$$(53) \quad \begin{cases} A_6 = \frac{c}{V - 2C(\gamma - \alpha)}; & \mathfrak{A}_6 = \frac{\beta + \gamma}{2\beta^2 \gamma V - 2C(\gamma - \alpha)} \\ \mathfrak{B}_6 = \mathfrak{D}_6 = \frac{\gamma - \alpha}{2\alpha \beta \gamma V - 2C(\gamma - \alpha)} \\ \mathfrak{C}_6 = \frac{\gamma^2(\alpha + \beta) - \beta^2(\alpha + \gamma)}{2\alpha \beta^3 \gamma V - 2C(\gamma - \alpha)}. \end{cases}$$

Fall 7. $D_3 \leq 0$; $C > 0$; $h < 0$; $\alpha(\text{neg}) < \beta(\text{pos}) < \gamma(\text{pos})$
 $\beta(\text{pos}) \dots < \varrho < \dots \gamma(\text{pos})$.

Wir substituieren wie im Falle 2:

$$(54) \quad \begin{aligned} \varrho &= \frac{\beta(\gamma - \alpha) - \alpha(\gamma - \beta) \sin^2 \vartheta}{\gamma - \alpha - (\gamma - \beta) \sin^2 \vartheta}; \\ k^2 &= \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}; \quad \sin^2 \vartheta = \frac{(\gamma - \alpha) \cdot (\varrho - \beta)}{(\gamma - \beta)(\varrho - \alpha)}; \\ k'^2 &= \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}; \quad \cos^2 \vartheta = \frac{(\beta - \alpha)(\gamma - \varrho)}{(\gamma - \beta)(\varrho - \alpha)}. \end{aligned}$$

Für $\varrho = \beta(\text{pos})$ wird $\vartheta = 0$;
 „ $\varrho = \gamma(\text{pos})$ „ $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Wenn wir dann wie früher verfahren und

$$(55) \quad \lambda = \frac{1}{m} = - \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\beta(\gamma - \alpha)} \text{ setzen, wobei jedoch diesmal } \lambda$$

positiv ist und zwischen $0 \dots +\infty$ liegt, so erhalten wir als Endresultat:

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi + \varphi_1 &= A_7 F(k, \vartheta) \\ t + t_1 &= \mathfrak{A}_7 F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}_7 E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}_7 H_1(k, \lambda, \vartheta) \\ &\quad + \mathfrak{D}_7 \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \lambda \vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right]_0^{\vartheta} \\ A_7 &= \frac{2c}{\sqrt{2C(\gamma - \alpha)}}; \quad \mathfrak{A}_7 = \frac{\alpha(\gamma - \alpha) + \beta(\gamma + \alpha)}{\alpha^2 \beta \gamma \sqrt{2C(\gamma - \alpha)}}; \\ \mathfrak{B}_7 &= \mathfrak{D}_7 = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha \beta \gamma \sqrt{2C(\gamma - \alpha)}}; \\ \mathfrak{C}_7 &= \frac{(\gamma - \alpha)[\beta^2(\gamma - \alpha) - \alpha^2(\gamma - \beta)]}{\alpha^3 \beta \gamma (\gamma - \beta) \sqrt{2C(\gamma - \alpha)}}. \end{aligned} \right.$$

Fall 8. $D_3 \leq 0$; $C < 0$; $h > 0$; $\alpha(\text{neg}) < \beta(\text{pos}) < \gamma(\text{pos})$
 $\alpha(\text{neg}) \dots < \varrho < \dots \beta(\text{pos})$.

Setzen wir wie im Falle 3:

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} \varrho &= \alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 \vartheta; \\ k^2 &= \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}; \quad \sin^2 \vartheta = \frac{\varrho - \alpha}{\beta - \alpha}; \\ k'^2 &= \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}; \quad \cos^2 \vartheta = \frac{\beta - \varrho}{\beta - \alpha}; \end{aligned} \right.$$

so dass für $q = \alpha$ (neg) $\vartheta = 0$,
 „ $q = \beta$ (pos) $\vartheta = \frac{\pi}{2}$,

und setzen wir ferner:

(58) $\lambda = \frac{1}{m} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha}$, so dass also diesmal λ alle negativen Werte zwischen $-0 \dots -\infty$ annehmen kann, so gelangen wir auf gleiche Weise wie früher zu folgenden Resultaten:

$$(59) \quad \begin{cases} \varphi + \varphi_1 = A_8 F(k, \vartheta) \\ t + t_1 = \mathfrak{A}_8 F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}_8 E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}_8 \Pi_1(k, \lambda, \vartheta) \\ \quad + \mathfrak{D}_8 \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \lambda \vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right]_0^{\vartheta} \end{cases}$$

unter den Konstanten nachstehende Werte verstanden:

$$(60) \quad \begin{cases} A_8 = \frac{c}{V - 2C(\gamma - \alpha)} & \mathfrak{A}_8 = \frac{-(\beta - \alpha)^2}{2\alpha\beta(\gamma - \alpha)^2 V - 2C(\gamma - \alpha)}; \\ \mathfrak{B}_8 = \mathfrak{D}_8 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{2\alpha\beta\gamma(\gamma - \alpha) V - 2C(\gamma - \alpha)}; \\ \mathfrak{C}_8 = \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)(\gamma - \alpha)^2}{2\alpha^2\beta\gamma(\gamma - \alpha)^2 V - 2C(\gamma - \alpha)}. \end{cases}$$

Fall 9. $D_3 \leq 0$; $C < 0$; $h > 0$; α (neg) $< \beta$ (pos) $< \gamma$ (pos)
 γ (pos) $\dots < q < \dots + \infty$.

Wir setzen für

$$(61) \quad \begin{cases} q = \frac{\gamma - \beta \sin^2 \vartheta}{1 - \sin^2 \vartheta}; \\ k^2 = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}; & \sin^2 \vartheta = \frac{q - \gamma}{q - \beta}; \\ k'^2 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}; & \cos^2 \vartheta = \frac{\gamma - \beta}{q - \beta}; \end{cases}$$

so wird $\vartheta = 0$ für $q = \gamma$ (pos),

„ „ $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ „ $q = +\infty$

und ferner für

$$\lambda = \frac{1}{m} = -\frac{\beta}{\gamma}, \text{ so dass in diesem Falle}$$

$$-0 \dots > \lambda > \dots -k^2,$$

und gelangen dann auf bekannte Weise zu folgenden Gleichungen:

$$(62) \quad \begin{cases} \varphi + \varphi_1 = A_9 F(k, \vartheta) \\ t + t_1 = \mathfrak{A}_9 F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}_9 E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}_9 \Pi_1(k, \lambda, \vartheta) \\ \quad + \mathfrak{D}_9 \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \lambda \vartheta}{m + \sin \vartheta} \right]_0^{\vartheta} \end{cases}$$

Hierbei ist

$$(63) \quad \begin{cases} A_9 = \frac{c}{V-2C(\gamma-\alpha)}; & \mathfrak{A}_9 = \frac{\beta + \gamma}{2\beta^2 \gamma V-2C(\gamma-\alpha)}; \\ \mathfrak{B}_9 = \mathfrak{D}_9 = \frac{\gamma - \alpha}{2\alpha\beta\gamma V-2C(\gamma-\alpha)}; \\ \mathfrak{C}_9 = \frac{\gamma^2(\alpha + \beta) - \beta^2(\alpha + \gamma)}{2\alpha\beta^2\gamma V-2C(\gamma-\alpha)}. \end{cases}$$

Fall 10. $D_3 \leq 0$; $C < 0$; $h > 0$; $\alpha(\text{neg}) < \beta(\text{neg}) < \gamma(\text{neg})$

$$\gamma(\text{neg}) \dots < \varrho < \dots + \infty.$$

$$(64) \quad \begin{cases} \varrho = \frac{\gamma - \beta \sin^2 \vartheta}{1 - \sin^2 \vartheta}; \\ k^2 = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}; \quad \sin^2 \vartheta = \frac{\varrho - \gamma}{\varrho - \beta}; \\ k'^2 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}; \quad \cos^2 \vartheta = \frac{\gamma - \beta}{\varrho - \beta}. \end{cases}$$

Wenn $\varrho = \gamma(\text{neg})$, so ist $\vartheta = 0$,

$$\varrho = +\infty, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}.$$

$$(65) \quad \lambda = \frac{1}{m} = -\frac{\beta}{\gamma} = \text{neg. unecht. Bruch}$$

$$-1 \dots > \lambda > \dots -\infty.$$

Für Polarwinkel und Zeit erhalten wir dann die Werte:

$$(65) \quad \begin{cases} \varphi + \varphi_1 = A_{10} F(k, \vartheta) \\ t + t_1 = \mathfrak{A}_{10} F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}_{10} E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}_{10} \Pi_1(k, \lambda, \vartheta) \\ \quad + \mathfrak{D}_{10} \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \lambda \vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right]_0^{\vartheta} \end{cases}$$

Die Konstanten sind nach folgenden Gleichungen leicht zu bestimmen:

$$(66) \quad \begin{cases} A_{10} = \frac{c}{V-2C(\gamma-\alpha)}; & \mathfrak{A}_{10} = \frac{\beta+\gamma}{2\beta^2\gamma V-2C(\gamma-\alpha)}; \\ \mathfrak{B}_{10} = \mathfrak{D}_{10} = \frac{\gamma-\alpha}{2\alpha\beta\gamma V-2C(\gamma-\alpha)}; \\ \mathfrak{G}_{10} = \frac{\gamma^2(\alpha+\beta)-\beta^2(\alpha+\gamma)}{2\alpha\beta^3\gamma(V-2C(\gamma-\alpha))}. \end{cases}$$

Fall II. $D_3 \geq 0$; $C > 0$; $h > 0$; $\alpha(\text{pos})$; $\beta = p + iq$; $\gamma = p - iq$
 $-\infty \dots < q < \dots \alpha(\text{pos})$.

Die Transformation ist in diesem Falle vom 1. Grade; wir setzen:

$$(67) \quad \begin{cases} \varrho = \alpha - V(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha) \cdot \frac{1+\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta} \\ k = \frac{V\gamma-\alpha-V\beta-\alpha}{2i\sqrt[4]{(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)}}, \quad \text{also} \\ k^2 = \frac{2\alpha-2V\gamma-\alpha(\beta-\alpha)-\beta-\gamma}{4V(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)} \\ \mu = V2C\sqrt[4]{(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)}. \end{cases}$$

Allen Wurzelgrößen ist dabei ihr positiver Wert beizulegen.

Wenn dann ϱ von $-\infty$ bis $\alpha(\text{pos})$ stetig anwächst, so nimmt ϑ von $0 \dots \pi$ zu; für $\varrho = -\infty$ wird $\vartheta = 0$, für $\varrho = \alpha$ ist $\vartheta = \pi$. Dann wird nach leichter Rechnung

$$\begin{aligned} dq &= \frac{c}{\mu} \frac{d\vartheta}{d\vartheta} \\ dt &= \frac{d\vartheta}{\mu \cdot [\alpha + V(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)]^2 d\vartheta} \\ &+ \frac{1}{\mu} \frac{d\vartheta}{d\vartheta} \left[\frac{4(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)}{([\alpha + V(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)] \cos \vartheta - [\alpha - V(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)]^2} \right. \\ &\left. - \frac{4V(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)}{[\alpha + V(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)] \cos \vartheta - [\alpha - V(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)]} \right]. \end{aligned}$$

Setzen wir nun zur Abkürzung:

$$\frac{V(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha) + \alpha}{V(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha) - \alpha} = n$$

und erweitern den einen Bruch mit $(1 - n \cos \vartheta)^2$, den anderen mit $(1 - n \cos \vartheta)$, so erhalten wir, wenn wir noch der Kürze halber die Konstanten

$$\frac{1}{\mu [\alpha + V(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha)]^2} = g_1; \quad \frac{-4(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha)}{\mu [V(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha) - \alpha]^2} = g_2;$$

$$\frac{4V(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha)}{\mu [V(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha) - \alpha]^2} = g_3$$

nennen,

$$(68) \quad \begin{cases} d\varphi = \frac{c}{\mu} \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta} = A_{11} \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta} \\ dt = g_1 \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta} + g_2 \frac{d\vartheta}{(1 - n^2 \cos^2 \vartheta)^2 \Delta\vartheta} \\ - 2n g_2 \frac{\cos \vartheta \cdot d\vartheta}{(1 - n^2 \cos^2 \vartheta)^2 \Delta\vartheta} + n^2 g^2 \frac{\cos^2 \vartheta \cdot \Delta\vartheta}{(1 - n^2 \cos^2 \vartheta)^2 \Delta\vartheta} \\ + g_3 \frac{d\vartheta}{(1 - n^2 \cos^2 \vartheta) \Delta\vartheta} - n g_3 \frac{\cos \vartheta}{(1 - n^2 \cos^2 \vartheta) \Delta\vartheta} \end{cases}$$

In Folge der Identität:

$$(69) \quad \frac{\cos^2 \vartheta}{(1 - n^2 \cos^2 \vartheta)^2} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{[1 - n^2 \cos^2 \vartheta]^2} - \frac{1}{1 - n^2 \cos^2 \vartheta} \right),$$

wenn wir ferner setzen:

$$\frac{1 - n^2}{n^2} = m = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{d. h.}$$

$$\lambda = - \frac{4\alpha V(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha)}{[\alpha + V(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha)]^2} = \text{einem negativen echten Bruch,}$$

welcher = 0 wird für $\alpha = 0$ und

$$= -k^2 = -1 \text{ für } V(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha) = \alpha,$$

so dass demnach $-0 > \lambda > -k^2$,

und wenn wir schliesslich die Reduktionsformeln (28) u. (30) anwenden, so resultiert:

$$t + t_1 = \left(g_1 - \frac{g_2(1 + mk^2)}{n^4 a'} \right) F(k, \vartheta) + \frac{g_2}{n^4 a'} E_1(k, \vartheta)$$

$$+ \left(\frac{g_2 b'}{n^4 a'} + \frac{g_3 - g_2}{n^2} \right) \frac{1}{m} H_1(k, \lambda, \vartheta) + \frac{g_2}{n^4 a'} \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \Delta\vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right]_0^\vartheta$$

$$- 2n g_2 \int_0^\vartheta \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 - n^2 \cos^2 \vartheta)^2 \Delta\vartheta} - n g_3 \int_0^\vartheta \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 - n^2 \cos^2 \vartheta) \Delta\vartheta}$$

unter a' und b' die bekannten Werte nach Formel (29) verstanden. Die beiden letzten Integrale sind keine elliptischen, sondern auf einen arc. tg zurückführbar. Denn:

$$\int \frac{\cos \vartheta \cdot d\vartheta}{(1 - n^2 \cos^2 \vartheta) A\vartheta} = \frac{1}{1 - n^2} \int \frac{\cos \vartheta \cdot d\vartheta}{(1 + \lambda \sin^2 \vartheta) A\vartheta} \quad \text{oder}$$

$\sin^2 \vartheta = \xi$ gesetzt:

$$= \frac{1}{1 - n^2} \int \frac{d\xi}{2(1 + \lambda \xi) \sqrt{\xi(1 - k^2 \xi)}}$$

oder für $\xi = \frac{1}{\eta}$:

$$= \frac{1}{1 - n^2} \int \frac{-d\eta}{2(\eta - \lambda) \sqrt{\eta - k^2}} \quad \text{und für}$$

$\eta - k^2 = \zeta^2$:

$$= \frac{1}{1 - n^2} \int \frac{-d\zeta}{\zeta^2 + (k^2 + \lambda)}$$

$$= \frac{1}{1 - n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 + \lambda}} \text{arc. tg } \zeta \sqrt{\frac{1}{k^2 + \lambda}}.$$

Wenn wir dann rückwärts für ζ seinen Wert $\frac{A\vartheta}{\sin \vartheta}$ wieder einsetzen, so finden wir:

$$\int \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 - n^2 \cos^2 \vartheta) A\vartheta} = \frac{-1}{(1 - n^2) \sqrt{k^2 + \lambda}} \text{arc. tg } \frac{A\vartheta}{\sqrt{k^2 + \lambda} \cdot \sin \vartheta}.$$

Auf dieselbe Weise, indem wir für $\frac{A\vartheta}{\sin \vartheta}$ die Grösse ζ substituieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 - n^2 \cos^2 \vartheta)^2 A\vartheta} &= \frac{1}{(1 - n^2)^2} \int \frac{-d\zeta (\zeta^2 + k^2)}{(\zeta^2 + k^2 + \lambda)^2} \\ &= \frac{-1}{(1 - n^2)^2} \int \frac{d\zeta [(\zeta^2 + k^2 + \lambda) - \lambda]}{(\zeta^2 + k^2 + \lambda)^2} \\ &= \frac{-1}{(1 - n^2)^2} \left[\frac{1}{\sqrt{k^2 + \lambda}} \text{arc. tg. } \frac{\zeta}{\sqrt{k^2 + \lambda}} - \lambda \int \frac{d\zeta}{[\zeta^2 + (k^2 + \lambda)]^2} \right] \\ &= \frac{-1}{(1 - n^2)^2} \left[\frac{1}{\sqrt{k^2 + \lambda}} \text{arc. tg. } \frac{\zeta}{\sqrt{k^2 + \lambda}} \right. \\ &\quad \left. - \lambda \left(\frac{\zeta}{2(k^2 + \lambda)(\zeta^2 + k^2 + \lambda)} + \frac{1}{2\sqrt{k^2 + \lambda}^3} \text{arc. tg } \frac{\zeta}{\sqrt{k^2 + \lambda}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{(1-n^2)^2} \left[\frac{2k^2 + \lambda}{2\sqrt{(k^2 + \lambda)^3}} \operatorname{arc. tg} \frac{\lambda \vartheta}{\sqrt{k^2 + \lambda} \sin \vartheta} - \frac{\lambda}{2(k^2 + \lambda)} \frac{\sin \vartheta \cdot \lambda \vartheta}{(1 + \lambda \sin^2 \vartheta)} \right].$$

So gelangen wir schliesslich zu folgendem Resultat:

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi + \varphi_1 = A_{11} F(k, \vartheta) \\ t + t_1 = \mathfrak{A}_{11} F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}_{11} E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}_{11} \Pi_1(k, \lambda, \vartheta) \\ \quad + \mathfrak{D}_{11} \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \lambda \vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right]_0^{\vartheta} + \mathfrak{E}_{11} \left[\frac{\sin \vartheta \lambda \vartheta}{1 + \lambda \sin^2 \vartheta} \right]_0^{\vartheta} \\ \quad + \mathfrak{F}_{11} \operatorname{arc. tg.} \left[\frac{\lambda \vartheta}{\sqrt{k^2 + \lambda} \sin \vartheta} \right]_0^{\vartheta}. \end{array} \right.$$

Die Konstanten $A_{11} \dots \mathfrak{F}_{11}$ sind leicht aus den bekannten Werten von $\mu, g_1, g_2, g_3, m, n, \lambda, k^2 a'$ und b' zu berechnen.

Fall 12. $D_3 \geq 0$; $C < 0$; $h < 0$. $\alpha(\text{pos})$; $\beta = p + iq$; $\gamma = p - iq$.
 $\alpha(\text{pos}) \dots < \varrho < \dots + \infty$.

Wir setzen:

$$(71) \quad \begin{aligned} \varrho &= \alpha + \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \cdot \frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta}; \\ k &= \frac{\sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta}}{2i \sqrt[4]{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}}; \\ \mu &= \sqrt{-2C} \cdot \sqrt[4]{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}. \end{aligned}$$

Auch hierbei ist allen Wurzelgrössen ihr positiver Wert beizulegen. — Wächst ϱ von $\alpha(\text{pos})$ bis $+\infty$ an, so geht ϑ von 0 .. π .

Für $\varrho = \alpha(\text{pos})$ ist $\vartheta = 0$;

„ $\varrho = +\infty$ „ $\vartheta = \pi$; und wir bekommen:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{c}{\mu} \frac{d\vartheta}{\lambda \vartheta}; \\ dt &= \frac{d\vartheta}{\mu \cdot [a - \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}]^2 \lambda \vartheta} \\ &+ \frac{1}{\mu \lambda \vartheta} \left[\left(\frac{4(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}{[\alpha - \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}] \cos \vartheta + [\alpha + \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}]} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}}{[\alpha - \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}] \cos \vartheta + \alpha + \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}} \right]. \end{aligned}$$

Wird $\frac{\alpha - \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}}{\alpha + \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}} = n$ genommen, und der eine Bruch innerhalb der Klammer bei dt mit $(1 - n \cos \vartheta)^2$, der andere mit $(1 + n \cos \vartheta)$ erweitert, so berechnet sich für dt der Wert:

$$dt = g'_1 \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta} + g'_2 \frac{(1 - n \cos \vartheta)^2 d\vartheta}{(1 - n^2 \cos^2 \vartheta)^2 \Delta\vartheta} + g'_3 \frac{(1 - n \cos \vartheta) d\vartheta}{(1 - n^2 \cos^2 \vartheta) \Delta\vartheta},$$

unter g'_1, g'_2, g'_3 nachstehende Konstanten verstanden:

$$g'_1 = \frac{1}{\mu [\alpha - \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}]^2}; \quad g'_2 = \frac{4(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}{\mu [\alpha + \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}]^2}$$

$$g'_3 = \frac{-4\sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}}{\mu \cdot (\alpha + \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}}.$$

Nach Anwendung der Formel (69), und wenn wir

$$\frac{1}{m} = \frac{n^2}{1 - n^2} = \lambda = \frac{4\alpha\sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}}{[\alpha - \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}]^2}, \text{ also } = \text{positiv}$$

setzen, erhalten wir auf dieselbe Weise wie im vorhergehenden Falle als Endresultat:

$$(72) \quad \varphi + \varphi_1 = A_{12} F(k, \vartheta)$$

$$t + t_1 = \mathfrak{A}_{12} F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}_{12} E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}_{12} \Pi_1(k, \lambda, \vartheta)$$

$$+ \mathfrak{D}_{12} \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \Delta\vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right]_0^{\vartheta} + \mathfrak{E}_{12} \left[\frac{\sin \vartheta \Delta\vartheta}{1 + \lambda \sin \vartheta} \right]_0^{\vartheta}$$

$$+ \mathfrak{F}_{12} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Delta\vartheta}{\sqrt{k^2 + \lambda \sin \vartheta}}.$$

Auch hier sind die Konstanten $A_{12} \dots \mathfrak{F}_{12}$ leicht durch C und die Wurzelwerte α, β, γ auszudrücken.

Fall 13. $D \geq 0; C < 0; h > 0; \alpha(\text{neg}); \beta = p + iq; \gamma = p - iq.$
 $\alpha(\text{neg}) \dots < q < \dots + \infty.$

Wir setzen wie im vorhergehenden Falle:

$$(73) \quad q = \alpha + \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta};$$

$$k = \frac{\sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta}}{2i\sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}} \quad \mu = \sqrt{-2C} \sqrt[4]{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$$

$$\vartheta = 0 \quad \text{für } q = \alpha(\text{neg});$$

$$\vartheta = \pi \quad \text{„ } q = +\infty;$$

und erhalten mit leichter Mühe, nachdem wir wieder wie dort

$$(74) \quad n = \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}}{\alpha + \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}} \quad \text{und} \\ \lambda = \frac{1}{m} = \frac{n^2}{1 - n^2} = \frac{4\alpha \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}}{[\alpha - \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}]^2} \\ [-k^2 \leq \lambda < \dots 0]$$

gesetzt haben, nach ähnlicher Rechnung wie dort am Ende die Werte:

$$(75) \quad \varphi + \varphi_1 = A_{13} F(k, \vartheta) \\ t + t_1 = \mathfrak{A}_{13} F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}_{13} E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}_{13} \Pi_1(k, \lambda, \vartheta) \\ + \mathfrak{D}_{13} \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \lambda \vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right]_0^\vartheta + \mathfrak{E}_{13} \left[\frac{\sin \vartheta \cdot \lambda \vartheta}{1 + \lambda \sin^2 \vartheta} \right]_0^\vartheta \\ + \mathfrak{F}_{13} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda \vartheta}{\sqrt{k^2 + \lambda} \sin \vartheta}.$$

Die Konstanten $A_{13} \dots \mathfrak{F}_{13}$ sind auch hier leicht zu bestimmen.

§ 4.

Einführung der eigentlichen elliptischen Funktionen und der elliptischen Transcendenten.

Mit den in § 3 gewonnenen Resultaten ist unser Problem im Grunde genommen gelöst, denn der $\angle \varphi$ sowohl, welchen der Radius vector r mit der positiven X -Achse bildet, als auch die zugehörige Zeit t kann für jedes $\vartheta = \chi(r)$ berechnet werden. — Einen Einblick aber in den ganzen Charakter und in die Natur der Bewegung unseres Punktes gestatten diese Formeln nicht. Dazu gelangen wir erst nach Einführung der elliptischen Funktionen und der Jacobischen Transcendenten Θ .

Wir erhielten — wenn wir einmal von dem in den einzelnen Fällen verschiedenen Modul- und Parameterwerte absehen und ebenso die Verschiedenheit der konstanten Werte $A \dots \mathfrak{F}$ nicht beachten — in den Fällen 1, 2, 3 ... 10 für φ und t folgende Formen (wir lassen die Indices weg):

$$\begin{aligned}\varphi + \varphi_i &= AF(k, \vartheta) \\ t + t_i &= \mathfrak{A}F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}H_1(k, \lambda, \vartheta) \\ &\quad + \mathfrak{D} \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \mathcal{A} \vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right]_0^{\vartheta}\end{aligned}$$

und in den 3 Fällen 11, 12 und 13:

$$\begin{aligned}\varphi + \varphi_i &= AF(k, \vartheta) \\ t + t_i &= \mathfrak{A}F(k, \vartheta) + \mathfrak{B}E_1(k, \vartheta) + \mathfrak{C}H_1(k, \lambda, \vartheta) \\ &\quad + \mathfrak{D} \left[\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \mathcal{A} \vartheta}{m + \sin^2 \vartheta} \right]_0^{\vartheta} + \mathfrak{E} \left[\frac{\sin \vartheta \mathcal{A} \vartheta}{1 + \lambda \sin^2 \vartheta} \right]_0^{\vartheta} \\ &\quad + \mathfrak{F} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\mathcal{A} \vartheta}{\sin \vartheta \cdot \sqrt{k^2 + \lambda}} \right]_0^{\vartheta}.\end{aligned}$$

In allen Fällen ist sonach der Drehungswinkel $\varphi + \varphi_i$ proportional dem elliptischen Integrale 1. Gattung, und die Zeit setzt sich zusammen aus einer Summe von Integralen aller 3 Gattungen und trigonometrischen Funktionen von ϑ .

Wollen wir nun das Wesen unserer Bewegung erkennen lernen, so müssen wir nach dem Vorgange Jacobis an Stelle der Amplitude ϑ das Integral 1. Gattung selbst als Argument in unsere Gleichungen einführen. Mit Jacobi bezeichnen wir also das Integral 1. Gattung

$$(76) \quad F(k, \vartheta) = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\mathcal{A} \vartheta} = u$$

und fassen es als Funktion seiner oberen Grenze auf. So wird

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta = am u = am(u, k) = am u \pmod{k} \\ am(u, 0) = u, \text{ also } \sin am(u, 0) = \sin u; \\ \sin am(u, 1) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \\ am(0, k) = 0, \quad \sin am(0, k) = 0; \\ \cos am(0, k) = 1; \quad \mathcal{A} am(0, k) = 1; \\ am(-u) = -am u; \quad \sin am(-u) = -\sin am u; \\ \cos am(-u) = \cos am u \\ \mathcal{A} am u = \mathcal{A} am(-u). \end{array} \right.$$

Führen wir die Grösse u auch als Argument in die Integrale 2. Gattung ein, so erhalten wir die 1. elliptische Transcendente $E(u)$. Da nämlich $d\vartheta = \mathcal{A} am u \cdot du$, so wird

$$(78) \quad \int_0^{\vartheta} \mathcal{A} \vartheta \, d\vartheta = E_1(k, \vartheta) = \int_0^u \mathcal{A}^2 \operatorname{am} u \cdot du = E(u)$$

und thut man dasselbe bei der Legendreschen Normalform 3. Gattung:

$$\Pi_1(k, \lambda, \vartheta) = \int_0^{\vartheta} \left(1 - \frac{\lambda \sin^2 \vartheta}{1 + \lambda \sin^2 \vartheta} \right) \frac{d\vartheta}{\mathcal{A} \vartheta} = F(k, \vartheta) - \int_0^{\vartheta} \frac{\lambda \sin^2 \vartheta \, d\vartheta}{(1 + \lambda \sin^2 \vartheta) \mathcal{A} \vartheta}$$

und führt an Stelle des Legendreschen Parameters λ den Jacobischen Parameter a durch die allgemeine Gleichung ein:

$$(79) \quad \lambda = -k^2 \sin^2 \operatorname{am} a, \quad \text{so erhält man}$$

$$\begin{aligned} \Pi_1(k, \lambda, \vartheta) &= u + \int_0^u \frac{k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u \, du}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u} \\ &= u + \frac{\sin \operatorname{am} a}{\cos \operatorname{am} a \cdot \mathcal{A} \operatorname{am} a} \int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \mathcal{A} \operatorname{am} a \cdot \sin^2 \operatorname{am} u \cdot du}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u} \end{aligned}$$

Dieses letzte Integral, welches Jacobi die Normalform der Integrale 3. Gattung benannte und mit $\Pi(u, a)$ bezeichnete, ist die 2. elliptische Transcendente, so dass also der Uebergang von der Legendreschen zur Jacobischen Normalform gegeben ist durch

$$(80) \quad \Pi_1(k, \lambda, \vartheta) = u + \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a}{\mathcal{A} \operatorname{am} a} \Pi(u, a).$$

Die Konstante $\frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a}{\mathcal{A} \operatorname{am} a}$ lässt sich leicht berechnen, denn

$$\operatorname{tg}^2 \operatorname{am} a = \frac{\sin^2 \operatorname{am} a}{\cos^2 \operatorname{am} a} = \frac{-\lambda}{k^2 + \lambda}, \quad \mathcal{A} \operatorname{am} a = \sqrt{1 + \lambda};$$

$$\text{also } \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a}{\mathcal{A} \operatorname{am} a} = \sqrt{\frac{-\lambda}{(k^2 + \lambda)(1 + \lambda)}}.$$

So erhalten wir in den Fällen 1...10 die Formen:

$$\varphi + \varphi_i = \mathcal{A} \cdot u \quad (1..10)$$

$$\begin{aligned} t + t_i &= \mathfrak{A} u + \mathfrak{B} E(u) + \mathfrak{C} u + \mathfrak{C} \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a}{\mathcal{A} \operatorname{am} a} \Pi(u, a) \\ &\quad + \mathfrak{D} \frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \mathcal{A} \operatorname{am} u}{m + \sin^2 \operatorname{am} u} \end{aligned} \quad (1..10)$$

und in den Fällen 11, 12, 13:

$$\begin{aligned}
 q + q_i &= A u \\
 (11,12,13) \\
 t + t_i &= \left(\mathfrak{A} + \mathfrak{C} \right)_{(11,12,13)} u + \mathfrak{B} E(u) + \mathfrak{C} \frac{\operatorname{tg} am a}{\Delta am a} H(u, a) \\
 &+ \mathfrak{D} \frac{\sin am u \cos am u \Delta am u}{m + \sin^2 am u} + \mathfrak{C} \frac{\sin am u \Delta am u}{(11,12,13) 1 - k^2 \sin^2 am a \sin^2 am u} \\
 &+ \mathfrak{F} \operatorname{arc. tg} \frac{\Delta am u}{\sin am u \sqrt{k^2 + \lambda}} - \mathfrak{F} \operatorname{arctg} \infty. \\
 (11,12,13)
 \end{aligned}$$

Der Modul k , ebenso wie sein Komplement k' , ist in allen Fällen ein positiver echter Bruch von verschiedenem Werte in den einzelnen Fällen. Was nun aber den Legendreschen Parameter λ anlangt, so kann dieser alle möglichen (reellen und imag.) Werte annehmen und daraus folgt, dass der Jacobische Parameter a , der durch die Gleichung

$$(79) \quad \sin am a = \frac{\sqrt{-\lambda}}{k}$$

mit ihm zusammenhängt, nur so lange reell ist, als λ ein negativer echter Bruch ist, dessen absoluter Wert den Wert von k^2 nicht übersteigt; es ist also erforderlich, dass

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad & -k^2 < \lambda < 0 && \text{oder} \\
 & -k^2 < -k^2 \sin^2 am a < 0 && \text{oder} \\
 & 1 > \sin am a > 0.
 \end{aligned}$$

Ausser diesem Fall $(\alpha) -k^2 < \lambda < 0$, der zur Folge hat, dass a reell ausfällt, haben wir noch zu unterscheiden:

$$\begin{aligned}
 (\beta) \quad & -1 < \lambda < -k^2, \\
 (\gamma) \quad & -\infty < \lambda < -1, \\
 (\delta) \quad & 0 < \lambda < +\infty && \text{und endlich noch} \\
 (\varepsilon) \quad & \lambda = \text{imaginär.}
 \end{aligned}$$

Sehen wir daraufhin unsere Resultate in § 3 an, so bemerken wir:

1. $-k^2 < \lambda < 0$; also $1 > \sin am a > 0$
in den Fällen 2, 4, 9, 11 und 13;
2. $-\infty < \lambda < -1$; also $\infty > \sin am a > \frac{1}{k}$
in den Fällen 1, 5, 8, 10;
3. $0 < \lambda < \infty$; also $\sin am a$ stets rein imaginär
in den Fällen 3, 6, 7 und 12;

so dass also in den Fällen 3, 6, 7 und 12 unser elliptisches Integral 3. Gattung der Klasse der cirkulären (intégrales à paramètre circulaire), in allen anderen Fällen der Klasse der logarithmischen Integrale (à paramètre logarithmique nach Legendre) angehören wird.

1. Nun ist, da ϑ und u gleichzeitig verschwinden, $\operatorname{am} 0 = 0$ $\operatorname{am} K = \frac{\pi}{2}$, also $\sin \operatorname{am} 0 = 0$ und $\sin \operatorname{am} K = 1$. — Hierbei ist wie bekannt unter K das vollständige Integral 1. Gattung zu verstehen:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = F' \text{ (nach Legendre)} = K \text{ (nach Jacobi),}$$

dessen Wert nur noch vom Modul k abhängt und z. B. aus der folgenden convergierenden Reihe berechnet werden kann:*)

$$K = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right].$$

$$\frac{\pi}{2} < K < \infty$$

In analoger Weise hat Jacobi das dem komplementären Modul k' zugehörige vollständige Integral mit K' bezeichnet. — Es nimmt also die Funktion Sinusamplitude beziehungsweise die Werte Null und Eins an, wenn das Argument $= 0$, respektive $= K$ ist. Während also $\sin \operatorname{am} a$ von Null bis Eins anwächst, nimmt das Argument u von Null bis K zu; d. h. a ist in diesem Intervall gleich u , wenn u von Null bis K wächst [$0 < a < K$].

2. Aus der Gleichung $\sin \operatorname{am} (u \pm K \pm i K') = \pm \frac{\Delta \operatorname{am} u}{k \cos \operatorname{am} u}$ **)

folgt für $u = 0$, dass $\sin \operatorname{am} a$ den Wert $\frac{1}{k}$ annimmt, wenn

$a = K + i K'$ wird, und aus der Formel $\sin \operatorname{am} (u \pm i K') = \frac{1}{k \sin \operatorname{am} u}$

*) Schellbach, ellipt. Integrale und Thetafunktionen, § 42.

**) Durège, elliptische Funktionen, § 10.

folgt für ($u = 0$), dass $\sin am (\pm iK') = \infty$. Während also $\sin am a$ von $\frac{1}{k}$ bis ∞ wächst, muss a von $K + iK'$ bis iK' abnehmen, d. h. a hat in dem Intervall, wo u von K bis Null abnimmt, die Form $u + iK'$.

3. Wenn $\sin am a$ rein imaginär ist, so lehrt uns (Durège § 8) die Formel $\sin am iu = i \operatorname{tg} am (u, k')$, dass a die Form iu annehmen muss.

Bezeichnen wir nun mit ε eine zwischen Null und K gelegene reelle Grösse

$$(81) \quad 0 < \varepsilon < K,$$

so werden wir also für $\sin am a$ zu setzen haben:

1. in den Fällen 2, 4, 9, 11 und 13, wo a zwischen 0 und K liegt:

$$\lambda = -k^2 \sin^2 am \varepsilon.$$

2. in den Fällen 1, 5, 8 und 10, wo a zwischen $K + iK'$ und iK' liegt,

$$\begin{aligned} \lambda &= -k^2 \sin^2 am (\varepsilon + iK') \\ &= -\frac{1}{\sin^2 am \varepsilon}. \end{aligned}$$

3. in den Fällen 3, 6, 7 und 12, wo a in der Form iu auftritt,

$$\begin{aligned} \lambda &= -k^2 \sin^2 am i\varepsilon \\ &= k^2 \operatorname{tg}^2 am (k, k'). \end{aligned}$$

Dann werden unsere Gleichungen für Polarwinkel und Zeit:

I. Für die Fälle 2, 4, 9:

$$\varphi + \varphi_i = A u_{(2,4,9)}$$

$$\begin{aligned} t + t_i &= \left(\mathfrak{M} + \mathfrak{C} \right)_{2,4,9} u + \mathfrak{B} E(u)_{2,4,9} + \mathfrak{C} \frac{\operatorname{tg} am \varepsilon}{\mathcal{A} am \varepsilon} \Pi(u, \varepsilon) \\ &\quad + \mathfrak{D} \frac{\sin am u \cdot \cos am u \cdot \mathcal{A} am u}{m + \sin^2 am u}_{2,4,9}. \end{aligned}$$

II. Für die Fälle 1, 5, 8 und 10:

$$\begin{aligned} q + q_1 &= A u_{1,5,8,10} \\ t + t_1 &= \left(\mathfrak{A} + \mathfrak{C} \right)_{1,5,8,10} u + \mathfrak{B} E(u)_{1,5,8,10} + \mathfrak{C} \frac{\operatorname{tg} am \varepsilon}{\Delta am \varepsilon} \Pi(u, \varepsilon + iK') \\ &\quad + \mathfrak{D} \frac{\sin am u \cdot \cos am u \cdot \Delta am u}{m + \sin^2 am u}. \end{aligned}$$

III. Für die Fälle 3, 6 und 7:

$$\begin{aligned} q + q_1 &= A u_{3,6,7} \\ t + t_1 &= \left(\mathfrak{A} + \mathfrak{C} \right)_{3,6,7} u + \mathfrak{B} E(u)_{3,6,7} + \mathfrak{C} i \frac{\sin am(\varepsilon, k') \cos am(\varepsilon, k')}{\Delta am(\varepsilon, k')} \Pi(u, i\varepsilon) \\ &\quad + \mathfrak{D} \frac{\sin am u \cdot \cos am u \cdot \Delta am u}{m + \sin^2 am u}. \end{aligned}$$

IV. Für die Fälle 11 und 13:

$$\begin{aligned} q + q_1 &= A u_{11,13} \\ t + t_1 &= \left(\mathfrak{A} + \mathfrak{C} \right)_{11,13} u + \mathfrak{B} E(u)_{11,13} + \mathfrak{C} \frac{\operatorname{tg} am \varepsilon}{\Delta am \varepsilon} \Pi(u, \varepsilon) \\ &\quad + \mathfrak{D} \frac{\sin am u \cdot \cos am u \cdot \Delta am u}{m + \sin^2 am u} + \mathfrak{C} \frac{\sin am u \cdot \Delta am u}{1 - k^2 \sin^2 am \varepsilon \sin^2 am u} \\ &\quad + \mathfrak{F} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Delta am u}{\sin am u \sqrt{k^2 + \lambda}} - \mathfrak{F} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \infty. \end{aligned}$$

V. Für den Fall 12:

$$\begin{aligned} q + q_1 &= A u_{12} \\ t + t_1 &= \left(\mathfrak{A} + \mathfrak{C} \right)_{12} u + \mathfrak{B} E(u)_{12} + \mathfrak{C} i \frac{\sin am(\varepsilon, k') \cos am(\varepsilon, k')}{\Delta am(\varepsilon, k')} \Pi(u, i\varepsilon) \\ &\quad + \mathfrak{D} \frac{\sin am u \cdot \cos am u \cdot \Delta am u}{m + \sin^2 am u} + \mathfrak{C} \frac{\sin am u \cdot \Delta am u}{1 - k^2 \sin^2 am i \varepsilon \cdot \sin^2 am u} \\ &\quad + \mathfrak{F} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Delta am u}{\sin am u \sqrt{k^2 + \lambda}} - \mathfrak{F} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \infty. \end{aligned}$$

Hierbei waren (Durège § 8 u. § 10) nachstehende Formeln zu beherzigen:

$$\frac{\operatorname{tg} am(a + iK')}{\Delta am(a + iK')} = - \frac{\operatorname{tg} am a}{\Delta am a}; \quad \frac{\operatorname{tg} am i a}{\Delta am i a} = i \frac{\sin am(a, k') \cos am(a, k')}{\Delta am(a, k')}.$$

Darstellung der elliptischen Funktionen durch die Jacobische Funktion Θ .

Aufstellung der Bahngleichungen.

Wie die elliptischen Funktionen $\sin am u$, $\cos am u$, $\Delta am u$, so können auch die elliptischen Transcendenten $E(u)$ und $\Pi(u, a)$ in Reihen entwickelt werden.

Es ergibt sich (Dürge § 62, 63) für

$$E(u) = \frac{E}{K} u + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{K}$$

unter q (und q') die von Jacobi eingeführten und unmittelbar aus dem Modul k (und k') zu berechnenden Größen:

$$q = e^{\frac{-\pi K'}{K}} \quad q' = e^{\frac{-\pi K}{K'}}$$

und unter E das vollständige Integral 2. Gattung verstanden:

$$E = E(K) = K - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 8K \left[\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \dots \right],$$

so dass also E aus k mit Hilfe von q und K zu berechnen ist und als bekannt vorausgesetzt werden darf. — Bezeichnen wir mit dem griechischen z den Winkel, dessen sinus dem Modul k gleich ist ($k = \sin z$), so lässt sich E auch direkt aus dem Modulwinkel finden durch die Reihe (Schellbach § 113):

$$E = \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{z}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{tg}^4 \frac{z}{2} + \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\right)^2 \operatorname{tg}^6 \frac{z}{2} + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \operatorname{tg}^{12} \frac{z}{2} + \dots \right].$$

$$1 < E < \frac{z}{2}$$

Den periodischen Teil in $E(u)$ hat Jacobi als neue Funktion eingeführt und sie mit Z bezeichnet. Setzen wir mit ihm

$$Z(u) = \frac{4\pi}{2K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{K},$$

wodurch

$$E(u) = \frac{E}{K} u + Z(u) \quad \text{wird,}$$

so bemerken wir leicht folgende wichtige Eigenschaften der Z -Funktion:

$$(82) \quad \begin{aligned} Z(0) &= 0; & Z(K) &= 0; & Z(-u) &= -Z(u); \\ Z(u+2K) &= Z(u). \end{aligned}$$

Als Reihenentwicklung für die 2. elliptische Transcendente findet man (Durège § 64) folgenden Ausdruck:

$$\Pi(u, a) = u Z(a) - 2 \sum_1^{\infty} \frac{q^n}{n(1-2q^n)} \sin \frac{n\pi u}{K} \sin \frac{n\pi a}{K}.$$

Das ist aber eine Formel, die uns gestattet, das elliptische Integral 3. Gattung auch durch den Logarithmus eines unendlichen Produktes:

$$\Pi(u, a) = u Z(a) + \frac{1}{2} \log \prod_h^{\infty} \frac{1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi(u-a)}{K} + q^{4h-2}}{1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi(u+a)}{K} + q^{4h-2}}$$

auszudrücken und damit die Funktion einzuführen, welche von Jacobi mit Θ bezeichnet wurde und nach Dirichlets Vorschlag die Jacobische Funktion benannt ist. Diese Jacobische Funktion ist definiert durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} \Theta(u) &= 1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi u}{K} - 2q^9 \cos \frac{3\pi u}{K} \\ &\quad + 2q^{16} \cos \frac{4\pi u}{K} + \dots \\ &= 1 + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos n \frac{\pi u}{K}. \end{aligned}$$

Aus dieser Reihe — nebenbei einer der am stärksten convergierenden in der Mathematik überhaupt — lassen sich unschwer folgende Haupteigenschaften der Theta-Funktionen herauslesen:

$$(83) \quad \left\{ \begin{aligned} \Theta(u) &= \Theta(-u) = \Theta(u+2K) \\ \Theta(a-u) &= \Theta(u-a) \\ \Theta(0) &= \Theta(2K) = \sqrt{\frac{2uK}{\pi}} \\ \Theta(K) &= \sqrt{\frac{2K}{\pi}} \quad \frac{\Theta(0)}{\Theta(K)} = \sqrt{k'}. \end{aligned} \right.$$

Aus dem vorstehenden erhellt, dass die elliptische Transcendente $\Pi(u, a)$ auf die beiden Funktionen Z und Θ zurückgeführt werden kann durch die Gleichung:

$$(84) \quad \Pi(ua) = uZ(a) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}.$$

Dadurch ändern sich unsere Gleichungen in § 4 um in nachstehende:

I. Für die Fälle 2, 4, 9.

$$\varphi + \varphi_1 = Au_{2,4,9}$$

$$\begin{aligned} t + t_1 = & \left(\mathfrak{A}_{2,4,9} + \mathfrak{C}_{2,4,9} + \mathfrak{B}_{2,4,9} \frac{E}{K} + \mathfrak{C}_{2,4,9} \frac{\operatorname{tg} am \varepsilon}{\Delta am \varepsilon} Z(\varepsilon) \right) u + \mathfrak{B}_{2,4,9} Z(u) \\ & + \mathfrak{C}_{2,4,9} \frac{\operatorname{tg} am \varepsilon}{\Delta am \varepsilon} \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-\varepsilon)}{\Theta(u+\varepsilon)} + \mathfrak{D}_{2,4,9} \frac{\sin am u \cdot \cos am u \cdot \Delta am u}{m + \sin^2 am u}. \end{aligned}$$

II. Für die Fälle 1, 5, 8 und 10.

$$\varphi + \varphi_1 = Au_{1,5,8,10}$$

$$\begin{aligned} t + t_1 = & \left(\mathfrak{A}_{1,5,8,10} + \mathfrak{C}_{1,5,8,10} + \mathfrak{B}_{1,5,8,10} \frac{E}{K} \right) u + \mathfrak{B}_{1,5,8,10} Z(u) + \mathfrak{D}_{1,5,8,10} \frac{\sin am u \cos am u \Delta am u}{m + \sin^2 am u} \\ & - \mathfrak{C}_{1,5,8,10} \frac{\operatorname{tg} am \varepsilon}{\Delta am \varepsilon} \left[u \cotg am \varepsilon \Delta am \varepsilon + uZ(\varepsilon) + \frac{1}{2} \log \frac{\sin am (\varepsilon - u)}{\sin am (\varepsilon + u)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-\varepsilon)}{\Theta(u+\varepsilon)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t + t_1 = & \left(\mathfrak{A}_{1,5,8,10} + \mathfrak{B}_{1,5,8,10} \frac{E}{K} - \mathfrak{C}_{1,5,8,10} \frac{\operatorname{tg} am \varepsilon}{\Delta am \varepsilon} Z(\varepsilon) \right) u + \mathfrak{B}_{1,5,8,10} Z(u) \\ & - \mathfrak{C}_{1,5,8,10} \frac{\operatorname{tg} am \varepsilon}{\Delta am \varepsilon} \left[\frac{1}{2} \log \frac{\sin am (\varepsilon - u)}{\sin am (\varepsilon + u)} + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-\varepsilon)}{\Theta(u+\varepsilon)} \right] \\ & + \mathfrak{D}_{1,5,8,10} \frac{\sin am u \cdot \cos am u \cdot \Delta am u}{m + \sin^2 am u}. \end{aligned}$$

III. Für die Fälle 3, 6, 7.

$$\begin{aligned}\varphi + \varphi_i &= \underset{3,6,7}{A} u \\ t + t_i &= \left(\underset{3,6,7}{\mathfrak{A}} + \underset{3,6,7}{\mathfrak{B}} \frac{E}{K} \right) u + \underset{3,6,7}{\mathfrak{B}} Z(u) \\ &\quad + \underset{3,6,7}{\mathfrak{C}} i \frac{\sin am(\varepsilon, k') \cos am(\varepsilon, k')}{\Delta am(\varepsilon, k')} \left(u Z(i\varepsilon) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - i\varepsilon)}{\Theta(u + i\varepsilon)} \right) \\ &\quad + \underset{3,6,7}{\mathfrak{D}} \frac{\sin am u \cos am u \Delta am u}{m + \sin^2 am u} \quad \text{oder} \\ t + t_i &= \left[\underset{3,6,7}{\mathfrak{A}} + \underset{3,6,7}{\mathfrak{B}} \frac{E}{K} + \underset{3,6,7}{\mathfrak{C}} \left(1 - \sin^2 am(\varepsilon, k') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\varepsilon \pi}{2 K K'} \frac{\sin am(\varepsilon, k') \cos am(\varepsilon, k')}{\Delta am(\varepsilon, k')} + Z(\varepsilon, k') \frac{\sin am(\varepsilon, k') \cos am(\varepsilon, k')}{\Delta am(\varepsilon, k')} \right) \right] u \\ &\quad + \underset{3,6,7}{\mathfrak{B}} Z(u) + i \frac{\mathfrak{C}}{2} \frac{\sin am(\varepsilon, k') \cos am(\varepsilon, k')}{\Delta am(\varepsilon, k')} \log \frac{\Theta(u - i\varepsilon)}{\Theta(u + i\varepsilon)} \\ &\quad + \underset{3,6,7}{\mathfrak{D}} \frac{\sin am u \cos am u \Delta am u}{m + \sin^2 am u}.\end{aligned}$$

IV. Für die Fälle 11 und 13.

$$\begin{aligned}\varphi + \varphi_i &= \underset{11,13}{A} u \\ t + t_i &= \left(\underset{11,13}{\mathfrak{A}} + \underset{11,13}{\mathfrak{B}} \frac{E}{K} + \underset{11,13}{\mathfrak{C}} \frac{\operatorname{tg} am \varepsilon}{\Delta am \varepsilon} Z(\varepsilon) \right) u + \underset{11,13}{\mathfrak{B}} Z(u) \\ &\quad + \underset{11,13}{\mathfrak{C}} \frac{\operatorname{tg} am \varepsilon}{\Delta am \varepsilon} \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - \varepsilon)}{\Theta(u + \varepsilon)} + \underset{11,13}{\mathfrak{D}} \frac{\sin am u \cdot \cos am u \cdot \Delta am u}{m + \sin^2 am u} \\ &\quad + \underset{11,13}{\mathfrak{C}} \frac{\sin am u \cdot \Delta am u}{1 - k^2 \sin^2 am a \sin^2 am u} + \underset{11,13}{\mathfrak{F}} \operatorname{arctg} \frac{\Delta am u}{\sin am u \sqrt{k^2 + 1}} - \underset{11,13}{\mathfrak{F}} \operatorname{arctg} \infty.\end{aligned}$$

V. Für den Fall 12.

$$\begin{aligned}\varphi + \varphi_i &= \underset{12}{A} u \\ t + t_i &= \left[\underset{12}{\mathfrak{A}} + \underset{12}{\mathfrak{B}} \frac{E}{K} + \underset{12}{\mathfrak{C}} \left(1 - \sin^2 am(\varepsilon, k') \right. \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\varepsilon \pi}{2 K K'} \frac{\sin am(\varepsilon, k') \cos am(\varepsilon, k')}{\Delta am(\varepsilon, k')} + Z(\varepsilon, k') \frac{\sin am(\varepsilon, k') \cos am(\varepsilon, k')}{\Delta am(\varepsilon, k')} \Big] u \\
 & + \mathfrak{B}_{12} Z(u) + \frac{i}{2} \mathfrak{C}_{12} \frac{\sin am(\varepsilon, k') \cos am(\varepsilon, k')}{\Delta am(\varepsilon, k')} \log \frac{\Theta(u - i\varepsilon)}{\Theta(u + i\varepsilon)} \\
 & + \mathfrak{D}_{12} \frac{\sin am u \cos am u \Delta am u}{m + \sin^2 am u} + \mathfrak{E}_{12} \frac{\sin am u \Delta am u}{1 - k^2 \sin^2 am u \sin^2 am u} \\
 & + \mathfrak{F}_{12} \operatorname{arc tg} \frac{\Delta am u}{\sin am u \sqrt{k^2 + \lambda}} - \mathfrak{F}_{12} \operatorname{arc tg} \infty.
 \end{aligned}$$

Hierbei waren folgende Formeln (Durège § 72, 71) zu beachten:

$$\left\{ \begin{aligned}
 Z(\varepsilon + i K') &= -\frac{i\pi}{2K} + \cotg am \varepsilon \Delta am \varepsilon + Z(\varepsilon) \\
 \log \frac{\Theta(u - \varepsilon - i K')}{\Theta(u + \varepsilon + i K')} &= -\frac{i\pi(\varepsilon - u)}{2K} + \frac{i\pi(\varepsilon + u)}{2K} \\
 &+ \log \frac{\sin am(\varepsilon - u)}{\sin am(\varepsilon + u)} + \log \frac{\Theta(u - \varepsilon)}{\Theta(u + \varepsilon)} \\
 iZ(iu) &= -\operatorname{tg} am(u, k') \Delta am(u, k') + \frac{\pi u}{2KK'} + Z(\varepsilon, k').
 \end{aligned} \right.$$

Wenden wir uns nun zur

Aufstellung der Bahngleichung,

so sehen wir, dass in allen Fällen (wir lassen wieder die Zeiger fort)

$$\varphi + \varphi_i = Au$$

$$\mathfrak{J} = am u = am \frac{\varphi + \varphi_i}{A},$$

so dass also nach den Formeln 25, 34 u. flgd. die Gleichung unserer Bahnkurve

in den Fällen 1 ... 10 die allgemeine Form annimmt:

$$(85) \quad r = \frac{a + b \sin^2 am \frac{\varphi + \varphi_i}{A}}{c + d \sin^2 am \frac{\varphi + \varphi_i}{A}},$$

wobei die Werte der Konstanten a, b, c und d für jeden Fall aus nachstehender Tabelle zu entnehmen sind.

	Fall 1	Fall 2	Fall 3	Fall 4	Fall 5	Fall 6	Fall 7	Fall 8	Fall 9	Fall 10
$a \equiv$	0	$\gamma - \alpha$	1	1	$\gamma - \alpha$	1	$\gamma - \alpha$	1	1	1
$b \equiv$	1	$-(\gamma - \beta)$	0	-1	$(\gamma - \beta)$	-1	$-(\gamma - \beta)$	0	-1	-1
$c \equiv$	$-(\gamma - \alpha)$	$\beta(\gamma - \alpha)$	α	γ	$\beta(\gamma - \alpha)$	γ	$\beta(\gamma - \alpha)$	α	γ	γ
$d \equiv$	γ	$-\alpha(\gamma - \beta)$	$\beta - \alpha$	$-\beta$	$-\alpha(\gamma - \beta)$	$-\beta$	$-\alpha(\gamma - \beta)$	$\beta - \alpha$	$-\beta$	$-\beta$

Der Wert des Anfangspolarwinkels φ_i ist bestimmt durch die Kurvengleichung für die Anfangslage (für $r = r_0$ ist $\varphi = \varphi_0 = 0$)

$$r_0 = \frac{a + b \sin^2 am \frac{\varphi_i}{A}}{c + d \sin^2 am \frac{\varphi_i}{A}}, \quad \text{woraus folgt:}$$

$$(85^1) \quad \sin am \frac{\varphi_i}{A} = \sqrt{\frac{a - c r_0}{d r_0 - b}}, \quad am \frac{\varphi_i}{A} = \arcsin \sqrt{\frac{a - c r_0}{d r_0 - b}}.$$

Aus der Gleichung (85) der Bahnkurve ist sofort ersichtlich, dass r eine periodische Funktion des Drehungswinkels φ ist, und zwar wird r (wegen des Quadrates der Sinusamplitude) schon bei der Periode $2K$ denselben Wert wieder erhalten:

$$r = \frac{a + b \sin^2 am \left(\frac{\varphi + \varphi_i}{A} \pm 2K \right)}{c + d \sin^2 am \left(\frac{\varphi + \varphi_i}{A} \pm 2K \right)} = \frac{a + b \sin^2 am \frac{\varphi + \varphi_i}{A}}{c + d \sin^2 am \frac{\varphi + \varphi_i}{A}}.$$

In den Fällen 11, 12 und 13 nimmt dagegen unsere Bahngleichung folgende typische Form an:

$$(86) \quad r = \frac{a_1 + b_1 \cos am \frac{\varphi + \varphi_1}{A}}{c_1 + d_1 \cos am \frac{\varphi + \varphi_1}{A}},$$

wo wieder der Wert der Konstanten a_1 b_1 c_1 d_1 aus nachstehender Tabelle für jeden einzelnen Fall leicht zu finden ist:

	Fall 11	Fall 12	Fall 13
$a_1 =$	1	1	1
$b_1 =$	-1	1	1
$c_1 =$	$\alpha - V(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha)$	$\alpha + V(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)$	$\alpha + V(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)$
$d_1 =$	$-(\alpha + V(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha))$	$\alpha - V(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)$	$\alpha - V(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)$

Der Wert des anfängl. Drehungswinkels φ_1 kann ebenfalls bestimmt werden durch die Gleichung (85) für die Anfangslage:

$$r_0 = \frac{a_1 + b_1 \cos am \frac{\varphi_1}{A}}{c_1 + d_1 \cos am \frac{\varphi_1}{A}}, \text{ woraus hervorgeht, dass}$$

$$am \frac{\varphi_1}{A} = \arccos \frac{a_1 - c_1 r_0}{d_1}.$$

Auch in diesen 3 Fällen ist r eine periodische Funktion des Drehungswinkels φ . Doch ist jetzt die Periode eine andere $= 4K$; so dass also r (da $\cos am$ eine gerade Funktion ist) denselben Wert annehmen wird, nicht nur, wenn ich das Argument $u = \frac{\varphi + \varphi_1}{A}$

durch $(-u)$ ersetze, sondern auch, wenn es um ein ganzes Vielfaches von $4K$ wächst:

$$r = \frac{a_1 + b_1 \cos am \left(\frac{\varphi + \varphi_i}{A} \pm 4K \right)}{c_1 + d_1 \cos am \left(\frac{\varphi + \varphi_i}{A} \pm 4K \right)} = \frac{a_1 + b_1 \cos am \frac{\varphi + \varphi_i}{A}}{c_1 + d_1 \cos am \frac{\varphi + \varphi_i}{A}}.$$

Natürlich würden sich die Kurvengleichungen (85) und (86) auch durch Thetafunktionen darstellen lassen.

Die Bahngleichung (85)

$$r = \frac{a + b \sin^2 \vartheta}{c + d \sin^2 \vartheta}$$

lässt sich auch auf die Form (86) bringen, wenn wir durch die bekannte trigonometrische Formel

$$\sin^2 \vartheta = \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2}$$

die doppelte Amplitude einführen; es wird dann

$$r = \frac{a' + b' \cos \vartheta'}{c' + d' \cos \vartheta'}$$

unter

$$a' = a + \frac{b}{2}; c' = c + \frac{d}{2}$$

$$2\vartheta = \vartheta'$$

$$b' = -\frac{b}{2}; d' = -\frac{d}{2} \quad 2 am \frac{\varphi + \varphi_i}{A} = am \left(\frac{\varphi + \varphi_i}{A} \right)'$$

verstanden. So können beide Bahngleichungen in eine verschmolzen werden, und wir erhalten folgenden Typus:

$$(87) \quad r = \frac{a'_1 + b'_1 \cos am \left(\frac{\varphi + \varphi_i}{A} \right)'}{c'_1 + d'_1 \cos am \left(\frac{\varphi + \varphi_i}{A} \right)'}$$

Hierbei gelten die oberen Indices für die Fälle 1, 2, 3 .. 10, die unteren Zeiger für die Fälle 11, 12 und 13.

Wir bekommen somit in Gleichung (87) eine Bahngleichung, die durch ihre Gestalt an die bekannte allgemeine Polargleichung

$$r = \frac{(1+e)f}{1-e \cos \psi} = \frac{p}{1-e \cos \psi}$$

der Kegelschnitte erinnert, und die mit den Gleichungen der Cycloiden ebenfalls eine gewisse Verwandtschaft zeigt. Beides ist nicht besonders auffällig. Schliesst doch unser Kraftgesetz die Newtonsche Centralbewegung als Specialfall in sich ein, und bezüglich der Cycloidenbewegung hat schon Möbius nachgewiesen, dass wir noch heute mit der epicyclischen Bewegung mehr zu thun haben, als wir meinen, da jede Entwicklung in trigonometrische Reihen, welche nach sin und cos der Vielfachen eines Winkels fortschreiten, ihre geometrische Interpretation in eben dieser Art der Bewegung findet.*)

§ 6.

Diskussion der gefundenen Werte. Schlussbetrachtung.

Um die Kurve selbst zu diskutieren ist es zweckmässig, für den Anfang einmal die Lage unseres Koordinatensystemes etwas zu verändern und die Anfangslage unseres Punktes so zu wählen, dass $\varphi_1 = A u_0$ und t_1 verschwinden, so dass also der Punkt m zur Zeit $t = t_1 = t_0$ seine Bewegung auf demjenigen Grenzgebiete beginnt, wo $\mathfrak{P}_0 = a m u_0 = 0$ ist (also $\varphi_1 = \varphi_0 = 0$; $u_0 = 0$).

Das geschieht

I. In den Fällen 2, 4 und 9

für die Minimalwerte von $q \dots [q_{(2)} = \beta \text{ (pos)}; q_{(4)} = \gamma \text{ (pos)}; q_{(9)} = \gamma \text{ (pos)}]$. Wenn q von seinem Minimalwerte $q_{(\min)}$ bis zu seinem Maximalwerte $[q_{(2)} = \gamma \text{ (pos)}; q_{(4)} = +\infty; q_{(9)} = +\infty]$

stetig anwächst, so wächst $\mathfrak{P}$ gleichzeitig von $0 \dots \frac{\pi}{2}$, und unser

Argument u durchläuft also das Intervall von $0 \dots K$. — Bezeichnen wir nun den Winkel φ , welcher dem Anwachsen unseres Argumentes von 0 bis K entspricht, mit $\mathcal{O}$ und die zugehörige Zeit t mit T , so werden nach pag. 42 die absoluten Werte von

*) Günther, Lehrbuch der Geophysik, I. Bd., Kap. IV, § 5. Stuttgart. 1884.

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi + \varphi_1 = \underset{2,4,9}{Au} \quad \text{und} \\ t + t_1 = \underset{2,4,9}{L}u + \underset{2,4,9}{M}Z(u) + \underset{2,4,9}{N} \log \frac{\Theta(u - \varepsilon)}{\Theta(u + \varepsilon)} \\ \quad + \underset{2,4,9}{Q} \frac{\sin am u \cdot \cos am u \mathcal{A} am u}{m + \sin^2 am u} \end{array} \right.$$

(die Konstanten haben wir hier kurz durch L, M, N, Q bezeichnet)
unter Berücksichtigung der Formeln (82), (83), (77):

für $u = 0$

$$\underset{(u=0)}{\varphi} = 0 \quad \text{und} \quad \underset{(u=0)}{t} = 0 \quad \varrho_{(\min)} = \begin{cases} \beta_{(2)} \\ \gamma_{(4)} \\ \gamma_{(9)} \end{cases}$$

für $u = K$

$$\underset{(u=K)}{\varphi} = \underset{2,4,9}{\Phi} = \underset{2,4,9}{AK} \quad \varrho_{(\max)} = \begin{cases} \gamma_{(2)} \\ \infty_{(4)} \\ \infty_{(9)} \end{cases}$$

$$\underset{(u=K)}{t} = \underset{2,4,9}{T} = \underset{2,4,9}{LK}$$

für $u = 2K$

$$\underset{(u=2K)}{\varphi} = \underset{2,4,9}{2\Phi} = \underset{2,4,9}{2AK} \quad \varrho_{(\min)} = \begin{cases} \beta_{(2)} \\ \gamma_{(4)} \\ \gamma_{(9)} \end{cases}$$

$$\underset{(u=2K)}{t} = \underset{2,4,9}{2T} = \underset{2,4,9}{2LK}$$

für $u = 3K$

$$\underset{(u=3K)}{\varphi} = \underset{2,4,9}{3\Phi} = \underset{2,4,9}{3AK} \quad \varrho_{(\max)} = \begin{cases} \gamma_{(2)} \\ \infty_{(4)} \\ \infty_{(9)} \end{cases}$$

$$\underset{(u=3K)}{t} = \underset{2,4,9}{3T} = \underset{2,4,9}{3LK}$$

.....
und so weiter

für $u = \pm u$

$$\varphi = \pm \varphi; \quad t = \pm t; \quad \varrho = \varrho.$$

für $u = \pm u \pm 2K$

$$\varphi = \pm \varphi \pm 2\Phi; \quad t = \pm t \pm 2T; \quad \varrho = \varrho.$$

Die Bewegung ist also periodisch, und der Kurvenzug, welcher die Endpunkte der ϱ -Strahlen verbindet, und den wir kurz die ϱ -Kurve nennen wollen, verläuft — wenn wir in den Fällen 4 und 9 das äussere Grenzgebiet als Kreis vom Radius $\varrho = \infty$ auffassen — wellenförmig von einem Grenzkreis zum anderen und ist seiner schlangenartigen Windungen halber einer Poinso'schen

Herpolodie vergleichbar, — einer Kurve, die auch*) wellenförmig zwischen 2 Kreisen sich hinwindet, welche mit dem Maximum und Minimum der Radien um einen Punkt O der invariablen Ebene beschrieben werden können (Fig. 1). Die Bahn unseres Erden-Mondes gewährt ein ähnliches Bild. Im allgemeinen ist diese Kurve transcendent und schliesst sich nicht; der Kurvenzug wird erst dann ein geschlossener sein, oder einer der nachfolgenden Bogen mit dem ersten zusammenfallen und dann selbstverständlich auch seine nachfolgenden mit denen des ersten, wenn ein ganzes Vielfaches des synodischen Winkels 2Φ einem ganzen Vielfachen des Kreisumfangs gleich ist, sobald also

$$\frac{2\pi}{2\Phi} = \frac{m}{n},$$

wobei unter m und n relative Primzahlen verstanden werden sollen.

Lassen wir nun wieder die Beschränkung über die Anfangslage unseres Punktes (m z. Zeit $t=0$ im Aphel) fallen, drehen wir also wieder den Strahl φ_0 um φ_i zurück und lassen die Polarachse nicht mehr mit einem $\varrho_{(\min)}$ zusammenfallen, so erhalten wir aus unseren Gleichungen, wenn wir die schon aufgeführten Formeln berücksichtigen, nach leichter Mühe folgende Zusammenstellung, woraus die speciellen Beziehungen zwischen der Grösse des Fahrstrahls ϱ , des zugehörigen Polarwinkels φ und der zugehörigen Zeit t nach ihrem absolutem Werte leicht zu ersehen sind:

	ϑ	$\varrho = \frac{1}{r}$	t	φ
$u = u_0$	ϑ_0	ϱ_0	0	0
$u = 0$	0	$\varrho_{(\min.)}$	t_i	φ_i
$u = u$	ϑ	ϱ	$t + t_i$	$\varphi + \varphi_i$
$u = K$	$\frac{\pi}{2}$	$\varrho_{(\max.)}$	$T + t_i$	$\Phi + \varphi_i$
$u = u + K$	$\vartheta_{(u+K)}$	$\varrho_{(u+K)}$	$t_{(u+K)}$	$\Phi + \varphi + \varphi_i$
$u = 2K$	0	$\varrho_{(\min.)}$	$2T + t_i$	$2\Phi + \varphi_i$
$u = u + 2K$	ϑ	ϱ	$2T + t + t_i$	$2\Phi + \varphi + \varphi_i$
$u = 3K$	$\frac{\pi}{2}$	$\varrho_{(\max.)}$	$3T + t_i$	$3\Phi + \varphi_i$
$u = u + 3K$	$\vartheta_{(u+3K)}$	$\varrho_{(u+K)}$	$t_{(u+3K)}$	$3\Phi + \varphi + \varphi_i$
$u = 4K$	0	$\varrho_{(\min.)}$	$4T + t_i$	$4\Phi + \varphi_i$
			etc.	

*) Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. II. Bd. 4 Th. 3. Kap.

Unsere ϱ -Kurve berührt also den Minimalgrenzkreis für die Zeit $t = t_1$ und den Polarwinkel $\varphi = \varphi_1$ und gelangt nach einer Zunahme des Drehungswinkels um Φ (und der Zeit um T) an den Maximalgrenzkreis, ihn entweder wieder berührend oder (für den Fall, dass $\varrho = \infty$) ihn senkrecht treffend und sich asymptotisch dem Strahle $\Phi + \varphi_1$ nähernd. Aus dieser Maximalentfernung kehrt der ϱ -Endpunkt wieder nach einer Zunahme des Polarwinkels um Φ (und der Zeit um T) an den Minimalgrenzkreis zurück, berührt ihn, und das Spiel beginnt von neuem. —

Bei einer Zunahme des Arguments u um die Periode $2K$ oder des Drehungswinkels φ um 2Φ erhält ϱ wieder denselben Wert. Der ϱ -Endpunkt befindet sich also wieder auf demselben intermediären Kreis, wenn der Winkel φ um den Periodenwinkel 2Φ oder die Zeit t um $2T$ vermehrt wird.

Wir sehen also, unsere ϱ -Bahnkurve setzt sich zusammen aus vielen, unter sich zusammenhängenden und kongruenten Teilen, von denen jeder bei einer Zunahme des Polarwinkels um $2\Phi = 2AK$ beschrieben wird. Diese einzelnen Kurventeile, welche vom Maximalgrenzkreis aus den Minimalgrenzkreis zangenartig an- resp. umfassen, bestehen jeder wieder aus 2 Armen, und jeder dieser Arme hat mit dem mit ihm zusammenhängenden Arme des nachbarlichen Kurventeils eine Symmetrieachse, welche durch die Werte $u = 0, 2K, \dots, 2\nu K$ gegeben ist. Wir haben aber auch Symmetrie in Bezug auf einen Radius vector, welcher einen Winkel $\varphi - \varphi_1 = (2\nu + 1)\Phi$ mit der positiven X-Achse einschliesst. So erhalten wir also lauter kongruente Kurvenbogen, deren Zweige wieder symmetrisch zu einander liegen.

Es ist nun leicht, die Gestalt unserer eigentlichen Bahnkurve selbst (also für die Endpunkte der r-Strahlen) für bestimmte Anfangswerte zu konstruieren. Wir brauchen zu diesem Zwecke unsere ϱ -Kurven nur einer Transformation mittelst reziproker Radien zu

unterwerfen nach dem Gesetze $r = \frac{1}{\varrho}$. Die Abbildung ist dann

bekanntlich eindeutig, conform und giebt eine isogonale Verwandtschaft; die Winkel bleiben erhalten. Kleinen Dreiecken der einen Ebene entsprechen ähnliche und ähnlich liegende kleine Dreiecke der

anderen, nur die Umgebung des Nullpunktes ist davon ausgeschlossen. Das Unendlich-Weite dort (in der q -Ebene) entspricht dem Nullpunkt hier (in der Ebene der r) und umgekehrt. Umschliesst dort ein Kreis den Nullpunkt, so umschliesst er ihn auch hier, jedoch entspricht dann das Innere des einen dem Aeusseren des anderen.

Die Gestalt unserer Bahnkurve wird demnach für bestimmte Anfangswerte so beschaffen sein können, wie sie dargestellt ist in den Figuren 1...6.

Die ganze Gestalt der Kurve variiert nämlich sehr, und ihre Form wird wesentlich bestimmt und abhängig sein von der Grösse des halben Periodenwinkel Φ (und der Zeit T).

Ist dieser Winkel $\Phi \leq \frac{\pi}{2}$, so wird unser Punkt sich innerhalb seines ringförmigen Bewegungsgebietes (die Grenze für $q = \infty$ ist nämlich infolge der Inversion $r = \frac{1}{q}$ zum Punkte 0, d. h. zu einem Kreise vom Radius Null zusammengeschrumpft) von einer Grenzlage zur anderen sich schlängeln und die Bahn also die charakteristische Gestalt einer Herpolodie (Fig. 1) annehmen können respektive für $r_{(\min.)} = 0$ aus einer Anzahl von Blättern oder Schleifen wie in Fig. 2 bestehen.

Wird der Winkel $\Phi \geq \frac{\pi}{2}$, so wird für gewisse Anfangswerte unsere Bahnkurve eine Gestalt (Fig. 3) annehmen können, wie sie allgemein bekannt ist als Horizontalprojektion der Punktkurve eines schwingenden sphärischen Pendels, die aus ellipsenähnlichen Kurven besteht, deren grosse Achse (die Apsidenlinie) stetig ihre Richtung ändert, und zwar wird das Weiterücken dieses Achsenschnittpunktes auf den Grenzkreisen im Sinne seiner Bewegung vorwärts erfolgen, ganz ähnlich wie bei der Drehung der Pendelebene bei dem Foucaultschen Versuche.

Wird $\Phi =$ einem Multiplum von π , oder überhaupt sehr gross, so artet die Kurvengestalt, wie das auch bei der Herpolodie der Fall sein kann, in eine (mehrfache insbesond. Doppel-) Spirale aus, die sich an den inneren Grenzkreis (oder den Punkt 0) mehr und mehr heranwindet, um ihn, nachdem sie ihn berührt, in umgekehrten

Spiralen wieder zu verlassen und in schraubenförmigen Windungen wieder dem äusseren Grenzkreis zuzustreben etc. (Fig. 4). — Wird $\Phi = \infty$ und ausserdem noch $T = \infty$ gross, so wird der innere Grenzkreis (resp. der Punktkreis O) zur Asymptote, der sich die (einfache) Spirale wohl mehr und mehr nähert, die sie jedoch niemals erreicht (Fig. 5).

Auch zur mehrfach überdeckten Geraden kann unsere Bahn deformieren — ein Specialfall, der übrigens nicht blos bei den Fällen 2, 4 und 9 möglich ist, sondern überhaupt bei allen anderen noch zu behandelnden Fällen. Wenn nämlich $c = 0$ ist [und das wird (nach 10) geschehen, nicht nur wenn $v_0 = 0$, sondern auch wenn $p_0 = 0$ oder $\sin \tau_0 = 0$ oder $\tau_0 = 0$ resp. π], so wird $d\varphi = 0$, $\varphi = \text{const} = \varphi_0 = 0$, und unser Punkt bewegt sich in diesem Specialfall in der Richtung der OX-Achse, mit der dann ja die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit zusammenfällt.

Damit hätten wir für die Fälle 2, 4 und 9 die Bewegung unseres Punktes bestimmt, denn wir kennen für diese Fälle an jedem Orte und für jede Zeit die Grösse der Kraft und der Geschwindigkeit, es ist uns die Gleichung der Bahnkurve bekannt, und wir haben diese Kurven selbst diskutiert. Wir wissen, in welchem Falle unser Punkt diese oder jene Kurve, welchen Weg er in diesem oder jenem Fall beschreiben muss, — wenigstens für die mathematische Untersuchung und nach der Theorie. Ob es dem Punkte auch mechanisch möglich sein wird, die Bahnkurven vollständig zu durchlaufen, das ist freilich eine andere Frage.

Gehen wir nun auch darauf noch etwas näher ein, so sehen wir sofort, dass dann die Fälle 4 und 9 auszuschneiden sind, als mechanisch nur zum Teil möglich. In diesen Fällen kann der Punkt nicht die einzelnen Schleifen oder Blätter seiner Bahnkurve, ja nicht einmal ein einziges Blatt — (für den Fall $\Phi = \pi$ würde überhaupt die Anzahl der Blätter nur $= 1$ sein, und dieses würde eine der Cardioide ähnliche Gestalt haben können wie in Fig. 6) — völlig durchlaufen, sondern höchstens nur einen einzigen Zweig, da er ja, wenn er ins Kraftcentrum gelangt, dort festgehalten werden muss, wie aus der Bemerkung pag. 13 hervorgeht, ganz davon abgesehen, dass er dann eine unendlich grosse Geschwindigkeit erlangt haben

$$\log(+1) = +2\nu i\pi \quad \log(-1) = \pm(2\nu+1)i\pi$$

unter ν irgend eine positive ganze Zahl verstanden);

für $u = 2K$

$$q = 2AK = 2\Phi \quad q = q(\min.) = \text{neg.}$$

$u=2K$ 1,5,8,10

$$t = 2LK - N \log \frac{\sin am(\varepsilon - 2K)}{\sin am(\varepsilon + 2K)} = 2L - NK \log(+1)$$

$u=2K$ 1,5,8,10 1,5,8,10 1,5,8,10 1,5,8,10

$$= 2LK - N2i\pi = 2T;$$

1,5,8,10

für $u = 3K$

$$q = 3\Phi; \quad q = q(\max.) = \text{pos.}$$

$u=3K$

$$t = 3LK - N \log(-1) = 3LK - N3i\pi = 3T;$$

$u=3K$ 1,5,8,10 1,5,8,10 1,5,8,10

für $u = 4K$

$$q = 4\Phi; \quad t = 4T;$$

$u=4K$ $u=4K$

etc. etc.

Die Resultate sind also mutatis mutandis dieselben wie bei I (für die Fälle 2, 4, 9). — Die Bewegung ist auch hier (wenigstens für die mathematische Untersuchung) periodisch, und die Diskussion wird ganz die gleiche sein, hier wie dort. Die q -Bahnen freilich sind in diesem Falle ausserordentlich verzerrt und die Gestalt der Kurven bei I kaum wieder zu erkennen, da sie ja durch den Nullpunkt hindurch auf 2 Ebenen ausgezogen sind — auf die Ebene der positiven q und die im Nullpunkt mit ihr zusammenhängende Ebene der negativen Fahrstrahlen (Fig. 7).

Wir können uns aber eine Wiederholung der vorigen Betrachtungen umso eher ersparen, als eine derartige Bewegung unmöglich sein wird. Es leuchtet das von selbst ein und tritt noch klarer hervor, wenn wir unsere Kurven wieder einer Inversion mittelst reziproker Radien unterwerfen und in r -Kurven transformieren, wodurch der Nullpunkt, durch welchen in allen 4 Fällen die q -Kurve hindurchgeht, in das Unendlich-Weite geworfen wird. Wir sehen dann, dass unser Punkt, wenn er einen vollen Kurvenzug durchlaufen wollte, einen Sprung von $+\infty$ zu $-\infty$ machen müsste; er könnte also höchstens einen (positiven) Arm durchlaufen. Die Kurve hat also einen Unstetigkeitspunkt.

Diese Unstetigkeit können wir auch auf rechnerischem Wege darlegen. Wenn nämlich $\varrho = 0$ wird (wenn also der Punkt im Unendlichen angekommen ist), so wird in allen 4 Fällen nach den Gleichungen (25), (48), (57) und (64)

$$\sin^2 \vartheta = -m = \frac{-1}{\lambda}, \text{ infolgedessen } m + \sin^2 \vartheta = 0,$$

also der Faktor der Konstanten ϑ oder Q unendlich gross, d. h. $t = \infty$.
1.5,8,10

Der Punkt kann also erst nach unendlicher Zeit in das Unendliche gelangen, eine Zeitperiode existiert demnach nicht oder, was uns der oben auftretende $\log(-1)$ schon sagte, es giebt keine Zeit, in welcher unser Mobil von einem Grenzkreis zum anderen gelangen könnte.

Für gewisse Anfangswerte würde (um wenigstens eine solche nur theoretisch mögliche Bahnkurve bildlich zu fixieren) unser Punkt vielleicht eine Bahn von der Gestalt Fig. 8 durchlaufen können, wobei (wie bei Fig. 7) die Kurven selbst und die Leitstrahlen auf der Ebene der negativen r punktiert angegeben sind.

III. Für die Fälle 3, 6 und 7

gelten die Gleichungen:

$$\varphi + \varphi_1 = A u$$

3,6,7

$$t + t_1 = L u + M Z(u) + N \log \frac{\Theta(u - i\varepsilon)}{\Theta(u + i\varepsilon)}$$

3,6,7 3,6,7 3,6,7

$$+ Q \frac{\sin am u \cos am u \Delta am u}{m + \sin^2 am u},$$

3,6,7

wobei wieder zur Abkürzung die Konstanten $A, L \dots Q$ genannt worden sind.

Die Diskussion führen wir ganz in derselben Weise wie bei I (für die Fälle 2, 4 und 9) und gelangen dann unter den nötigen Veränderungen zu ganz denselben Resultaten wie dort. Bis auf die Figuren würde alles dort gesagte zu wiederholen sein.

Der Fall 6 würde den Fällen 4 und 9 zu vergleichen sein, da auch hier unser Punkt keinen vollen Kurvenzug zu durchlaufen im stande ist, weil ihn wie dort das Attraktionscentrum festhalten würde.

Der Fall 3 aber und besonders der Fall 7, der sich nur durch die negative Konstante h vom Fall 2 unterscheidet, würden beide dem 2. Fall an die Seite zu stellen sein. Für den Fall 3 sind die Radien der Grenzkreise durch die Wurzelwerte $\frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{\beta}$ gegeben, und für den Fall 7 sind sie wie bei 2 durch die Werte $\frac{1}{\beta} > \frac{1}{\gamma}$ bestimmt. Bezüglich dieser beiden Fälle können wir also auf die Resultate im Falle 2 verweisen und brauchen somit nicht näher darauf einzugehen.

IV. Für die Fälle 11 und 13

lauteten unsere Gleichungen:

$$\varphi + \varphi_1 = Au$$

$$\begin{aligned} t + t_1 &= L u + M Z(u) + N \log \frac{\Theta(u - \varepsilon)}{\Theta(u + \varepsilon)} \\ &\quad + Q \frac{\sin am u, \cos am u \Delta am u}{m + \sin^2 am u} + O \frac{\sin am u \Delta am u}{1 - k^2 \sin^2 am \varepsilon \sin^2 am u} \\ &\quad + R \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Delta am u}{\sin am u \sqrt{K^2 + \lambda}} - R(\nu + 1) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

unter $L \dots R$ die bekannten konstanten Faktoren verstanden. Der Punkt mag auch jetzt vorläufig einmal in der Anfangslage sich auf dem Grenzkreis befinden, der durch die untere Grenze der q gegeben ist. Das geschieht für $q_{(11)} = -\infty$ und für $q_{(13)} = \alpha$ (neg). Wenn dann q stetig wachsend das Intervall von $-\infty$ resp. α (neg) bis α (pos) resp. $+\infty$ durchwandert, so nimmt φ von $0 \dots \pi$ zu, und das Argument u selbst nimmt alle Werte zwischen $0 \dots 2K$ an. Bezeichnen wir jetzt den Winkel, welcher dem Anwachsen des Arguments von $0 \dots 2K$ entspricht mit Φ und T , so erhalten wir aus unseren Gleichungen:

für $u = 0$

$$\varphi = 0; \quad t = 0; \quad q = q_{(\min)};$$

für $u = 2K$

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi = 2 A K; \\ t &= T = 2 L K; \end{aligned} \quad q = q_{(\max)};$$

für $u = 4K$

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\Phi = 4A K; \\ t &= 2T = 4L K; \end{aligned} \quad \varrho = \varrho(\min);$$

für $u = 6K$

$$\begin{aligned} \varphi &= 3\Phi = 6A K; \\ t &= 3T = 6L K; \end{aligned} \quad \varrho = \varrho(\max);$$

etc. etc.

also wie in den Fällen 1, 5, 8, 10, nur dass Φ und T jetzt vom doppelten vollständigen Integrale 1. Gattung abhängen. Es ist demnach fast das nämliche zu wiederholen, was wir schon oben gesagt haben, nur dass jetzt die Periode eine andere ist, der Punkt wird auf demselben intermediären Kreise sich befinden, wenn u um $4K$ zugenommen hat. Sonst stimmt alles mit dem früheren überein.

Wie in den Fällen 1, 5, 8 und 10 haben wir aber auch hier keine geschlossene, zusammenhängende Bewegung, wie schon daraus ersichtlich ist, dass unser Punkt aus dem Gebiete negativer Fahrstrahlen ($r = -\infty$) in das Gebiet positiver r ($r = +\infty$) zu springen hätte. Genau wie dort haben wir auch hier im Unendlichen einen Unstetigkeitspunkt, was ebenfalls auch aus den Gleichungen (67) und (73) hervorgeht. Für $\varrho = 0$ wird

$$\cos \vartheta = \frac{1}{n}, \text{ also } \sin^2 \vartheta = \frac{n^2 - 1}{n^2} = -\frac{1}{\lambda} = -m$$

oder $m + \sin^2 \vartheta = 0$, d. i. $t = \infty$. Wir brauchen für diese Fälle also einfach auf die Fälle 1, 5, 8 und 10 zu verweisen.

V. Für den Fall 12

lauten die Gleichungen fast ebenso wie in IV (für die Fälle 11, 13), nur dass wir andere Konstanten haben. Wenn ϱ_{12} von α (pos) bis $+\infty$ läuft und ϑ von $0 \dots \pi$, also u von $0 \dots 2K$ zunimmt, so geht r von $\frac{1}{\alpha} \dots 0$. Die Bewegung erfolgt also ganz ähnlich wie in den Fällen 4 und 9 innerhalb eines Kreises um das Kraftcentrum (freilich mit anderer Periode), sie wird aber auch hier,

aus denselben Gründen wie dort, nur eine unvollständige sein können, und so dürfen wir uns auch hier ein genaueres Eingehen auf diesen Fall ersparen.

Es wäre nun zum Schlusse noch kurz darauf einzugehen, was im Falle einer Repulsionskraft P eintreten müsste, was also geschehen würde, wenn unsere Centralkraft in derselben Stärke abstossend auf den Punkt m wirkte. — Wir hätten dann in den betreffenden Gleichungen des § 1 $\varepsilon = +1$ zu setzen, wodurch unsere in § 2 diskutierte Plankurve 3. Grades zu

$$\Re(\varrho) = 2C\varrho^3 + (2B - c^2)\varrho^2 + 2A\varrho + 2h,$$

also ihrer Gestalt nach fast zu ihrem Spiegelbilde in Bezug auf die ϱ -Achse umgeändert würde. Für positive C -Werte würde dann der Kurvenzug jetzt ähnlich verlaufen wie in § 2 für $C \leq 0$ und umgekehrt. Ausserdem würde bei gleichem Vorzeichen von

C und h oder für $\frac{h}{C} \geq 0$ die eine Wurzel ϱ_1 (pag. 9) des Falles A jetzt negativ sein wie im Falle B, und eine positive Wurzel ϱ_1 würden wir jetzt für $\frac{h}{C} \leq 0$ bekommen. Wir würden aber im

wesentlichen zu denselben Resultaten gelangen müssen wie im Falle der Attraktion; nur würden (pag. 9 und 10) in unserer Aufstellung alle Fälle unter A mit denen unter B und die Fälle a) mit den Fällen b) zu vertauschen sein, — oder wir müssten den Fall der Attraktion so behandeln, als ob die Variable ϱ im negativen Gebiete und innerhalb solcher Intervalle nur sich bewegen dürfte, dass die Funktion $R(\varrho)$ negativ ist. D. h., während wir im Falle der Anziehung die Kurve $R(\varrho)$ nur im 1. Quadranten betrachteten, so hätten wir das im Fall der Abstossung im 3. Quadranten zu thun. Der Verlauf der ganzen Untersuchung würde aber nur wenig verschieden sein von dem vorstehenden. Diese Gleichheit der Behandlung findet auch geometrisch ihren Ausdruck dadurch, dass bei projektivischer Auffassung der unbegrenzte Raum durch eine unbegrenzte Ebene noch nicht in 2 Teile zerfällt — dass vielmehr der

projektivisch gedachte Raum durch 2 unbegrenzte Ebenen nur in 2 Winkelräume und eine Ebene also durch 2 unbegrenzte Gerade auch nur in 2 Stücke zerlegt wird. Die Fläche des 1. und 3. Quadranten bilden darnach nur eine einzige im Unendlichen zusammenhängende Ebene.

So bleiben uns also bei unserer Untersuchung nur 3 Fälle übrig, in denen für unser Mobil eine Bewegung mechanisch überhaupt möglich ist, denn nur in den Fällen 2, 3 und 7 werden wir eine reelle und eventuell zusammenhängende, geschlossene Bewegung erhalten können. In diesen 3 Fällen müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$\text{I. (Fall 2.)} \quad D_3 \leq 0; \quad C \geq 0; \quad h \geq 0;$$

$$\alpha(\text{pos}) \dots < \beta(\text{pos}) \dots < \frac{1}{r} < \dots \gamma(\text{pos}).$$

$$am u = am \frac{\varphi + \varphi_1}{A_2} \left[= am \frac{\varphi}{A_2} \right]$$

$$c = \text{Flächenkonst.} \quad A_2 = \frac{2c}{V 2C(\gamma - \alpha)}$$

$$r = \frac{(\gamma - \alpha) - (\gamma - \beta) \sin^2 am \frac{\varphi}{A_2}}{\beta(\gamma - \alpha) - \alpha(\gamma - \beta) \sin^2 am \frac{\varphi}{A_2}}$$

$$\varphi = A_2 u; \quad \Phi = A_2 K; \quad T = L_2 K = \frac{L_2}{A_2} \Phi;$$

$$L_2 = \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{B}_2 \frac{E}{K} + \mathfrak{C}_2 \frac{\text{tg } am \varepsilon}{\Delta am \varepsilon} Z(\varepsilon)$$

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\alpha(\gamma - \alpha) + \beta(\gamma + \alpha)}{\alpha^2 \beta \gamma V 2C(\gamma - \alpha)} \quad \mathfrak{B}_2 = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha \beta \gamma V 2C(\gamma - \alpha)}$$

$$\mathfrak{C}_2 = \frac{(\gamma - \alpha) [\beta^2(\gamma + \alpha) - \alpha^2(\gamma + \beta)]}{\alpha^3 \beta \gamma (\gamma - \beta) V 2C(\gamma - \alpha)}$$

$$k^2 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} \quad \sin^2 am \frac{\varphi}{A_2} = \frac{(\gamma - \alpha)(1 - \beta r)}{(\gamma - \beta)(1 - \alpha r)}.$$

Bezügl. der Grössen ε und $Z(\varepsilon)$ cf. § 4 und § 5.

II. (Fall 7.) $D_3 \leq 0; \quad C \geq 0; \quad h \leq 0;$

$$\alpha(\text{neg}) \cdots < \beta(\text{pos}) \cdots < \frac{1}{r} < \cdots \gamma(\text{pos})$$

$$r = \frac{(\gamma - \alpha) - (\gamma - \beta) \sin^2 am \frac{\varphi}{A_7}}{\beta(\gamma - \alpha) - \alpha(\gamma - \beta) \sin^2 am \frac{\varphi}{A_7}}$$

$$\Phi = A_7 K; \quad T = L_7 K = \frac{L_7}{A_7} \Phi$$

$$A_7 = \frac{2c}{\sqrt{2C(\gamma - \alpha)}}; \quad L_7 \text{ vergl. pag. 43.}$$

$$\mathfrak{A}_7 = \frac{\alpha(\gamma - \alpha) + \beta(\gamma + \alpha)}{\alpha^2 \beta \gamma \sqrt{2C(\gamma - \alpha)}}; \quad \mathfrak{B}_7 = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha \beta \gamma \sqrt{2C(\gamma - \alpha)}}$$

$$\mathfrak{C}_7 = \frac{(\gamma - \alpha)[\beta^2(\gamma + \alpha) - \alpha^2(\gamma + \beta)]}{\alpha^2 \beta \gamma (\gamma - \beta) \sqrt{2C(\gamma - \alpha)}}$$

$$k^2 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}; \quad \sin^2 am \frac{\varphi}{A_7} = \frac{(\gamma - \alpha)(1 - \beta r)}{(\gamma - \beta)(1 - \alpha r)}.$$

III. (Fall 3.) $D_3 \leq 0; \quad C \leq 0; \quad h \leq 0;$

$$\alpha(\text{pos}) \cdots < \frac{1}{r} < \cdots \beta(\text{pos}) \cdots < \gamma(\text{pos})$$

$$r = \frac{1}{\alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 am \frac{\varphi}{A_3}} \quad A_3 = \frac{c}{\sqrt{-2C(\gamma - \alpha)}}$$

$$\Phi = A_3 K; \quad T = L_3 K = \frac{L_3}{A_3} \Phi$$

$$L_3 \text{ cf. pag. 43.} \quad \mathfrak{A}_3 = -\mathfrak{B}_3 \gamma(\gamma - \alpha)$$

$$\mathfrak{B}_3 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{\alpha \beta \gamma (\gamma - \alpha) \sqrt{-2C(\gamma - \alpha)}}; \quad \mathfrak{C}_3 = \frac{(\alpha \beta + \beta \gamma + \alpha \gamma)(\beta - \alpha)^2}{2\alpha^2 \beta \gamma (\gamma - \alpha)^2 \sqrt{-2C(\gamma - \alpha)}}$$

$$k^2 = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}; \quad \sin^2 am \frac{\varphi}{A_3} = \frac{1 - \alpha r}{r(\beta - \alpha)}.$$

Wir bemerken leicht, dass diese 3 Fälle in engem Zusammenhang unter einander stehen und werden zum 2. Male auf die Analogie hingewiesen mit den Resultaten, die man erhält unter Zugrundelegung des Newtonschen Anziehungsgesetzes, bei dessen Geltung sich die Körper bekanntlich so bewegen, als zögen sie sich mit einer Kraft an, die im direkten Verhältnis zu ihren Massen und im umgekehrten Verhältnis zum Quadrate ihrer Entfernung steht.

Unsere 3 Bahngleichungen entsprechen 3 Arten von Bahnkurven, und diese Dreizahl finden wir auch wieder beim Newtonschen Gravitationsgesetz, unter dessen Herrschaft sich ein Mobil nur bewegen kann entweder auf der Bahn einer Ellipse, oder Parabel, oder Hyperbel — drei Kurven, die viel Gemeinsames an sich haben, die man durch geeignete Projektion ineinander überführen kann, und die unter dem Gesamtnamen der ebenen Kegelschnittkurven allgemein bekannt sind. —

Analoges stellt sich auch bei der von uns zu Grunde gelegten Centralkraft heraus. Auch hier finden wir drei mechanisch mögliche Bahnkurven, und diese sind durch Bewegungsgleichungen bestimmt, auf deren inneren Zusammenhang nicht erst besonders hingewiesen zu werden braucht. Für alle ist die charakteristische Kurvenform die Gestalt der Herpolodie, jener Schlangellinie, die innerhalb eines Kreisringes in bekannter Weise sich windet und mannigfach deformieren kann.

Ohne Belang, aber immerhin von einigem Interesse ist nun vielleicht noch die Frage, ob unsere Bahnkurven auch den Anforderungen einiger Philosophen genügen, welche meinen, dass vor allem in der Natur die Idee des Schönen zur Darstellung gelangt, dass alles zweckmässige Geschehen gewissen Gesetzen der Aesthetik sich fügt — dass „die Schönheit eine Pflicht der Erscheinungen“ ist. Solchen Anbetern der Natur dürfte kaum etwas beweiskräftiger sein, und nichts mehr ein Kriterium für die mechanische Möglichkeit unserer Bahnen bilden, als eine an diesen auftretende Harmonie, jene durch Symmetrie hergestellte Ordnung von Mannigfaltigkeiten. — Unser optisches Formgefühl aber wird an den welligen Zügen unserer Bahnkurven sicherlich kein Missfallen finden. Mendelssohn schreibt „den flammigten oder geschlängelten Linien“ sogar eine

gewisse Anmut, eine Art höherer Schönheit zu: „die Schönheit der anscheinenden oder nachgeahmten Bewegungen“. Und wenn wir hinsichtlich der formalen Schönheit von Kurven den Maßstab Hogarths anlegen, der die Sinuslinie für die Schönheitslinie erklärte, so dürften die Bahnkurven unseres Mobils als aesthetisch wirksam an erster Stelle rangieren und ihrer Stetigkeit und regulären Gliederhalber vor den Ellipsenbahnen ebenso viel Vorzug genießen, als diese dem Kreise gegenüber, den die Alten wohl für die vollkommenste Linie erklärten, der aber trotz seiner unendlich vielen Symmetrieachsen arm ist gegen diese, seiner unveränderlichen Krümmung halber. Die Anzahl der gesetzmäßig wiederholten Linienzüge und Schleifen und damit ein vermehrter oder verminderter Grad von Schönheit hängt ab von der Grösse des Winkes Φ .

Es kann nun aber nicht unsere Absicht sein, auf die Unzahl von Specialfällen einzugehen und für verschiedene Werte der Konstanten A, B, C etc. noch weitere und dabei doch nebensächliche Rechnungen und Bestimmungen auszuführen.

Es mag aber noch kurz darauf hingewiesen werden, dass (Fig. 9) für $\Phi = \frac{\pi}{2}$ (Kurven a und α) oder für $\Phi = \pi$ (Kurven b und β)

unsere Bahnkurven geschlossene Formen annehmen, wie sie bekannt sind als Sinusamplituden- und Cosinusamplitudenkurven. Von solchen weiss man aber, dass sie (wie die Cartesischen Ovale und event. die Cassinischen Kurven*) zu den bicirkularen Kurven gehören, und dass sie im engsten Zusammenhange mit den sphärischen Kegelschnitten (event. ihren $\pm 45^\circ$ Trajektorien) stehen, die — stereographisch projiziert — im allgemeinen bicirkuläre Kurven**), im besonderen Cartesische Ovale mit drei reellen (event. einem reellen und zwei imaginären) Brennpunkten oder

*) Auch bei dem Newtonschen Kraftgesetz stehen diese in eigentümlicher Beziehung zu den Planetenbahnen. Cf. Oekinghaus in der Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie. 1888.

**) J. Finsterbusch, Beitrag zur synth. Geometrie ebener Kreissysteme und damit im Zusammenhange stehender höherer Kurven. III, die Cartesischen Ovale und ihre konfokalen Büschel. §§ 76—78. (Werdauer Realschulprogramm. 1892. No. 578.)

Sinusamplituden- (event. Cosinusamplituden-) Kurven*) ergeben, je nachdem zum Projektionscentrum ein Brennpunkt oder Mittelpunkt des sphärischen Kegelschnitts genommen wird. So würden also im Specialfall unsere Bahnen die Form von Projectionen sphärischer Kegelschnittkurven annehmen können, in Cartesische Ovale und in Cassinische Kurven, ja auch in Kurven 2. Grades, in Ellipsen (Newtonsches Kraftgesetz) und in Kreise deformieren können.

Das letztere geschieht für den Grenzfall $k=0$ ($K=\frac{\pi}{2}$; im Fall 2 und 7, wenn $\gamma=\beta$; im Falle 3, wenn $\alpha=\beta$), dann gehen bekanntlich $\sin am u$ und $\cos am u$ in $\sin \frac{\varphi}{A}$ und $\cos \frac{\varphi}{A}$ selbst über; in unseren Formeln wird dann $r=\text{const}$, und der Punkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit im Kreise, auf welchen das Ringgebiet zusammengeschrunpft ist.

*) G. Holzmüller, Isogonale Verwandtschaften und conforme Abbildungen. 1882. §§ 101–103.

Bemerkte Druckfehler.

Auf Seite 10, 5. Zeile von oben muss es heissen φ anstatt ν .

"	"	11, 2.	"	"	unten	"	"	"	$C > 0$ anstatt $C < 0$.
"	"	16, 5.	"	"	"	"	"	"	$\sin^2 \vartheta$ " $\sin \vartheta^2$.
"	"	16, 8.	"	"	"	"	"	"	$dt =$ " $dt -$.
"	"	19, 9.	"	"	oben	"	"	"	$C > 0$ " $C < 0$.
"	"	38, 6.	"	"	unten	"	"	"	$\text{tg}^2 am(\epsilon, k')$ " $\text{tg}^2 am(k, k')$
"	"	40, 5.	"	"	"	"	"	"	$E < \frac{\pi}{2}$ " $E < \frac{z}{2}$.
"	"	25, 7.	"	"	"	"	"	"	$[\beta^2(\gamma + \alpha) - \alpha^2(\gamma + \beta)]$.

Sinusampli
nachdem zu
des sphäris
Specialfall
Kegelsch
in Cassinise
(Newtonsch

Das 1
Fall 2 und
bekanntlich
in unseren
sich mit k
Ringgebiet

*) G.
bildungen.

Auf Seite

" "
" "
" "
" "
" "
" "
" "

© The Tiffen Company, 2007

TIFFEN® Gray Scale

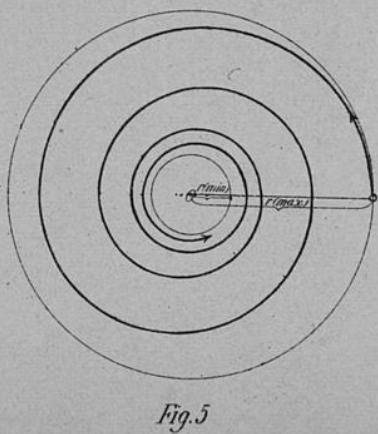
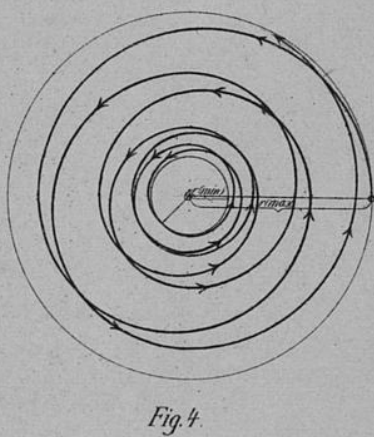
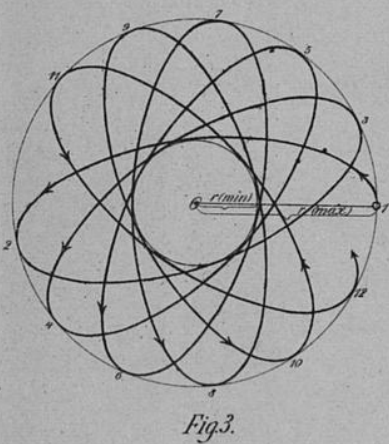
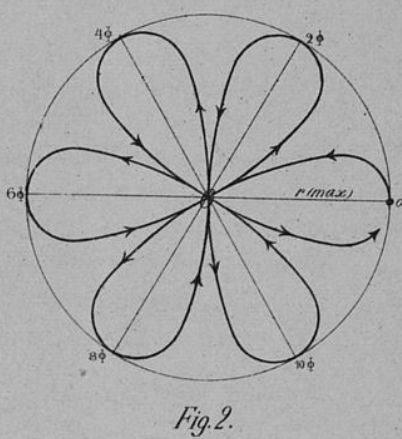
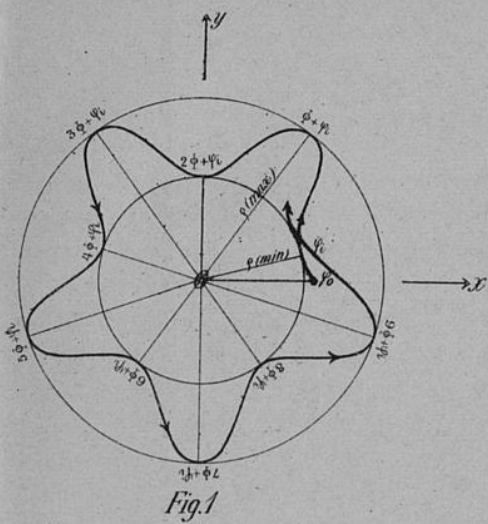
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 K 12 13 14 15 B 17 18 19

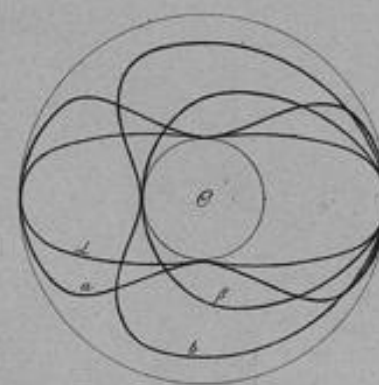
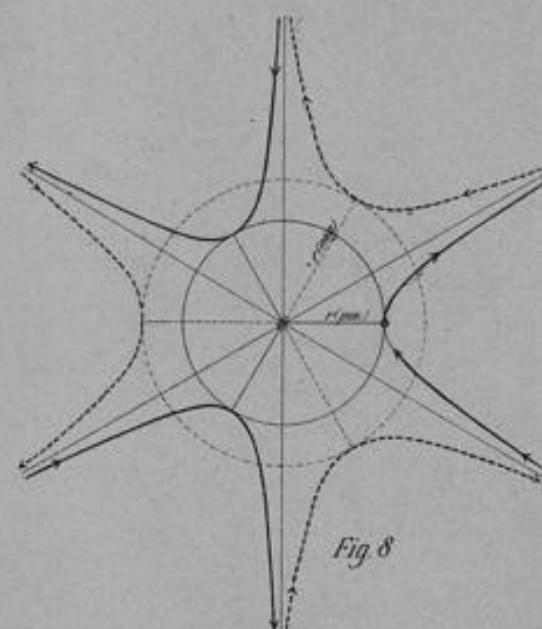
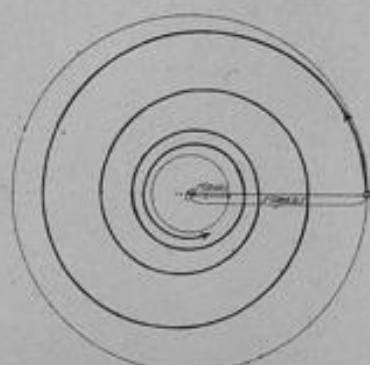
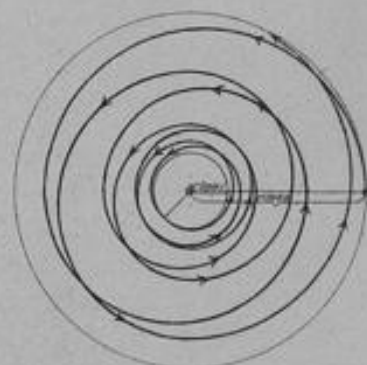
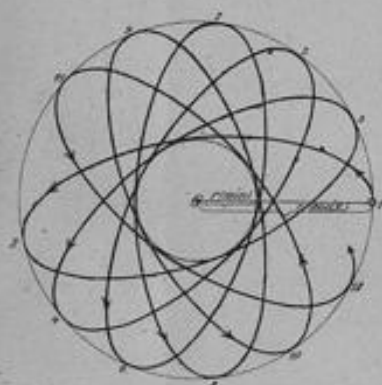
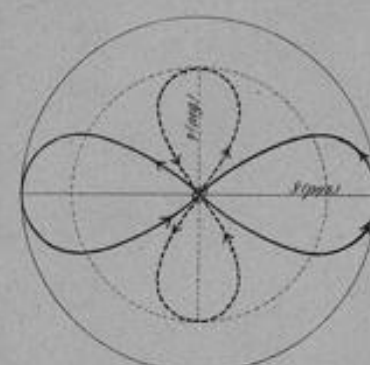
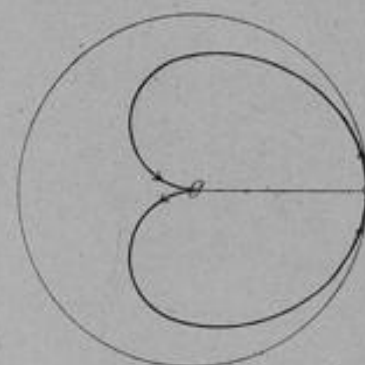
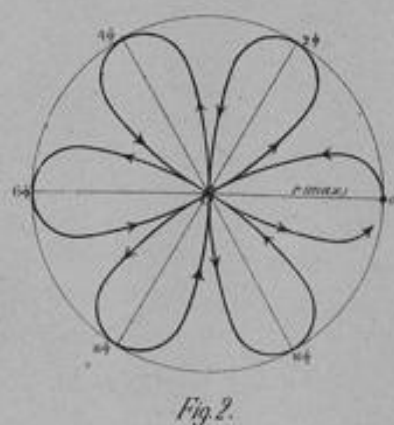
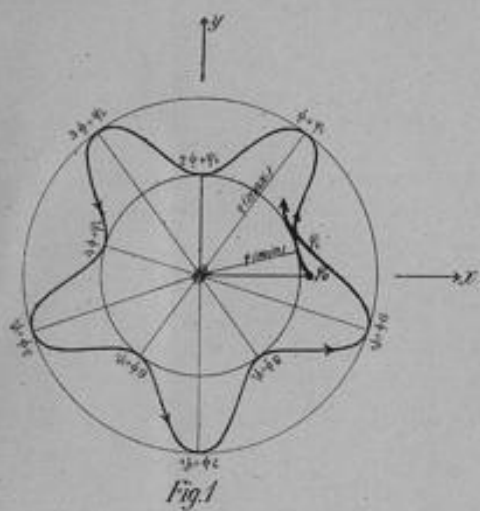
en*) ergeben, je
der Mittelpunkt
würden also im
n sphärischer
ische Ovale und
les, in Ellipsen
n können.

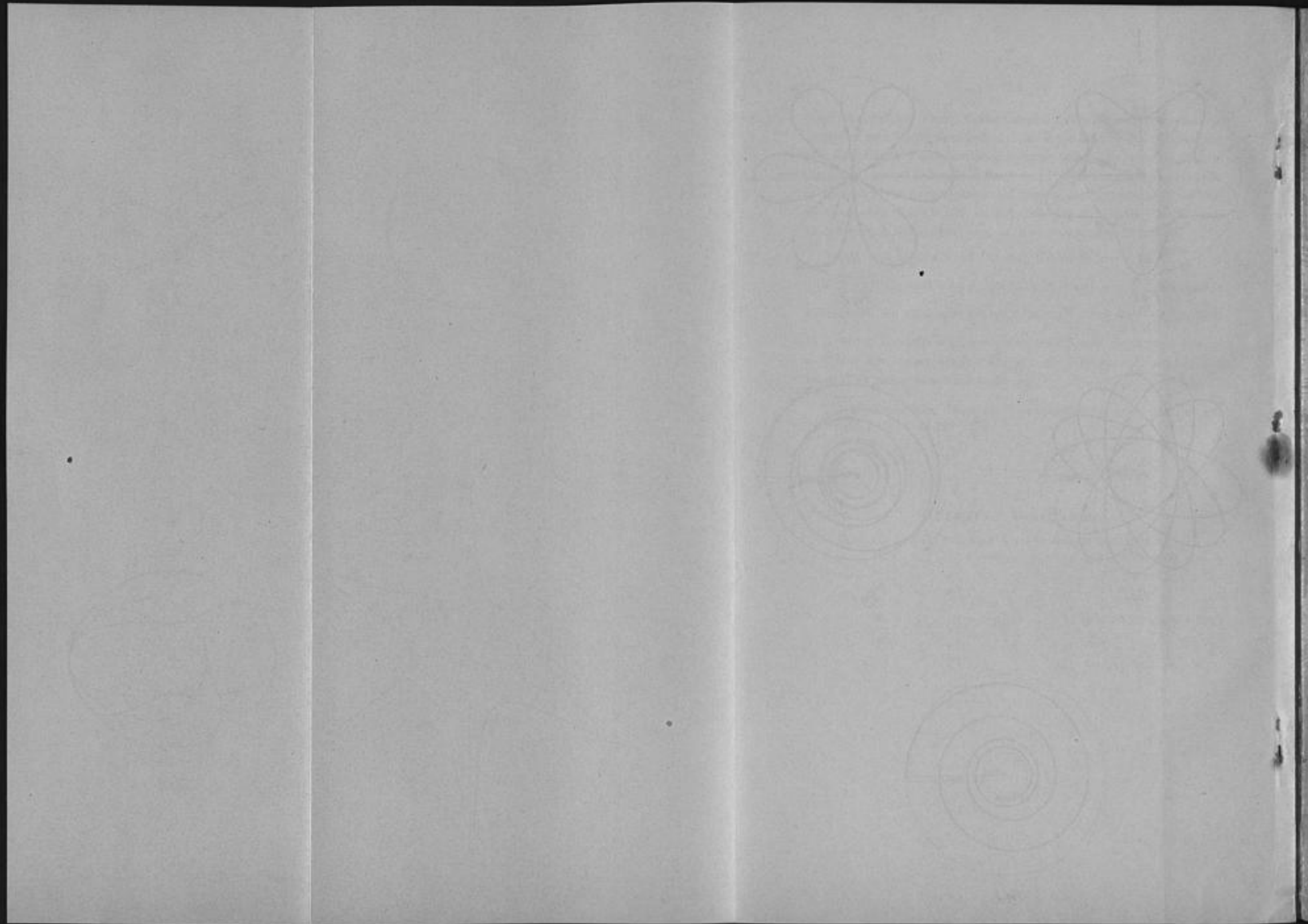
$0 (K = \frac{\pi}{2};$ im
 $\beta)$, dann gehen
s $\frac{\varphi}{A}$ selbst über;
r Punkt bewegt
auf welchen das

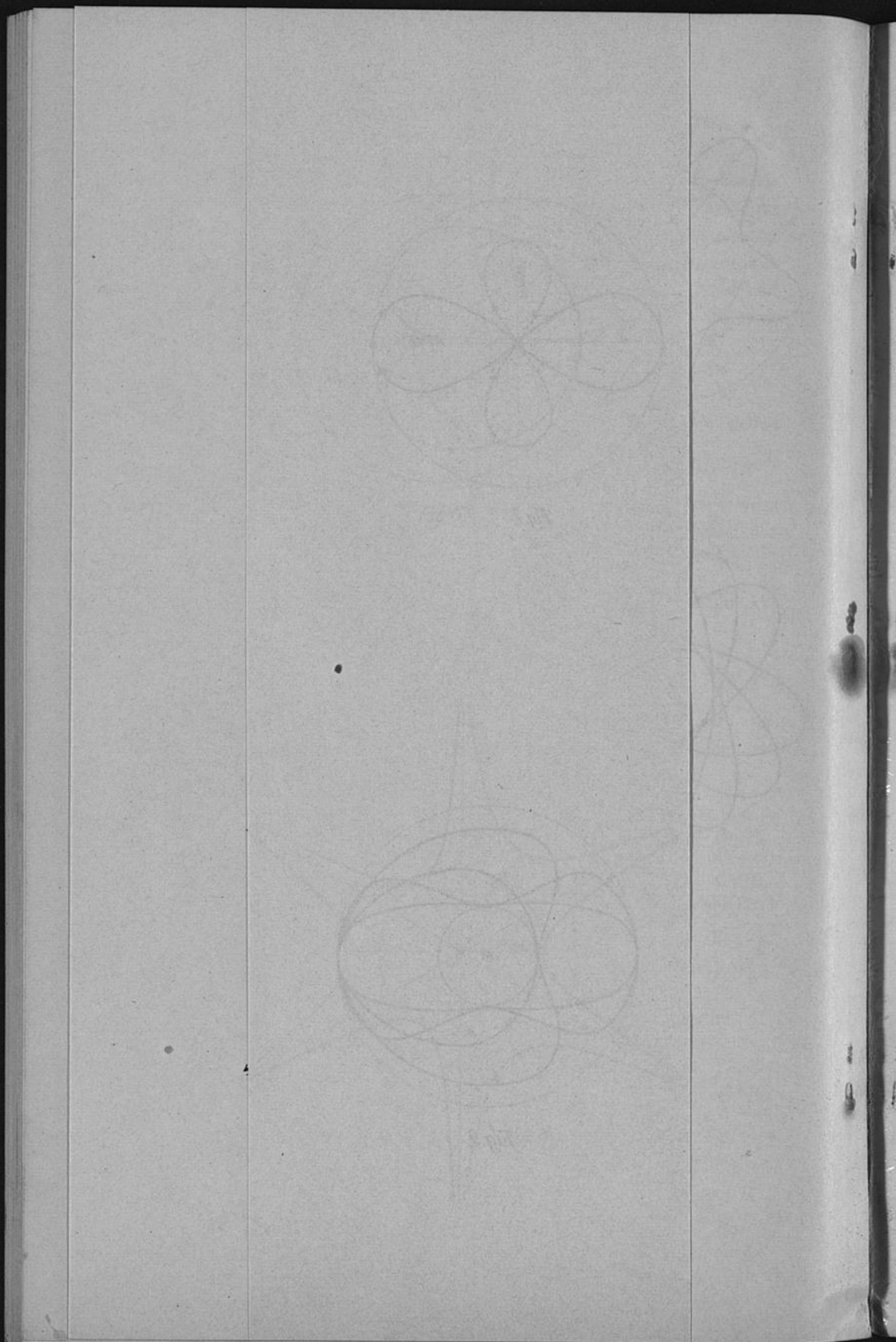
nd conforme Ab-

statt ν .
0 anstatt $C < 0$,
 φ " $\sin \vartheta^2$.
" $dt -$.
0 " $C < 0$.
(k') " $tg^2 am(k, k')$
" $E < \frac{z}{2}$.
 $\alpha) - \alpha^2 (\gamma + \beta)]$.









—♦— Druck von Julius Boech, Werdau —♦—